



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья  
УДК 537.86/530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003080  
EDN: UZXLNV

## Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой Часть 1. Фазовое приближение

А. Б. Адилова<sup>1,2</sup>✉, Н. М. Рыскин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>2</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ✉AdilovaAB@gmail.com, RyskinNM@gmail.com

Поступила в редакцию 13.05.2023, принята к публикации 8.07.2023,  
опубликована онлайн 20.12.2023, опубликована 31.01.2024

**Аннотация.** Цель работы — развитие теории взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Учет запаздывания сигнала, распространяющегося в канале связи, принципиально необходим, в частности, при анализе синхронизации на сверхвысоких частотах, когда расстояние между генераторами велико по сравнению с длиной волны. **Методы.** Теоретический анализ проводится в предположении, что время запаздывания мало по сравнению с характерным временем установления колебаний. Используется фазовое приближение, когда расстройка собственных частот и параметр связи считаются малыми. **Результаты.** С учетом изменения амплитуд колебаний с точностью до членов первого порядка малости по параметру связи получено обобщенное уравнение Адлера для разности фаз колебаний генераторов, которое учитывает комбинированный характер связи (диссипативная и консервативная связь) и неизохронность. С его помощью найдены условия седлоузловых бифуркаций и проанализирована устойчивость различных неподвижных точек системы. Построены границы областей синфазной и противофазной синхронизации на плоскости параметров «частотная расстройка – коэффициент связи». **Заключение.** Показано, что в зависимости от управляющих параметров (параметр неизохронности, параметр возбуждения, набег фазы сигнала в канале связи) система демонстрирует поведение, типичное либо для диссипативной, либо для консервативной связи. Полученные формулы позволили проследить переход от одного типа связи к другому при изменении управляющих параметров.

**Ключевые слова:** связанные генераторы, автоколебательные системы с жестким возбуждением, синхронизация, запаздывание, фазовое приближение, обобщенное уравнение Адлера.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-00109.

**Для цитирования:** Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Часть 1. Фазовое приближение // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 42–56. DOI: 10.18500/0869-6632-003080. EDN: UZXLNV

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay

### Part 1. Phase approximation

A. B. Adilova<sup>1,2</sup>✉, N. M. Ryskin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

<sup>2</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

E-mail: ✉AdilovaAB@gmail.com, RyskinNM@gmail.com

Received 13.05.2023, accepted 8.07.2023, available online 20.12.2023, published 31.01.2024

**Abstract.** Aim of this work is to develop the theory of mutual synchronization of two oscillators with hard excitation associated with a delay. Taking into account the delay of a coupling signal is necessary, in particular, when analyzing synchronization at microwave frequencies, when the distance between the oscillators is large compared to the wavelength. *Methods.* Theoretical analysis is carried out under the assumption that the delay time is small compared to the characteristic time for the oscillations. The phase approximation is used when the frequency mismatch and the coupling parameter are considered small. *Results.* Taking into account the change in oscillation amplitudes up to first-order terms in the coupling parameter, a generalized Adler equation for the phase difference of the oscillators is obtained, which takes into account the combined type of the coupling (dissipative and conservative coupling) and non-isochronism. The conditions for saddle-node bifurcations are found and the stability of various fixed points of the system is analyzed. The boundaries of the domains of in-phase and anti-phase synchronization are plotted on the plane of the parameters “frequency mismatch – coupling parameter”. *Conclusion.* It is shown that, depending on the control parameters (non-isochronism parameter, excitation parameter, phase advance of the coupling signal), the system exhibits behavior typical of either dissipative or conservative coupling. The obtained formulas allow for trace the transition from one type of coupling to another when varying the control parameters.

**Keywords:** coupled generators, self-oscillating systems with hard excitation, synchronization, delay, phase approximation, generalized Adler equation.

**Acknowledgements.** The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 22-72-00109.

**For citation:** Adilova AB, Ryskin NM. Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay. Part 1. Phase approximation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(1):42–56. DOI: 10.18500/0869-6632-003080

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Изучение взаимной синхронизации в ансамблях связанных осцилляторов является фундаментальной проблемой радиофизики и имеет большое значение для многих приложений [1–5]. В частности, для современной сверхвысокочастотной электроники большой интерес представляет сложение мощностей нескольких связанных генераторов [6]. Наиболее широко исследовалась синхронизация в системах связанных магнетронов и виркаторов (см., например, [7–10]). В частности, экспериментально наблюдалась взаимная синхронизация в ансамблях из нескольких релятивистских магнетронов с различной топологией связи [11]. В последнее время также привлекла внимание задача о взаимной синхронизации мощных гиротронов [12,13], поскольку комплексы, состоящие из нескольких гиротронов, используются для нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза [14].

Поскольку на сверхвысоких частотах расстояние между связанными генераторами может существенно превышать длину волны, необходимо учитывать запаздывание сигнала, распространяющегося между ними. Не вызывает сомнений, что картина синхронизации в системах с запаздыванием имеет ряд специфических особенностей по сравнению с системами с малым числом степеней свободы. Как известно, в теории синхронизации обычно выделяют два типа свя-

зи: диссипативную (диффузионную) и консервативную (инерционную, реактивную) [2–5, 15, 16]. Эти случаи отличаются устройством языков синхронизации, причем при консервативной связи режим синхронизации становится бистабильным: возможна синхронизация как на синфазной, так и на противофазной моде. В работах [17–19], где исследовалась простая модель двух автоколебательных систем с предельным циклом, связанных с задержкой, было показано, что в зависимости от набега фазы сигнала в канале связи доминирует либо диссипативная, либо консервативная связь. Поскольку набег фазы определяется временем распространения сигнала между генераторами, при изменении расстояния между генераторами на величину порядка длины волны характер связи и, соответственно, устройство языков синхронизации может существенно изменяться.

Следует отметить, что в мощных гиротронах максимальный КПД достигается в режиме жесткого возбуждения [20]. Поэтому исследование особенностей синхронизации генераторов, работающих в режиме жесткого возбуждения, представляет значительный интерес. В частности, в [21] была развита теория синхронизации генератора с жестким возбуждением, на который воздействует внешний гармонический сигнал. Был обнаружен ряд важных отличий от хорошо известной картины синхронизации генератора с мягким самовозбуждением. Эти отличия, в основном, обусловлены бистабильным характером автоколебательной системы с жестким возбуждением [1, 3].

Данная работа посвящена исследованию взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Работа состоит из двух частей. В первой части задача решается в рамках фазового приближения, которое справедливо в случае двух слабо связанных систем, собственные частоты которых отличаются незначительно. При этом можно считать, что связь практически не изменяет амплитуды колебаний взаимодействующих подсистем, так что можно ограничиться исключительно анализом динамики разности фаз, что существенно упрощает рассмотрение. В то же время, с практической точки зрения эта ситуация представляет наибольший интерес.

