

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья  
УДК 531.011

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-411-423  
EDN: BPZEKD

### Вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением

В. М. Савчин<sup>✉</sup>, Ф. Т. Чинь

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: ✉savchin-vm@rudn.ru, tr.phuoctoan@gmail.com

Поступила в редакцию 9.01.2022, принята к публикации 3.06.2022,

опубликована 1.08.2022

**Аннотация.** Основная цель настоящего исследования триединая и состоит, во-первых, в построении косвенного вариационного принципа Гамильтона для задачи о движении маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол наклона с вертикалью. Во-вторых, в построении на его основе соответствующей разностной схемы. В-третьих, в ее исследовании методами численного анализа. **Методы.** Задача о движении указанного маятника рассматривается как частный случай исходной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Для решения вопроса о ее вариационной формулировке использован критерий потенциальности операторов – симметричность производной Гато нелинейного оператора, определяемого поставленной задачей. Этот же критерий использован для построения вариационного множителя и построения соответствующего косвенного вариационного принципа Гамильтона. На его основе построен и исследован дискретный аналог исходной краевой задачи и задачи о движении маятника. **Результаты.** Доказано, что оператор исходной краевой задачи не является потенциальным относительно классической билинейной формы. Найден соответствующий вариационный множитель и построен косвенный вариационный принцип Гамильтона. На его основе получен дискретный аналог исходной краевой задачи и построено ее решение. Отсюда как частные случаи получаются соответствующие утверждения для указанной задачи о движении маятника. Проведен ряд численных экспериментов, характеризующих зависимость решений задачи о движении маятника от изменения параметров. **Заключение.** Представлен вариационный подход к построению двух различных разностных схем для задачи о движении маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Приведены результаты численного моделирования при различных параметрах задачи. Численные решения показывают, что при достаточно малой амплитуде колебаний и достаточно большой частоте колебаний точки подвеса маятник совершает периодическое движение.

**Ключевые слова:** перевернутый маятник, косвенная вариационная формулировка, уравнения Гамильтона, разностная схема.

**Благодарности.** Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН – 2030.

**Для цитирования:** Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 411–423. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-411-423. EDN: BPZEKD

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Variational approach to the construction of discrete mathematical model of the pendulum motion with vibrating suspension with friction

V. M. Savchin✉, P. T. Trinh

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

E-mail: ✉savchin-vm@rudn.ru, tr.phuoc@oan@gmail.com

Received 9.01.2022, accepted 3.06.2022, published 1.08.2022

**Abstract.** The main purpose of this work is, first, a construction of the indirect Hamilton's variational principle for the problem of motion of a pendulum with a vibration suspension with friction, oscillating along a straight line making a small angle with the vertical line. Second, the construction on its basis of the difference scheme. Third, to carry out its investigation by methods of numerical analysis. **Methods.** The problem of motion of the indicated pendulum is considering as a particular case of the given boundary problem for a nonlinear second order differential equations. For the solution of problem of its variational formulation there is used the criterion of potentiality of operators — the symmetry of the Gâteaux derivative of nonlinear operator of the given problem. This criterion is also used for the construction of variational multiplier and the corresponding Hamilton's variational principle. On its basis there is constructed and investigated a discrete analog of the given boundary problem and a problem of motion of the pendulum. **Results.** It is proved that the operator of the given boundary problem is not potential with respect to the classical bilinear form. There is found a variational multiplier and constructed the corresponding indirect Hamilton's variational principle. On its basis there is obtained a discrete analog of the given boundary problem and its solution is found. As particular cases one can deduce from that the corresponding results for the problem of motion of the pendulum. There are performed numerical experiments, establishing the dependence of solutions of the problem of motion of the pendulum on the change of parameters. **Conclusion.** There is worked out a variational approach to the construction of two difference schemes for the problem of a pendulum with a suspension with friction, oscillating along a straight line making a small angle with the vertical line. There are presented results of numerical simulation under different parameters of the problem. Numerical results show that under sufficiently small amplitude and sufficiently big frequency of the oscillations of the point of suspension the pendulum realizes a periodical motion.

**Keywords:** inverted pendulum, indirect variational formulation, Hamilton's equations, difference scheme.

**Acknowledgements.** This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program — 2030.

**For citation:** Savchin VM, Trinh PT. Variational approach to the construction of discrete mathematical model of the pendulum motion with vibrating suspension with friction. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):411–423. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-411-423

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Настоящая работа восходит к статьям [1–3] и имеет целью построение и исследование дискретной модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением на основе косвенного вариационного принципа Гамильтона. Математическая модель с непрерывным временем движения такого маятника после работ П. Л. Капицы, Н. Н. Боголюбова стала базовой в нелинейной механике. Выявлена её взаимосвязь с некоторыми задачами физики (см. обзор литературы в [4, 5]).

