

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(6)

Научная статья  
УДК 517.957, 537.611, 51-73

DOI: 10.18500/0869-6632-003069  
EDN: GLJOXX

### Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями

Е. Г. Екомасов<sup>1</sup>, Р. В. Кудрявцев<sup>1</sup>, К. Ю. Самсонов<sup>2</sup>✉, В. Н. Назаров<sup>3</sup>, Д. К. Кабанов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Уфимский университет науки и технологий, Россия

<sup>2</sup>Тюменский государственный университет, Россия

<sup>3</sup>Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, Россия

E-mail: ekomasoveg@gmail.com, xc.89@mail.ru, ✉k.y.samsonov@gmail.com,  
nazarovvn@gmail.com, danya.kabanov.95@mail.ru

Поступила в редакцию 15.05.2023, принята к публикации 9.07.2023,  
опубликована онлайн 17.11.2023, опубликована 30.11.2023

**Аннотация.** Цель исследования — с помощью аналитических и численных методов рассмотреть задачу нелинейной динамики кинков в модели синус-Гордона с тремя «примесями» (или пространственной неоднородностью периодического потенциала). Методы. С помощью метода коллективных переменных для случая трех одинаковых точечных примесей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, получена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику центра кинка с учетом возбуждения локализованных волн на примесях. Для анализа динамики кинка в случае протяженных примесей был применен численный метод конечных разностей с явной схемой интегрирования. Частотный анализ колебаний кинка и локализованных волн, рассчитанных численно, выполнялся с помощью дискретного преобразования Фурье. Результаты. Для динамики кинка с учетом возбуждения колебательных мод, локализованных на примесях, получена и исследована система уравнений для координаты центра кинка и амплитуд локализованных мод. Значительные различия наблюдаются в динамике кинка при взаимодействии с отталкивающей и притягивающей примесью. Динамика кинка в модели с тремя одинаковыми протяженными примесями, с учетом возможных резонансных эффектов, решалась численно. Установлено, что найденные сценарии динамики кинка для протяженной примеси прямоугольного вида качественно похожи на сценарии, полученные для точечной примеси, описываемой с помощью дельта-функции. Все возможные сценарии динамики кинка определялись и описывались с учетом резонансных эффектов. Заключение. Проведен анализ влияния параметров системы и начальных условий на возможные сценарии динамики кинка. Найден критический и резонансный скорости кинка как функции от параметров примеси.

**Ключевые слова:** уравнение синус-Гордона, кинк, солитон, бризер, метод коллективных координат, примесь.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-31-90048.

**Для цитирования:** Екомасов Е. Г., Кудрявцев Р. В., Самсонов К. Ю., Назаров В. Н., Кабанов Д. К. Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 6. С. 693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Kink dynamics of the sine-Gordon equation in a model with three identical attracting or repulsive impurities

E. G. Ekomasov<sup>1</sup>, R. V. Kudryavtsev<sup>1</sup>, K. Yu. Samsonov<sup>2</sup> ✉, V. N. Nazarov<sup>3</sup>, D. K. Kabanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ufa University of Science and Technology, Russia

<sup>2</sup>University of Tyumen, Russia

<sup>3</sup>Ufa Federal Research Centre of the RAS, Russia

E-mail: ekomasoveg@gmail.com, xc.89@mail.ru, ✉k.y.samsonov@gmail.com,  
nazarovvn@gmail.com, danya.kabanov.95@mail.ru

Received 15.05.2023, accepted 9.07.2023, available online 17.11.2023, published 30.11.2023

**Abstract.** Purpose of this work is to use analytical and numerical methods to consider the problem of the structure and dynamics of the kinks in the sine-Gordon model with “impurities” (or spatial inhomogeneity of the periodic potential). **Methods.** Using the method of collective variables for the case of three identical point impurities located at the same distance from each other, a system of differential equations is obtained. Resulting system of equations makes it possible to describe the dynamics of the kink taking into account the excitation of localized waves on impurities. To analyze the dynamics of the kink in the case of extended impurities, a numerical finite difference method with an explicit integration scheme was applied. Frequency analysis of kink oscillations and localized waves calculated numerically was performed using a discrete Fourier transform. **Results.** For the kink dynamics, taking into account the excitation of oscillations in modes, a system of equations for the coordinate of the kink center and the amplitudes of waves localized on impurities is obtained and investigated. Significant differences are observed in the dynamics of the kink when interacting with a repulsive and attractive impurity. The dynamics of the kink in a model with three identical extended impurities, taking into account possible resonant effects, was solved numerically. It is established that the found scenarios of kink dynamics for an extended rectangular impurity are qualitatively similar to the scenarios obtained for a point impurity described using a delta function. All possible scenarios of kink dynamics were determined and described taking into account resonant effects. **Conclusion.** The analysis of the influence of system parameters and initial conditions on possible scenarios of kink dynamics is carried out. Critical and resonant kink velocities are found as functions of the impurity parameters.

**Keywords:** sine-Gordon equation, kink, soliton, breather, method of collective coordinates, impurity.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 20-31-90048.

**For citation:** Ekomasov EG, Kudryavtsev RV, Samsonov KYu, Nazarov VN, Kabanov DK. Kink dynamics of the sine-Gordon equation in a model with three identical attracting or repulsive impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(6):693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Одним из наиболее изученных в настоящее время нелинейных дифференциальных уравнений, относящихся к классу уравнений Клейна-Гордона, является уравнение синус-Гордона (УСГ) [1–3]. Оно применяется для описания волновых процессов в геологии, молекулярной биологии, физике, космологии [2–4]. Например, в физике конденсированного состояния УСГ применимо при описании динамики волн намагниченности в ферромагнитных кристаллах, движения дислокаций в кристаллах, процессов в джозефсоновских сверхпроводящих контактах, распространения волн зарядовой плотности в одномерных органических проводниках, распространения электромагнитных волн в сверхрешетке на основе графена, динамики ансамбля взаимодействующих дислокаций в линейном дефекте электроконвективной структуры жидкого кристалла [5–9]. УСГ, будучи нелинейным уравнением в частных производных, является полностью интегрируемым. Известно много его точных решений типа кинк, солитон, бризер и сложного мультисолитонного типа [1, 2, 10, 11]. Нахождение новых решений УСГ и исследование влияния различных возмущений и модификаций является актуальной задачей современной теории нелинейных волн. Для использования в реальных физических моделях часто в уравнения синус-Гордона добавляют

дополнительные слагаемые [1, 2, 12, 13]. Эти слагаемые нужны для учета наличия внешних сил и диссипации в системе, неоднородности параметров среды и пр. Получаемое в результате такой модификации уравнение синус-Гордона уже не имеет точных аналитических решений. В таких случаях часто применяется теория возмущений для солитонов или метод коллективных координат [1, 2, 13–15], с помощью которого удалось получить решения для большого количества подобных задач. Например, исследована динамика кинков, солитонов и бризеров под действием различного вида внешней силы (являющейся функцией времени и пространственных переменных) [16, 17]. Другим популярным направлением исследований является изучение влияния пространственной модуляции периодического потенциала (или примеси) на динамику солитонов УСГ [13, 14, 18–30]. Модель синус-Гордона с примесями (как моделируемыми в виде дельта-функции точечными, так и протяженными) применима для описания, например, случая многослойного ферромагнетика [31–33]. Показано, что кинк-примесное взаимодействие может приводить к генерации локализованных на притягивающих примесях волн (или примесной моды) [2, 23–30] и в результате — к значительному изменению динамики кинка. Также притягивающая примесь может приводить и к возбуждению мультисолитонов УСГ. Случай двух примесей [29, 33] дает большое разнообразие новых мультисолитонных решений и динамических эффектов по сравнению со случаем одной примеси. Можно ожидать еще большего разнообразия решений и эффектов при наличии трех и более примесей в системе. В данной работе исследуется динамика кинка в модели с тремя одинаковыми примесями с учетом возбуждения нелинейных локализованных на примесях волн.