Более строгий бифуркационный анализ синхронизации, не ограничивающийся фазовым приближением, будет представлен во второй части данной работы.

## 1. Основные уравнения и классификация неподвижных точек

В работах [17–19], где рассматривалась система двух генераторов с мягким самовозбуждением, связанных с задержкой, была сформулирована система квазилинейных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд колебаний, которая далее была обобщена на случай двух связанных гиротронов [12, 13]. Модель связанных генераторов с жестким возбуждением можно построить аналогичным образом. Необходимо лишь модифицировать функцию, задающую нелинейную характеристику генератора, чтобы она описывала эффекты жесткого возбуждения. Генераторы считаются идентичными за исключением небольшой расстройки собственных частот  $\omega_1 \neq \omega_2$ , причем  $|\omega_1 - \omega_2| \gg \omega_{1,2}$ . В итоге можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + \frac{i\Delta}{2}A_1 &= \left( \sigma + (1 + ib) |A_1|^2 - |A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2(t - \tau), \\ \frac{dA_2}{dt} - \frac{i\Delta}{2}A_2 &= \left( \sigma + (1 + ib) |A_2|^2 - |A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1(t - \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $A_{1,2}$  — медленно меняющиеся (по сравнению с  $\exp(i\omega_{1,2}t)$ ) комплексные амплитуды колебаний первого и второго генераторов,  $\sigma$  — параметр возбуждения,  $b$  — параметр неизохронности,  $\Delta$  — нормированная расстройка собственных частот,  $\tau$  — время задержки (подробнее см. [12, 13, 17–19]). Коэффициент связи  $\rho$  определяется таким образом, что величина  $\rho^2$  характеризует

долю мощности, поступающей с выхода одного генератора на вход другого, при этом, очевидно, что он принимает значения  $0 < \rho < 1$  [7–13, 17–19]. Параметр  $\psi$  представляет собой набег фазы сигнала, распространяющегося в канале связи. Все величины в (1) считаются безразмерными, причем в принятой нормировке режим жесткого возбуждения реализуется при  $-1/4 < \sigma < 0$  (ср. [3, 21]).

Будем считать, что время задержки мало по сравнению с характерным временем установления колебаний, то есть  $\tau \ll 1$ . В этом случае уравнения (1) превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= \left( \sigma + (1 + ib) |A_1|^2 - |A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= \left( \sigma + (1 + ib) |A_2|^2 - |A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая  $A_{1,2} = R_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$ , где  $R_{1,2}$  и  $\varphi_{1,2}$  – вещественные амплитуды и фазы колебаний, соответственно, получим из (2) систему уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= (\sigma + R_1^2 - R_1^4) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi), \\ \dot{R}_2 &= (\sigma + R_2^2 - R_2^4) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[ \frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  – разность фаз, точка сверху означает дифференцирование по времени  $t$ .

Для анализа режимов синхронизации прежде всего необходимо рассмотреть неподвижные точки системы (3). Отметим, что в системе связанных генераторов с жестким возбуждением ситуация усложняется по сравнению с рассмотренной в [17–19], так как число неподвижных точек увеличивается. Действительно, рассмотрим сначала изолированные генераторы ( $\rho = 0$ ). В этом случае из уравнений (3) получаем

$$\sigma + R_{1,2}^2 - R_{1,2}^4 = 0. \quad (4)$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$R_{1,2}^2 = R_{\pm}^2 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sigma}}{2}. \quad (5)$$

Решение  $R_+$  является устойчивым, а  $R_-$  – неустойчивым [3]. Помимо этого, при  $\sigma < 0$  устойчивым является также нулевое решение  $R_{1,2} = 0$ .

Теперь рассмотрим случай связанных генераторов, считая, что связь слабая, то есть  $\rho \ll 1$ , а также для простоты положим  $\Delta = 0$ . При этом для определения неподвижных точек будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} (\sigma + R_1^2 - R_1^4) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ (\sigma + R_2^2 - R_2^4) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi) &= 0, \\ b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[ \frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решения уравнений (6) можно подразделить на симметричные, для которых амплитуды колебаний первого и второго генераторов одинаковы, и несимметричные. Очевидно, что имеется два типа симметричных решений. Во-первых, это решения, для которых  $R_{1,2} = R_+ + O(\rho)$ .

Они соответствуют режимам синфазной и противофазной синхронизации; будем обозначать их как  $I$  и  $A$ , соответственно. Также существуют решения, для которых  $R_{1,2} = R_- + O(\rho)$ , их будем обозначать как  $I_-$  и  $A_-$ . При этом очевидно, что, поскольку  $R_-$  отвечает неустойчивому режиму колебаний изолированного генератора, то и решения  $I_-$ ,  $A_-$  будут неустойчивыми.

Далее обсудим несимметричные решения. Уравнения (6), очевидно, имеют решения, для которых одна из амплитуд близка к  $R_+$ , а другая — к  $R_-$ . Действительно, при слабой связи, помимо двух упомянутых выше предельных циклов, для которых  $R_{1,2} \approx R_+$  или  $R_{1,2} \approx R_-$ , в фазовом пространстве системы (3) появляются еще два предельных цикла, для которых  $R_1 \approx R_+$ , а  $R_2 \approx R_-$  или наоборот. Оба этих цикла, очевидно, неустойчивы. При увеличении параметра связи в результате седлоузловых бифуркаций на этих циклах рождаются пары точек седло — неустойчивый узел. Будем обозначать их как  $S_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Кроме того, имеются еще четыре несимметричных решения, для которых одна из амплитуд близка к нулю, а другая — к  $R_+$  или к  $R_-$ . Однако бифуркации этих точек не описываются фазовым приближением, поэтому мы отложим их рассмотрение до второй части данной работы.

Наконец, уравнения (6) имеют нулевое решение  $R_1 = R_2 = 0$ , которое, по крайней мере при слабой связи, является устойчивым.

Как известно, при слабой связи переход к синхронному режиму осуществляется в результате взаимного захвата частот [1–4]. Такой механизм соответствует седлоузловой бифуркации. Поскольку в случае связанных систем с жестким возбуждением число возможных неподвижных точек увеличивается, ситуация усложняется. Бифуркации симметричных и несимметричных неподвижных точек следует рассмотреть по отдельности.