При этом исследованы далеко не все свойства базовой нелинейной модели. Дополнительные возможности открываются с применением конечно-разностных методов [6]. При переходе от динамической системы с непрерывным временем к разностной схеме важно, чтобы обе модели сохраняли качественные характеристики одного и того же явления.

Как отмечено в работе [7], для математического описания ряда физических явлений и процессов целесообразно использовать вариационные принципы.

Авторам настоящей статьи не известны работы, в которых бы был развит вариационный подход к построению двух различных разностных схем для задачи о движении маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью.

### 1. Построение косвенного вариационного принципа для одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$N(u) \equiv \ddot{u} + k(t)\dot{u} + \varphi(t)\sin u + \psi(t)\cos u = 0, \quad t \in (0, l), \quad (1)$$

$$D(N) = \{u \in U = C^2[0, l] : u|_{t=0} = a_0, u|_{t=l} = a_1\}. \quad (2)$$

Здесь  $u(t)$  — неизвестная функция;  $k \in C^2[0, l]$ ,  $\varphi, \psi \in C[0, l]$  — заданные функции;  $a_0, a_1$  — заданные числа;  $\dot{u} = \frac{du(t)}{dt}$ ,  $\ddot{u} = \frac{d^2u(t)}{dt^2}$ .

Уравнения, изученные в работах [1–3], являются частными случаями (1).

Обозначим  $V = C[0, l]$ . Зададим билинейную форму  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times U \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$\langle v, g \rangle = \int_0^l v(t)g(t) dt. \quad (3)$$

Будем говорить, что задача (1), (2) допускает прямую вариационную формулировку относительно (3), если существует дифференцируемый по Гато функционал  $F_N : D(N) \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что его дифференциал

$$\delta F_N[u, h] = \langle N(u), h \rangle, \quad \forall u \in D(N), \forall h \in D(N'_u).$$

Здесь  $D(N'_u)$  — область определения производной Гато  $N'_u$  оператора  $N$  в точке  $u \in D(N)$ . При этом говорят также, что оператор  $N$  является потенциальным на  $D(N)$  относительно билинейной формы (3).

Критерий потенциальности  $N$  на выпуклом множестве  $D(N)$  — это условие симметричности вида [8, с. 18], [9, с. 23]

$$\langle N'_u h, g \rangle = \langle N'_u g, h \rangle, \quad \forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u). \quad (4)$$

При его выполнении искомый функционал  $F_N$  — действие по Гамильтону — может быть найден по формуле

$$F_N[u] = \int_0^1 \left\langle N\left(\tilde{u} + \lambda(u - \tilde{u})\right), u - \tilde{u} \right\rangle d\lambda + \text{const}, \quad (5)$$

где  $\tilde{u}$  — произвольный фиксированный элемент из  $D(N)$ .

**Теорема 1.** При  $k(t) \neq 0$  задача (1), (2) не допускает прямой вариационной формулировки относительно билинейной формы (3).

**Доказательство.** Убедимся, что заданный оператор вида (1) не удовлетворяет условию (4). Имеем

$$\begin{aligned} N'_u h &= \ddot{h} + k(t) \dot{h} + \varphi(t) h \cos u - \psi(t) h \sin u, \\ \langle N'_u h, g \rangle &= \int_0^l [\ddot{h} + k(t) \dot{h} + \varphi(t) h \cos u - \psi(t) h \sin u] g dt, \\ \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N'_u). \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что

$$h|_{t=0} = g|_{t=0} = h|_{t=l} = g|_{t=l} = 0, \quad \forall h, g \in (N'_u), \quad (7)$$

из (6) получаем

$$\begin{aligned} \langle N'_u h, g \rangle &= \int_0^l [\ddot{g} - k(t) \dot{g} + \varphi(t) g \cos u - \psi(t) g \sin u] h dt \neq \\ &\neq \langle N'_u g, h \rangle = \int_0^l [\ddot{g} + k(t) \dot{g} + \varphi(t) g \cos u - \psi(t) g \sin u] h dt \end{aligned}$$

при  $k(t) \neq 0$ .

Теорема доказана.  $\square$

Обозначим  $\tilde{N}(u) = M(t)N(u)$ ,  $u \in D(N)$ , где  $M(t) \neq 0$  на  $[0, l]$  — искомый вариационный множитель, определяемый из условия, чтобы оператор  $\tilde{N}$  был потенциальным на  $D(\tilde{N}) = D(N)$  относительно билинейной формы (3).

