



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 517.9:621.373.7

DOI: 10.18500/0869-6632-003082
EDN: YLPOLW

Параметрическое взаимодействие колебательных мод в присутствии квадратичной или кубической нелинейности

Л. В. Тюрюкина^{1,2}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.04.2023, принята к публикации 17.10.2023,
опубликована онлайн 9.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель работы — исследование динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, сконструированных с использованием механического формализма Лагранжа и описывающих параметрическое взаимодействие осцилляторов (колебательных мод) в присутствии квадратичной или кубической нелинейности общего вида, и ее сопоставление с динамикой моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта с целью определения их возможностей и ограничений при моделировании связанных осцилляторов указанного выше типа. **Методы.** Исследование основано на численном решении методами теории динамического хаоса полученных аналитически дифференциальных уравнений. **Результаты.** Для обеих систем дифференциальных уравнений второго порядка были построены карты показателей Ляпунова на плоскости выбранных параметров; зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра, задающего диссипацию осцилляторов; временные реализации обобщенных координат осцилляторов и их амплитуд; проекции аттракторов на фазовые плоскости осцилляторов. Было проведено сопоставление результатов, полученных для исследуемых систем, с известными результатами для моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта, которые представляют собой полученные методом медленно меняющихся амплитуд трехмерные действительные аппроксимации указанных выше систем. **Заключение.** Исследование сконструированных систем показало, что в пространстве параметров наблюдаются области, отвечающие как различным регулярным режимам, таким как положение равновесия, предельный цикл, двухчастотные торы, так и хаотическим режимам. Для обеих систем было показано, что переход к хаосу осуществляется в результате последовательности бифуркаций удвоения периода торов. Кроме того, сопоставление динамики исследуемых систем с динамикой моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта позволяет утверждать, что если модель Вышкинд–Рабиновича достаточно хорошо предсказывает динамику соответствующей исходной системы дифференциальных уравнений второго порядка, то модель Рабиновича–Фабриканта таким свойством не обладает.

Ключевые слова: параметрическое взаимодействие осцилляторов, хаотические аттракторы, формализм Лагранжа, показатели Ляпунова.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>.

Для цитирования: Тюрюкина Л. В. Параметрическое взаимодействие колебательных мод в присутствии квадратичной или кубической нелинейности // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 11–30. DOI: 10.18500/0869-6632-003082. EDN: YLPOLW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Parametric interaction of modes in the presence of quadratic or cubic nonlinearity

L. V. Turukina^{1,2}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²Saratov State University, Russia

E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Received 28.04.2023, accepted 17.10.2023, available online 9.12.2023,

published 31.01.2024

Abstract. The purpose of this work is a study of the dynamics of the systems of ordinary differential equations of the second order, which is obtained using the Lagrange formalism. These systems describe the parametric interaction of oscillators (modes) in the presence of a general quadratic or cubic nonlinearity. Also, we compare the dynamics of the systems of ordinary differential equations of the second order and dynamics of the Vyshkind–Rabinovich and Rabinovich–Fabrikant models in order to determine the possibilities of the latter models when modeling coupled oscillators of the above type. **Methods.** The study is based on the numerical solution using the methods of the theory of the obtained analytically differential equations. **Results.** For both systems of second-order differential equations, is was presented a chart of in the parameter plane, a graphs of Lyapunov exponents at the value of the parameter that specifies the dissipation of oscillators, a time dependences of the generalized coordinates of oscillators and its amplitudes, portraits of attractors, a projection of the attractors on a phase planes of oscillators. A comparison with the dynamics of the Vyshkind–Rabinovich and Rabinovich–Fabrikant models is carried out. These models are three-dimensional real approximations of the above systems obtained by the method of slowly varying amplitudes. **Conclusion.** The study of the constructed systems showed that in the parameter space there are regions corresponding to both various regular regimes, such as the equilibrium position, limit cycle, two-frequency tori, and chaotic regimes. For both systems, it was shown that the transition to chaos occurs as a result of a sequence of period doubling bifurcations of the tori. In addition, a comparison of the dynamics of the constructed systems with the dynamics of the Vyshkind–Rabinovich and Rabinovich–Fabrikant models allows us to assert that if the Vyshkind–Rabinovich model predicts the dynamics of the corresponding initial system well enough, then the Rabinovich–Fabrikant model does not have such a property.

Keywords: parametric interaction of the oscillators, chaotic attractors, Lagrange formalism, Lyapunov exponents.

Acknowledgements. Research was carried out under support of the Russian Science Foundation (project no. 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>.

For citation: Turukina LV. Parametric interaction of modes in the presence of quadratic or cubic nonlinearity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):11–30. DOI: 10.18500/0869-6632-003082

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Параметрическое взаимодействие волновых или колебательных мод в нелинейных системах встречается в различных областях естествознания [1–9]. Общей моделью, описывающей такое взаимодействие, служит система, которую называют резонансным триплетом, предполагая, что в нелинейной системе имеет место слабое взаимодействие трех колебательных мод (основной моды и двух ее сателлитов), частоты которых удовлетворяют условию параметрического резонанса. Простейший случай относится к вырожденному параметрическому резонансу, когда частоты сателлитов одинаковы и задача сводится к рассмотрению взаимодействия двух колебательных мод. Такое предположение облегчает рассмотрение и делает анализ более обозримым, поскольку динамика зависит от меньшего числа параметров.

Одним из примеров таких систем служат предложенные в 70-х годах прошлого века модели Вышкинд–Рабиновича [8] и Рабиновича–Фабриканта [9]. В работе [8] авторы рассматривали задачу о слабом взаимодействии на квадратичной нелинейности трех колебательных мод, частоты

которых подчинены условию параметрического резонанса $\omega_2 = \omega_1 + \omega_0$. Причем если в такой системе имеет место возбуждение высокочастотной моды вследствие линейной неустойчивости, а низкочастотные моды характеризуются затуханием, то будет наблюдаться насыщение колебаний, определяемое параметрическим распадом. Для случая вырожденного резонанса авторы работы [8] получили модель в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z + \delta y - 2y^2 + \gamma x, \\ \dot{y} &= -\delta x + 2xy + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(x + 1).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, а γ и δ — параметры. В работах [8, 10] показано, что динамика такой системы может становиться хаотической, а переход к хаосу происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода предельного цикла (рис. 1, а).

Вторая модель была получена в работе [9]. В ней авторы рассматривали задачу о модуляционной неустойчивости и возникновении хаоса при параметрическом взаимодействии трех мод в неравновесной диссипативной среде с кубической нелинейностью со спектрально узким усилением. Как и для предыдущей модели, в случае вырожденного резонанса, задача сводится при ряде упрощающих предположений к конечномерной системе дифференциальных уравнений относительно трех действительных переменных

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(v + xy),\end{aligned}\tag{2}$$

где x, y, z — динамические переменные, а γ и v — параметры. Исследования последних лет показали, что система (2) демонстрирует достаточно богатую динамику: регулярные и хаотические

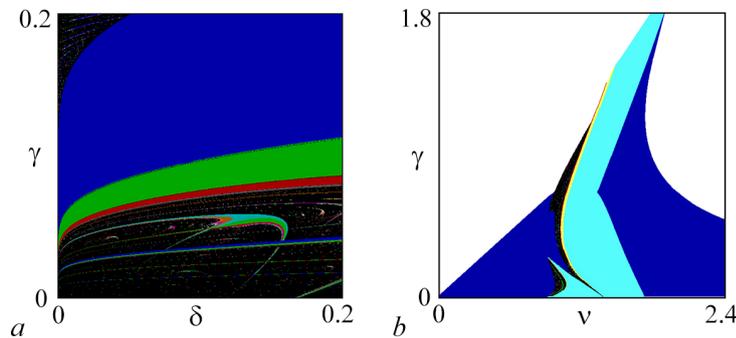


Рис. 1. а — Карта динамических режимов модели Вышкинд–Рабиновича (1), построенная на плоскости параметров (δ, γ) . Карта взята из работы [10]. На карте синий цвет отвечает предельному циклу периода 1, зеленый — предельному циклу периода 2, красный — предельному циклу периода 4, и т. д., черный — хаотическому аттрактору. б — Карта динамических режимов модели Рабиновича–Фабриканта (2), построенная на плоскости параметров (v, γ) . Карта взята из работы [18]. На карте синий цвет отвечает положению равновесия, голубой — предельному циклу периода 1, желтый — предельному циклу периода 2, красный — предельному циклу периода 4, и т. д., черный — хаотическому аттрактору, а белый — убеганию траектории на бесконечность (цвет онлайн)

Fig. 1. а — Chart of dynamical regimes of the Vyshkind–Rabinovich model (1) at (δ, γ) parameter plane. The chart taken from the work [10]. Blue color corresponds to the period one limit cycle, the green color correspond to the period two limit cycle, the red color correspond to the period four limit cycle, etc., the black color correspond to the chaos. б — Chart of dynamical regimes of the Rabinovich–Fabrikant model (2) at parameter plane (v, γ) . The chart taken from a work [18]. At the chart the blue color correspond to the equilibrium point, the light blue color correspond to the period one limit cycle, the yellow color correspond to the period two limit cycle, the red color correspond to the period four limit cycle, etc., the black color correspond to the chaos, the white color correspond to the regime when the trajectory go to infinity (color online)

аттракторы разной топологии, мультистабильность, и т. д. а переход к хаосу, как и для предыдущей модели, происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода предельного цикла (рис. 1, b) [11–20].

