



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182; 535.015

DOI: 10.18500/0869-6632-003058
EDN: DCPOEN

Аналитический метод исследования поведения оптической волны в нелинейной среде с периодически расположенными нанопленками

С. А. Волкова¹, К. А. Вытовтов²✉, Е. А. Барабанова²,
С. А. Хахомов³, Д. Л. Коваленко³, М. Г. Иванов⁴

¹Астраханский государственный технический университет, Россия

²Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

³Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Беларусь

⁴Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Россия

E-mail: s.volkovav@mail.ru, ✉vytovtov_konstan@mail.ru, elizavetaalex@yandex.ru,
khakh@gsu.by, dkov@gsu.by, ivanov.webdesign@yandex.ru

Поступила в редакцию 1.05.2023, принята к публикации 24.05.2023,
опубликована онлайн 21.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования — построение аналитической модели поведения гармонической волны в нелинейной оптической среде с периодически расположенными нанопленками. **Методы.** Представлен модернизированный метод негладкого преобразования аргумента для исключения функций Дирака в правой части нелинейного неоднородного дифференциального уравнения, описывающего поведение линейно поляризованной волны в нелинейной среде с периодически расположенными проводящими нанопленками. Для нахождения приближенного аналитического решения также использовались методы малого параметра, в частности метод усреднения. **Результаты.** Построена полностью аналитическая модель поведения линейно поляризованной гармонической волны в нелинейной оптической среде с периодически расположенными проводящими нанопленками. **Заключение.** Построена математическая модель распространения линейно поляризованной гармонической волны в нелинейной оптической среде с периодически расположенными проводящими нанопленками, основанная на методе негладкого преобразования аргумента. Модель является полностью аналитической, все выражения получены непосредственно из уравнений Максвелла путем тождественных преобразований. Границы ее применимости определяются границами применения волновой теории света.

Ключевые слова: нелинейная оптическая среда, периодическая структура, функция Дирака, негладкое преобразование аргумента, периодические решения.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, № 23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>

Для цитирования: Волкова С. А., Вытовтов К. А., Барабанова Е. А., Хахомов С. А., Коваленко Д. Л., Иванов М. Г. Аналитический метод исследования поведения оптической волны в нелинейной среде с периодически расположенными нанопленками // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 575–585. DOI: 10.18500/0869-6632-003058. EDN: DCPOEN

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Analytical method of optical wave behavior studying in nonlinear medium with periodically arranged conducting nanofilms

S. A. Volkova¹, K. A. Vytovtov²✉, E. A. Barabanova²,
S. A. Khakhomov³, D. L. Kovalenko³, M. G. Ivanov⁴

¹Astrakhan State Technical University, Russia

²V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the RAS, Moscow, Russia

³Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

⁴National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Russia

E-mail: s.volkovav@mail.ru, ✉vytovtov_konstan@mail.ru, elizavetaalex@yandex.ru,

khakh@gsu.by, dkov@gsu.by, ivanov.webdesign@yandex.ru

Received 1.05.2023, accepted 24.05.2023, available online 21.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The purpose of this work is to build the analytical model of the behavior of a harmonic wave in a nonlinear optical medium with periodically arranged nanofilms. *Methods.* The modernized method is presented of non-smooth transformation of the argument to eliminate the Dirac functions on the right side of the non-linear inhomogeneous differential equation describing linear polarized wave behavior within a non-linear optical medium with periodically arranged conducting nanofilms. Small parameter methods, in particular, the averaging method, is also used to find an approximate analytical solution. *Results.* The fully analytical model of the behavior of a linear polarized harmonic wave within a nonlinear optical medium with periodically arranged conducting nanofilms is constructed. *Conclusion.* For the case of propagation of a linearly polarized harmonic wave in a nonlinear optical medium with periodically arranged conducting nanofilms, the mathematical model based on the non-smooth argument transformation method is constructed. The model is fully analytical, all expressions are obtained directly from Maxwell's equations by identical transformations. The limits of its applicability are determined by the limits of application of the wave theory of light.