**Теорема 2.** Для задачи (1), (2) существует вариационный множитель вида  $M(t) = e^{\int k(t) dt}$ .

**Доказательство.** Обозначим

$$Q(u, h, g) = \langle \tilde{N}'_u h, g \rangle - \langle \tilde{N}'_u g, h \rangle, \quad \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N'_u).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{N}'_u h &= M(t) N'_u h, \\ \langle \tilde{N}'_u h, g \rangle &= \int_0^l M(t) N'_u h \cdot g dt = \int_0^l M(t) [\ddot{h}g + k(t) \dot{h}g + \varphi(t) hg \cos u - \psi(t) hg \sin u] dt, \\ \langle \tilde{N}'_u g, h \rangle &= \int_0^l M(t) [\ddot{g}h + k(t) \dot{g}h + \varphi(t) hg \cos u - \psi(t) hg \sin u] dt. \end{aligned}$$

С учётом этого получаем

$$Q(u, h, g) = \int_0^l [M(t) \ddot{h}g + M(t) k(t) \dot{h}g - M(t) \ddot{g}h - M(t) k(t) \dot{g}h] dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая условия (7), отсюда находим

$$\begin{aligned} Q(u, h, g) &= \int_0^l \left\{ 2 \left[ \frac{dM}{dt} - Mk \right] \frac{dg}{dt} + \left[ \frac{d^2 M}{dt^2} - \frac{d(Mk)}{dt} \right] g \right\} h dt, \\ \forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u). \end{aligned} \quad (8)$$

Для выполнения условия

$$Q(u, h, g) = 0, \quad \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N'_u)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{dM}{dt} - Mk = 0, \quad \forall t \in [0, l], \quad (9)$$

$$\frac{d^2M}{dt^2} - \frac{d(Mk)}{dt} = 0, \quad \forall t \in [0, l]. \quad (10)$$

Условие (10) является следствием (9). Таким образом, вариационный множитель  $M(t)$  является решением уравнения (9) и имеет вид

$$M(t) = e^{\int k(t)dt}. \quad (11)$$

Теорема доказана. □

**Теорема 3.** Уравнение

$$\tilde{N}(u) \equiv e^{\int k(t)dt} N(u) = 0, \quad u \in D(N), \quad (12)$$

где  $N$  имеет вид (1), представимо в форме уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -e^{-\int k(t)dt} p, \\ \dot{p} &= e^{\int k(t)dt} (\varphi \sin u + \psi \cos u). \end{aligned} \quad (13)$$

**Доказательство.** Используя формулу (5), находим действие по Гамильтону для (12) в виде

$$F_{\tilde{N}}[u] = \int_0^l M \left( -\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \varphi \cos u + \psi \sin u + \varphi \right) dt. \quad (14)$$

Таким образом, лагранжиан уравнения (12) равен

$$\mathcal{L} = e^{\int k(t)dt} \left( -\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \varphi \cos u + \psi \sin u + \varphi \right). \quad (15)$$

Введя обобщённый импульс

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = -M\dot{u},$$

получаем, что лагранжиану (15) соответствует гамильтониан

$$H(t, p, u) = -\frac{p^2}{2M} + M\varphi \cos u - M\psi \sin u - M\varphi.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= -\frac{p}{M}, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= -M\varphi \sin u - M\psi \cos u \end{aligned}$$

и, следовательно, получаем уравнения Гамильтона (13).

Теорема доказана. □

Уравнения (13) могут быть получены из вариационного принципа Гамильтона с действием

$$J[p, u] = \int_0^l [p\dot{u} - H(t, p, u)] dt. \quad (16)$$

## 2. Построение и исследование дискретного аналога задачи (1), (2) на основе функционала (14)

Разобьем отрезок  $[0, l]$  на  $m$  равных частей узлами  $t_i = i\tau$  ( $i = \overline{0, m}$ ), где  $\tau = m^{-1}l$ . Введем операторы сужения

$$T_r u(t) = \bar{u}_r = (u(t_0), u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{m-1}), u(t_m))^T$$

(столбец высотой  $r = m + 1$ ). Такие столбцы образуют линейное пространство, которое будем обозначать  $\bar{U}_r$ . Для удобства напомним  $u_i = u(t_i)$ .

Обозначим  $\bar{N}_F$  – оператор дискретного аналога задачи (1), (2) на основе функционала (14).

Положим  $D(\bar{N}_F) = \{\bar{u}_r \in \bar{U}_r : u_0 = a_0, u_m = a_1\}$  и  $D(\bar{N}'_F) = \{\bar{h}_r \in \bar{U}_r : h_0 = h_m = 0\}$ .

Запишем (14) в виде

$$F_{\bar{N}}[u] = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \left( -\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \varphi \cos u + \psi \sin u + \varphi \right) dt.$$

Далее аппроксимируем интегралы

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \left( -\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \varphi \cos u + \psi \sin u + \varphi \right) dt &\approx \\ &\approx \frac{l}{m} M^i \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right)^2 - \varphi^i \cos u_i + \psi^i \sin u_i + \varphi^i \right], \end{aligned}$$

где  $M^i = M(t_i)$ ,  $\varphi^i = \varphi(t_i)$  и  $\psi^i = \psi(t_i)$ .