## 1. Точечная примесь

Рассмотрим систему, определяемую лагранжианом

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 + (1 - \varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x - d) - \varepsilon \delta(x - 2d))(1 - \cos u) \right] dx, \quad (1)$$

где  $\varepsilon \delta(x)$  моделирует точечную примесь,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\varepsilon$  — константа,  $d$  — расстояние между соседними примесями. Заметим, что если параметр  $\varepsilon$  больше нуля, то имеем дело с притягивающей примесью, являющейся потенциальной ямой для кинка, если параметр  $\varepsilon$  меньше нуля, то имеем дело с отталкивающей примесью, являющейся потенциальным барьером для кинка. Лагранжиан (1) соответствует уравнению движения для скалярного поля  $u(x, t)$  вида

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = [\varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x - d) - \varepsilon \delta(x - 2d)] \sin u. \quad (2)$$

Уравнение (2) является модифицированным уравнением синус-Гордона. Члены возмущения в правой части уравнения (2) описывают, например, семислойные ферромагнитные структуры с различными значениями магнитной анизотропии  $\varepsilon$  в различных слоях [21, 23]. В случае если правая часть уравнения (2) равна нулю, то оно имеет решение в виде кинка

$$u_0 = 4 \operatorname{arctg} e^{x-X(t)} \quad (3)$$

(где  $X(t)$  — координата центра кинка) или пространственно-локализованное решение вида «покоящийся бризер» [1, 2]

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \frac{\sin \Omega t}{\operatorname{ch}((x - x_0)\sqrt{1 - \Omega^2})} \right), \quad (4)$$

где  $\Omega$  — частота бризера и  $x_0$  — координата его центра. Рассмотрим динамику кинка с учетом возможного возбуждения локализованных волн на примесях. Для теоретического анализа структуры и динамики решений уравнения (2) можно использовать приближённый метод коллективных координат, который ранее применялся к описанию динамики кинка в модели с одной точечной примесью [1, 2]. Наличие локализованных волн на трёх примесях (или примесных мод) учитывается путём введения трёх коллективных переменных,  $a_1 = a_1(t)$ ,  $a_2 = a_2(t)$  и  $a_3 = a_3(t)$ , которые являются амплитудами этих волн. Форма выражений примесных мод аналогична той, что использовалась ранее для случая одиночной примеси [2, 29]:

$$\begin{cases} u_1 = a_1(t) \exp(-\varepsilon|x|/2), \\ u_2 = a_2(t) \exp(-\varepsilon|x-d|/2), \\ u_3 = a_3(t) \exp(-\varepsilon|x-2d|/2). \end{cases} \quad (5)$$

В приближении колебаний малых амплитуд предположим, что  $a_n(t) = a_{n0} \cos(\Omega t + \theta_0)$ , где  $\theta_0$  — начальная фаза. Решая уравнение (2) при отсутствии кинка для случая одиночной примеси можно получить выражение для частоты примесной моды  $\Omega = \sqrt{(1 - \varepsilon^2/4)}$ . Общее решение задачи  $u$  будем искать в следующем виде:

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3. \quad (6)$$

Предположим, что  $\dot{X}(t)$ ,  $a_n(t)$ ,  $\dot{a}_n(t)$  достаточно малы (порядка  $\varepsilon$ ), то есть примесные моды с малыми амплитудами возбуждаются медленно движущимся кинком. В рамках этого приближения мы рассматриваем  $u_n \ll u_0$ . Тогда нелинейные члены в лагранжиане (1) могут быть разложены в ряд Тейлора вплоть до членов второго порядка по  $\varepsilon$  [2]:

$$\cos(u_0 + u_1 + u_2 + u_3) \approx \cos u_0 - \frac{(u_1 + u_2 + u_3)^2}{2} \cos u_0. \quad (7)$$

Подстановка (6) в (1) на основе приближения (7) приводит после интегрирования к новому эффективному лагранжиану, зависящему от новых переменных  $X(t)$ ,  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  и  $a_3(t)$ :

$$\begin{aligned} L \approx & -8 + 4\dot{X}^2(t) + \frac{\dot{a}_1^2(t)}{\varepsilon} + \frac{\dot{a}_2^2(t)}{\varepsilon} + \frac{\dot{a}_3^2(t)}{\varepsilon} + 2(\dot{a}_1(t)\dot{a}_2(t) + \dot{a}_2(t)\dot{a}_3(t)) E_1 + \\ & + 2\dot{a}_1(t)\dot{a}_3(t)E_2 + 2\varepsilon a_1(t) \left[ F_1(X(t)) + F_2(X(t))e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} + F_3(X(t))e^{-\varepsilon d} \right] + \\ & + 2\varepsilon a_2(t) \left[ F_1(X(t)) + F_3(X(t))e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} + F_2(X(t)) \right] + \\ & + 2\varepsilon a_3(t) \left[ F_1(X(t))e^{-\varepsilon d} + F_2(X(t))e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} + F_3(X(t)) \right] - \\ & - 2\varepsilon a_1^2(t) \left[ \frac{\Omega_0^2}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}U_1(X(t)) + \frac{1}{2}U_2(X(t))e^{-\varepsilon d} + \frac{1}{2}U_3(X(t))e^{-2\varepsilon d} \right] - \\ & - 2\varepsilon a_2^2(t) \left[ \frac{\Omega_1^2}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}U_1(X(t))e^{-\varepsilon d} + \frac{1}{2}U_2(X(t)) + \frac{1}{2}U_3(X(t))e^{-\varepsilon d} \right] - \\ & - 2\varepsilon a_3^2(t) \left[ \frac{\Omega_2^2}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}U_1(X(t))e^{-2\varepsilon d} + \frac{1}{2}U_2(X(t))e^{-\varepsilon d} + \frac{1}{2}U_3(X(t)) \right] - \\ & - 2\varepsilon a_1(t)a_2(t) \left[ -Y_1/2\varepsilon + U_1(X(t))e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} + U_2(X(t))e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} + (-1/2 + U_3(X(t)))e^{-\frac{3\varepsilon d}{2}} \right] - \\ & - 2\varepsilon a_1(t)a_3(t) \left[ -Y_2/2\varepsilon + U_1(X(t))e^{-\varepsilon d} + U_2(X(t))e^{-\varepsilon d} + U_3(X(t))e^{-\varepsilon d} \right] - \\ & - 2\varepsilon a_2(t)a_3(t) \left[ -Y_1/2\varepsilon + (-1/2 + U_1(X(t)))e^{-\frac{3\varepsilon d}{2}} + U_2(X(t))e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} + U_3(X(t))e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} \right] + \\ & + 2\varepsilon(U_1(X(t)) + U_2(X(t)) + U_3(X(t))). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
\text{Здесь } U_1(X(t)) &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t))}, & U_2(X(t)) &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - d)}, & U_3(X(t)) &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - 2d)}, \\
F_1(X(t)) &= \frac{\operatorname{sh}(X(t))}{\operatorname{ch}^2(X(t))}, & F_2(X(t)) &= \frac{\operatorname{sh}(X(t) - d)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - d)}, & F_3(X(t)) &= \frac{\operatorname{sh}(X(t) - 2d)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - 2d)}, \\
E_1 &= \frac{(2 + \varepsilon d)}{2\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{d}{2}\right) e^{-\frac{\varepsilon d}{2}}, & E_2 &= \frac{(1 + \varepsilon d)}{\varepsilon} e^{-\varepsilon d} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + d\right) e^{-\varepsilon d}, \\
\Omega_0^2 &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2} e^{-\varepsilon d} - \frac{\varepsilon^2}{2} e^{-2\varepsilon d}, & \Omega_1^2 &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \varepsilon^2 e^{-\varepsilon d}, \\
Y_1 &= \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon d}{2}} + 2 \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - 1\right) E_1, & Y_2 &= \varepsilon e^{-\varepsilon d} + \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - 1\right) E_2.
\end{aligned}$$

Уравнения движения для  $X(t)$ ,  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  и  $a_3(t)$  могут быть получены путём преобразования эффективного лагранжиана (8) в систему уравнений Лагранжа второго порядка:

$$\left\{ \begin{aligned}
& 4\ddot{X}(t) - \varepsilon(U'_1 + U'_2 + U'_3) - \varepsilon[a_1(F'_1 + F'_2 e_d + F'_3 e_d^2) + a_2([F'_1 + F'_3] e_d + F'_2) + \\
& \quad + a_3(F'_1 e_d^2 + F'_2 e_d + F'_3)] + \frac{1}{2}\varepsilon[a_1^2(U'_1 + U'_2 e_d^2 + U'_3 e_d^4) + a_2^2([U'_1 + U'_3] e_d^2 + U'_2) + \\
& \quad + a_3^2(U'_1 e_d^4 + U'_2 e_d^2 + U'_3) + 2a_1 a_2(U'_1 e_d + U'_2 e_d + U'_3 e_d^3) + 2a_1 a_3(U'_1 + U'_2 + U'_3) e_d^2 + \\
& \quad \quad \quad + 2a_2 a_3(U'_1 e_d^3 + U'_2 e_d + U'_3 e_d)] = 0, \\
& ([\ddot{a}_1 + a_1(1 - \varepsilon^2/4)][(1/\varepsilon)[1 - \varepsilon^2 E_1^2] - \varepsilon[E_1^2 + E_2^2 - 2\varepsilon E_1^2 E_2]] + \\
& \quad + a_1[[\varepsilon[U_1 + (U_2 - 1/2)e_d^2 + (U_3 - 1/2)e_d^4][1 - \varepsilon^2 E_1^2] - \\
& \quad - [\varepsilon[(U_1 + U_2 - 1/2)e_d + (U_3 - 1/2)e_d^3]]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2] - \\
& \quad - [\varepsilon[(U_1 + U_2 + U_3 - 1)e_d^2]]\varepsilon[E_2 - \varepsilon E_1^2]] + a_2[[\varepsilon[(U_1 + U_2 - 1/2)e_d + (U_3 - 1/2)e_d^3]] \times \\
& \quad \times [1 - \varepsilon^2 E_1^2] - [\varepsilon[(U_1 + U_3 - 1)e_d^2 + U_2]]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2] - \\
& \quad - [\varepsilon[(U_1 - 1/2)e_d^3 + (U_2 + U_3 - 1/2)e_d]]\varepsilon[E_2 - \varepsilon E_1^2]] + a_3[[\varepsilon[(U_1 + U_2 + U_3 - 1)e_d^2][1 - \varepsilon^2 E_1^2] - \\
& \quad - [\varepsilon[(U_1 - 1/2)e_d^3 + (U_2 + U_3 - 1/2)e_d]]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2] - [\varepsilon[(U_1 - 1/2)e_d^4 + \\
& \quad + (U_2 - 1/2)e_d^2 + U_3]]\varepsilon[E_2 - \varepsilon E_1^2]] - [\varepsilon[(F_1 + F_2 e_d + F_3 e_d^2)(1 - \varepsilon^2 E_1^2) - \\
& \quad - [(F_1 + F_3)e_d + F_2]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2] - [F_1 e_d^2 + F_2 e_d + F_3]\varepsilon[E_2 - \varepsilon E_1^2]])] = 0, \\
& ([\ddot{a}_2 + a_2(1 - \varepsilon^2/4)][(1/\varepsilon)[1 - \varepsilon^2 E_2^2] - 2\varepsilon E_1^2[1 - \varepsilon E_2]] + a_1[[\varepsilon[(U_1 + U_2 - 1/2)e_d + \\
& \quad + (U_3 - 1/2)e_d^3][1 - \varepsilon^2 E_2^2] - [\varepsilon[U_1 + (U_1 + 2U_2 + U_3 - 3/2)e_d^2 + (U_3 - 1/2)e_d^4]] \times \\
& \quad \times \varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2]] + a_2[[\varepsilon[U_2 + (U_1 + U_3 - 1)e_d^2][1 - \varepsilon^2 E_2^2] - [\varepsilon[(U_1 + 2U_2 + U_3 - 1)e_d + \\
& \quad + (U_1 + U_3 - 1)e_d^3]]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2]] + a_3[[\varepsilon[(U_3 + U_2 - 1/2)e_d + (U_1 - 1/2)e_d^3][1 - \varepsilon^2 E_2^2] - \\
& \quad - [\varepsilon[U_3 + (U_1 + 2U_2 + U_3 - 3/2)e_d^2 + (U_1 - 1/2)e_d^4]]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2]]) - \\
& \quad - (\varepsilon([(F_1 + F_3)e_d + F_2][1 - \varepsilon^2 E_2^2] - [F_1(1 + e_d^2) + 2F_2 e_d + F_3(1 + e_d^2)]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2])) = 0, \\
& ([\ddot{a}_3 + a_3(1 - \varepsilon^2/4)][(1/\varepsilon)[1 - \varepsilon^2 E_1^2] - \varepsilon[E_1^2 + E_2^2 - 2\varepsilon E_1^2 E_2]] + a_1[[\varepsilon[(U_1 + U_2 + U_3 - 1)e_d^2] \times \\
& \quad \times [1 - \varepsilon^2 E_1^2] - [\varepsilon[(U_1 + U_2 - 1/2)e_d + (U_3 - 1/2)e_d^3]]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2] - [\varepsilon[U_1 + (U_2 - 1/2)e_d^2 + \\
& \quad + (U_3 - 1/2)e_d^4]]\varepsilon[E_2 - \varepsilon E_1^2]] + a_2[[\varepsilon[(U_1 - 1/2)e_d^3 + (U_2 + U_3 - 1/2)e_d][1 - \varepsilon^2 E_1^2] - \\
& \quad - [\varepsilon[(U_1 + U_3 - 1)e_d^2 + U_2]]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2] - [\varepsilon[(U_1 + U_2 - 1/2)e_d + (U_3 - 1/2)e_d^3]]\varepsilon[E_2 - \varepsilon E_1^2]] + \\
& \quad + a_3[[\varepsilon[(U_1 - 1/2)e_d^4 + (U_2 - 1/2)e_d^2 + U_3][1 - \varepsilon^2 E_1^2] - [\varepsilon[(U_1 - 1/2)e_d^3 + (U_2 + U_3 - 1/2)e_d]] \times \\
& \quad \times \varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2] - [\varepsilon[(U_1 + U_2 + U_3 - 1)e_d^2]]\varepsilon[E_2 - \varepsilon E_1^2]]) - (\varepsilon[[F_1 e_d^2 + F_2 e_d + F_3][1 - \varepsilon^2 E_1^2] - \\
& \quad - [(F_1 + F_3)e_d + F_2]\varepsilon E_1[1 - \varepsilon E_2] - [F_1 + F_2 e_d + F_3 e_d^2]\varepsilon[E_2 - \varepsilon E_1^2]]) = 0,
\end{aligned} \right. \quad (9)$$

где  $e_d = e^{-\frac{\varepsilon d}{2}}$ . Из результирующего набора уравнений в предельном случае  $d \rightarrow \infty$  можно получить уже известное уравнение для случая движения кинка в модели с одной примесью [2]. При  $X(t) \rightarrow \infty$  уравнения (9) описывают связанные колебания примесных мод, рассмотренные ранее в [34]. Сначала рассмотрим влияние трёх примесей на динамику кинка для случая отталкивающей примеси при отсутствии примесных мод  $a_n(t) = 0$ :

$$\ddot{X}(t) + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\varepsilon \operatorname{th}(X(t) - x_k)}{2 \operatorname{ch}^2(X(t) - x_k)} \right) = 0, \quad (10)$$

где  $x_k$  — координата  $k$ -й примеси. Уравнение (10) для случая одной и двух примесей сводится к уже известному уравнению движения кинка [29]. Умножив его на  $\dot{X}(t)$  и проинтегрировав по времени, получим

$$\dot{X}^2(t) - \dot{X}^2(0) - \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x_k)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(0) - x_k)} \right) \right) = 0. \quad (11)$$

Если кинк движется от большого расстояния  $X(0) \rightarrow -\infty$ , то можем несколько упростить вид уравнения (11):

$$\dot{X}^2(t) - \dot{X}^2(0) - \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x_k)} \right) = 0. \quad (12)$$

С помощью уравнения (12) можно найти критические скорости динамики кинка для случая примеси в виде барьера (см. ниже, рис. 2). Используя систему уравнений (9), можно найти все возможные сценарии динамики кинка для случая отталкивающих и притягивающих примесей. Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  кинк находится на относительно большом расстоянии от примесей,  $X(0) = -10$ , и затем движется с начальной скоростью  $\dot{X}(0)$ , а примесные моды отсутствуют  $a_1(0) = \dot{a}_1(0) = a_2(0) = \dot{a}_2(0) = a_3(0) = \dot{a}_3(0) = 0$ . На рис. 1, а в зависимости от начальной скорости найдены следующие сценарии динамики кинка для случая отталкивающих примесей: отражение от первого барьера при скорости меньшей некоторой критической (линия 3, скорость 0.502), прохождение через первый барьер и отражение от второго (линия 2, скорость 0.5035), прохождение через все три примеси при скорости большей критической (линия 1, скорость 0.505).

На рис. 1, b–d представлены возможные случаи динамики кинка при различных значениях начальной скорости и расстояния между притягивающими примесями. При прохождении кинка на примесях возбуждаются высокоамплитудные локализованные колебания бризерного типа, которые существенно влияют на динамику кинка. Во-первых, значительная часть энергии кинка может быть потрачена на их возбуждение. Во-вторых, последующее взаимодействие кинка с локализованными на притягивающих примесях волнами может привести к резонансным эффектам (например, в случае одиночной примеси при некоторых параметрах может наблюдаться отражение от потенциальной ямы [1, 2]). Когда примеси расположены достаточно близко друг к другу, в зависимости от начальной скорости найдены следующие случаи: прохождение кинка при  $v_0 = 0.27$  (кривая 1, рис. 1, b), случай квазитуннелирования при  $v_0 = 0.08$  (кривая 2, рис. 1, b), колебание на трёх примесях с последующим отражением при  $v_0 = 0.09$  (кривая 3, рис. 1, b), случай резонансного отражения при  $v_0 = 0.24$  (кривая 5, рис. 1, b). Можно выделить случай при  $v_0 = 0.06$ : кинк может колебаться на трёх примесях, выступающих как одна коллективная примесь, в течение длительного времени (кривая 4, рис. 1, b). При увеличении расстояния между примесями можно наблюдать пиннинг кинка на каждой примеси отдельно и более сложный сценарий пиннинга кинка с его перескоком между примесями (см. рис. 1, c). Также, изменяя расстояние между примесями, можно получить те же сценарии динамики кинка, как и для случая изменения начальной скорости (см. рис 1, d).