Keywords: nonlinear optical medium, periodic structure, Dirac function, non-smooth argument transformation, solution stability.

Acknowledgements. This work was supported by RSF, № 23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>

For citation: Volkova SA, Vytovtov KA, Barabanova EA, Khakhomov SA, Kovalenko DL, Ivanov MG. Analytical method of optical wave behavior studying in nonlinear medium with periodically arranged conducting nanofilms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):575–585. DOI: 10.18500/0869-6632-003058

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование различных периодических структур в оптике привлекает внимание ученых уже более столетия [1–4]. Исследовались одномерные [5, 6], двумерные [7, 8], трехмерные [9, 10] структуры. С самого начала и до сегодняшнего дня особое внимание привлекают различные линейные слоистые среды, как изотропные [3], так и анизотропные [4]. Основными задачами в данном направлении являются исследования областей прохождения и непрохождения волны (задача устойчивости решений), нахождение решений в областях прохождения, в том числе и периодических решений. С развитием лазерной техники появился интерес и к нелинейным периодическим оптическим структурам [11, 12]. Основные направления исследований — генерация высших гармоник, самофокусировка и т. д. При этом нелинейные среды могут быть использованы в качестве высокодобротных фильтров. С начала XXI столетия актуальным стало изучение различных наноструктур [13, 14], в том числе нанопокрывтий и нанопленок. Теоретическое исследование нанопленок проводится, как правило, с использованием аппарата квантовой оптики. Далее для анализа структур, включающих нанопокрывтия и нанослои, необходимо совместно решать и уравнения Максвелла, и уравнение Шредингера [13–15]. Экспериментальные результаты измерения проводимости нанопленок различной толщины из различных материалов представлены, например, в [16].

Нами рассмотрена одномерная нелинейная структура с периодическим расположением проводящих нанопленок. При этом механизмы формирования токов в проводящих нанопленках учитываются в уравнениях Максвелла в виде δ -функций в рамках нелинейной волновой теории света. Такой подход, очевидно, является упрощенным, однако он существенно облегчает решение задачи анализа оптических устройств на нелинейных структурах, включающих периодически расположенные нанопленки. Авторами построена аналитическая модель с использованием метода негладкого преобразования аргумента, метода усреднения, условий устойчивости Ляпунова. Важным моментом в представляемой модели является исключение δ -функции в исходном волновом уравнении путем преобразования аргумента.

1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается поведение плоской электромагнитной волны в одномерной бесконечной нелинейной диэлектрической среде, описываемой магнитной проницаемостью μ и диэлектрической проницаемостью вида [12]

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 E^2. \quad (1)$$

В структуре расположены проводящие нанопленки с периодом Λ (рис. 1). При этом токи J_x в соседних нанопленках протекают вдоль оси x в противоположных направлениях. Это возможно при подаче внешних напряжений противоположной полярности на соседние пленки. Рассматривается случай распространения линейно поляризованной волны вдоль оси z (см. рис. 1). Здесь z_1^+ , z_1^- — координаты расположения проводящих нанопленок с положительным и отрицательным направлением токов, соответственно.

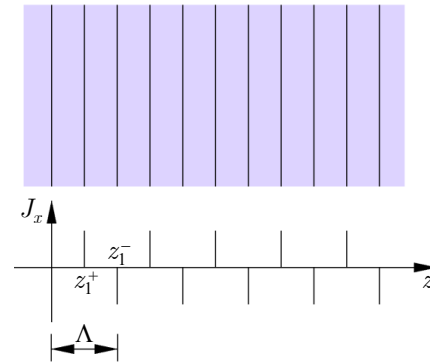


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometry of the problem

Целью работы является разработка полностью аналитического математического метода, описывающего поведение плоской гармонической волны в рассматриваемой структуре и позволяющего находить периодические решения в рассматриваемой нелинейной структуре.