Функционал (14) заменяем разностным действием по Гамильтону

$$\bar{F}[\bar{u}_r] = \frac{l}{m} \sum_{i=0}^{m-1} M^i \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right)^2 - \varphi^i \cos u_i + \psi^i \sin u_i + \varphi^i \right].$$

Приравнявая нулю частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}[\bar{u}_r]}{\partial u_i} &= \frac{l}{m} \left( M^i \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau^2} - M^{i-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau^2} + M^i \varphi^i \sin u_i + M^i \psi^i \cos u_i \right), \\ & i = \overline{1, m-1}, \end{aligned}$$

получаем систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} \bar{N}_F^i(\bar{u}_r) &\equiv M^i \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau^2} - M^{i-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau^2} + \\ &+ M^i \varphi^i \sin u_i + M^i \psi^i \cos u_i = 0, \quad i = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда находим решение этой системы

$$u_{i+1} = u_i + \frac{M^{i-1}}{M^i} (u_i - u_{i-1}) - \tau^2 \varphi^i \sin u_i - \tau^2 \psi^i \cos u_i, \quad i = \overline{1, m-1},$$

$$u_0 = a_0, \quad u_m = a_1.$$

Перейдем к следующему частному случаю уравнения (1). Рассмотрим уравнение движения маятника, точка подвеса которого осциллирует по синусоидальному закону вдоль прямой, наклоненной к вертикальной оси  $OY$  под углом  $\alpha$  [10]

$$N_1(u) \equiv \ddot{u} + \sigma \dot{u} + \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \sin u - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \cos u = 0, \quad t \in (0, l), \quad (18)$$

$$u_0 = a_0, \quad u_m = a_1, \quad (19)$$

где  $u$  — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения равновесия,  $\sigma$  — коэффициент затухания,  $d$  — длина маятника,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\omega$  — частота колебаний точки подвеса,  $A$  — амплитуда колебаний точки подвеса.

В силу теорем 1, 2 при  $\sigma \neq 0$  оператор  $N_1$  (18) является непотенциальным относительно билинейной формы (3) и для задачи (18)–(19) существует вариационный множитель вида  $e^{\sigma t}$ . Обозначим

$$\tilde{N}_1(u) \equiv e^{\sigma t} N_1(u) = 0. \quad (20)$$

Согласно формуле (14), имеем действие по Гамильтону для (20):

$$F_{\tilde{N}_1}[u] = \int_0^l e^{\sigma t} \left( -\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \cos u - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \sin u + \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \right) dt, \quad (21)$$

а соответствующий конечно-разностный функционал имеет вид

$$\bar{F}_{\tilde{N}_1}[\bar{u}_r] = \frac{l}{m} \sum_{i=0}^{m-1} e^{\sigma t_i} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right)^2 - \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_i) \cos \alpha}{d} \cos u_i + \left( -\frac{A\omega^2 \sin(\omega t_i) \sin \alpha}{d} \right) \sin u_i + \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_i) \cos \alpha}{d} \right].$$

С помощью (17) запишем дискретный аналог задачи (18)–(19) на основе функционала (21)

$$\bar{N}_{1,F}^i(\bar{u}_r) \equiv e^{\sigma t_i} \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau^2} - e^{\sigma t_{i-1}} \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau^2} + e^{\sigma t_i} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_i) \cos \alpha}{d} \sin u_i + e^{\sigma t_i} \left( -\frac{A\omega^2 \sin(\omega t_i) \sin \alpha}{d} \right) \cos u_i = 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$

$$u(0) = a_0, \quad u(l) = a_1.$$

Решение этой системы находится по формулам

$$u_{i+1} = u_i + e^{-\sigma \tau} (u_i - u_{i-1}) - \tau^2 \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_i) \cos \alpha}{d} \sin u_i + \tau^2 \frac{A\omega^2 \sin(\omega t_i) \sin \alpha}{d} \cos u_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (22)$$

$$u_0 = a_0, \quad u_m = a_1.$$

Для проведения численных экспериментов положим:

- коэффициент затухания  $\sigma = -0.01 \text{ с}^{-1}$ ,
- ускорение свободного падения  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ,
- длина  $d = 1 \text{ м}$ ,
- малый параметр  $\gamma$  ( $\gamma = 0.3, 0.1$ , см. ниже),
- амплитуда колебаний точки подвеса  $A = \gamma A_0$ ,  $A_0 = 1 \text{ м}$ ,
- угол  $\alpha = \gamma^2 \alpha_0$ ,  $\alpha_0 = \pi/6$ ,
- частота колебаний точки подвеса  $\omega = \omega_0/\gamma$ ,  $\omega_0 = 5 \text{ Гц}$ ,
- $l = 5T$ ,  $T = 2\pi/\omega_0$  с количеством узлов  $m = 400$ , значения функции в конечных точках  $u_0 = u_m = 0$ .

На рис. 1 изображены решения (22) при различных указанных значениях  $\gamma$ .