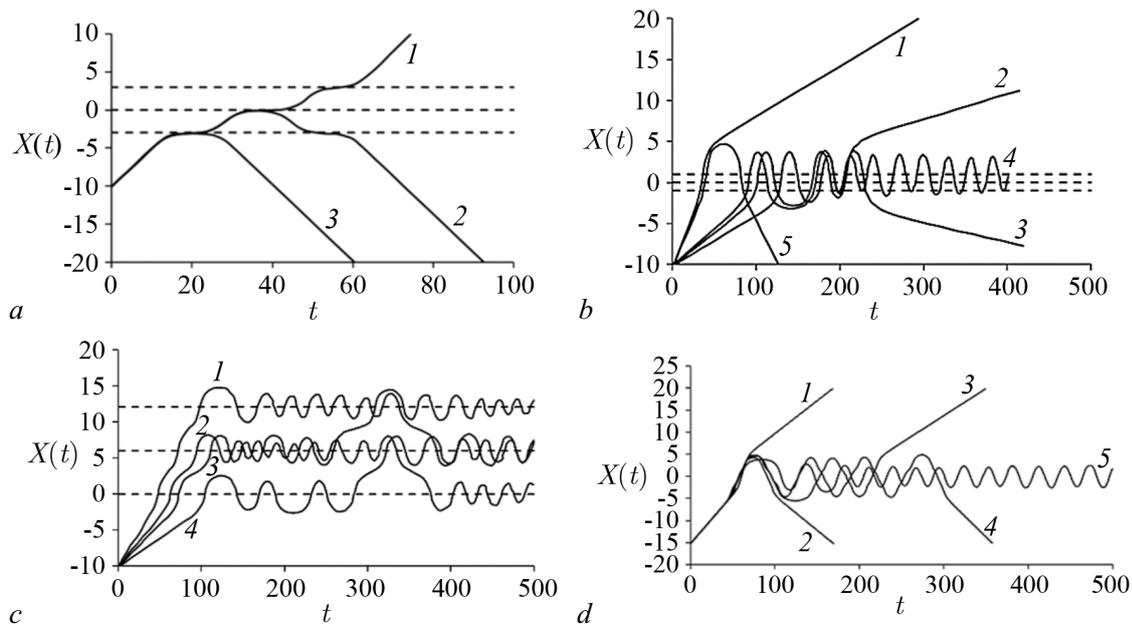


Рис. 1. Зависимость координаты центра кинка  $X$  от времени  $t$ .  $a$  – Случай барьера при  $\varepsilon = -0.5$  и  $d = 3$ :  $v_0 = 0.505$  (линия 1),  $v_0 = 0.5035$  (2),  $v_0 = 0.502$  (3).  $b$  – Случай ямы при  $d = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ :  $v_0 = 0.27$  (линия 1),  $v_0 = 0.08$  (2),  $v_0 = 0.09$  (3),  $v_0 = 0.06$  (4),  $v_0 = 0.24$  (5).  $c$  – Случай ямы при  $\varepsilon = 0.5$ ,  $d = 6$ :  $v_0 = 0.188$  (линия 1),  $v_0 = 0.138$  (2),  $v_0 = 0.1165$  (3),  $v_0 = 0.078$  (4).  $d$  – Случай ямы при  $\varepsilon = 0.5$ ,  $v_0 = 0.22$ :  $d = 3.5$  (линия 1),  $d = 2.5$  (2),  $d = 2.698$  (3),  $d = 3$  (4),  $d = 1.2$  (5)

Fig. 1. Dependence of the kink center coordinate  $X$  on the time  $t$ .  $a$  – The case of a barrier at  $\varepsilon = -0.5$  and  $d = 3$ :  $v_0 = 0.505$  (line 1),  $v_0 = 0.5035$  (2),  $v_0 = 0.502$  (3).  $b$  – The case of a well at  $d = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ :  $v_0 = 0.27$  (line 1),  $v_0 = 0.08$  (2),  $v_0 = 0.09$  (3),  $v_0 = 0.06$  (4),  $v_0 = 0.24$  (5).  $c$  – The case of a well at  $\varepsilon = 0.5$ ,  $d = 6$ :  $v_0 = 0.188$  (line 1),  $v_0 = 0.138$  (2),  $v_0 = 0.1165$  (3),  $v_0 = 0.078$  (4).  $d$  – The case of a well at  $\varepsilon = 0.5$ ,  $v_0 = 0.22$ :  $d = 3.5$  (line 1),  $d = 2.5$  (2),  $d = 2.698$  (3);  $d = 3$  (4);  $d = 1.2$  (5)

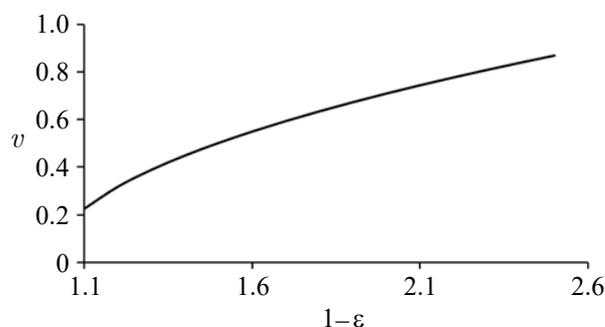


Рис. 2. Зависимость минимальной скорости прохождения кинка над тремя примесями от параметра  $1 - \varepsilon$   
 Fig. 2. Dependence of the minimum speed of the kink passage over three impurities on the parameter  $1 - \varepsilon$

## 2. Случай протяжённых примесей

Для практических применений необходимо рассмотреть более реалистичский с физической точки зрения случай протяжённых примесей. Уравнение синус-Гордона для случая протяжённых примесей имеет вид

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x) \sin u = 0, \quad (13)$$

где  $K(x)$  — пространственная неоднородность периодического потенциала. Можно сравнить полученные для протяженной примеси результаты со случаем точечных примесей. УСГ в модели с протяженными примесями можно решить только с помощью численных методов. На сегодняшний день разработано достаточно большое количество методов численного решения подобных уравнений [2, 14, 25, 26]. Воспользуемся методом конечных разностей. Выберем трехслойную явную схему решения, с аппроксимацией производных на пятиточечном шаблоне типа «крест», который применялся ранее для более простых модификаций УСГ (см., например, [24]). Это численная схема второго порядка аппроксимации по  $\Delta x$  и  $\tau$ , где  $\Delta x$  — шаг по координате,  $\tau$  — шаг по времени. Она обладает условной устойчивостью  $(\tau/\Delta x) \leq 1/2$ . В нашем случае схема является «одношаговой», использует сравнительно небольшое количество обращений к памяти и обладает потенциалом для оптимизации вычислительного алгоритма. Частотный анализ колебаний локализованных волн, которые рассчитываются численно, выполняется с помощью дискретного преобразования Фурье. Для его расчёта используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Этот алгоритм обладает хорошей производительностью, однако наиболее оптимизированные реализации БПФ накладывают определенные ограничения на исходный ряд. Для подготовки данных исходная дискретная зависимость интерполируется кубическим сплайном с естественными граничными условиями, из которого строится новая дискретная зависимость на равномерной сетке с увеличенным количеством точек аппроксимации. Из новой дискретной зависимости рассчитывается частотный спектр с помощью БПФ. Для повышения точности определения частоты точки максимумов частотного спектра уточняются с помощью интерполяции сплайном Акимы. Рассмотрим функцию  $K(x)$  прямоугольного вида:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| > W/2, \quad |x+d| > W/2, \quad |x-d| > W/2, \\ K, & \text{если } |x| \leq W/2, \quad |x+d| \leq W/2, \quad |x-d| \leq W/2. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть в начальный момент времени на некотором расстоянии от примесей имеется кинк, движущийся с постоянной скоростью. При прохождении кинка через область примесей исследуем возможные сценарии его динамики. Рассмотрим вначале, как и в предыдущем параграфе, случай барьера. Для определенности начало координат положим в центре второго барьера, центры других барьеров будут находиться по обе стороны от него с безразмерными координатами  $x_1 = -3$  и  $x_3 = 3$ ,  $W = 1$ ,  $K = 2$ . Пусть кинк движется из бесконечности в сторону потенциальных барьеров. Исключая взаимодействие кинка с барьерами в начальный момент времени, в нашей задаче необходимо начальное положение кинка задавать достаточно далеко от барьеров.