## 2. Анализ синхронизации в фазовом приближении

**2.1. Седлоузловые бифуркации симметричных решений.** Как уже отмечалось выше, в случае слабой связи и малой расстройки бифуркации неподвижных точек системы (3) можно проанализировать в рамках фазового приближения. При введении слабой связи между генераторами,  $\rho \ll 1$ , устойчивые решения  $R_{1,2} = R_+$  превращаются в устойчивый предельный цикл. Если частотная расстройка мала, на этом цикле происходит седлоузловая бифуркация, в результате которой рождаются точки  $I$  и  $A$  (см. раздел 1). Поскольку связь считается слабой, амплитуды колебаний изменяются незначительно по сравнению с изолированными генераторами,  $R_{1,2} \approx R_+$ . При этом система (3) редуцируется к уравнению первого порядка для разности фаз  $\varphi$ , которое часто называют уравнением Адлера [3, 5, 22]. Однако, как показано в [17–19], в случае генераторов, связанных с задержкой, уравнение Адлера в своей традиционной форме не позволяет адекватно описать картину синхронизации, в частности, проследить переход от диссипативной связи к консервативной. Необходимо использовать более точное приближение, находя амплитуды колебаний с точностью до членов порядка  $\rho$ . Итак, будем искать решения в виде  $R_{1,2} = R_+ + r_{1,2}$ , где  $r_{1,2} \sim \rho$  — малые добавки. Подставляя эти соотношения в первые два уравнения системы (6) и ограничиваясь в них членами порядка  $\rho$ , получим

$$\begin{aligned} (\sigma + R_+^2 - R_+^4) r_1 + (2R_+ - 4R_+^3) R_+ r_1 + \rho R_+ \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ (\sigma + R_+^2 - R_+^4) r_2 + (2R_+ - 4R_+^3) R_+ r_2 + \rho R_+ \cos(\psi - \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда с учетом (4) найдем, что

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\rho}{2R_+ (1 - 2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi) = 0, \\ r_2 &= -\frac{\rho}{2R_+ (1 - 2R_+^2)} \cos(\psi - \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь можно приближенно найти отношения амплитуд колебаний, входящие в уравнение для фазы в системе (3). После ряда преобразований получим

$$\begin{aligned}\frac{R_1}{R_2} &\approx 1 - \frac{2\rho}{\sqrt{1+4\sigma}(1+\sqrt{1+4\sigma})} \sin \psi \sin \varphi, \\ \frac{R_2}{R_1} &\approx 1 + \frac{2\rho}{\sqrt{1+4\sigma}(1+\sqrt{1+4\sigma})} \sin \psi \sin \varphi.\end{aligned}\quad (9)$$

Эти соотношения следует подставить в третье уравнение системы (3). Также в это уравнение входит слагаемое  $b(R_2^2 - R_1^2)$ , которое разложим с точностью до членов порядка  $\rho^2$ :

$$\begin{aligned}b(R_2^2 - R_1^2) &\approx \frac{b\rho}{1-2R_+^2} (\cos(\psi + \varphi) - \cos(\psi - \varphi)) + \\ &+ \frac{b\rho^2}{4R_+^2(1-2R_+^2)} (\cos^2(\psi - \varphi) - \cos^2(\psi + \varphi)).\end{aligned}\quad (10)$$

В итоге, подставляя (9) и (10) в третье уравнение системы (3), получим обобщенное уравнение Адлера:

$$\dot{\varphi} + \Delta = -2\rho \sin \varphi \left( \cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left( \sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right), \quad (11)$$

где введено обозначение

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{1+4\sigma} (1 + \sqrt{1+4\sigma}). \quad (12)$$

Член порядка  $\rho$ , пропорциональный  $\sin \varphi$ , в правой части уравнения (11) отвечает за диссипативную связь, член порядка  $\rho^2$ , пропорциональный  $\sin 2\varphi$  — за консервативную [5, 16].

На рис. 1 приведена зависимость параметра  $\lambda$  от параметра возбуждения  $\sigma$ , построенная согласно (12). При  $\sigma \rightarrow -0.25$  параметр  $\lambda$  обращается в нуль, а с ростом  $\sigma$  монотонно возрастает и при  $\sigma = 0$  становится равным единице.

В режиме синхронизации, когда  $\varphi = \text{const}$ , уравнение (11) перепишется в виде

$$\Delta = -2\rho \sin \varphi \left( \cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left( \sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right). \quad (13)$$

Нетрудно показать, что граница устойчивости (то есть условие седлоузловой бифуркации) определяется из следующего соотношения, которое представляет собой условие слияния двух корней уравнения (13):

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta}{d\varphi} &= -2\rho \cos \varphi \left( \cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \\ &- \frac{2\rho^2}{\lambda} \cos 2\varphi \left( \sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right) = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Отсюда находим

$$\rho = -\frac{4\lambda \cos \varphi (\cos \psi \sqrt{1+4\sigma} - b \sin \psi)}{\cos 2\varphi (4 \sin^2 \psi \sqrt{1+4\sigma} - b \sin 2\psi)}. \quad (15)$$

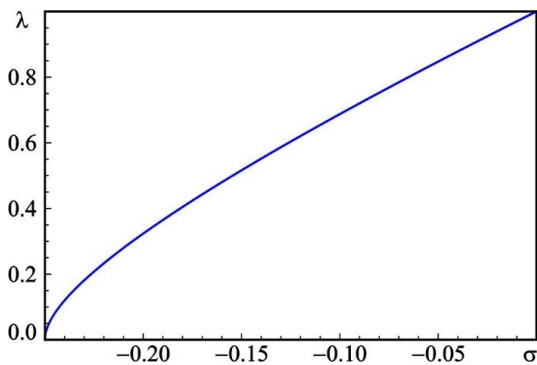


Рис. 1. Зависимость параметра  $\lambda$  от параметра возбуждения  $\sigma$

Fig. 1. Dependence of the parameter  $\lambda$  on the excitation parameter  $\sigma$

Соотношения (13) и (15) задают в параметрическом виде границы языка синхронизации на плоскости  $\Delta, \rho$ . Заметим, что при

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \quad (16)$$

связь является чисто консервативной. При  $\sin \psi = 0$ , а также при

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{2\sqrt{1+4\sigma}} \quad (17)$$

связь является чисто диссипативной. В случае изохронных осцилляторов ( $b = 0$ ) (16) и (17) превращаются в  $\cos \psi = 0$  и  $\sin \psi = 0$ , соответственно.

На рис. 2 построены соответствующие зависимости  $\psi = \psi(b)$ . Заметим, что в изохронном случае, связь является чисто диссипативной, когда  $\psi = \pi n$ , а чисто консервативной — когда  $\psi = \pi n + \pi/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (ср. [17]). С увеличением  $b$  значение набега фазы, при котором доминирует диссипативная связь, увеличивается, в то время как значение  $\psi$ , при котором связь консервативная, уменьшается. В точке, в которой графики функций на рис. 2 пересекаются, то есть при  $b = \sqrt{2(1+4\sigma)}$ , оба слагаемых в правой части (13) обращаются в нуль, то есть ситуация становится вырожденной, и уравнение (13) уже не применимо. Для корректного описания процесса синхронизации необходимо искать решения для  $r_{1,2}$  с точностью до членов порядка  $\rho^2$ , и в обобщенном уравнении Адлера появятся слагаемые порядка  $\rho^3$ . Отметим, что вырождение происходит при  $\psi = \arctan(1/\sqrt{2}) \approx \pi n + 0.2\pi$ .