2. Волновое уравнение

Решение уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

в случае гармонической линейно поляризованной волны для данной структуры в результате преобразований приводит к нелинейному неоднородному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2} E_x(z) + \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2} |E_x(z)|^2 E_x(z) = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} J_x. \quad (3)$$

Учитывая, что $J_x = \sigma(z)E_x$ — плотность тока, где $\sigma(z)$ — удельная проводимость нелинейной диэлектрической среды или нанопленок в зависимости от координаты z , из (3) получим

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2} E_x(z) + \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2} |E_x(z)|^2 E_x(z) = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma(z) E_x(z). \quad (4)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче нелинейная среда является диэлектрической, то $\sigma(z)$ на интервалах между нанопленками равна нулю. Приближенно считая толщину нанопленок стремящейся к нулю в сравнении с размерами периода структуры, выражение в правой части может быть записано с использованием δ -функции Дирака. Таким образом, для токов, протекающих в положительном направлении оси x , имеем

$$J_x^+ = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{\text{nf}}(z) E_x(z) \delta(z - z_k^+), \quad (5)$$

где z_k^+ — пространственная координата соответствующей нанопленки. Для токов, протекающих в отрицательном направлении оси x , имеем

$$J_x^- = -j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{\text{nf}}(z) E_x(z) \delta(z - z_k^-), \quad (6)$$

где z_k^- — пространственная координата соответствующей нанопленки. Здесь плотности токов одинаковы по абсолютному значению и их амплитуды равны. В результате уравнение для плоской гармонической волны в нелинейной среде с периодически расположенными нанопленками (см. рис. 1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2} E_x(z) + \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2} |E_x(z)|^2 E_x(z) = \\ = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{\text{nf}}(z) E_x(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)], \end{aligned} \quad (7)$$

где σ_{nf} — удельная проводимость нанопленки. Далее, для удобства решения введем обозначения

$$\begin{aligned} p &= \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2}, \\ \varepsilon &= \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2}, \\ q &= j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{\text{nf}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь ε — малый параметр, поскольку для реальных сред ε_2 имеет порядок $10^{-11} \dots 10^{-20}$, $c \approx 3 \cdot 10^8$. Теперь уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + p E_x(z) + \varepsilon |E_x(z)|^2 E_x(z) = -2q E_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)]. \quad (9)$$

3. Решение дифференциального уравнения

В данном разделе представлена полностью аналитическая модель анализа поведения плоской гармонической волны в изотропной нелинейной структуре с периодическим включением проводящих нанопленок. Модель основана на методе негладкого преобразования аргумента и методе усреднения.

3.1. Негладкое преобразование аргумента. В соответствии с предыдущим разделом правая часть уравнение (9) содержит последовательность δ -функций. Это связано с тем фактом, что на одном периоде расположены две нанопленки с противоположным направлением протекания токов. Система решается для равноудаленных нанопленок, то есть для так называемой эквидистантной системы. С математической точки зрения, сложность заключается в негладкости соответствующего динамического процесса.

Моделирование влияния тонких нанопленок (так называемых импульсных воздействий) можно выполнить несколькими способами. Первый способ заключается в использовании обобщенных функций [16]. Однако такой подход требует дополнительных математических обоснований для каждой конкретной системы.

Другой подход заключается в решении задачи на каждом из интервалов между нанопленками с последующей сшивкой решений. Таким образом, вместо одной задачи решают целую последовательность задач [17].

В данной работе для моделирования поведения волны в рассматриваемой структуре использован метод негладкого преобразования аргумента. Этот метод [18–20], с одной стороны, позволяет построить полностью аналитическую математическую модель поведения волны в нелинейной среде, которая содержит δ -функции Дирака, с другой — получить решение на периоде в виде аналитического выражения.