Следует отметить, что, поскольку (1), (2) – краевая задача, то для построения приведенных в работе графиков дополнительно использован известный метод стрельбы. Он позволяет учесть

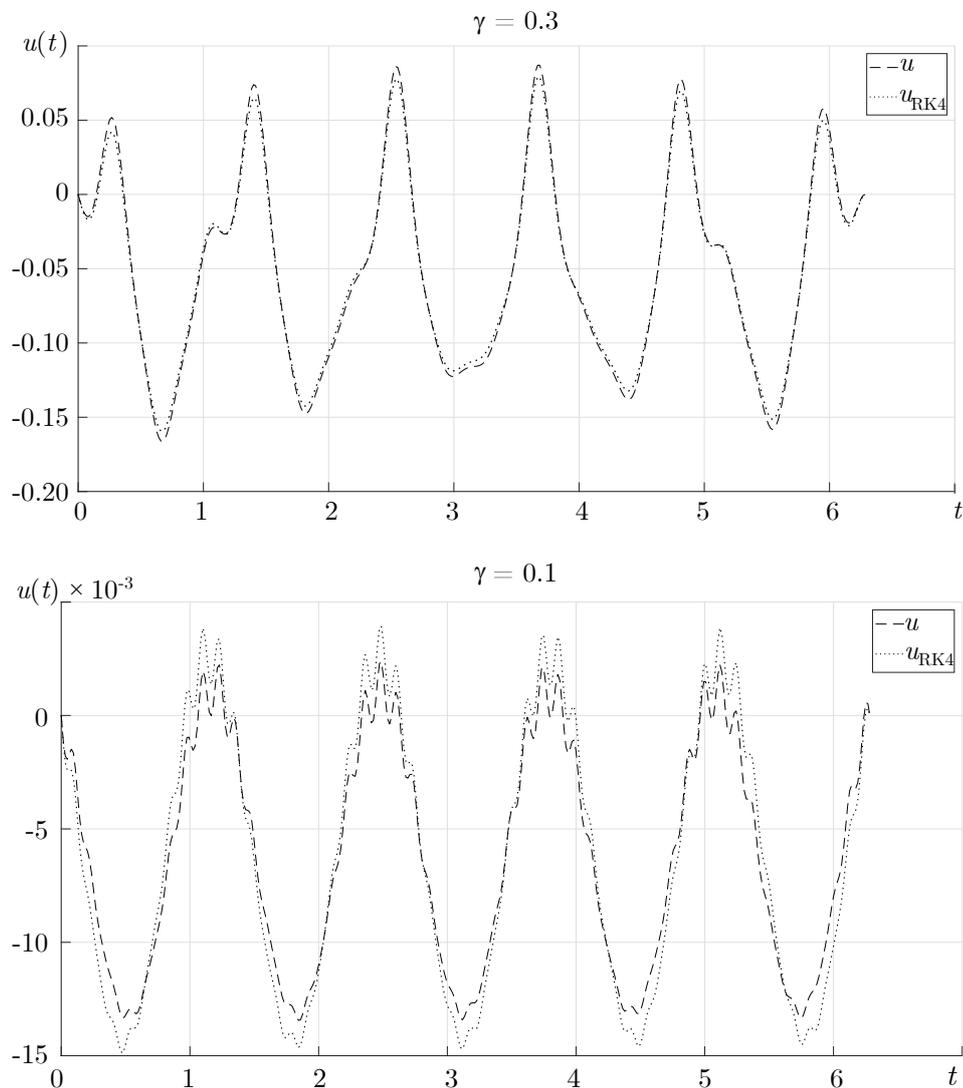


Рис. 1.  $u$  – решение (22),  $u_{\text{RK4}}$  – решение по методу Рунге–Кутты

Fig. 1.  $u$  – solution (22),  $u_{\text{RK4}}$  – solution by the Runge–Kutta method

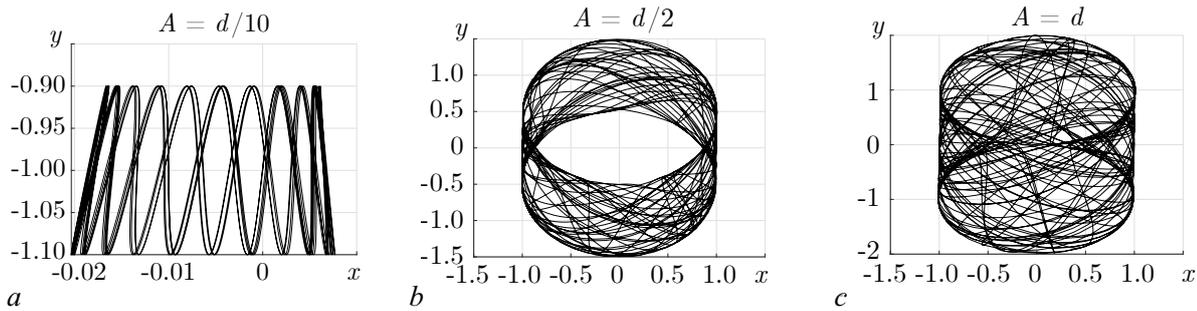


Рис. 2. Портрет системы на плоскости  $OXY$  для маятника при большой амплитуде вынуждающих колебаний. Параметры маятника приведены в тексте

Fig. 2. Portrait of the system on the plane  $OXY$  for a pendulum with large amplitude of forcing oscillations. The parameters of the pendulum are given in the text

значение решения на правом конце отрезка. В этой связи выбран метод Рунге–Кутты из-за его простоты и эффективности для проверки правильности найденного решения (22).