На рис. 3 на плоскости параметров  $\Delta, \rho$  построены области синфазной ( $I$ ) и противофазной ( $A$ ) синхронизации для различных значений набега фазы в канале связи  $\psi$  при  $b = 0.2$ . Для определенности выберем  $\sigma = -0.16$ , тогда  $R_+ = \sqrt{0.8} \approx 0.894$ ,  $R_- = \sqrt{0.2} \approx 0.447$ . При  $\psi = 0$ , когда доминирует диссипативная связь (рис. 3, *a*), синхронизация возможна только на синфазной моде, а границы языка являются прямыми линиями. При  $\psi \neq 0$  начинает сказываться консервативная связь (рис. 3, *b, c*) и появляются области синхронизации на противофазной моде. Внутри этой области наблюдается мультистабильность синхронных режимов.

С увеличением  $\psi$  размер области противофазной синхронизации увеличивается, а при  $\psi \approx 0.4\pi$ , когда связь становится чисто консервативной, границы синхронизации на синфазной и противофазной модах вырождены (рис. 3, *d*). В этом случае фазовая бистабильность наблюдается

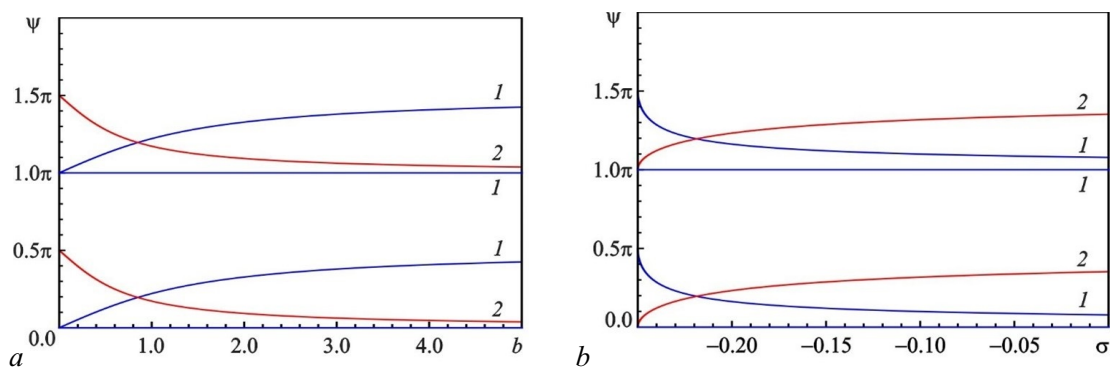


Рис. 2. Зависимости значений набега фазы  $\psi$ , при которых связь является чисто диссипативной (кривые 1) и чисто консервативной (кривые 2), от параметра неизохронности  $b$  при  $\sigma = -0.16$  (а) и от параметра  $\sigma$  при  $b = 0.5$  (б)

Fig. 2. Dependences of the phase shift  $\psi$ , at which the coupling is purely dissipative (curves 1) and purely conservative (curves 2), on the nonisochronism parameter  $b$  for  $\sigma = -0.16$  (a) and on the parameter  $\sigma$  for  $b = 0.5$  (b)

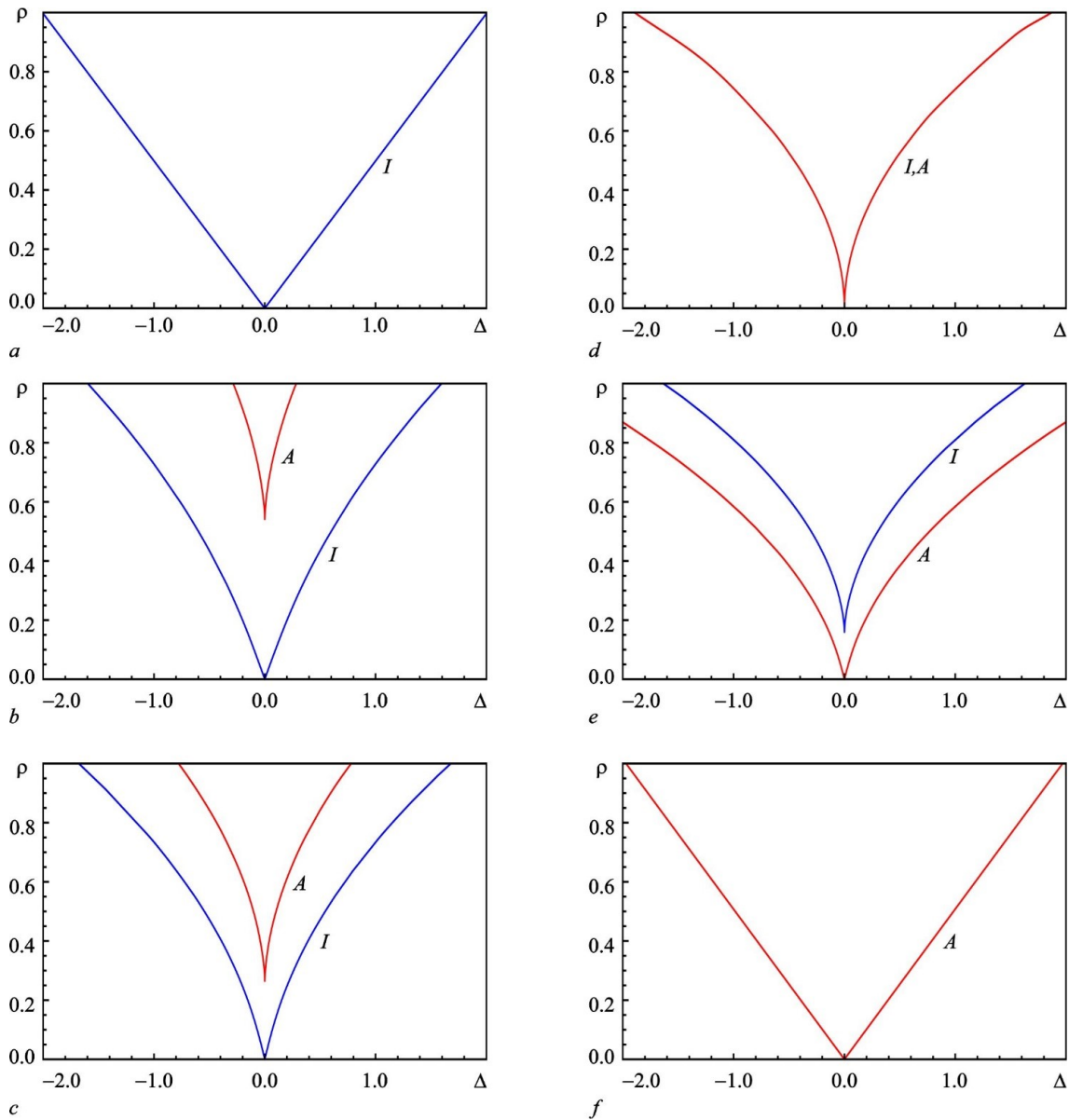


Рис. 3. Области синфазной и противофазной синхронизации на плоскости параметров  $\Delta, \rho$  при  $\sigma = -0.16, b = 0.2$  и для различных значения набега фазы:  $\psi = 0$  (a),  $0.25\pi$  (b),  $0.3\pi$  (c),  $0.4\pi$  (d),  $0.5\pi$  (e),  $1.0\pi$  (f)