В соответствии с методом решение (9) ищется в виде

$$E_x = X(\tau) + Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \quad (10)$$

где (рис. 2)

$$\tau = \begin{cases} -4z/\Lambda + 1 + 2k, & k\Lambda \leq z \leq (k + 1/2)\Lambda, \\ 4z/\Lambda - 3 - 2k, & (k + 1/2)\Lambda \leq z \leq (k + 1)\Lambda, \end{cases} \quad (11)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Суть метода негладкого преобразования аргумента при замене переменной (10) иллюстрирует рис. 2. В соответствии с методом введена кусочно-линейная функция $\tau(z)$ такая, что вторая производная от нее равнялась последовательности δ -функций в (9):

$$\frac{d^2\tau(z)}{dz^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)]. \quad (12)$$

Возьмем первую производную от функции $E_x(z)$:

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dY(\tau)}{dz} \left(\frac{d\tau}{dz}\right)^2 + Y(\tau) \frac{d^2\tau}{dz^2}. \quad (13)$$

Очевидно, что для равноудаленных нанопленок с противоположным направлением токов [18] $(d\tau/dz)^2 = 1$, тогда

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dY(\tau)}{dz} + Y(\tau) \frac{d^2\tau}{dz^2}. \quad (14)$$

Слагаемое в (14), содержащее δ -функции, исключается за счет граничного условия [19, 20]:

$$\begin{aligned} Y|_{\tau=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ Y|_{\tau=k\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

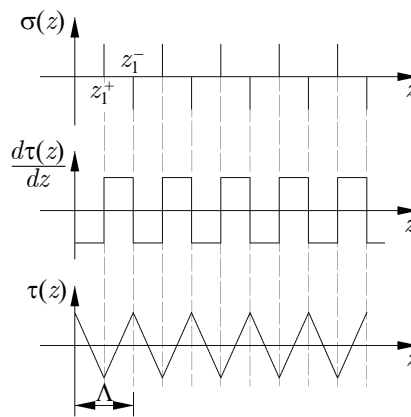


Рис. 2. Негладкое преобразование аргумента
Fig. 2. Non-smooth argument conversion

Тогда первую производную в (14) перепишем в виде

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dY(\tau)}{dz}. \quad (16)$$

С учетом приведенного выше обоснования вторая производная функции $E_x(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} \frac{d^2 \tau}{dz^2} + \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2}. \quad (17)$$

Подставим в (9) выражение (10) и (17) и получим дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \frac{d^2 Y(\tau)}{dz^2} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2} = \\ & = -p \left(X(\tau) + Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right) - \varepsilon \left(X(\tau) + Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right)^3 - \\ & - 2q \left(X(\tau) + Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, мы получили выражение (18), содержащее δ -функции в левой и правой части. Эти сингулярные члены должны быть исключены из (18) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых порядках производных τ . При этом влияние токов в нанопленках проявляется в граничных условиях, рассмотренных ниже.

3.2. Построение периодических решений. Проведем алгебраические преобразования выражения (18) и получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \frac{d^2 Y(\tau)}{dz^2} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2} = -pX(\tau) - pY(\tau) \frac{d\tau}{dz} - \\ & - 2qX(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)] - \\ & - 2qY(\tau) \frac{d\tau}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)] - \\ & - \varepsilon \left(X^3(\tau) + 3X^2(\tau)Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} + 3X(\tau) \left(Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \left(Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Примем в расчет, что в (19) [18]

$$\begin{aligned} & \frac{d\tau}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2} = 0, \\ & \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

и получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \frac{d^2 Y(\tau)}{dz^2} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2} = -pX(\tau) - pY(\tau) \frac{d\tau}{dz} - \\ & - 2qX(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)] - \\ & - 2qY(\tau) \frac{d\tau}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)] - \\ & - \varepsilon \left(X^3(\tau) + 3X^2(\tau)Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} + 3X(\tau) \left(Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right)^2 + Y^3(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