Заметим, что модели Вышкинд–Рабиновича (1) и Рабиновича–Фабриканта (2) носят универсальный характер, так как описывают системы различной физической природы, многие из которых имеют прикладное значение [1, 2, 6, 11, 21, 22].

Отметим, однако, что обе модели были получены при ряде упрощающих предположений для частных случаев нелинейных уравнений относительно комплексных амплитуд, представляющих собой обобщения известной модели Ландау, и определенным образом подобранных квадратичной и кубической нелинейности. В то же время, в работе [19] авторы предложили методологию, основанную на механическом формализме Лагранжа, позволяющую описать параметрическое взаимодействие осцилляторов (колебательных мод) в системах с нелинейностью общего вида при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений (осцилляторного типа) второго порядка относительно действительных переменных. Идея предложенного в работе [19] метода состоит в следующем. Пусть имеется система осцилляторов, описываемая уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (m_n \dot{x}_n^2 - k_n x_n^2) - U(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (4)$$

функция Лагранжа, а

$$R(x_1, x_1, \dots, x_N) = \sum_{n=1}^N p_n \bar{\gamma}_n \dot{x}_n^2 \quad (5)$$

функция Рэлея, определяющая диссипацию входящую в систему. Потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2, \dots, x_N)$ задан полиномом, степень которого зависит от того какую нелинейность необходимо получить и который полностью симметричен относительно перестановки осцилляторов. Тогда уравнения Лагранжа можно записать следующим образом

$$\ddot{x}_j + 2p_j \frac{\bar{\gamma}_j}{m_j} \dot{x}_j + \omega_j^2 x_j + \frac{1}{m_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь x_j — обобщенные координаты осцилляторов, $\bar{\gamma}_j$ — коэффициенты диссипации осцилляторов, $\omega_j = \sqrt{k_j/m_j}$ — собственные частоты осцилляторов, m_j — массы осцилляторов. Отметим, что величина p_n будет принимать следующие значения: $p_n = -1$, если коэффициент диссипации отрицательный, и $p_n = 1$, если — положительный. Очевидно, что конкретный вид системы (6) будет зависеть от числа осцилляторов, вида потенциала взаимодействия, резонансного условия, наложенного на собственные частоты осцилляторов.

В настоящей работе проводится исследование наиболее простого случая — параметрического взаимодействия двух осцилляторов (колебательных мод). Рассмотрены две системы. Первая представляет собой систему двух (основная мода и ее сателлит) параметрически взаимодействующих осцилляторов в присутствии квадратичной нелинейности общего вида, а вторая — в присутствии кубической нелинейности общего вида. Для обеих систем коэффициенты диссипации выберем положительным для сателлита и отрицательным для основной моды. А резонансные условия соответственно такими же, как для моделей Вышкинд–Рабиновича (случай квадратичной нелинейности) и Рабиновича–Фабриканта (случай кубической нелинейности). Динамика обеих систем исследована численно: в пространстве выбранных параметров найдены области

регулярной и хаотической динамики и исследована их трансформация при изменении остальных параметров, входящих в уравнения; описан переход от регулярной динамики к хаотической. Проведено сопоставление полученных результатов с результатами, известными для моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта, с целью определения их возможностей и ограничений при моделировании связанных осцилляторов указанного выше типа.

1. Параметрическое взаимодействие двух осцилляторов в случае квадратичной нелинейности общего вида

Сначала рассмотрим задачу о параметрическом взаимодействии двух осцилляторов (колебательных мод) в присутствии квадратичной нелинейности общего вида. В этом случае потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2, \dots, x_N)$ запишем в следующем виде:

$$U(x_1, x_2) = -\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) - \mu(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1), \quad (7)$$

где μ — параметр, характеризующий нелинейное взаимодействие (параметр нелинейности), а функция Рэля будет записана как

$$R(x_1, x_2) = -\bar{\gamma}_1 \dot{x}_1^2 + \bar{\gamma}_2 \dot{x}_2^2. \quad (8)$$

Тогда уравнения Лагранжа (6) в явном виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\frac{\bar{\gamma}_1}{m_1} \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \frac{1}{m_1}(x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_2^2) &= 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\frac{\bar{\gamma}_2}{m_2} \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \frac{1}{m_2}(x_2^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_1^2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, для удобства исследования, введем новые параметры. А именно $\gamma_j = \bar{\gamma}_j/m_j$ — параметр диссипации и $\alpha_j = 1/m_j$ — параметр нелинейного взаимодействия. Тогда система (9) примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \alpha_1(x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_2^2) &= 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \alpha_2(x_2^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_1^2) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь основной моде отвечает осциллятор с индексом 2, а сателлиту — с индексом 1. Отметим, что в дальнейшем будет исследоваться система (10), которую будем называть исходной системой.

Пусть резонансное условие имеет вид $\omega_2 \approx 2\omega_1$. Тогда, предположив, что нелинейность и диссипация малы, то есть амплитуды осцилляторов за характерный интервал времени меняются незначительно, применим к системе (10) метод медленных амплитуд. Для этого представим обобщенные координаты осцилляторов в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t}, \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t} + A_2^* e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (11)$$

и наложим дополнительное условие

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 e^{i\omega_1 t} - \dot{A}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, \\ \dot{A}_2 e^{i\omega t} - \dot{A}_2^* e^{-i\omega t} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где A_j — комплексные амплитуды осцилляторов, а $\omega = 2\omega_1$.

После подстановки выражений (11), (12) в уравнения (10), усреднения по времени и приведения подобных слагаемых для новых комплексных амплитуд a_j , где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mu\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\omega_1} A_1, \\ a_2 &= \frac{\mu\alpha_1}{\omega_1} A_2, \end{aligned} \quad (13)$$

получим следующие амплитудные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + 2\gamma_1 a_1 &= -ia_1^* a_2, \\ \dot{a}_2 - 2\gamma_2 a_2 - i\delta a_2 &= -ia_1^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\delta = \omega_1 - \omega = \omega_2 - 2\omega_1$ – отстройка частоты от резонанса. Отметим, что система (14) совпадает с аналогичной системой, полученной в работах [8, 10], которая при переходе к действительным амплитудам и фазам сводится к модели Вышкинд–Рабиновича (1), если положить $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma$, $\delta = -\delta$. Очевидно, что для системы (14), действуя аналогично работам [8, 10], можно получить модификацию модели Вышкинд–Рабиновича (1), в которой будет присутствовать параметр γ_1 . Однако, как будет показано далее, влияние параметра диссипации γ_1 на динамику системы (10) состоит лишь в перемасштабировании плоскости параметров. Поэтому в настоящей работе ограничимся лишь исследованием динамики системы (10).

Теперь исследуем динамику системы (10). Для начала построим для нее карты показателей Ляпунова на плоскости параметров (δ, γ_2) (рис. 2). Они строились следующим образом. В каждой

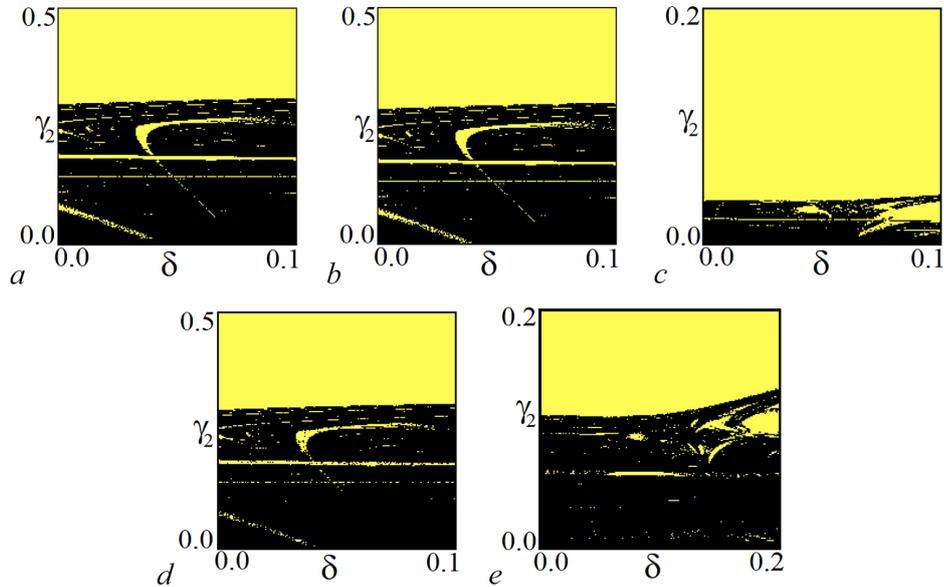


Рис. 2. Карты показателей Ляпунова системы (10), построенные на плоскости параметров (δ, γ_2) . a – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; b – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 0.25$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; c – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0.25$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; d – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$; e – $\omega_1 = 60\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Charts of Lyapunov exponents of the system (10) and its enlarged fragment at (δ, γ_2) parameter plane. a – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; b – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 0.25$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; c – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0.25$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; d – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$; e – $\omega_1 = 60\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ (color online)