Fig. 3. Domains of in-phase and anti-phase synchronization on the parameter plane  $\Delta, \rho$  for  $\sigma = -0.16, b = 0.2$  and for different values of the phase shift  $\psi = 0$  (a),  $0.25\pi$  (b),  $0.3\pi$  (c),  $0.4\pi$  (d),  $0.5\pi$  (e),  $1.0\pi$  (f)

во всей области синхронизации. С дальнейшим увеличением набега фазы границы синхронизации на синфазной и противофазной моде меняются местами. Из рис. 3, e видно, что теперь при слабой связи синхронизация возможна только на противофазной моде. При  $\psi = \pi$  снова доминирует диссипативная связь, однако генераторы синхронизируются в противофазе (см. рис. 3, f). Понятно, что принципиальной разницы между рис. 3, a и 3, f нет: во втором случае за время прохождения по каналу связи сигнал приобретает дополнительный фазовый сдвиг  $\psi = \pi$  и поступает в колебательную систему другого генератора точно в фазе с его собственными колебаниями. Аналогичное поведение имеет место и для связанных генераторов с мягким возбуждением [17, 18].



Теперь рассмотрим трансформацию языков синхронизации при изменении параметра возбуждения. На рис. 4 построены области синфазной и противофазной синхронизации при  $\psi = 0.3\pi$  и  $b = 0.5$ . Согласно формулам (16) и (17), чисто диссипативная связь реализуется при  $\sigma \approx -0.24$ , а чисто консервативная — при  $\sigma \approx -0.13$ . Действительно, на рис. 4, *a* наблюдается только синфазная синхронизация. При увеличении параметра  $\sigma$  начинает проявляться влияние консервативной связи. Это приводит к появлению областей противофазной синхронизации, которые увеличиваются в размерах, что показано на рис. 4, *b, c*. На рис. 4, *d* границы синфазной и противофазной синхронизации вырождаются. При дальнейшем увеличении  $\sigma$  граница синфазной синхронизации отрывается от горизонтальной оси и меняется местами с границей противофазной

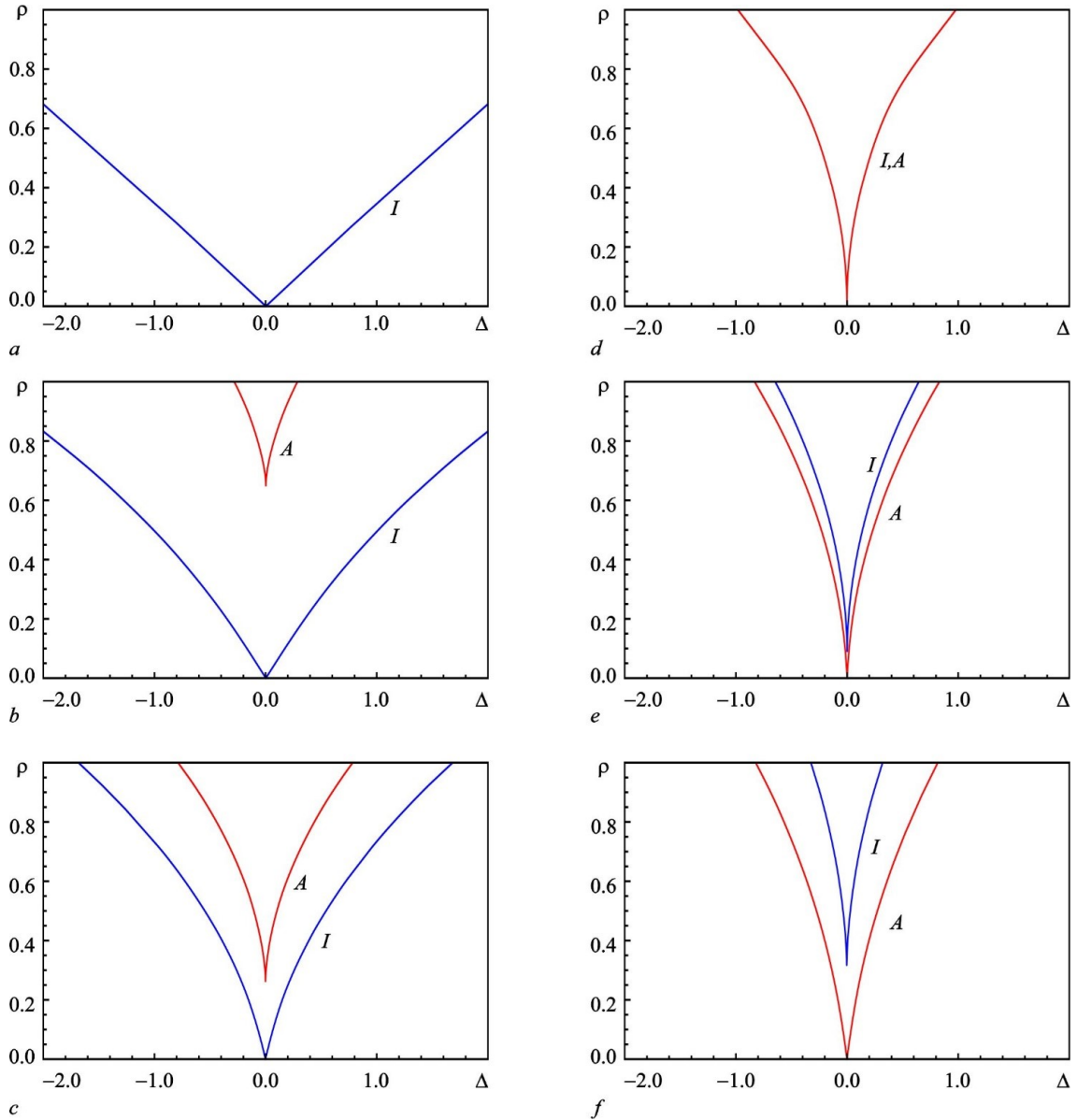


Рис. 4. Области синфазной и противофазной синхронизации на плоскости параметров  $\Delta, \rho$  при  $b = 0.5$ ,  $\psi = 0.3\pi$  и различных значениях параметра возбуждения:  $\sigma = -0.24$  (*a*),  $-0.23$  (*b*),  $-0.2$  (*c*),  $-0.13$  (*d*),  $-0.1$  (*e*),  $-0.01$  (*f*)

Fig. 4. Domains of in-phase and anti-phase synchronization on the parameter plane  $\Delta, \rho$  for  $b = 0.5$ ,  $\psi = 0.3\pi$  and for different values of excitation parameter  $\sigma = -0.24$  (*a*),  $-0.23$  (*b*),  $-0.2$  (*c*),  $-0.13$  (*d*),  $-0.1$  (*e*),  $-0.01$  (*f*)

синхронизации (рис. 4, e, f). Теперь при малых значениях параметра связи и частотной расстройки имеет место только противофазная синхронизация.