Легко видеть, что когда  $A_0\omega_0 > \sqrt{2gd}$  и  $\gamma$  достаточно мало ( $\gamma = 0.1$ ), графики решения (22) имеют  $T$ -периодический вид. Это свойство в случае непрерывного времени отмечено в статьях [10, 11].

Если увеличить значение амплитуды колебаний точки подвеса маятника  $A = d/2$ , то придём к решению, изображенному на рис. 2, *b* (при этом параметры маятника:  $\gamma = 0.1$  и  $m = 4000$ ). При дальнейшем увеличении амплитуды  $A = d$  траектория движения маятника заполняет все пустое пространство внутри. Это хорошо видно на рис. 2, *c*. При увеличении амплитуды картины не меняются.

### 3. Построение и исследование разностной схемы уравнений (13) на основе функционала (16)

Аналогично разделу 2, запишем (16) в виде суммы

$$J[p, u] = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [p\dot{u} - H(t, p, u)] dt.$$

Аппроксимируя, получаем

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [p\dot{u} - H(t, p, u)] dt \approx \frac{l}{m} \left[ p_i \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right) - H^i \right],$$

где  $p_i = p(t_i)$  и  $H^i = H(t_i, p_i, u_i)$ .

Таким образом, имеем разностное действие по Гамильтону

$$\bar{J}[\bar{p}_r, \bar{u}_r] = \frac{l}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left[ p_i \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right) - H^i \right].$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial \bar{J}[\bar{p}_r, \bar{u}_r]}{\partial p_i} = \frac{l}{m} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{\partial H^i}{\partial p_i} \right), \quad i = \overline{0, m-1},$$

$$\frac{\partial \bar{J}[\bar{p}_r, \bar{u}_r]}{\partial u_i} = \frac{l}{m} \left( -\frac{p_i - p_{i-1}}{\tau} - \frac{\partial H^i}{\partial u_i} \right), \quad i = \overline{1, m}.$$

Приравнявая их нулю, получаем систему разностных уравнений

$$\begin{aligned}\overline{N}_J^{1,i} &\equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{\partial H^i}{\partial p_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{p_i}{M^i} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ \overline{N}_J^{2,i} &\equiv -\frac{p_{i+1} - p_i}{\tau} - \frac{\partial H^{i+1}}{\partial u_{i+1}} = \\ &= -\frac{p_{i+1} - p_i}{\tau} - M^{i+1} \varphi^{i+1} \sin u_{i+1} - M^{i+1} \psi^{i+1} \cos u_{i+1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}.\end{aligned}$$

Отсюда находим решение этой системы по формулам

$$\begin{aligned}u_{i+1} &= u_i + \tau \frac{p_i}{M^i}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ p_{i+1} &= p_i - \tau M^{i+1} \varphi^{i+1} \sin u_{i+1} - \tau M^{i+1} \psi^{i+1} \cos u_{i+1}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ u_0 &= a_0, \quad u_m = a_1.\end{aligned}$$

Перейдём к задаче (18)–(19). В силу теоремы 3 уравнение (20) представимо в форме уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -e^{-\sigma t} p, \\ \dot{p} &= e^{\sigma t} \left( \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \sin u - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \cos u \right).\end{aligned}$$

Действие по Гамильтону имеет вид

$$J_{\tilde{N}_1} [t, p, u] = \int_0^l [p\dot{u} - H_1(t, p, u)] dt,$$

где

$$\begin{aligned}H_1(t, p, u) &= -\frac{p^2}{2e^{\sigma t}} + e^{\sigma t} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \cos u + e^{\sigma t} \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \sin u - \\ &\quad - e^{\sigma t} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d}.\end{aligned}$$

Соответствующий разностный функционал равен

$$\overline{J}_{\tilde{N}_1} [\overline{p}_r, \overline{u}_r] = \frac{l}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left[ p_i \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right) - H_1^i \right],$$

где  $H_1^i = H_1(t_i, p_i, u_i)$ . На его основе получаем следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned}\overline{N}_{1,J}^{1,i} &\equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{p_i}{e^{\sigma t_i}} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ \overline{N}_{1,J}^{2,i} &\equiv -\frac{p_{i+1} - p_i}{\tau} - e^{\sigma t_{i+1}} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \cos \alpha}{d} \sin u_{i+1} + \\ &\quad + e^{\sigma t_{i+1}} \frac{A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \sin \alpha}{d} \cos u_{i+1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}u_{i+1} &= u_i + \tau \frac{p_i}{e^{\sigma t_i}}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ p_{i+1} &= p_i - \tau e^{\sigma t_{i+1}} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \cos \alpha}{d} \sin u_{i+1} - \\ &\quad - \tau e^{\sigma t_{i+1}} \frac{A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \sin \alpha}{d} \cos u_{i+1}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ u_0 &= a_0, \quad u_m = a_1.\end{aligned} \tag{23}$$