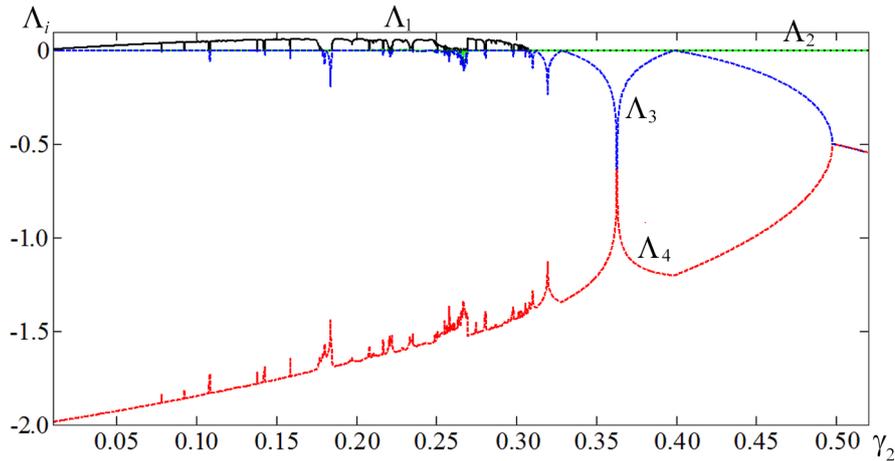


Рис. 3. График зависимости показателей Ляпунова системы (10) от параметра γ_2 . $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\delta = 0.08$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Graphs of Lyapunov exponents of the system (10) at the value of the parameter γ_2 . $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\delta = 0.08$ (color online)

точке плоскости численно вычислялись четыре (полный спектр) показателя Ляпунова¹, как это сделано, например, в работах [23–25]. После чего точка окрашивалась в определенный цвет в зависимости от сигнатуры показателей. На картах, представленных на рис. 2, используется следующая цветовая палитра: желтый цвет отвечает двухчастотному тору, когда первый и второй показатели нулевые, а третий и четвертый отрицательные; черный цвет отвечает хаотическому режиму — старший показатель положительный, второй и третий нулевые, а четвертый отрицательный.

На рис. 2, а представлена карта показателей Ляпунова системы (10), построенная для следующих значений параметров $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, то есть для случая, когда система (14) полностью совпадает с аналогичной системой, полученной в работах [8, 10]. Другими словами, это случай, когда модель Вышкинд–Рабиновича (1) можно рассматривать как трехмерную действительную аппроксимацию исходной системы (10). Соответственно можно сопоставить их динамику. Из сопоставления рис. 2, а и рис. 1, а видно, что, с точностью до масштабного преобразования по осям, между ними наблюдается очень хорошее соответствие. А именно, в верхней части обеих карт наблюдаются области регулярной динамики. В случае модели Вышкинд–Рабиновича (1) это предельные циклы различных периодов, а в случае системы (10) — двухчастотные торы. В нижней части обеих карт наблюдаются области хаотической динамики, внутри которых присутствуют области регулярной динамики. Легко показать, что при уменьшении параметра γ_2 в системе (10), аналогично модели Вышкинд–Рабиновича (1), будет наблюдаться переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, только удваиваться теперь будут не предельные циклы, а торы. Чтобы это показать, для системы (10) построим зависимость показателей Ляпунова от параметра γ_2 при фиксированном значении параметра $\delta = 0.08$. Соответствующий график представлен на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что при значениях параметра $\gamma_2 > 0.31$ первый и второй показатели нулевые, а третий и четвертый отрицательные, что отвечает динамическому режиму в виде двухчастотного тора. При этом изменение величины третьего показателя при уменьшении параметра γ_2 типично для систем, в которых имеет место переход к хаосу через последовательность

¹Равенство нулю показателей Ляпунова проверялось с точностью до допуска, величина которого составляла 10^{-4} , точность вычисления самих показателей составляла порядка 10^{-5} . Время вычисления показателей составляло 10^7 . Следует отметить при этом, что вид карт на плоскости параметров существенно не меняется при увеличении длительности и точности расчетов.

бифуркаций удвоения периода [26]. А именно, его величина сначала уменьшается по модулю, пока не коснется оси $\Lambda_j = 0$, потом увеличивается и т. д. На рис. 4, *a, b* представлены временные зависимости обобщенных координат осцилляторов x_1 и x_2 (левая колонка), а также величин $|a_1|$ и $|a_2|$ (средняя колонка) для тора периода один (рис. 4, *a*) и тора периода два (рис. 4, *b*). Показатели Ляпунова равны соответственно $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.11171 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.98831 \pm 0.00001$ и $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.09324 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -1.20678 \pm 0.00001$.

При дальнейшем уменьшении параметра γ_2 старший показатель Ляпунова становится положительным и в системе (10) наблюдается хаотический режим. Соответствующие временные зависимости обобщенных координат осцилляторов x_1 и x_2 (левая колонка) и величин $|a_1|$ и $|a_2|$ (средняя колонка) представлены на рис. 4, *c*, а показатели Ляпунова имеют значения $\Lambda_1 = 0.06233 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -1.66311 \pm 0.00001$. Отметим, что все временные реализации на рис. 4 демонстрируют типичное для представленных режимов поведение.

В правой колонке рис. 4 представлены проекции соответствующих аттракторов системы (10) на плоскости обобщенных координат первого и второго осцилляторов. Так, на рис. 4, *a* представлен аттрактор в виде тора периода один, на рис. 4, *b* — аттрактор в виде тора периода два, а на рис. 4, *c* — хаотический аттрактор. Отметим, что диапазоны изменения обобщенных скоростей осцилляторов y_1, y_2 и обобщенных координат осцилляторов x_1, x_2 отличаются на порядок. Также у проекций аттракторов, отвечающих торам, независимо от их периода, наблюдается четко выраженная внутренняя структура, а вот у хаотического аттрактора такой структуры нет.

Отметим, что система (10) содержит достаточно большое число параметров, поэтому следующим шагом в исследовании, очевидно, является анализ того, как изменение этих параметров влияет на ее динамику. Сначала изменим параметр диссипации γ_1 . Соответствующая карта показателей Ляпунова системы (10) представлена на рис. 2, *b*. Из сопоставления этого рисунка с рис. 2, *a* видно, что параметр диссипации γ_1 , играет роль масштабного фактора. Его уменьшение приводит к сжатию карты по обеим осям. Как результат — переход от регулярных режимов к хаотическим происходит при существенно меньших значениях параметра γ_2 , а в области хаоса справа появляются новые структуры, отвечающие регулярным режимам (сравним рис. 2, *a* и 2, *c*).

Теперь рассмотрим, как на динамику системы (10) влияют параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие. А именно, параметры μ и $\alpha_{1,2}$. На рис. 2, *c* представлена карта показателей Ляпунова системы (10), построенная для $\mu = 0.25$. Из сопоставления рис. 2, *a* и 2, *c* видно, что карты, построенные для $\mu = 1$ и $\mu = 0.25$ выглядят практически идентичными, демонстрируя лишь незначительный сдвиг вниз границы перехода от регулярных режимов к хаотическим. Отметим, однако, что при $\mu = 0$ система (10) превращается в систему двух не связанных осцилляторов. При этом у первого осциллятора диссипация положительная, а у второго — отрицательная, то есть колебания первого осциллятора будут затухать, а второго — неограниченно нарастать (убегать на бесконечность). В случае $\mu \neq 0$, даже если μ очень мало, в системе (10) будет иметь место параметрическое взаимодействие между осцилляторами. Это приведет к обмену энергией между осцилляторами и при превышении параметром μ некоторого порогового значения в системе будет наблюдаться насыщение колебаний. На рис. 5 представлены графики зависимости функций $U_1 = x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_2^2$ и $U_2 = x_2^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_1^2$ от параметра μ , иллюстрирующие данный процесс. Графики построены для следующих значений параметров: $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.45$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Из рисунка видно, что при $\mu = 0$, $U_1 = 0$, а $U_2 \rightarrow \infty$. С ростом μ U_1 растет, а U_2 уменьшается, и при $\mu \approx 0.16$ их значения становятся одинаковыми. Если и далее увеличивать параметр μ , то значения U_1 и U_2 , хоть и меняются незначительно, но будут оставаться близкими. Таким образом, параметр μ ответственен за установление в системе (10)