Численный анализ показывает (рис. 3, а), что возможны следующие сценарии динамики кинка: кривая 1 — отражение кинка, движущегося со скоростью 0.59, от первого потенциального барьера; кривая 2 — прохождение кинка, движущегося со скоростью 0.595, через первый барьер, отражение от второго и дальнейшее его замкнутое движение между первым и вторым (пиннинг); кривая 3 — прохождение кинка, движущегося со скоростью 0.59855, через первый барьер и отражение от второго; кривая 4 — прохождение кинка, движущегося со скоростью 0.5986, через первый и второй барьеры, отражение от третьего и дальнейшее его замкнутое движение между вторым и третьим (пиннинг); кривая 5 — прохождение кинка, движущегося со скоростью 0.602, через три барьера. Колебания кинка между первым и вторым, между вторым и третьим барьерами носят не гармонический характер. Отметим, что для случая протяженной примеси были найдены как режимы динамики кинка, которые были получены для точечных примесей на рис. 1, так и новые режимы, такие как пиннинг. Если сравнивать величины скоростей кинка до и после взаимодействия с барьерами, то оказывается, что эти скорости практически одинаковы, то есть взаимодействие кинк – примесь практически упругое. На рис. 4 представлена зависимость минимальной скорости прохождения от  $K$  для случая протяженной примеси с  $W = 0.5$  и 1.

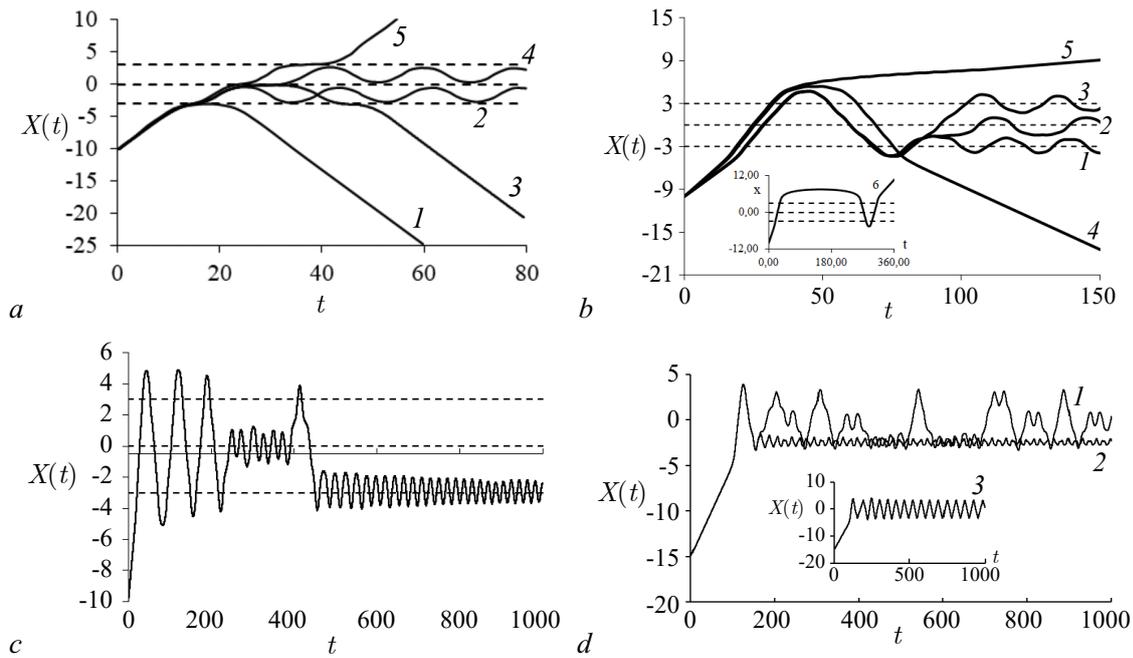


Рис. 3. Зависимость координаты центра кинка  $X$  от времени  $t$ .  $a$  – Случай барьера при  $W = 1$ ,  $K = 2$ ,  $d = 3$ :  $v_0 = 0.59$  (линия 1),  $v_0 = 0.595$  (2),  $v_0 = 0.59855$  (3),  $v_0 = 0.5986$  (4),  $v_0 = 0.602$  (5).  $b$  – Случай ямы при  $W = 1$ ,  $K = 0.5$ ,  $d = 2$ :  $v_0 = 0.28$  (линия 1),  $v_0 = 0.283043899$  (2),  $v_0 = 0.2849$  (3),  $v_0 = 0.33$  (4),  $v_0 = 0.343$  (5),  $v_0 = 0.3426$  (6).  $c$  – Случай ямы при  $d = 2$ ,  $W = 1$ ,  $K = 0.5$ ,  $v_0 = 0.3$ .  $d$  – Случай ямы при  $W = 0.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $v_0 = 0.1$ :  $d = 1.52$  (линия 1),  $d = 1.55$  (2),  $d = 1.505$  (3)

Fig. 3. Dependence of the coordinate of the center of kink  $X$  on time  $t$ .  $a$  – The case of a barrier at  $W = 1$ ,  $K = 2$ ,  $d = 3$ :  $v_0 = 0.59$  (line 1),  $v_0 = 0.595$  (2),  $v_0 = 0.59855$  (3),  $v_0 = 0.5986$  (4),  $v_0 = 0.602$  (5).  $b$  – The case of a well at  $W = 1$ ,  $K = 0.5$ ,  $d = 2$ :  $v_0 = 0.28$  (line 1),  $v_0 = 0.283043899$  (2),  $v_0 = 0.2849$  (3),  $v_0 = 0.33$  (4),  $v_0 = 0.343$  (5),  $v_0 = 0.3426$  (6).  $c$  – The case of a well at  $d = 2$ ,  $W = 1$ ,  $K = 0.5$ ,  $v_0 = 0.3$ .  $d$  – The case of a well at  $W = 0.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $v_0 = 0.1$ :  $d = 1.52$  (line 1),  $d = 1.55$  (2),  $d = 1.505$  (3)

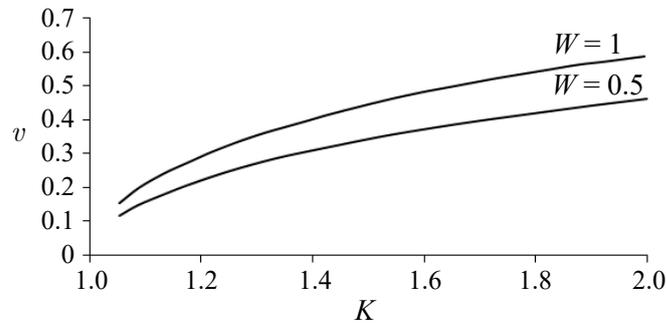


Рис. 4. Зависимость минимальной скорости прохождения кинка над тремя примесями от параметра  $K$

Fig. 4. Dependence of the minimum velocity of the kink passage over three impurities on the parameter  $K$

Сравнение с результатами, полученными для случая точечных примесей, показывает качественное совпадение зависимостей.

Рассмотрим случай потенциальной ямы. На рис. 5 показаны возможные сценарии динамики кинка для случая  $K = 0.5$ ,  $W = 1$ ,  $d = 2$ . Так, на рис. 5,  $a$  показан случай пиннинга на первой яме при  $v_0 = 0.28$ , на рис. 5,  $b$  – случай резонансного отражения кинка при  $v_0 = 0.33$ ,