Аналогично можно найти границы седлоузловой бифуркации на неустойчивом предельном цикле, в результате которой рождаются точки  $I_-$  и  $A_-$ . Для этого достаточно в приведенных выше формулах (7), (8) заменить  $R_+$  на  $R_-$ . В итоге границы седлоузловой бифуркации вместо (13), (15) будут определяться следующими формулами:

$$\Delta = -2\rho \sin \varphi \left( \cos \psi + \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left( \sin^2 \psi + \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right), \quad (18)$$

$$\rho = -\frac{4\lambda \cos \varphi (\cos \psi \sqrt{1+4\sigma} + b \sin \psi)}{\cos 2\varphi (4 \sin^2 \psi \sqrt{1+4\sigma} + b \sin 2\psi)}, \quad (19)$$

а выражение (12) примет вид

$$\lambda = -\frac{1}{2} \sqrt{1+4\sigma} (1 - \sqrt{1+4\sigma}). \quad (20)$$

О данной бифуркации имеет смысл говорить только при  $-1/4 < \sigma < 0$ , то есть когда  $R_-^2 > 0$  (см. (5)). Поскольку в результате данной бифуркации происходит рождение седла и неустойчивого узла, линии (18), (19) не являются границами области синхронизации.

**2.2. Седлоузловые бифуркации несимметричных решений.** В рамках фазового приближения можно также провести анализ седлоузловых бифуркаций другого типа, в результате которых появляются несимметричные неподвижные точки  $S_{1,2,3,4}$ . Для этого будем искать решения в виде  $R_1 = R_+ + r_1, R_2 = R_- + r_2$ , где  $r_{1,2} \sim \rho$  – малые добавки. Тогда вместо соотношений (8) получим

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\rho R_-}{2R_+^2 (1 - 2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi) = 0, \\ r_2 &= -\frac{\rho R_+}{2R_-^2 (1 - 2R_-^2)} \cos(\psi - \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Пользуясь (21) с учетом выражений (5) для  $R_{\pm}$ , после ряда вычислений найдем, что

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \frac{1 + \sqrt{1+4\sigma}}{1 - \sqrt{1+4\sigma}} + \frac{\rho (1 + \sqrt{1+4\sigma})}{4\sigma^2 \sqrt{1+4\sigma}} \left( (1 + 2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right), \quad (22)$$

$$\frac{R_2}{R_1} \approx \frac{1 - \sqrt{1+4\sigma}}{1 + \sqrt{1+4\sigma}} - \frac{\rho (1 - \sqrt{1+4\sigma})}{4\sigma^2 \sqrt{1+4\sigma}} \left( (1 + 2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right). \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в третье уравнение системы (3), получим обобщенное уравнение Адлера, которое после ряда преобразований можно привести к относительно компактному виду:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} + \Delta &= b\sqrt{1+4\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} (\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi) \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{\rho}{2\sigma^2 \sqrt{1+4\sigma}} \left( (1 + 2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что при  $\rho \ll 1$  можно пренебречь вторым слагаемым в квадратной скобке (за исключением вырожденных случаев  $\sigma \rightarrow 0$  и  $\sigma \rightarrow -1/4$ ). В результате (24) значительно упрощается:

$$\dot{\varphi} + \Delta = b\sqrt{1+4\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} (\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi). \quad (25)$$

В отличие от уравнения (11), коэффициент при члене порядка  $\rho$  в (25) не обращается тождественно в нуль при каком-либо определенном значении параметра набег фазы  $\psi$ .

Полагая в (25)  $\dot{\varphi} = 0$ , получаем уравнение для определения неподвижных точек

$$\Delta = b\sqrt{1+4\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} (\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi). \quad (26)$$

Границы седлоузловой бифуркации определяются из условия слияния двух корней уравнения (26):

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} (\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi) = 0,$$

откуда можно найти, что

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{ctg} \psi}{\sqrt{1+4\sigma}}.$$

Подставляя это соотношение в (26), после ряда вычислений находим

$$\Delta = b\sqrt{1+4\sigma} \pm \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \sqrt{1+4\sigma \sin^2 \psi}. \quad (27)$$

Это выражение определяет линии бифуркаций на плоскости  $\Delta, \rho$ .

Очевидно, что имеется еще одно несимметричное решение, для которого  $R_1 = R_- + r_1$ ,  $R_2 = R_+ + r_2$ . Для него условия седлоузловой бифуркации совпадают с (27) с точностью до знака:

$$\Delta = -b\sqrt{1+4\sigma} \pm \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \sqrt{1+4\sigma \sin^2 \psi}. \quad (28)$$

На основе приведенных выше соотношений можно построить все линии седлоузловых бифуркаций на плоскости параметров  $\Delta, \rho$ . Пример для случая  $\sigma = -0.16$ ,  $b = 0.2$ ,  $\psi = 0.35\pi$  приведен на рис. 5. Область синфазной синхронизации закрашена голубым цветом, противофазной — фиолетовым. Они ограничены линиями  $SN_1$  седлоузловых бифуркаций симметричных решений

$R_{1,2} = R_+ + O(\rho)$ , которые задаются соотношениями (13), (15). Также на этом рисунке показаны линии  $SN_2$  седлоузловых бифуркаций неустойчивых решений  $R_{1,2} = R_- + O(\rho)$ , построенные согласно соотношениям (18), (19). Они лежат ниже линий  $SN_1$ .

Линии  $SN_{3,4}$  соответствуют седлоузловым бифуркациям несимметричных решений. Поскольку в уравнениях (27), (28) присутствует слагаемое, отвечающее за неизохронность, на плоскости  $\Delta, \rho$  эти линии опираются на горизонтальную ось не в начале координат, а в точках  $\Delta = \pm b\sqrt{1+4\sigma} = \pm 0.12$ .