В соответствии с вышеуказанным приравняем к нулю коэффициенты при τ^0 , $d\tau/dz$, $d^2\tau/dz^2$, получим систему, которая описывает поведение волны в рассматриваемой структуре в общем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} + pX(\tau) &= -\varepsilon(3X^2(\tau)Y(\tau) + Y^3(\tau)), \\ \frac{d^2 Y(\tau)}{dz^2} + pY(\tau) &= -\varepsilon(3X(\tau)Y^2(\tau) + X^3(\tau)) \end{aligned} \quad (22)$$

при условии

$$\begin{aligned} Y|_{\tau=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ Y|_{\tau=k\Lambda} &= 0, \\ \left(\frac{dX(\tau)}{dz} + qX(\tau) \right) \Big|_{\tau=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ \left(\frac{dX(\tau)}{dz} + qX(\tau) \right) \Big|_{\tau=k\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

С математической точки зрения уравнения (22), (23) представляют собой краевую задачу для определения функций X и Y . Несмотря на формально сложный вид, основным преимуществом полученной системы (22), (23) является отсутствие в ней сингулярных членов.

Наличие в модели (22), (23) малого параметра ε дает возможность воспользоваться схемой Пуанкаре для построения периодических решений (см., например, [21]). Представим решение в виде разложения по малому параметру нелинейности ε

$$\begin{aligned} X &= X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau) + \varepsilon^2 X_2(\tau) + \dots, \\ Y &= Y_0(\tau) + \varepsilon Y_1(\tau) + \varepsilon^2 Y_2(\tau) + \dots, \\ p &= \gamma^2 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

где $X_0(\tau)$, $X_1(\tau), \dots$; $Y_0(\tau)$, $Y_1(\tau), \dots$ и γ , p_1 , p_2 , ... — функции, подлежащие определению. Такой подход приводит к расщеплению исходного уравнения, описывающего модель, на рекуррентную последовательность краевых задач на промежутке $k\Lambda \leq z \leq (k+1)\Lambda$. Порождающей является линейная ($\varepsilon = 0$) несвязная относительно X , Y -компонент задача на собственные значения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_0(\tau)}{dz^2} + \gamma^2 X_0(\tau) &= 0, \\ \frac{d^2 Y_0(\tau)}{dz^2} + \gamma^2 Y_0(\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_0(\tau)}{dz} + qX_0(\tau) \Big|_{z=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ Y_0(\tau) \Big|_{z=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ \frac{dX_0(\tau)}{dz} + qX_0(\tau) \Big|_{z=k\Lambda} &= 0, \\ Y_0(\tau) \Big|_{z=k\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Решая задачу (25), (26) на собственные значения, определяем искомые функции X_0 и Y_0

$$\begin{aligned} X_{0i} &= A_0 \varphi_i(\tau), \\ Y_{0i} &= C_0 \psi_i(\tau), \end{aligned} \quad (27)$$

где A_0 и C_0 – константы, определяемые начальными условиями. В данном случае $C_0 = -A_0$ при $k\Lambda \leq z \leq (k + 1/2)\Lambda$ и $C_0 = A_0$ при $(k + 1/2)\Lambda \leq z \leq (k + 1)\Lambda$.

В зависимости от значений параметра γ_i существует два различных вида собственных форм колебаний

$$\varphi_i(\tau) = \sqrt{\frac{2}{q^2 + \gamma_i^2}}(q \cos(\gamma_i \tau) + \gamma_i \sin(\gamma_i \tau)), \quad (28)$$

$$\psi_i(\tau) = \sqrt{2} \cos(\gamma_i \tau)$$

для $\gamma_i = i\pi/2$, где $i = 1, 3, 5, \dots$ и

$$\varphi_i(\tau) = -\sqrt{\frac{2}{q^2 + \gamma_i^2}}(q \sin(\gamma_i \tau) - \gamma_i \cos(\gamma_i \tau)), \quad (29)$$

$$\psi_i(\tau) = \sqrt{2} \sin(\gamma_i \tau)$$

для $\gamma_i = i\pi$, где $i = 1, 2, 3, \dots$. Здесь функции $\varphi_i(\tau)$ и $\psi_i(\tau)$ нормированы следующим образом:

$$\langle \varphi_n(\tau), \varphi_m(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \int_{k\Lambda}^{(k+1/2)\Lambda} \varphi_n(z), \varphi_m(\tau) d\tau = \delta_{nm}, \quad (30)$$

$$\langle \psi_n(\tau), \psi_m(\tau) \rangle = \delta_{nm},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $n = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Тогда, после ряда математических преобразований и подстановки (28) и (29) в (27), а затем в (10), получим

$$E_x(z) = -A_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + (i\pi)^2}} \left(\frac{i\pi}{\Lambda} \cos\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) - q \sin\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) \right) - \frac{4}{\Lambda} \sin\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) \right] +$$

$$+ A_0 \sum_{i=2l-1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + (i\pi)^2}} \left(q \cos\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) + \frac{i\pi}{2\Lambda} \sin\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) \right) - \frac{4}{\Lambda} \cos\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) \right] + O(\epsilon) \quad (31)$$

для $k\Lambda \leq z \leq (k + 1/2)\Lambda$. Здесь $l = 1, 2, 3, \dots$.

$$E_x(z) = -A_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + (i\pi)^2}} \left(\frac{i\pi}{\Lambda} \cos\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) - q \sin\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) \right) + \frac{4}{\Lambda} \sin\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) \right] +$$

$$+ A_0 \sum_{i=2l-1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + (i\pi)^2}} \left(q \cos\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) + \frac{i\pi}{2\Lambda} \sin\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) \right) + \frac{4}{\Lambda} \cos\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) \right] + O(\epsilon) \quad (32)$$

для $(k + 1/2)\Lambda \leq z \leq (k + 1)\Lambda$. Важно отметить, что решение, полученное в форме (31), (32), не содержит в себе δ -функции Дирака. Выражения (31), (32) представляют собой нулевое приближение решения. Аналогично находятся первое, второе и т. д. приближения в зависимости от требуемой точности решения.

Заключение

В данной работе рассмотрено поведение линейно поляризованной гармонической волны в оптической нелинейной среде при наличии периодически расположенных проводящих нанопленок. Влияние нанопленок на поведение волны учитывается введением δ -функций. Для нахождения периодических решений дифференциального уравнения, описывающего поведение

волны, предложен метод негладкого преобразования, позволяющий находить аналитическое решение для рассматриваемого случая. Преимуществом построенной модели является нахождение аналитического периодического решения на периоде и отсутствие δ -функций в конечных выражениях. Корректность построенной модели подтверждается тем фактом, что она является полностью аналитической, а конечные выражения получены путем тождественных преобразований. Результаты, представленные в данной работе, могут быть использованы при любых параметрах среды и волны в рамках волновой теории света.