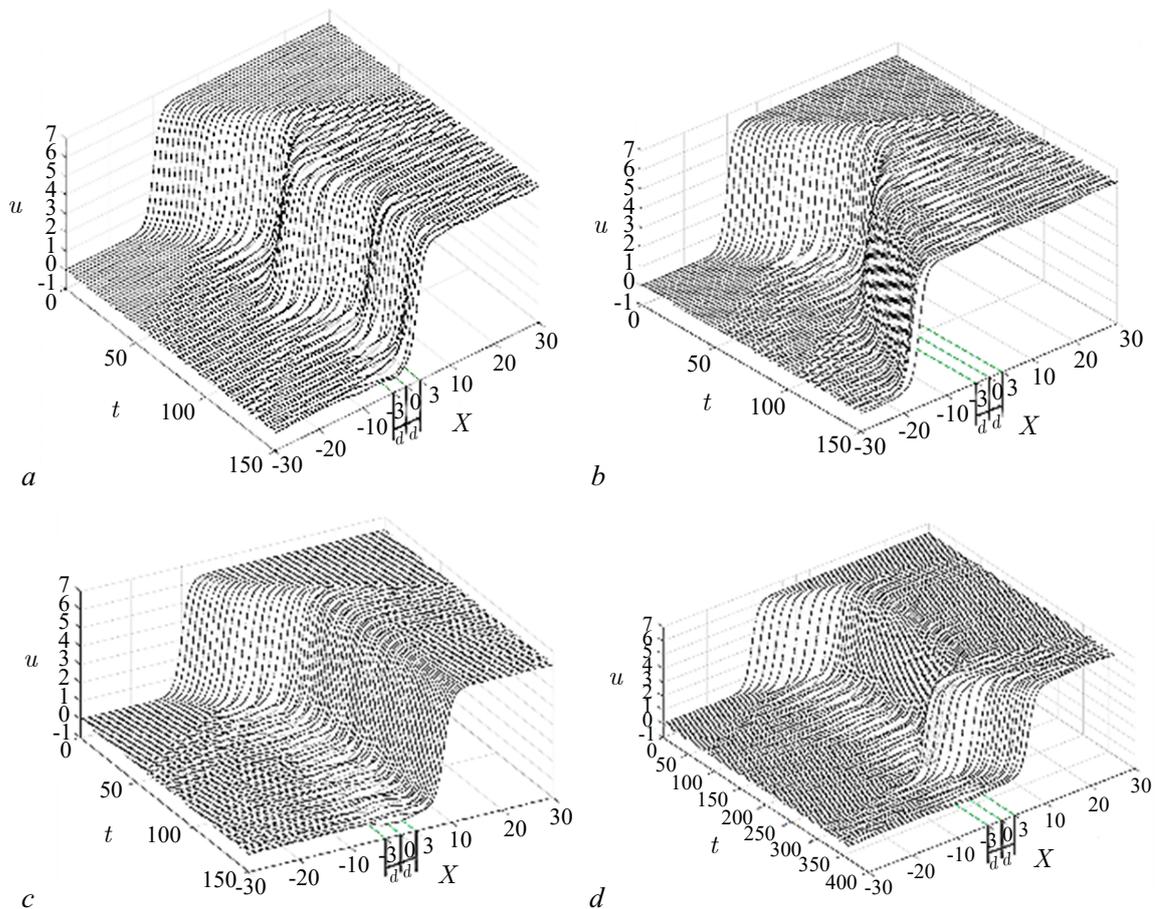


Рис. 5. Зависимость  $u(X, t)$  при  $K = 0.5, W = 1, d = 2$ :  $a - v_0 = 0.28, b - v_0 = 0.33, c - v_0 = 0.343, d - v_0 = 0.3426$

Fig. 5. Dependence of  $u(X, t)$  at  $K = 0.5, W = 1, d = 2$ :  $a - v_0 = 0.28, b - v_0 = 0.33, c - v_0 = 0.343, d - v_0 = 0.3426$

на рис. 5,  $c$  — случай прохождения всех трёх примесей при  $v_0 = 0.343$ , на рис. 5,  $d$  — случай резонансного прохождения или «квантитуннелирования» кинка при  $v_0 = 0.3426$ . Из рисунка видно, что взаимодействие кинка и примеси неупругое и сопровождается излучением свободных волн и возбуждением локализованных волн бризерного типа на примесях.

При начальной скорости кинка  $v_0$  меньше некоторой критической скорости прохождения через три примеси  $v_{cr}$  наблюдается его пиннинг на первой, второй и третьей примесях (см. кривые 1, 2, 3 на рис. 3,  $b$ ). Из рис. 3,  $b$  видно, что в начальный момент времени эти колебания носят не гармонический характер. Однако через большой промежуток времени колебания осцилляторов синхронизируются и становятся более гармоническими. Наблюдались также сценарии пиннинга с перескоком кинка из одной «потенциальной ямы» на другую (см. рис. 3,  $c$ ). Такое поведение кинка обусловлено потерей энергии на излучение, возбуждением внутренних степеней свободы кинка (например, пульсационной моды), возбуждением локализованных колебаний бризерного типа на примесях и их взаимодействием между собой. Отметим, что частоты колебаний кинка на центральной и боковых примесях, хотя примеси и являются одинаковыми, не равны между собой ( $\omega_a = 0.301, \omega_b = 0.318, \omega_c = 0.301$ ). Так же, как и для случая одной и двух примесей [27, 28, 31], при определенных значениях скоростей меньше  $v_{cr}$  наблюдается интересный динамический эффект резонансного отражения кинка от притягивающих примесей, являющихся потенциальными

ямами (кривая 4 рис. 3, b). В данном случае кинк, пройдя через области примесей, останавливается, потом начинает двигаться обратно и уходит в противоположную начальной сторону со скоростью 0.19. Данный эффект, так же, как и для случая одной и двух примесей, носит резонансный характер, связанный со взаимодействием кинка с зарождающимися на примесях локализованными волнами бризерного типа. С потерей кинетической энергии кинка на генерацию бризеров и излучение волн связано уменьшение его конечной скорости по сравнению с начальной. Наблюдался, как и в случае двух притягивающих примесей [29], еще один резонансный эффект — «квазитуннелирование». В этом случае кинк, имея скорость меньше минимально необходимой для преодоления областей трех примесей, проходит через них (кривая 6 рис. 3, b). При дальнейшем увеличении скорости кинка до определенного значения  $v_{cr}$  (кривая 5 рис. 3, b) он уходит на бесконечность. Подобное динамическое поведение кинка было получено ранее и для случая двух примесей [29].

Разные сценарии динамики кинка можно получить при изменении расстояния между примесями, не меняя начальной скорости и параметров самих примесей. Например, для системы с параметрами  $W = 1$ ,  $K = 0.5$  и начальной скоростью  $v_0 = 0.1$ , до  $d_1 \approx 1.505$  кинк будет колебаться в области всех трёх примесей, то есть примеси действуют как одна эффективная (рис. 1, b, кривая 4). При дальнейшем увеличении  $d$  сценарии динамики меняются (см. рис. 3, d, кривые 1 и 2). Для  $d = 1.52$  колебания носят неустойчивый характер. Кинк перескакивает между единичными примесями и эффективной примесью. Уже при  $d = 1.55$  кинк совершает лишь одно неполное колебание в области эффективной примеси и захватывается первой примесью. Этот сценарий аналогичен случаю, показанному на рис. 3, b, кривая 1. При дальнейшем увеличении  $d$  до некоторого значения  $d_2 \approx 2.3$  характер колебаний кинка снова меняется. Если в области  $1.505 < d < 2.3$  кинк испытывает колебания в области эффективной примеси с последующим захватом на одной из единичных, то при  $2.3 < d < 2.485$  кинк проходит через все примеси и уходит в бесконечность. В области  $2.485 < d < 3.64$  коллективное влияние примесей продолжает уменьшаться, переходные процессы уменьшаются и кинк захватывается единичными примесями. В этой области появляются сценарии захвата кинка примесью без переходных процессов, однако такие сценарии являются неустойчивыми и пропадают при малейших изменениях расстояния между примесями. В области  $3.64 < d < 3.8$  кинк не испытывает переходные процессы и сразу захватывается третьей примесью. При  $3.8 < d < 5.7$  наблюдается пиннинг кинка на второй примеси и, начиная с  $d = 5.8$ , кинк захватывается уже первой примесью. Отметим, что минимальная скорость, необходимая кинку для прохождения одной примеси, в нашем случае равна 0.12. Похожие сценарии динамики кинка можно получить, не меняя его скорость и расстояние между примесями, а меняя их параметры и  $W$ . Численный счет показал, что зависимость конечной скорости кинка от величины начальной скорости содержит много резонансных скоростей (рис. 6). Эти скорости, как и для случая одной и двух примесей, появляются с определенной периодичностью, и при приближении к критической скорости прохождения над тремя примесями их число увеличивается. Вертикальная линия на рис. 6 соответствует сценарию «квазитуннелирования», описанному выше.

При превышении величины  $v_{cr}$  конечная скорость кинка нелинейно возрастает. Такая же зависимость характерна и для случая одной

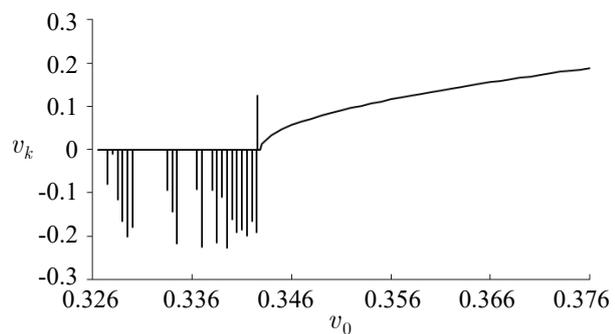


Рис. 6. Зависимость конечной скорости кинка  $v_k$  от начальной  $v_0$  при  $W = 1$ ,  $K = 0.5$  и  $d = 2$

Fig. 6. Dependence of the final kink velocity  $v_k$  on the initial one  $v_0$  at  $W = 1$ ,  $K = 0.5$  and  $d = 2$

и двух примесей [23, 29]. Для рассмотренного нами случая  $W = 1$ ,  $K = 0.5$ ,  $d = 2$  формула, полученная в [3] для случая одной примеси

$$v_k^2 = c(v_0^2 - v_{\min}^2), \quad (15)$$

и связывающая конечную скорость кинка с начальной, имеющей величину больше  $v_{\text{cr}}$ , при значении коэффициента  $c = 1.47$  хорошо описывает величину конечной скорости. Анализ результатов численного эксперимента показывает, что этот коэффициент в нашем случае является функцией от параметров  $W$ ,  $K$ ,  $d$  и  $n$  — количество примесей, а эту зависимость приближенно можно представить в виде

$$c_{\text{theor}} = WKdn/2. \quad (16)$$

Например, для рассмотренного выше случая  $c_{\text{theor}} = 1.5$  с достаточно большой точностью совпадает со значением  $c = 1.47$ , полученным численно.