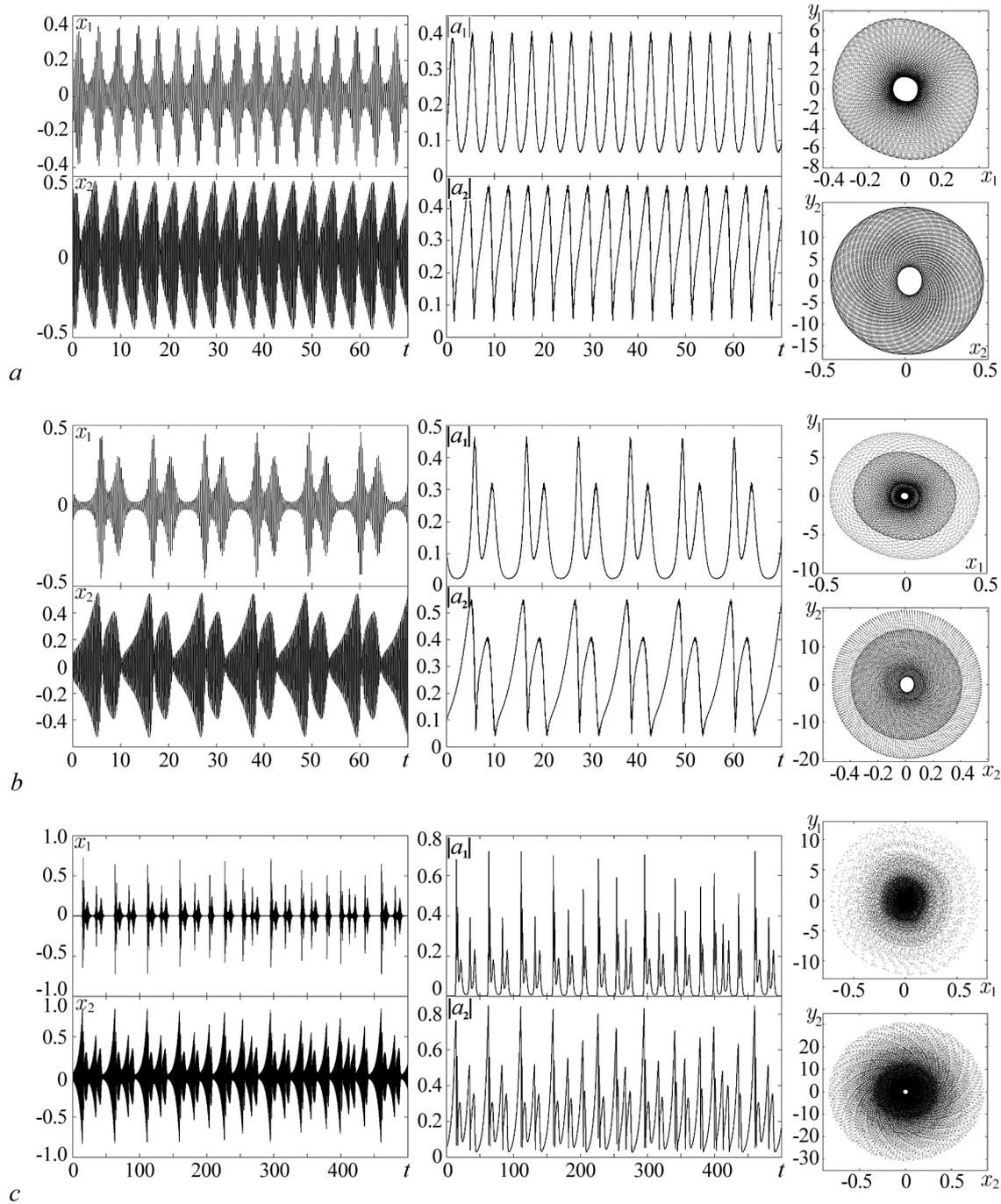


Рис. 4. Временные зависимости обобщенных координат осцилляторов x_1 , x_2 (левая колонка) и величин $|a_1|$, $|a_2|$ (средняя колонка) и проекции аттракторов на плоскости первого и второго осцилляторов (правая колонка) системы (10): a – тор периода один $\gamma_2 = 0.45$; b – тор периода два $\gamma_2 = 0.35$; c – хаотический режим $\gamma_2 = 0.2$. Остальные параметры: $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

Fig. 4. At the left column present the time dependencies of the generalized coordinates of oscillators x_1 , x_2 of the system (10). At the middle column present the time dependencies of the $|a_1|$, $|a_2|$ of the system (10). At the right column present the projection of the attractors on a (x_1, y_1) and (x_2, y_2) plane of the system (10). a – The two-frequency period one torus, $\gamma_2 = 0.45$; b – the two-frequency period two torus, $\gamma_2 = 0.35$; c – the chaos, $\gamma_2 = 0.2$. Other parameters are $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

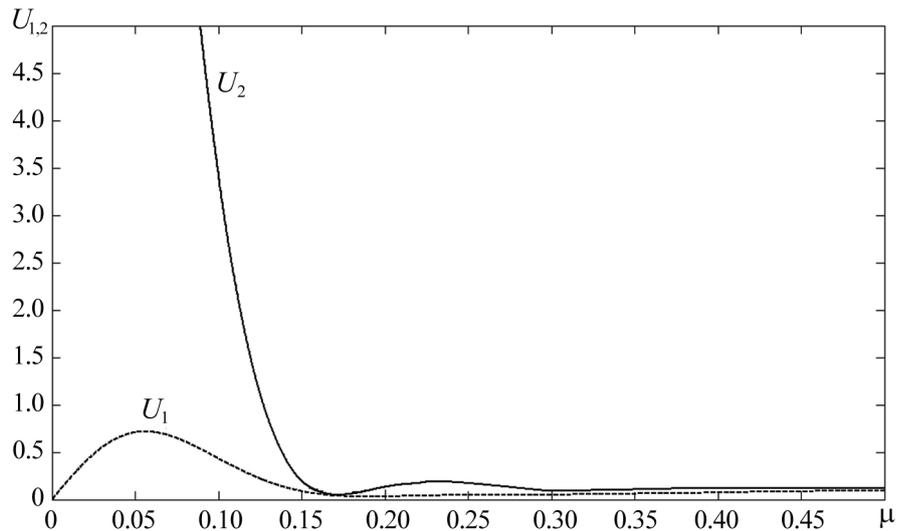


Рис. 5. График зависимости функций $U_{1,2}$ от параметра μ . $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.45$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

Fig. 5. Graphs of the functions $U_{1,2}$ at the value of the parameter μ . $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.45$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

насыщения колебаний. Как только это произойдет ($\mu > 0.16$), параметр μ слабо, особенно по сравнению, например, с параметром диссипации, влияет на динамику рассматриваемой системы. Поэтому все исследования системы (10) проводились в той области пространства параметров, где насыщение колебаний установилось.

И, наконец, изменим частоту первого осциллятора ω_1 , увеличив ее в десять раз. Соответствующая карта показателей Ляпунова системы (10) представлена на рис. 2, e. Из сопоставления рисунков (см. рис. 2, a и рис. 2, e) видно, что увеличение частот первого осциллятора, так же, как и изменение параметра диссипации, приводит к масштабному преобразованию карты: наблюдаемая картина областей регулярных и хаотических режимов сжимается по осям. Как следствие, переход от регулярных режимов к хаосу происходит при меньших значениях параметра γ_2 .

В заключение данной части отметим, что не все слагаемые, входящие в потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2)$, являются резонансными и дают вклад в амплитудные уравнения (14). Однако, если в уравнениях системы (10) оставить только резонансные слагаемые, а именно $2\mu x_1 x_2$ в первом уравнении и μx_1^2 во втором, то динамика системы (10) практически не изменится: опять будет иметь место лишь масштабное преобразование пространства параметров. Поэтому можно утверждать, что нерезонансные слагаемые, входящие в потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2)$, слабо влияют на динамику системы (10).