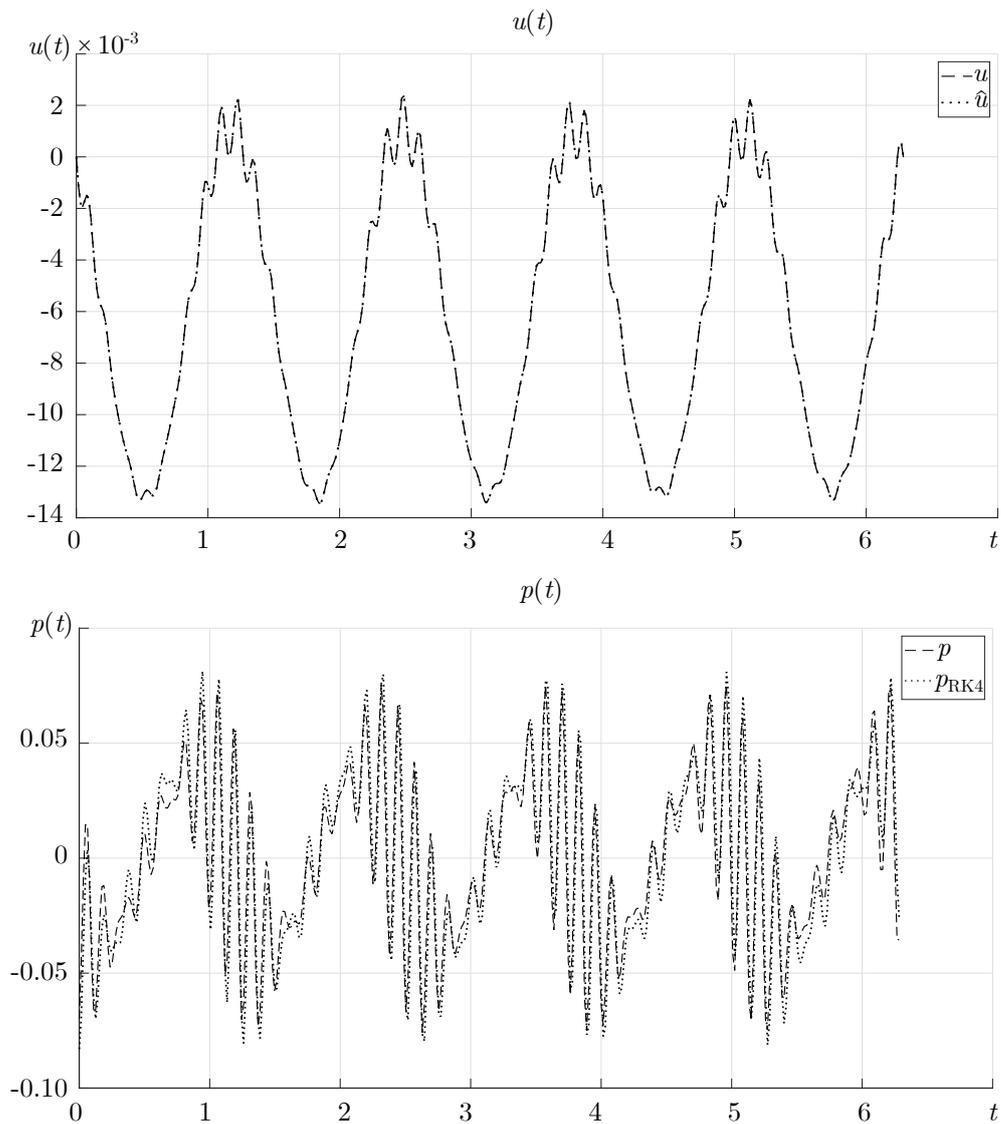


Рис. 3.  $\hat{u}$  – решение (22),  $(u, p)$  – решение (23),  $p_{RK4}$  – решение по методу Рунге–Кутты  
 Fig. 3.  $\hat{u}$  – solution (22),  $(u, p)$  – solution (23),  $p_{RK4}$  – solution by the Runge–Kutta method

Для проведения численных экспериментов положим:

- малый параметр  $\gamma = 0.1$ ,
- амплитуда колебаний точки подвеса  $A = \gamma A_0$ ,  $A_0 = 1$  м,
- остальные параметры  $\sigma$ ,  $g$ ,  $d$ ,  $\alpha_0$ ,  $\omega_0$ ,  $l$ ,  $T$ ,  $m$ ,  $u_0$  и  $u_m$  не меняются, как в разделе 2.