### Заключение

В статье рассмотрена нелинейная динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми примесями, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга. Все возможные сценарии динамики кинка определялись и описывались с учетом резонансных эффектов. Для случая точечной примеси, описываемой с помощью дельта-функции, с помощью метода коллективных переменных получена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику кинка и колебания локализованных на примесях волн. Показано, что значительные различия наблюдаются при взаимодействии кинка с отталкивающей и притягивающей примесью. Так, резонансные эффекты отражения от и прохождения над примесями наблюдаются только для случая притягивающих примесей. Динамика кинка в случае протяженных примесей была исследована с помощью численного метода конечных разностей с явной схемой интегрирования. Установлено, что найденные сценарии динамики кинка для протяженной примеси прямоугольного вида качественно похожи на сценарии, полученные для точечной примеси, описываемой с помощью дельта-функции. Проведён анализ влияния параметров системы и начальных скоростей на возможные сценарии динамики кинка. Найден критический и резонансный скорости кинка как функции от параметров примеси. Показано, что меняя расстояние между примесями, можно эффективно управлять величиной кинк-примесного взаимодействия. Найден критический величины расстояния между примесями, когда три примеси действуют на кинк как одна эффективная и когда примеси действуют на кинк практически независимо друг от друга.

### Список литературы

1. Белова Т. И., Кудрявцев А. Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // УФН. 1997. Т. 167, № 4. С. 377–406. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199704b.0377.
2. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P. G., Williams F. (eds) The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
3. Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008. 536 с.
4. Chevizovich D., Michieletto D., Mvogo A., Zakiryaynov F., Zdravković S. A review on nonlinear DNA physics // R. Soc. Open Sci. 2020. Vol. 7, no. 11. P. 200774. DOI: 10.1098/rsos.200774.
5. Starodub I. O., Zolotaryuk Y. Fluxon interaction with the finite-size dipole impurity // Phys. Lett. A. 2019. Vol. 383, no. 13. P. 1419–1426. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.01.051.
6. Kryuchkov S. V., Kukhar E. I. Nonlinear electromagnetic waves in semi-Dirac nanostructures with superlattice // Eur. Phys. J. B. 2020. Vol. 93, no. 4. P. 62. DOI: 10.1140/epjb/e2020-100575-4.

7. *Kiselev V. V., Raskovalov A. A., Batalov S. V.* Nonlinear interaction of domain walls and breathers with a spin-wave field // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019. Vol. 127. P. 217–225. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.06.013.
8. *Екомасов Е. Г., Назаров В. Н., Гумеров А. М., Самсонов К. Ю., Муртазин Р. Р.* Управление с помощью внешнего магнитного поля параметрами магнитного бризера в трёхслойной ферромагнитной структуре // *Письма о материалах*. 2020. Т. 10, № 2. С. 141–146. DOI: 10.22226/2410-3535-2020-2-141-146.
9. *Делев В. А., Назаров В. Н., Скалдин О. А., Батыршин Э. С., Екомасов Е. Г.* Сложная динамика каскада кинк-антикинкковых взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // *Письма в ЖЭТФ*. 2019. Т. 110, № 9. С. 607–613. DOI: 10.1134/S0370274X19210070.
10. *Kälbermann G.* The sine-Gordon wobble // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. Vol. 37, no. 48. P. 11603–11612. DOI: 10.1088/0305-4470/37/48/006.
11. *Ferreira L. A., Piette B., Zakrzewski W. J.* Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 77, no. 3. P. 036613. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036613.
12. *Dorey P., Gorina A., Perapechka I., Romańczukiewicz T., Shnir Y.* Resonance structures in kink-antikink collisions in a deformed sine-Gordon model // *Journal of High Energy Physics*. 2021. Vol. 2021, no. 9. P. 145. DOI: 10.1007/JHEP09(2021)145.
13. *Fabian A. L., Kohl R., Biswas A.* Perturbation of topological solitons due to sine-Gordon equation and its type // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2009. Vol. 14, no. 4. P. 1227–1244. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.01.013.
14. *Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G.* Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, no. 5. P. 052902. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052902.
15. *Kivshar Y. S., Pelinovsky D. E., Cretegnny T., Peyrard M.* Internal modes of solitary waves // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, no. 23. P. 5032–5035. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5032.
16. *González J. A., Bellorín A., Guerrero L. E.* Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65, no. 6. P. 065601. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.065601.
17. *González J. A., Bellorín A., García-Ñustes M. A., Guerrero L. E., Jiménez S., Vázquez L.* Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations // *Phys. Lett. A*. 2017. Vol. 381, no. 24. P. 1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
18. *Gomide O. M. L., Guardia M., Seara T. M.* Critical velocity in kink-defect interaction models: Rigorous results // *Journal of Differential Equations*. 2020. Vol. 269, no. 4. P. 3282–3346. DOI: 10.1016/j.jde.2020.02.030.
19. *Javidan K.* Analytical formulation for soliton-potential dynamics // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 78, no. 4. P. 046607. DOI: 10.1103/PhysRevE.78.046607.
20. *Piette B., Zakrzewski W. J.* Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2007. Vol. 40, no. 22. P. 5995–6010. DOI: 10.1088/1751-8113/40/22/016.
21. *Al-Alawi J. H., Zakrzewski W. J.* Scattering of topological solitons on barriers and holes of deformed Sine-Gordon models // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2008. Vol. 41, no. 31. P. 315206. DOI: 10.1088/1751-8113/41/31/315206.
22. *Baron H. E., Zakrzewski W. J.* Collective coordinate approximation to the scattering of solitons in modified NLS and sine-Gordon models // *Journal of High Energy Physics*. 2016. Vol. 2016, no. 6. P. 185. DOI: 10.1007/JHEP06(2016)185.
23. *Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Муртазин Р. Р., Назаров В. Н.* Трансформация солитонов уравнения синус-Гордона в моделях с переменными коэффициентами и затуханием // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015. Т. 55, № 4. С. 631–640. DOI: 10.7868/S0044466915040031.
24. *Goodman R. H., Haberman R.* Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce

- resonance // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 195, no. 3–4. P. 303–323. DOI: 10.1016/j.physd.2004.04.002.
25. Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Закирьянов Ф. К., Кудрявцев Р. В. Структура и свойства четырехкинковых мультисолитонов уравнения синус-Гордона // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014. Т. 54, № 3. С. 481–495. DOI: 10.7868/S0044466914030077.
  26. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Murtazin R. R.* Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2016. Vol. 40, no. 17. P. 6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.
  27. *Екомасов Е. Г., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В.* О возможности наблюдения резонансного взаимодействия кинков уравнения синус-Гордона с локализованными волнами в реальных физических системах // *Письма в ЖЭТФ*. 2015. Т. 101, № 12. С. 935–939. DOI: 10.7868/S0370274X15120127.
  28. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 312. P. 198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
  29. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // *Brazilian Journal of Physics*. 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
  30. *Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V., Fakhretdinov M. I.* Excitation of large-amplitude localized nonlinear waves by the interaction of kinks of the sine-Gordon equation with attracting impurity // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 15, no. 1. P. 21–34. DOI: 10.20537/nd190103.
  31. *Ekomasov E. G., Murtazin R. R., Bogomazova O. B., Gumerov A. M.* One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* 2013. Vol. 339. P. 133–137. DOI: 10.1016/j.jmmm.2013.02.042.
  32. *Ekomasov E. G., Murtazin R. R., Nazarov V. N.* Excitation of magnetic inhomogeneities in three-layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* 2015. Vol. 385. P. 217–221. DOI: 10.1016/j.jmmm.2015.03.019.
  33. *Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V.* One-dimensional dynamics of magnetic inhomogeneities in a three- and five-layer ferromagnetic structure with different values of the magnetic parameters // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. Vol. 1389. P. 012004. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012004.
  34. *Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В.* Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями // *Известия вузов. ПНД*. 2022. Т. 30, № 6. С. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
  35. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
  36. *Фалейчик Б. В.* Одношаговые методы численного решения задачи Коши. Минск: БГУ, 2010. 42 с.

## References

1. Belova TI, Kudryavtsev AE. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.* 1997;40(4):359–386. DOI: 10.1070/PU1997v040n04ABEH000227.
2. Cuevas-Maraver J, Kevrekidis PG, Williams F, editors. *The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics*. Cham: Springer; 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
3. Braun OM, Kivshar YS. *The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2004. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-662-10331-9.