2. Параметрическое взаимодействие двух осцилляторов в случае кубической нелинейности общего вида

Теперь рассмотрим задачу о параметрическом взаимодействии двух осцилляторов (колебательных мод) в присутствии кубической нелинейности общего вида. В этом случае потенциал взаимодействия $U(x_0, x_1)$ примет следующий вид:

$$U(x_0, x_1) = \frac{1}{4} (x_0^4 + x_1^4) + \beta (x_0^3 x_1 + x_1^3 x_0) + \frac{3}{2} \mu x_1^2 x_0^2. \quad (15)$$

Здесь μ, β — параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие (параметры нелинейности). В свою очередь функцию Рэля запишем в виде:

$$R(x_0, x_1) = \frac{1}{2} (\bar{\gamma}_0 \dot{x}_0^2 - \bar{\gamma}_1 \dot{x}_1^2). \quad (16)$$

Тогда уравнения Лагранжа (6) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 - \gamma_0 \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \alpha_0 (x_0^3 + \beta(3x_0^2 x_1 + x_1^3) + 3\mu x_0 x_1^2) &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 (x_1^3 + \beta(3x_1^2 x_0 + x_0^3) + 3\mu x_1 x_0^2) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь так же, как и в предыдущем разделе, введены новые параметры: $\gamma_j = \bar{\gamma}_j/m_j$ — параметр диссипации и $\alpha_j = 1/m_j$ — параметр нелинейного взаимодействия. В данном случае основной моде отвечает осциллятор с индексом 0, а спутнику — с индексом 1. Отметим, что в дальнейшем систему (17) будем называть исходной системой.

Пусть резонансное условие имеет вид $\omega_0 \approx \omega_1$. Тогда аналогично предыдущему разделу в предположении малой нелинейности и диссипации, применим к системе (17) метод медленных амплитуд, представив обобщенные координаты осцилляторов в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 e^{i\omega_0 t} + a_0^* e^{-i\omega_0 t}, \\ x_1 &= a_1 e^{i\omega_1 t} + a_1^* e^{-i\omega_1 t}, \end{aligned} \quad (18)$$

и наложив дополнительное условие

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 e^{i\omega_0 t} - \dot{a}_0^* e^{-i\omega_0 t}, \\ \dot{a}_1 e^{i\omega_1 t} - \dot{a}_1^* e^{-i\omega_1 t}, \end{aligned} \quad (19)$$

где a_j — комплексные амплитуды осцилляторов.

Подставим выражения (18), (19) в уравнения (17). Действуя аналогично работам [9, 19], после усреднения по времени и приведения подобных слагаемых, с учетом возможного отклонения по частоте от резонанса $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1 \neq 0$ в показателе экспоненты, получим следующие уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= \frac{1}{2} \gamma_0 a_0 + i \frac{3}{2\omega_0 m_0} [\mu a_0^* a_1^2 e^{-2i\Delta\omega t} + (|a_0|^2 + 2\mu |a_1|^2) a_0], \\ \dot{a}_1 &= -\frac{1}{2} \gamma_1 a_1 + i \frac{3}{2\omega_1 m_1} [\mu a_1^* a_0^2 e^{i\Delta\omega t} + (|a_1|^2 + 2\mu |a_0|^2) a_1]. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что система (20), с точностью до замены коэффициентов перед слагаемыми, аналогична системе, полученной в работе [19]², которая при переходе к действительным амплитудам и фазам сводится к модели Рабиновича–Фабриканта (2) при условии $\mu = 1$. Динамика последней была подробно изучена в работах [18–20].

Как и в предыдущем разделе, исследование динамики системы (17) начнем с построения карт показателей Ляпунова. Соответствующие карты и их увеличенные фрагменты, построенные на плоскости (γ_0, γ_1) , представлены на рис. 6. На этих картах используется следующая цветовая

²Отметим, что в работе [19] рассматривалась система из трех связанных осцилляторов — основная мода и два ее спутника. Соответственно потенциал взаимодействия содержал большее число слагаемых и параметров. В результате для комплексных амплитуд также получалась трехмерная система, содержащая большее число слагаемых и параметров. В результате для вывода модели Рабиновича–Фабриканта делался переход к двумерному случаю в предположении, что амплитуды и параметры, такие как диссипация и частота, спутников совпадают. Поэтому, строго говоря, система (20) и система амплитудных уравнений, полученная в работе [19], это несколько разные модели, которые совпадают при замене параметров и приведении подобных слагаемых.

палитра: синий цвет отвечает положению равновесия — все показатели отрицательные; голубой цвет отвечает периодическому режиму (предельный цикл) — один нулевой показатель; желтый цвет отвечает квазипериодическому режиму (двухчастотный тор) — два нулевых показателя; черный цвет отвечает хаотическому режиму — хотя бы один положительный показатель, а белый цвет отвечает убеганию траектории на бесконечность.

На рис. 6, *a* представлена карта и ее увеличенные фрагменты, построенные для следующих значений параметров: $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. Из рисунка видно,

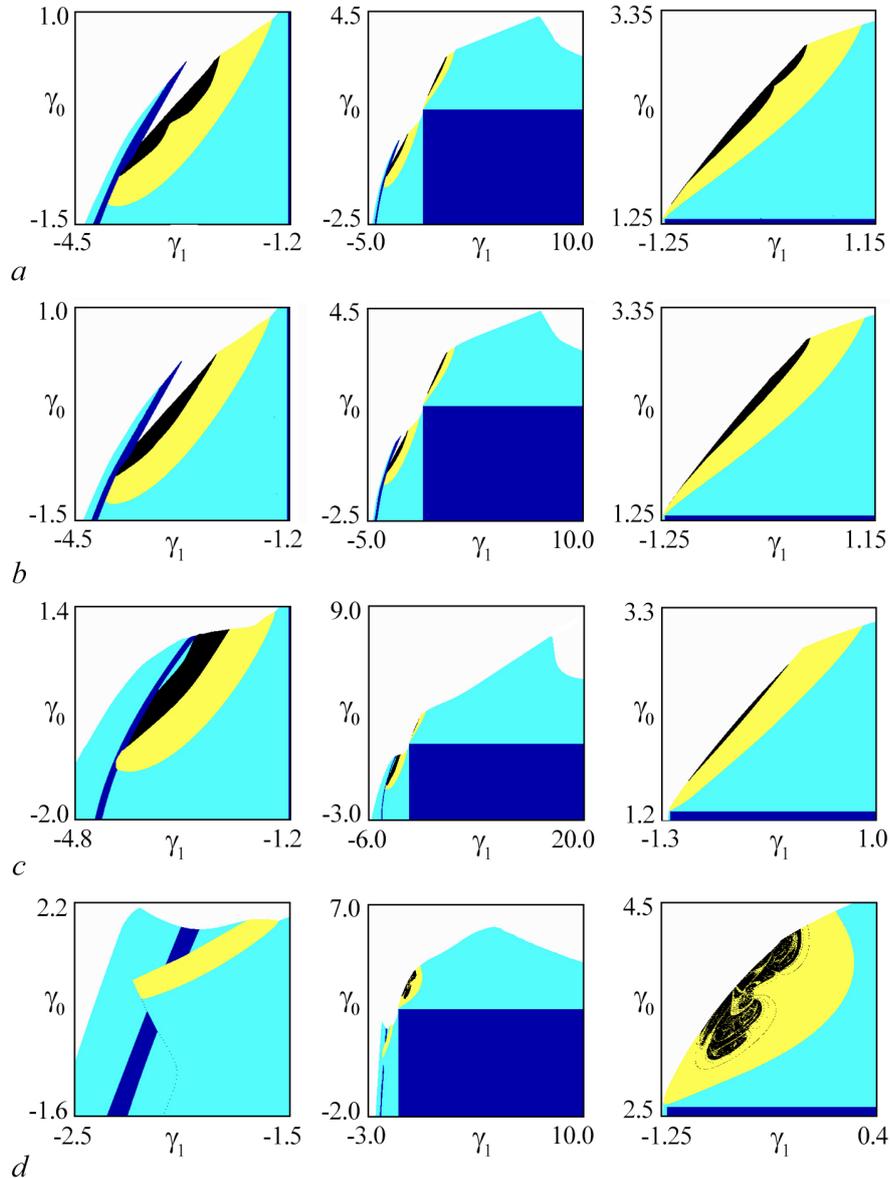


Рис. 6. Карты показателей Ляпунова системы (17) и их увеличенные фрагменты на плоскости (γ_0, γ_1) . *a* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$; $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *b* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 1.8$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *c* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 16$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *d* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Charts of Lyapunov exponents of the system (17) and its magnified fragments at (γ_0, γ_1) parameter plane. *a* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *b* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 1.8$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *c* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 16$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *d* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 1$ (color online)

что в нижней правой части карты (область $\gamma_0 < 1.29$ и $\gamma_1 > -1.22$, синяя область) в системе наблюдается режим в виде тривиального положения равновесия. Что подтверждается графиками зависимости показателя Ляпунова системы (17) от параметров γ_0 и γ_1 , представленными на рис. 7. Из них видно, что в этой области все четыре показателя Ляпунова отрицательные.