### Заключение

Представлен вариационный подход к построению двух разностных схем для задачи о движении маятника, точка подвеса которого осциллирует вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Приведены результаты численного моделирования при различных параметрах задачи. Численные решения показывают, что при достаточно малой амплитуде колебаний и достаточно большой частоте колебаний точки подвеса маятник совершает периодическое движение.

## Список литературы

1. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1951. Т. 21, № 5. С. 588–597.
2. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44, № 5. С. 7–20. DOI: 10.3367/UFNr.0044.195105b.0007.
3. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сборник трудов Института строительной механики (АН УССР). 1950. Т. 14. С. 9–34.
4. Богатов Е. М., Мухин Р. Р. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н. Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П. Л. Капица и другие // Известия вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 5. С. 69–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87.
5. Butikov E. I. The rigid pendulum — an antique but evergreen physical model // European Journal of Physics. 1999. Vol. 20, no. 6. P. 429–441. DOI: 10.1088/0143-0807/20/6/308.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 656 с.
7. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике // Доклады Академии наук СССР. 1977. Т. 235, № 6. С. 1285–1288.
8. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». Т. 40. М.: ВИНТИ, 1992. С. 3–176.
9. Савчин В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Издательство Университета дружбы народов, 1991. 237 с.
10. Демиденко Г. В., Дулепова А. В. Об устойчивости движения перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 39–50. DOI: 10.17377/sibjim.2018.21.404.
11. Демиденко Г. В., Дулепова А. В. О периодических решениях одного дифференциального уравнения второго порядка // Современная математика. Фундаментальные направления. 2021. Т. 67, № 3. С. 535–548. DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-535-548.

## References

1. Kapitsa PL. The dynamic stability of a pendulum for an oscillating point of suspension. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1951;21(5):588–597 (in Russian).
2. Kapitsa PL. A pendulum with a vibrating suspension. Physics-Uspokhi. 1951;44(5):7–20 (in Russian). DOI: 10.3367/UFNr.0044.195105b.0007.
3. Bogolyubov NN. Perturbation theory in nonlinear mechanics. Proceedings of the Institute of Structural Mechanics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. 1950;14:9–34 (in Russian).
4. Bogatov EM, Mukhin RR. The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2017;25(5):69–87 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87.
5. Butikov EI. The rigid pendulum — an antique but evergreen physical model. European Journal of Physics. 1999;20(6):429–441. DOI: 10.1088/0143-0807/20/6/308.
6. Samarskii AA. The Theory of Difference Schemes. Boca Raton: CRC Press; 2001. 786 p. DOI: 10.1201/9780203908518.
7. Goloviznin VM, Samarskii AA, Favorskii AP. A variational approach to constructing finite-difference mathematical models in hydrodynamics. Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. 1977;235(6):1285–1288 (in Russian).

8. Filippov VM, Savchin VM, Shorokhov SG. Variational principles for nonpotential operators. *Journal of Mathematical Sciences*. 1994;68(3):275–398. DOI: 10.1007/BF01252319.
9. Savchin VM. *Mathematical Methods of Mechanics of Infinite-Dimensional Non-Potential Systems*. Moscow: Peoples' Friendship University Publishing; 1991. 237 p. (in Russian).
10. Demidenko GV, Dulepova AV. On stability of the inverted pendulum motion with a vibrating suspension point. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2018;12(4):607–618. DOI: 10.1134/S1990478918040026.
11. Demidenko GV, Dulepova AV. On periodic solutions of one second-order differential equation. *Modern Mathematics. Fundamental Directions*. 2021;67(3):535–548 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-535-548.

*Савчин Владимир Михайлович* — родился в Украине (1953). Окончил с отличием факультет физико-математических и естественных наук Университета дружбы народов (1981). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1984, УДН) и доктора физико-математических наук (1992, МГУ) — обе по специальности «Теоретическая механика». С 1984 г. работает в Университете дружбы народов. В настоящее время — профессор Математического института имени С. М. Никольского. Научные интересы: вариационные принципы и симметрии, бесконечномерные непотенциальные системы, обратные задачи вариационного исчисления. Опубликовал свыше 50 работ по указанным направлениям.



Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6  
 Российский университет дружбы народов  
 E-mail: savchin-vm@rudn.ru  
 ORCID: 0000-0003-3850-6747  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 14052

*Чинь Фыок Тоан* — родился во Вьетнаме (1993). В 2017 году окончил с отличием математический факультет Воронежского государственного университета с присвоением квалификации бакалавр по направлению математики. В 2019 году окончил с отличием факультет физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов (РУДН) с присвоением квалификации магистр по направлению математики. С 2019 по настоящее время обучается в очной аспирантуре РУДН на факультете физико-математических и естественных наук. Научные интересы: обратные задачи вариационного исчисления, непотенциальные системы, разностные схемы.



Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6  
 Российский университет дружбы народов  
 E-mail: tr.phuocaoan@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-7707-322X