С помощью приведенных выше соотношений полезно также построить зависимости амплитуд колебаний различных мод от параметра  $\rho$ . Пример таких зависимостей приведен на рис. 6 (для простоты рассматриваем случай  $\Delta = 0$ ). На рисунке приведены зависимости

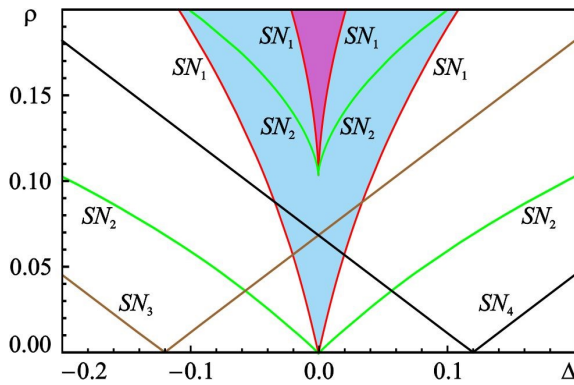


Рис. 5. Линии седлоузловых бифуркаций  $SN_{1-4}$ , построенные на плоскости параметров  $\Delta, \rho$  при  $\sigma = -0.16$ ,  $b = 0.2$  и  $\psi = 0.35\pi$ . Области синхронизации закрашены цветом (цвет онлайн)

Fig. 5. Lines of saddle-node bifurcations  $SN_{1-4}$ , plotted on the parameter plane  $\Delta, \rho$  for  $\sigma = -0.16$ ,  $b = 0.2$  and  $\psi = 0.35\pi$ . Synchronization domains are shaded (color online)

только для амплитуды  $R_1$ . Приводить значения для амплитуды колебаний второго осциллятора нет необходимости, поскольку при нулевой расстройке для синфазной и противофазной мод  $R_1 = R_2$ , а решения  $S_{1,2}$  и  $S_{3,4}$  попарно симметричны друг другу относительно замены

$$(R_1, R_2, \varphi) \rightarrow (R_2, R_1, -\varphi).$$

В случае ненулевой расстройки вырождение снимается и указанная симметрия нарушается.

Из рис. 6 видно, что с ростом связи амплитуда синфазной моды  $I$  возрастает, а амплитуда противофазной моды  $A$  уменьшается. Для решений, соответствующих седлоузловой бифуркации на неустойчивом цикле, ситуация противоположная. Действительно, в формулы (8) входит величина  $1 - 2R_+^2 = -\sqrt{1 + 4\sigma}$ . Когда мы рассматриваем решения  $I_-$ ,  $A_-$ , в (8) необходимо заменить  $R_+$  на  $R_-$ , при этом  $1 - 2R_-^2 = \sqrt{1 + 4\sigma}$  и правые части (8) меняют знак.

Что касается несимметричных решений, то для двух из них с ростом связи амплитуды колебаний первого осциллятора возрастают (при данном значении  $\psi$  это  $S_1$  и  $S_4$ ), а второго — уменьшаются, для двух других имеет место обратная ситуация.

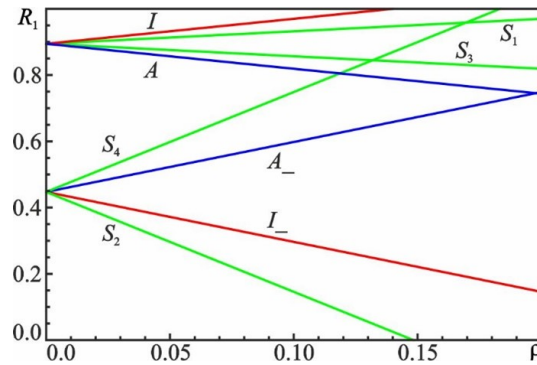


Рис. 6. Зависимости амплитуд колебаний различных мод от параметра связи  $\rho$  при  $\sigma = -0.16$ ,  $\psi = 0.2\pi$ , и  $b = 0$  (цвет онлайн)

Fig. 6 Dependences of the oscillation amplitudes of various modes on the coupling parameter  $\rho$  for  $\sigma = -0.16$ ,  $\psi = 0.2\pi$ , and  $b = 0$  (color online)

## Заключение

В данной работе на основе фазового приближения проведен анализ синхронизации системы двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, в приближении, когда время задержки считается малым по сравнению с характерным временем установления колебаний. Показано, что динамика в такой системе значительно усложняется по сравнению со связанными системами с мягким самовозбуждением. В фазовом пространстве помимо неподвижных точек, отвечающих режимам синфазной и противофазной синхронизации, появляется еще пара неустойчивых неподвижных точек, для которых амплитуды колебаний первого и второго осциллятора близки к амплитуде неустойчивого состояния  $R_-$ , а также несимметричные неподвижные точки, для которых амплитуды колебаний первого и второго осциллятора существенно отличаются друг от друга.

Получены обобщенные уравнения Адлера для различных ситуаций, из которых следуют простые аналитические формулы для условий седлоузловых бифуркаций, в результате которых возникают неподвижные точки. Найдены условия, при которых связь является чисто консервативной или чисто диссипативной (соотношения (16) и (17)). С увеличением параметра неизохронности  $b$  значение набега фазы  $\psi$ , при котором доминирует диссипативная связь, увеличивается, а значение, при котором связь чисто консервативная, уменьшается. Когда доминирует диссипативная связь, синхронизация возможна только на синфазной моде. Когда доминирует консервативная связь, в системе появляется фазовая бистабильность, то есть появляются области противофазной синхронизации. Полученные формулы позволили проследить переход от одного типа связи к другому при изменении управляющих параметров.

Однако следует отметить, что фазовое приближение справедливо лишь при слабой связи и при малых расстройках. Более строгий анализ в рамках так называемого амплитудно-фазового приближения будет представлен во второй части данной работы.