Список литературы

1. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Издательство иностранной литературы, 1959. 457 с.
2. Yeh P. Optical Waves in Layered Media. New York: John Wiley & Sons, 1988. 416 p.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.
4. Vyotovtov K. A., Bulgakov A. A. Analytical investigation method for electrodynamic properties of periodic structures with magnetic layers // Telecommunications and Radio Engineering. 2006. Vol. 65, no. 11–15. P. 1307–1321. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v65.i14.60.
5. Vyotovtov K. A. Analytical investigation of stratified isotropic media // Journal of the Optical Society of America A. 2005. Vol. 22, no. 4. P. 689–696. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000689.
6. Kaur S., Saini D., Sappal A. Band gap simulations of one-dimensional photonic crystal // International Journal of Advanced Research in Computer Science and Electronics Engineering. 2012. Vol. 1, no. 2. P. 161–165.
7. Zhu X., Zhang Y., Chandra D., Cheng S.-C., Kikkawa J. M., Yang S. Two-dimensional photonic crystals with anisotropic unit cells imprinted from PDMS membranes under elastic deformation // Proc. SPIE. 2009. Vol. 7223. P. 72231C. DOI: 10.1117/12.809275.
8. Luan P.-G., Ye Z. Two dimensional photonic crystals // arXiv:cond-mat/0105428. arXiv Preprint, 2001. DOI: 10.48550/arXiv.cond-mat/0105428.
9. Chutinan A., Noda S. Highly confined waveguides and waveguide bends in three-dimensional photonic crystal // Appl. Phys. Lett. 1999. Vol. 75, no. 24. P. 3739–3741. DOI: 10.1063/1.125441.
10. Prasad T., Colvin V., Mittleman D. Superprism phenomenon in three-dimensional macroporous polymer photonic crystals // Phys. Rev. B. 2003. Vol. 67, no. 16. P. 165103. DOI: 10.1103/PhysRevB.67.165103.
11. Gupta S. D. Nonlinear optics of stratified media // In: Wolf E. (ed.) Progress in Optics. Vol. 38. Amsterdam: Elsevier, 1998. P. 1–84. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70349-4.
12. Shen Y. R. The Principles of Nonlinear Optics. Chichester: Wiley, 1984. 576 p.
13. Panasyuk G. Y., Schotland J. C., Markel V. A. Quantum theory of the electromagnetic response of metal nanofilms // Phys. Rev. B. 2011. Vol. 84, no. 15. P. 155460. DOI: 10.1103/PhysRevB.84.155460.
14. Антонец И. В., Котов Л. Н., Некупелов С. В., Карнушов Е. Н. Проводящие и отражающие свойства тонких металлических пленок // Журнал технической физики. 2004. Т. 74, № 11. С. 102–106.
15. Andreev A. V., Postnov S. S. Metallic nanofilms optical response description based on self-consistent theory // Journal of Physics: Conference Series. 2008. Vol. 129. P. 012046. DOI: 10.1088/1742-6596/129/1/012046.
16. Матвеев В. А., Плешанов Н. К., Геращенко О. В., Байрамуков В. Ю. Комплексное исследование нанопленок титана, полученных методом магнетронного напыления // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2014. № 10. С. 34–39. DOI: 10.7868/S0207352814100138.
17. Pilipchuk V. N., Volkova S. A., Starushenko G. A. Study of a non-linear oscillator under parametric

- impulsive excitation using a non-smooth temporal transformation // Journal of Sound and Vibration. 1999. Vol. 222, no. 2. P. 307–328. DOI: 10.1006/jsvi.1998.2067.
18. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
 19. *Pilipchuk V. N.* A transformation for vibrating systems based on a non-smooth periodic pair of functions // Doklady AN Ukr. SSR Ser. A. 1988. Vol. 4. P. 37–40.
 20. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter, 2011. 321 p.
 21. *Мусеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.