При выходе из области существования тривиального положения равновесия через верхнюю (увеличиваем параметр γ_0) или левую (уменьшаем параметр γ_1) границы, положение равновесия становится неустойчивым и в системе рождается предельный цикл. На графиках зависимости показателей Ляпунова от параметров γ_0 и γ_1 (рис. 7) это отвечает тому, что старший показатель Ляпунова становится равным нулю, в то время как все остальные показатели продолжают оставаться отрицательными. Соответствующие проекции аттрактора на фазовые плоскости осцилляторов представлены на рис. 8, а и представляют собой сильно вытянутые эллипсы, так как диапазоны изменения обобщенных скоростей осцилляторов y_0, y_1 и обобщенных координат осцилляторов x_0, x_1 отличаются на порядок. Показатели Ляпунова для данного режима: $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = -0.10586 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.10588 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.74386 \pm 0.00001$.

Если и дальше увеличивать параметр γ_0 или уменьшать параметр γ_1 , то предельный цикл исчезает, а вместо него рождается двухчастотный тор. При этом на графиках зависимости показателей Ляпунова равными нулю становятся уже два показателя, первый и второй, а третий

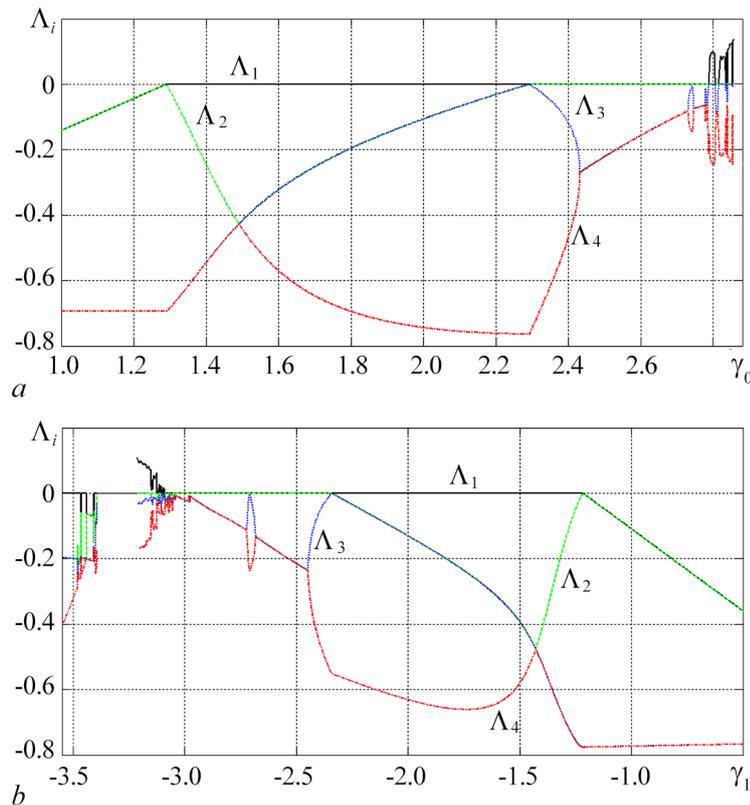


Рис. 7. Графики зависимости показателей Ляпунова системы (17): а – от параметра γ_0 для $\gamma_1 = 0.2$, б – от параметра γ_1 для $\gamma_0 = -0.3$. Остальные параметры: $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. Разрыв на графиках отвечает области, где наблюдается убегание траектории на бесконечность (цвет онлайн)

Fig. 7. a – Graphs of Lyapunov exponents of the system (17) at the value of the parameter γ_0 , $\gamma_1 = 0.2$. b – Graphs of Lyapunov exponents of the system (17) at the value of the parameter γ_1 , $\gamma_0 = -0.3$. Other parameters are $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. The gap in the graphs corresponds to the area where the trajectory go to infinity (color online)

и четвертый остаются отрицательными (см. рис. 7). Кроме того, из рисунка видно, что в области существования тора график третьего показателя Ляпунова имеет вид, типичный для систем с удвоениями периода. Таким образом, можно утверждать, что в рассматриваемой системе имеет место последовательность бифуркаций удвоения тора, которая и приводит к возникновению хаотического режима. В этом случае старший показатель Ляпунова становится положительным (см. рис. 7). Соответствующие проекции аттрактора на фазовые плоскости осцилляторов представлены на рис. 8, *b–d*. На рис. 8, *b* показаны проекции тора периода один, а на рис. 8, *c* — тора периода два. Показатели Ляпунова для данных режимов равны, соответственно, $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = -0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.15592 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.15593 \pm 0.00001$ и $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = -0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.06971 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.06973 \pm 0.00001$. А на рис. 8, *d* показаны проекции хаотического аттрактора, показатели Ляпунова которого имеют значения $\Lambda_1 = 0.09681 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = -0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.24215 \pm 0.00001$.

Теперь так же, как и предыдущем разделе, исследуем влияние параметров, входящих в уравнения системы (17), на ее динамику. Сначала будем менять параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие между осцилляторами. Исследование показало, что изменение (как увеличение, так и уменьшение) параметра β не влияет на динамику системы (17). Соответствующая карта показателей Ляпунова, построенная для $\beta = 1.8$ (остальные параметры остались без изменения), представлена на рис. 6, *b*. Из ее сопоставления с картой, представленной на рис. 6, *a*, видно, что они практически идентичны. Изменение же параметра μ приводит к тому, что области существования предельного цикла, тора и хаоса, расположенные слева от области тривиального положения равновесия, увеличиваются в размерах, если параметр μ увеличивается. В то время как области этих же режимов, расположенные сверху от области тривиального положения равновесия, не меняются. Это хорошо видно на карте показателей Ляпунова системы (17), построенной для

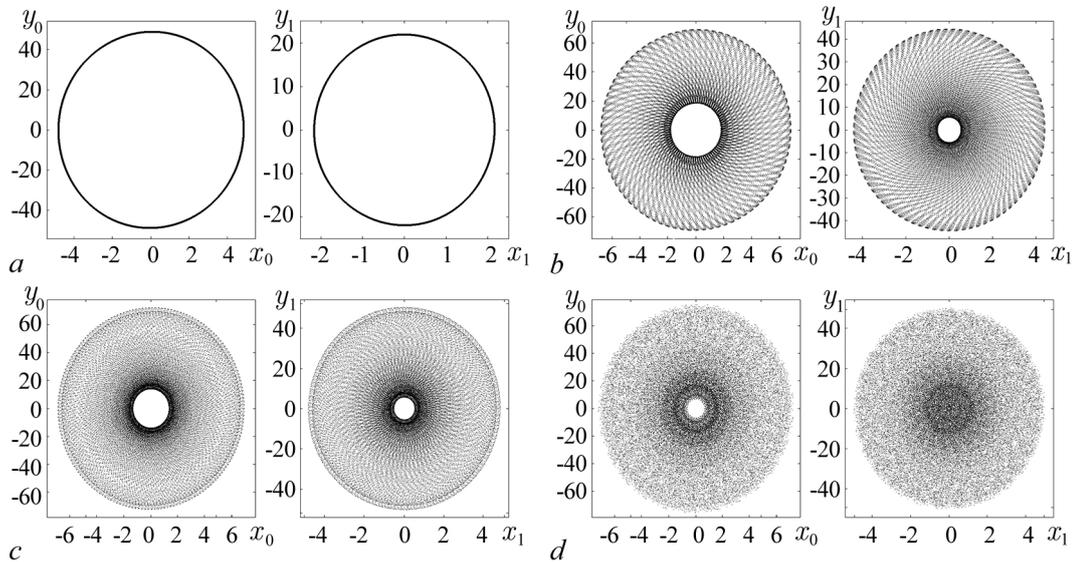


Рис. 8. Проекция аттракторов на фазовые плоскости осцилляторов системы (17): *a* — предельный цикл $\gamma_0 = 2.0$; *b* — двухчастотный тор периода один $\gamma_0 = 2.6$; *c* — двухчастотный тор периода два $\gamma_0 = 2.76$; *d* — хаотический режим $\gamma_0 = 2.8$. Остальные параметры равны $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$

Fig. 8. Projections of the attractors on the plane (x_0, y_0) and (x_1, y_1) of the system (17). *a* — The limit cycle, $\gamma_0 = 2.0$; *b* — the two-frequency period one torus, $\gamma_0 = 2.6$; *c* — the two-frequency period two torus, $\gamma_0 = 2.76$; *d* — the chaos, $\gamma_0 = 2.8$. Other parameters are $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$

$\mu = 16$ и представленной на рис. 6, *c*. Если же параметр μ будет уменьшаться, то все области существования предельного цикла, тора и хаоса, независимо от своего расположения, также будут уменьшаться в размерах, пока полностью не исчезнут.