## Список литературы

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
2. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
3. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
4. Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer, 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
5. Кузнецов А. П., Емельянова Ю. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация в задачах. Саратов: Издательский центр «Наука», 2010. 256 с.
6. Zhang J., Zhang D., Fan Y., He J., Ge X., Zhang X., Ju J., Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources // Phys. Plasmas. 2020. Vol. 27, no. 1. P. 010501. DOI: 10.1063/1.5126271.
7. Benford J., Sze H., Woo W., Smith R. R., Harteneck B. Phase locking of relativistic magnetrons // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62, no. 8. P. 969–971. DOI: 10.1103/PhysRevLett.62.969.
8. Cruz E. J., Hoff B. W., Pengvanich P., Lau Y. Y., Gilgenbach R. M., Luginsland J. W. Experiments on peer-to-peer locking of magnetrons // Appl. Phys. Lett. 2009. Vol. 95, no. 19. P. 191503. DOI: 10.1063/1.3262970.
9. Sze H., Price D., Harteneck B. Phase locking of two strongly coupled vircators // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67, no. 5. P. 2278–2282. DOI: 10.1063/1.345521.
10. Woo W., Benford J., Fittinghoff D., Harteneck B., Price D., Smith R., Sze H. Phase locking of high-power microwave oscillators // J. Appl. Phys. 1989. Vol. 65, no. 2. P. 861–866. DOI: 10.1063/1.343079.
11. Levine J. S., Aiello N., Benford J., Harteneck B. Design and operation of a module of phase-locked relativistic magnetrons // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 70, no. 5. P. 2838–2848. DOI: 10.1063/1.349347.
12. Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Исследование синхронизации в системе двух гиротронов с запаздыванием в канале связи на основе модифицированной квазилинейной модели // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 68–81. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-6-68-81.
13. Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Влияние запаздывания на взаимную синхронизацию двух связанных гиротронов // Известия вузов. Радиофизика. 2020. Т. 63, № 9–10. С. 781–795.
14. Thumm M. K. A., Denisov G. G., Sakamoto K., Tran M. Q. High-power gyrotrons for electron cyclotron heating and current drive // Nucl. Fusion. 2019. Vol. 59, no. 7. P. 073001. DOI: 10.1088/1741-4326/ab2005.
15. Ivanchenko M. V., Osipov G. V., Shalfeev V. D., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, no. 1–2. P. 8–30. DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.035.
16. Kuznetsov A. P., Stankevich N. V., Turukina L. V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D. 2009. Vol. 238, no. 14. P. 1203–1215. DOI: 10.1016/j.physd.2009.04.001.
17. Usacheva S. A., Ryskin N. M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling // Chaos. 2014. Vol. 24, no. 2. P. 023123. DOI: 10.1063/1.4881837.
18. Адилова А. Б., Герасимова С. А., Рыскин Н. М. Бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух генераторов с запаздыванием в цепи связи // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 1. С. 3–12. DOI: 10.20537/nd1701001.
19. Adilova A. B., Balakin M. I., Gerasimova S. A., Ryskin N. M. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 11. P. 113103. DOI: 10.1063/5.0065670.

20. *Nusinovich G. S.* Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2004. 352 p. DOI: 10.1353/book.62236.
21. *Yakunina K. A., Kuznetsov A. P., Ryskin N. M.* Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode // *Phys. Plasmas*. 2015. Vol. 22, no. 11. P. 113107. DOI: 10.1063/1.4935847.
22. *Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Трубецков Д. И., Селиверстова Е. С.* Удивительный Роберт Адлер: лампа Адлера, уравнение Адлера и многое другое // *Известия вузов. ПНД*. 2015. Т. 23, № 3. С. 3–26. DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-3-3-26.

## References

1. Rabinovich MI, Trubetskov DI. Introduction to the Theory of Oscillations and Waves. Moscow: Nauka; 1984. 432 p. (in Russian).
2. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. New York: Cambridge University Press; 2001. 432 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
3. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Ryskin NM. Nonlinear Oscillations. Moscow: Fizmatlit; 2005. 292 p. (in Russian).
4. Balanov A, Janson N, Postnov D, Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer; 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
5. Kuznetsov AP, Emelianova YP, Sataev IR, Turukina LV. Synchronization in Tasks. Saratov: Publishing Center «Nauka»; 2010. 256 p. (in Russian).
6. Zhang J, Zhang D, Fan Y, He J, Ge X, Zhang X, Ju J, Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources. *Phys. Plasmas*. 2020;27(1):010501. DOI: 10.1063/1.5126271.
7. Benford J, Sze H, Woo W, Smith RR, Harteneck B. Phase locking of relativistic magnetrons. *Phys. Rev. Lett.* 1989;62(8):969–971. DOI: 10.1103/PhysRevLett.62.969.
8. Cruz EJ, Hoff BW, Pengvanich P, Lau YY, Gilgenbach RM, Luginsland JW. Experiments on peer-to-peer locking of magnetrons. *Appl. Phys. Lett.* 2009;95(19):191503. DOI: 10.1063/1.3262970.
9. Sze H, Price D, Harteneck B. Phase locking of two strongly coupled vircators. *J. Appl. Phys.* 1990;67(5):2278–2282. DOI: 10.1063/1.345521.
10. Woo W, Benford J, Fittinghoff D, Harteneck B, Price D, Smith R, Sze H. Phase locking of high-power microwave oscillators. *J. Appl. Phys.* 1989;65(2):861–866. DOI: 10.1063/1.343079.
11. Levine JS, Aiello N, Benford J, Harteneck B. Design and operation of a module of phase-locked relativistic magnetrons. *J. Appl. Phys.* 1991;70(5):2838–2848. DOI: 10.1063/1.349347.
12. Adilova AB, Ryskin NM. Study of synchronization in the system of two delay-coupled gyrotrons using a modified quasilinear model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(6): 68–81 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-6-68-81.
13. Adilova AB, Ryskin NM. Influence of the delay on mutual synchronization of two coupled gyrotrons. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2021;63(9–10):703–715. DOI: 10.1007/s11141-021-10091-x.
14. Thumm MKA, Denisov GG, Sakamoto K, Tran MQ. High-power gyrotrons for electron cyclotron heating and current drive. *Nucl. Fusion*. 2019;59(7):073001. DOI: 10.1088/1741-4326/ab2005.
15. Ivanchenko MV, Osipov GV, Shalfeev VD, Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators. *Physica D*. 2004;189(1–2):8–30. DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.035.
16. Kuznetsov AP, Stankevich NV, Turukina LV. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues. *Physica D*. 2009;238(14):1203–1215. DOI: 10.1016/j.physd.2009.04.001.
17. Usacheva SA, Ryskin NM. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling. *Chaos*. 2014;24(2):023123. DOI: 10.1063/1.4881837.
18. Adilova AB, Gerasimova SA, Ryskin NM. Bifurcation analysis of mutual synchronization of

- two oscillators coupled with delay. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2017;13(1):3–12 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1701001.
19. Adilova AB, Balakin MI, Gerasimova SA, Ryskin NM. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators. Chaos. 2021;31(11):113103. DOI: 10.1063/5.0065670.
  20. Nusinovich GS. Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore: Johns Hopkins University Press; 2004. 352 p. DOI: 10.1353/book.62236.
  21. Yakunina KA, Kuznetsov AP, Ryskin NM. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode. Phys. Plasmas. 2015;22(11):113107. DOI: 10.1063/1.4935847.
  22. Kuznetsov AP, Sataev IR, Trubetskov DI, Seliverstova ES. Amazing Robert Adler. Adler's tube, Adler's equation, and more. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2015;23(3):3–26 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-3-3-26.



*Адилова Асель Булатовна* — окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2015). Кандидат физико-математических наук (2021). С 2015 года работает в Саратовском государственном университете, в настоящее время — доцентом кафедры физики открытых систем Института физики СГУ. Область научных интересов — нелинейная теория колебаний и волн, вакуумная СВЧ электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: AdilovaAB@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-4079-4488  
AuthorID (eLibrary.Ru): 848993



*Рыскин Никита Михайлович* — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией вакуумной микро- и нанoeлектроники Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: RyskinNM@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-8501-6658  
AuthorID (eLibrary.Ru): 29838