4. Chevizovich D, Michieletto D, Mvogo A, Zakiryanov F, Zdravković S. A review on nonlinear DNA physics. *R. Soc. Open Sci.* 2020;7(11):200774. DOI: 10.1098/rsos.200774.
5. Starodub IO, Zolotaryuk Y. Fluxon interaction with the finite-size dipole impurity. *Phys. Lett. A.* 2019;383(13):1419–1426. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.01.051.
6. Kryuchkov SV, Kukhar EI. Nonlinear electromagnetic waves in semi-Dirac nanostructures with superlattice. *Eur. Phys. J. B.* 2020;93(4):62. DOI: 10.1140/epjb/e2020-100575-4.
7. Kiselev VV, Raskovalov AA, Batalov SV. Nonlinear interaction of domain walls and breathers with a spin-wave field. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2019;127:217–225. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.06.013.
8. Ekomasov EG, Nazarov VN, Gumerov AM, Samsonov KY, Murtazin RR. External magnetic field control of the magnetic breather parameters in a three-layer ferromagnetic structure. *Letters on Materials.* 2020;10(2):141–146 (in Russian). DOI: 10.22226/2410-3535-2020-2-141-146.
9. Delev VA, Nazarov VN, Scaldin OA, Batyrshin ES, Ekomasov EG. Complex dynamics of the cascade of kink–antikink interactions in a linear defect of the electroconvective structure of a nematic liquid crystal. *JETP Letters.* 2019;110(9):607–612. DOI: 10.1134/S0021364019210069.
10. Kälbermann G. The sine-Gordon wobble. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004;37(48):11603–11612. DOI: 10.1088/0305-4470/37/48/006.
11. Ferreira LA, Piette B, Zakrzewski WJ. Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model. *Phys. Rev. E.* 2008;77(3):036613. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036613.
12. Dorey P, Gorina A, Perapechka I, Romańczukiewicz T, Shnir Y. Resonance structures in kink-antikink collisions in a deformed sine-Gordon model. *Journal of High Energy Physics.* 2021;2021(9):145. DOI: 10.1007/JHEP09(2021)145.
13. Fabian AL, Kohl R, Biswas A. Perturbation of topological solitons due to sine-Gordon equation and its type. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2009;14(4):1227–1244. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.01.013.
14. Saadatmand D, Dmitriev SV, Borisov DI, Kevrekidis PG. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect. *Phys. Rev. E.* 2014;90(5):052902. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052902.
15. Kivshar YS, Pelinovsky DE, Cretegny T, Peyrard M. Internal modes of solitary waves. *Phys. Rev. Lett.* 1998;80(23):5032–5035. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5032.
16. González JA, Bellorín A, Guerrero LE. Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations. *Phys. Rev. E.* 2002;65(6):065601. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.065601.
17. González JA, Bellorín A, García-Ñustes MA, Guerrero LE, Jiménez S, Vázquez L. Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations. *Phys. Lett. A.* 2017;381(24):1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
18. Gomide OML, Guardia M, Seara TM. Critical velocity in kink-defect interaction models: Rigorous results. *Journal of Differential Equations.* 2020;269(4):3282–3346. DOI: 10.1016/j.jde.2020.02.030.
19. Javidan K. Analytical formulation for soliton-potential dynamics. *Phys. Rev. E.* 2008;78(4):046607. DOI: 10.1103/PhysRevE.78.046607.
20. Piette B, Zakrzewski WJ. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2007;40(22):5995–6010. DOI: 10.1088/1751-8113/40/22/016.
21. Al-Alawi JH, Zakrzewski WJ. Scattering of topological solitons on barriers and holes of deformed Sine–Gordon models. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2008;41(31):315206. DOI: 10.1088/1751-8113/41/31/315206.
22. Baron HE, Zakrzewski WJ. Collective coordinate approximation to the scattering of solitons in modified NLS and sine-Gordon models. *Journal of High Energy Physics.* 2016;2016(6):185. DOI: 10.1007/JHEP06(2016)185.
23. Gumerov AM, Ekomasov EG, Murtazin RR, Nazarov VN. Transformation of sine-Gordon solitons in models with variable coefficients and damping. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2015;55(4):628–637. DOI: 10.1134/S096554251504003X.

24. Goodman RH, Haberman R. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce resonance. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004;195(3–4):303–323. DOI: 10.1016/j.physd.2004.04.002.
25. Gumerov AM, Ekomasov EG, Zakir'yanov FK, Kudryavtsev RV. Structure and properties of four-kink multisolitons of the sine-Gordon equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014;54(3):491–504. DOI: 10.1134/S0965542514030075.
26. Ekomasov EG, Gumerov AM, Murtazin RR. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2016;40(17):6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.
27. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. On the possibility of the observation of the resonance interaction between kinks of the sine-Gordon equation and localized waves in real physical systems. *JETP Letters*. 2015;101(12):835–839. DOI: 10.1134/S0021364015120061.
28. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017;312:198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
29. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV, Dmitriev SV, Nazarov VN. Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities. *Brazilian Journal of Physics*. 2018;48(6):576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
30. Gumerov AM, Ekomasov EG, Kudryavtsev RV, Fakhretdinov MI. Excitation of large-amplitude localized nonlinear waves by the interaction of kinks of the sine-Gordon equation with attracting impurity. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019;15(1):21–34. DOI: 10.20537/nd190103.
31. Ekomasov EG, Murtazin RR, Bogomazova OB, Gumerov AM. One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange. *J. Magn. Magn. Mater.* 2013;339:133–137. DOI: 10.1016/j.jmmm.2013.02.042.
32. Ekomasov EG, Murtazin RR, Nazarov VN. Excitation of magnetic inhomogeneities in three-layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange. *J. Magn. Magn. Mater.* 2015;385:217–221. DOI: 10.1016/j.jmmm.2015.03.019.
33. Gumerov AM, Ekomasov EG, Kudryavtsev RV. One-dimensional dynamics of magnetic inhomogeneities in a three- and five-layer ferromagnetic structure with different values of the magnetic parameters. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019;1389:012004. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012004.
34. Ekomasov EG, Samsonov KY, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
35. Magnus K. *Schwingungen: Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. 4 Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag; 1961. 252 s. (in German). DOI: 10.1007/978-3-663-10702-6.
36. Faleychik BV. *One-Step Methods for the Numerical Solution of the Cauchy Problem*. Minsk: Belarusian State University; 2010. 42 p. (in Russian).



*Екомасов Евгений Григорьевич* — родился в с. Анучино Приморского края (1958). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (1980). Доктор физико-математических наук (2005, ЧелГУ). Профессор кафедры теоретической физики Башкирского государственного университета. Награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования РФ» (2011) и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2008). Область исследовательских интересов — теоретическая и математическая физика, физика конденсированного состояния, спинтроника, вычислительная физика. Опубликовал более 200 научных и методических работ.

Россия, республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
 Уфимский университет науки и технологий  
 E-mail: ekomasoveg@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-6194-3358  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29060



*Кудрявцев Роман Владимирович* — родился в Уфе (1989). Окончил магистратуру Физико-технического института Башкирского государственного университета (2014). Кандидат физико-математических наук по специальности «Теоретическая физика» (2018). Научная работа связана с исследованием динамики солитонов уравнения синус-Гордона. Имеет дипломы и грамоты за доклады на молодёжных конференциях. Был награжден стипендией Главы Республики Башкортостан (2015/2016, 2016/2017, 2017/2018).

Россия, республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Уфимский университет науки и технологий  
E-mail: xc.89@mail.ru



*Самсонов Кирилл Юрьевич* — родился в Тюмени (1994). Окончил физический факультет Тюменского государственного университета (2018, магистратура) и аспирантуру Тюменского государственного университета (2022). Область научных интересов: фильтрационно-емкостные свойства пласта, задача о двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей с учётом коагуляционных и суффозионных процессов, нелинейная динамика волн (солитонов) в магнитных средах и изучение их поведения при взаимодействии с «примесями».

Россия, 625003 Тюмень, ул. Володарского, 6  
Тюменский государственный университет  
E-mail: k.y.samsonov@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-3170-7872  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1137615



*Назаров Владимир Николаевич* — кандидат физико-математических наук (2001), доцент, старший научный сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН. Автор более 40 научных статей. Область интересов: теоретическая и математическая физика, вычислительная физика.

Россия, республика Башкортостан, 450054 Уфа, пр-кт Октября, 71  
Уфимский федеральный исследовательский центр РАН  
E-mail: nazarovvn@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-4749-1367  
AuthorID (eLibrary.Ru): 127817



*Кабанов Даниил Константинович* — студент физико-технического института Уфимского университета науки и технологий.

Россия, республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Уфимский университет науки и технологий  
E-mail: danya.kabanov.95@mail.ru