Теперь рассмотрим случай $\alpha_1 > \alpha_0$. Соответствующая карта показателей Ляпунова системы (17), построенная для значений $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 1$, представлена на рис. 6, *d*. В этом случае области существования всех наблюдаемых в системе режимов значительно увеличиваются в размерах, а граница области существования тривиального положения равновесия сдвигается вверх и влево. Конфигурация области существования тора, расположенная сверху от области тривиального положения равновесия, напоминает структуру «crossroad area», а внутри области, отвечающей хаотическому режиму, появились области, отвечающие двухчастотным торам. При противоположном соотношении параметров $\alpha_{1,2}$ области существования всех режимов, кроме области тривиального положения равновесия, соответственно будут уменьшаться в размерах, а граница области существования тривиального положения равновесия сдвигается вниз и вправо.

И, наконец, рассмотрим, к чему приведет изменение частоты ω_0 (частота основной моды) и отклонения частоты от резонанса $\Delta\omega$. Уменьшение отстройки от резонанса $\Delta\omega$ при сохранении значения частоты ω_0 , то есть резонансное условие выполняется более строго, приводит к исчезновению областей существования двухчастотных торов и хаоса, в то время как области существования предельного цикла и тривиального положения равновесия не меняются (рис. 9, *a*). Увеличение же $\Delta\omega$ приводит к исчезновению областей существования хаоса и двухчастотного тора слева от области тривиального положения равновесия и области хаотического режима сверху от области тривиального положения равновесия. Область же тора, расположенная сверху от области существования тривиального положения равновесия, сохраняется, но меняет свою форму. Теперь она по форме похожа на «язык Арнольда», основание которого находится в точке пересечения

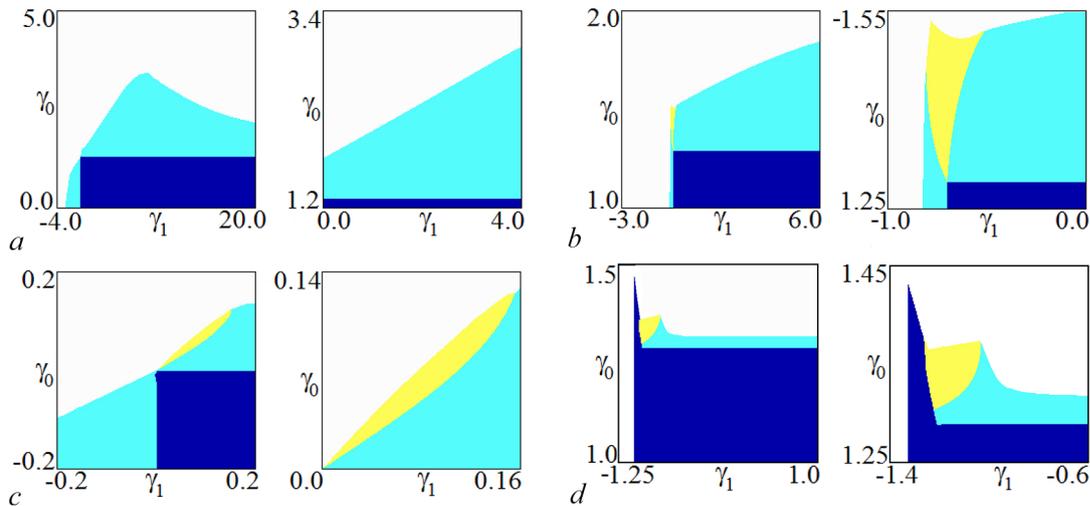


Рис. 9. *a-c* — Карты показателей Ляпунова системы (17) и их увеличенные фрагменты на плоскости (γ_0, γ_1) . *a* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 0.1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *b* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 10$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *c* — $\omega_0 = 2\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 0.06$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. *d* — Карта показателей Ляпунова системы (17) и ее увеличенный фрагмент на плоскости (γ_0, γ_1) построенная для случая, когда потенциал взаимодействия содержит только резонансные слагаемые. $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 9. *a-c* — Charts of Lyapunov exponents of the system (17) and its magnified fragments at (γ_0, γ_1) parameter plane. *a* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 0.1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *b* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 10$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *c* — $\omega_0 = 2\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 0.06$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. *d* — Chart of Lyapunov exponents of the system (17) and its magnified fragment at (γ_0, γ_1) parameter plane. The chart plotted for the case when the interaction potential contains only resonant terms. $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$ (color online)

верхней и левой границ области существования тривиального положения равновесия (рис. 9, *b*). Уменьшение же частоты ω_0 (при этом отклонение частоты от резонанса $\Delta\omega$ также уменьшается пропорционально уменьшению ω_0) приводит к полному исчезновению области существования хаотического режима и существенному уменьшению областей существования всех остальных режимов, за исключением области тривиального положения равновесия (рис. 9, *c*).

Наконец, если в уравнениях системы (17) в выражении для потенциала взаимодействия оставить только резонансные слагаемые, это слагаемые вида x_0^3 и $3\mu x_0 x_1^2$ в первом уравнении и x_1^3 и $3\mu x_1 x_0^2$ во втором, то изменение карты показателей Ляпунова будет таким же, как при изменении ω_0 и $\Delta\omega$ (рис. 9, *d*). А именно, все области регулярных и хаотических режимов, расположенные слева от области тривиального положения равновесия, полностью исчезают. Сверху же от указанной области можно наблюдать лишь области предельного цикла и хаотического режима, которые существенно уменьшились в размере.

В заключение этого раздела отметим, что сопоставление карты динамических режимов модели Рабиновича–Фабриканта (2) (см. рис. 1, *b*) и карт показателей Ляпунова системы (17), в первую очередь представленной на рис. 6, *a*, показывает, что они значительно отличаются друг от друга. А значит, в отличие от модели Вышкинд–Рабиновича, модель Рабиновича–Фабриканта не может быть использована как трехмерная действительная аппроксимация исходной системы уравнений (17). При этом вопрос о том, на каком этапе вывода обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта произошла потеря точности, требует дополнительного исследования.

Заключение

В работе численно исследованы сконструированные в рамках механического формализма Лагранжа системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно действительных переменных, позволяющие описать параметрическое взаимодействие двух осцилляторов (колебательных мод) в диссипативных средах с квадратичной и кубической нелинейностями общего вида. Аналитически было показано, что в случае квадратичной нелинейности исходная система дифференциальных уравнений второго порядка может быть сведена к трехмерной действительной модели Вышкинд–Рабиновича, а в случае кубической нелинейности — к модели Рабиновича–Фабриканта. Для обеих исследуемых систем были построены карты показателей Ляпунова на плоскости отстройка частоты от резонанса — параметр диссипации второго осциллятора (основной моды) для случая квадратичной нелинейности и на плоскости параметров диссипации обоих осцилляторов для случая кубической нелинейности; зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра, задающего диссипацию осцилляторов; временные реализации обобщенных координат осцилляторов и их амплитуд; проекции аттракторов на фазовые плоскости осцилляторов. Было исследовано изменение карт показателей Ляпунова при вариации остальных параметров, таких как параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие осцилляторов, частоты осцилляторов, отстройка частоты от резонанса. Также было проведено сопоставление результатов, полученных для исследуемых систем, с известными результатами для моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта.

Исследование первой модели (раздел 1), полученной для случая квадратичной нелинейности, показало, что, во-первых, в системе наблюдаются лишь два типа режимов. А именно, регулярные режимы в виде двухчастотных торов различных периодов и хаотические режимы. Причем переход к хаосу осуществляется через последовательность бифуркаций удвоения периода торов. Во-вторых, при малых значениях параметра нелинейности в рассматриваемой системе наблюдается убегание на бесконечность для основной моды и затухание колебаний для сателлита. При превышении этим параметром порогового значения в системе имеет место насыщение коле-

баний. После чего изменение параметров, характеризующих нелинейное взаимодействие между осцилляторами, слабо, по сравнению с остальными параметрами, влияет на динамику исходной системы. А вот изменение частоты первого осциллятора или параметра, характеризующего его диссипацию, приводит к перемасштабированию карт показателей Ляпунова. При этом граница перехода от регулярных режимов к хаосу сдвигается вверх или вниз в зависимости от того, какой параметр и как меняется. Например, она будет сдвигаться вниз, если параметр диссипации первого осциллятора уменьшается или если частота первого осциллятора увеличивается. Сопоставление карт показателей Ляпунова исходной системы дифференциальных уравнений с картой динамических режимов модели Вышкинд–Рабиновича показало полную идентичность их динамики и позволяет сделать вывод о том, что последняя является адекватной трехмерной аппроксимацией указанной выше системы.