References

1. Brillouin L, Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux périodiques. Paris: Masson et Dunod; 1956. 348 p.
2. Yeh P. Optical Waves in Layered Media. New York: John Wiley & Sons; 1988. 416 p.
3. Born M, Wolf E. Principles of Optics. 4th edition. New York: Pergamon Press; 1968. 992 p.
4. Vytovtov KA, Bulgakov AA. Analytical investigation method for electrodynamics properties of periodic structures with magnetic layers. Telecommunications and Radio Engineering. 2006; 65(11–15):1307–1321. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v65.i14.60.
5. Vytovtov KA. Analytical investigation of stratified isotropic media. Journal of the Optical Society of America A. 2005;22(4):689–696. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000689.
6. Kaur S, Saini D, Sappal A. Band gap simulations of one-dimensional photonic crystal. International Journal of Advanced Research in Computer Science and Electronics Engineering. 2012; 1(2):161–165.
7. Zhu X, Zhang Y, Chandra D, Cheng SC, Kikkawa JM, Yang S. Two-dimensional photonic crystals with anisotropic unit cells imprinted from PDMS membranes under elastic deformation. Proc. SPIE. 2009;7223:72231C. DOI: 10.1117/12.809275.
8. Luan PG, Ye Z. Two dimensional photonic crystals. arXiv:cond-mat/0105428. arXiv Preprint; 2001. DOI: 10.48550/arXiv.cond-mat/0105428.
9. Chutinan A, Noda S. Highly confined waveguides and waveguide bends in three-dimensional photonic crystal. Appl. Phys. Lett. 1999;75(24):3739–3741. DOI: 10.1063/1.125441.
10. Prasad T, Colvin V, Mittleman D. Superprism phenomenon in three-dimensional macroporous polymer photonic crystals. Phys. Rev. B. 2003;67(16):165103. DOI: 10.1103/PhysRevB.67.165103.
11. Gupta SD. Nonlinear optics of stratified media. In: Wolf E, editor. Progress in Optics. Vol. 38. Amsterdam: Elsevier; 1998. P. 1–84. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70349-4.
12. Shen YR. The Principles of Nonlinear Optics. Chichester: Wiley; 1984. 576 p.
13. Panasyuk GY, Schotland JC, Markel VA. Quantum theory of the electromagnetic response of metal nanofilms. Phys. Rev. B. 2011;84(15):155460. DOI: 10.1103/PhysRevB.84.155460.
14. Antonets IV, Kotov LN, Nekipelov SV, Karpushov EN. Conducting and reflecting properties of thin metal films. Tech. Phys. 2004;49(11):1496–1500. DOI: 10.1134/1.1826197.
15. Andreev AV, Postnov SS. Metallic nanofilms optical response description based on self-consistent theory. Journal of Physics: Conference Series. 2008;129:012046. DOI: 10.1088/1742-6596/129/1/012046.
16. Matveev VA, Pleshanov NK, Gerashchenko OV, Bayramukov VY. Complex study of titanium nano-films prepared by magnetron sputtering. Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques. 2014;8(5):991–996. DOI: 10.1134/S102745101405036X.
17. Pilipchuk VN, Volkova SA, Starushenko GA. Study of a non-linear oscillator under parametric impulsive excitation using a non-smooth temporal transformation. Journal of Sound and Vibration. 1999;222(2):307–328. DOI: 10.1006/jsvi.1998.2067.

18. Vladimirov VS. Generalized Functions in Mathematical Physics. Moscow: Nauka; 1979. 320 p. (in Russian).
19. Pilipchuk VN. A transformation for vibrating systems based on a non-smooth periodic pair of functions. Doklady AN Ukr. SSR Ser. A. 1988;4:37–40.
20. Perestyuk NA, Plotnikov VA, Samoilenko AM, Skripnik NV. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter; 2011. 321 p.
21. Moiseev NN. Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics. Moscow: Nauka; 1969. 380 p. (in Russian).

Волкова Светлана Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент.

Россия, 414056 Астрахань, ул. Татищева, стр. 16/1
Астраханский государственный технический университет
E-mail: s.volkovav@mail.ru

Вытовтов Константин Анатольевич — доктор технических наук, доцент. Ведущий научный сотрудник Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.

Россия, 117997 Москва, ул. Профсоюзная, 65
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
E-mail: vytovtov_konstan@mail.ru

Барабанова Елизавета Александровна — доктор технических наук, доцент.

Россия, 117997 Москва, ул. Профсоюзная, 65
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
E-mail: elizavetaalex@yandex.ru

Хахомов Сергей Анатольевич — доктор физико-математических наук, доцент.

Республика Беларусь, 212027 Могилев, пр-т Шмидта, 3
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: khakh@gsu.by

Коваленко Дмитрий Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент.

Республика Беларусь, 212027 Могилев, пр-т Шмидта, 3
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: dkov@gsu.by

Иванов Михаил Германович — студент Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт».

Россия, 111250 Москва, вн.тер.г. муниципальный округ Лефортово, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
E-mail: ivanov.webdesign@yandex.ru