Исследование второй модели (раздел 2), полученной для случая кубической нелинейности, показало, что, в отличие от первой она демонстрирует большее количество динамических режимов. А именно, положение равновесия, предельный цикл, двухчастотные торы различных периодов, хаос. При этом такие режимы как торы и хаос, наблюдаются лишь в случае достаточно больших значений частот осцилляторов (порядка 100 нормированных единиц) и не очень больших значениях отстройки частоты от резонанса. Увеличение или уменьшение отстройки частоты от резонанса приводит к их исчезновению, а в системе наблюдаются лишь тривиальное положение равновесия и предельный цикл периода один. Изменение параметров, характеризующих нелинейное взаимодействие между осцилляторами, приводит, в свою очередь, к увеличению или уменьшению областей торов и хаоса, в зависимости от того, какой параметр и как меняется. Сопоставление же карт показателей Ляпунова, построенных для исходной системы дифференциальных уравнений, с картой динамических режимов модели Рабиновича–Фабриканта, показало их полное различие. А значит, модель Рабиновича–Фабриканта не может быть использована в качестве трехмерной аппроксимации указанной выше системы. Более того, учет в уравнениях исходной системы только резонансных слагаемых не улучшает соответствие между исходной системой и моделью Рабиновича–Фабриканта, а лишь приводит к полному исчезновению хаотических режимов и существенному уменьшению областей существования двухчастотных торов и предельного цикла. При этом вопрос о том, на каком этапе вывода модели Рабиновича–Фабриканта произошла потеря точности, требует дополнительного исследования.

Список литературы

1. Демидов В. Е., Ковшиков Н. Г. Механизм возникновения и стохастизации автомодуляции интенсивных спиновых волн // Журнал технической физики. 1999. Т. 69, № 8. С. 100–103.
2. Романенко Д. В. Генерация хаотической последовательности СВЧ-импульсов в автоколебательной системе с ферромагнитной плёнкой // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 1. С. 67–74. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-1-67-74.
3. Wersinger J.-M., Finn J. M., Ott E. Bifurcation and "strange" behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling // The Physics of Fluids. 1980. Vol. 23, no. 6. P. 1142–1154. DOI: 10.1063/1.863116.
4. Savage C. M., Walls D. F. Optical chaos in second-harmonic generation // Optica Acta: International Journal of Optics. 1983. Vol. 30, no. 5. P. 557–561. DOI: 10.1080/713821254.
5. Lythe G. D., Proctor M. R. E. Noise and slow-fast dynamics in a three-wave resonance problem // Physical Review E. 1993. Vol. 47, no. 5. P. 3122–3127. DOI: 10.1103/PhysRevE.47.3122.
6. Кузнецов С. П. Параметрический генератор хаоса на варакторном диоде с распадным механизмом ограничения неустойчивости // Журнал технической физики. 2016. Т. 86, № 3. С. 118–127.
7. Пиковский А. С., Рабинович М. И., Трахтенгерц В. Ю. Возникновение стохастичности при

- распадном ограничении параметрической неустойчивости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1978. Т. 74, № 4. С. 1366–1374.
8. *Вышкин С. Я., Рабинович М. И.* Механизм стохастизации фаз и структура волновой турбулентности в диссипативных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1976. Т. 71, № 2. С. 557–571.
 9. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
 10. *Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.* Сложная динамика и хаос в электронном автогенераторе с насыщением, обеспечиваемым параметрическим распадом // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 1. С. 33–47. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47.
 11. *Danca M.-F., Chen G.* Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, no. 10. P. 3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
 12. *Danca M.-F., Feckan M., Kuznetsov N., Chen G.* Looking more closely at the Rabinovich–Fabrikant system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 2. P. 1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
 13. *Liu Y., Yang Q., Pang G.* A hyperchaotic system from the Rabinovich system // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234, no. 1. P. 101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
 14. *Agrawal S. K., Srivastava M., Das S.* Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems // Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 69, no. 4. P. 2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
 15. *Srivastava M., Agrawal S. K., Vishal K., Das S.* Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system // Applied Mathematical Modelling. 2014. Vol. 38, no. 13. P. 3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
 16. *Danca M.-F.* Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86, no. 2. P. 1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
 17. *Danca M.-F., Kuznetsov N., Chen G.* Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 88, no. 1. P. 791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
 18. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.* Сложная динамика и хаос в модельной системе Рабиновича–Фабриканта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2019. Т. 19, № 1. С. 4–18. DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
 19. *Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.* Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29.
 20. *Тюрюкина Л. В.* Динамика системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели в случае отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 685–701. DOI: 10.18500/0869-6632-003015.
 21. *Hocking L. M., Stewartson K.* On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance // Proc. R. Soc. Lond. A. 1972. Vol. 326, no. 1566. P. 289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
 22. *Kuramoto Y., Yamada T.* Turbulent state in chemical reactions // Progress of Theoretical Physics. 1976. Vol. 56, no. 2. P. 679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.
 23. *Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 10. С. 73–80.
 24. *Pazó D., Sánchez E., Matías M. A.* Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic

motion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11, no. 10. P. 2683–2688. DOI: 10.1142/S0218127401003747.

25. *Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* Regional structure of two- and three-frequency regimes in a model of four phase oscillators // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32, no. 3. P. 2230008. DOI: 10.1142/S0218127422300087.
26. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.

References

1. Demidov VE, Kovschikov NG. Mechanism of occurrence and stochastization of self-modulation of intense spin waves. Technical Physics. 1999;69(8):100–103 (in Russian).
2. Romanenko DV. Chaotic microwave pulse train generation in self-oscillatory system based on a ferromagnetic film. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2012;20(1):67–74 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-1-67-74.
3. Wersinger J-M, Finn JM, Ott E. Bifurcation and “strange” behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling. The Physics of Fluids. 1980;23(6):1142–1154. DOI: 10.1063/1.863116.
4. Savage CM, Walls DF. Optical chaos in second-harmonic generation. Optica Acta: International Journal of Optics. 1983;30(5):557–561. DOI: 10.1080/713821254.
5. Lythe GD, Proctor MRE. Noise and slow-fast dynamics in a three-wave resonance problem. Physical Review E. 1993;47(5):3122–3127. DOI: 10.1103/PhysRevE.47.3122.
6. Kuznetsov SP. Parametric chaos generator operating on a varactor diode with the instability limitation decay mechanism. Technical Physics. 2016;61(3):436–445. DOI: 10.1134/S1063784216030129.
7. Pikovski AS, Rabinovich MI, Trakhtengerts VY. Appearance of chaos at decay saturation of parametric instability. Sov. Phys. JETP. 1978;47:715–719.
8. Vyshkind SY, Rabinovich MI. The phase stochastization mechanism and the structure of wave turbulence in dissipative media. Sov. Phys. JETP. 1976;44(2):292–299.
9. Rabinovich MI, Fabrikant AL. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. Sov. Phys. JETP. 1979;50(2):311–317.
10. Kuznetsov SP, Turukina LV. Complex dynamics and chaos in electronic self-oscillator with saturation mechanism provided by parametric decay. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2018;26(1):33–47. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47.
11. Danca M-F, Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004;14(10):3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
12. Danca M-F, Feckan M, Kuznetsov N, Chen G. Looking more closely at the Rabinovich–Fabrikant system. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016;26(2):1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
13. Liu Y, Yang Q, Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010;234(1):101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
14. Agrawal SK, Srivastava M, Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems. Nonlinear Dynamics. 2012;69(4):2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
15. Srivastava M, Agrawal SK, Vishal K, Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system. Applied Mathematical Modelling. 2014;38(13):3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
16. Danca M-F. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system. Nonlinear Dynamics. 2016;86(2):1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.

17. Danca M-F, Kuznetsov N, Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system. *Nonlinear Dynamics*. 2017;88(1):791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
18. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Turukina LV. Complex dynamics and chaos in the Rabinovich–Fabrikant model. *Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2019;19(1):4–18 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
19. Kuznetsov SP, Turukina LV. Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(1):7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29.
20. Turukina LV. Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):685–701. DOI: 10.18500/0869-6632-003015.
21. Hocking LM, Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1972;326(1566):289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
22. Kuramoto Y, Yamada T. Turbulent state in chemical reactions. *Progress of Theoretical Physics*. 1976;56(2):679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.
23. Kuznetsov AP, Sataev IR, Tyuryukina LV. Synchronization of quasi-periodic oscillations in coupled phase oscillators. *Technical Physics Letters*. 2010;36(5):478–481. DOI: 10.1134/S1063785010050263.
24. Pazó D, Sánchez E, Matías MA. Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic motion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2001;11(10):2683–2688. DOI: 10.1142/S0218127401003747.
25. Kuznetsov AP, Sataev IR, Turukina LV. Regional structure of two- and three-frequency regimes in a model of four phase oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2022;32(3):2230008. DOI: 10.1142/S0218127422300087.
26. Kuznetsov SP. *Dynamical Chaos*. Moscow: Fizmatlit; 2006. 356 p. (in Russian).



Тюрюкина Людмила Владимировна — родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2000). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2003), имеет звание доцента по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и доцентом на кафедре динамических систем Института физики СГУ на базе СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Имеет более 50 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: turukinalv@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-4221-8900
 AuthorID (eLibrary.Ru): 39405