



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья  
УДК 519.6, 532.5

DOI: 10.18500/0869-6632-003039  
EDN: НКQPIN

## Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя

В. Н. Говорухин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 29.12.2022, принята к публикации 24.03.2023,  
опубликована онлайн 25.04.2023, опубликована 31.05.2023

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — изучить перенос пассивных частиц вихревым триполем при изменении параметра, определяющего скорость перемещения конфигурации. Под триполем понимается структура, состоящая из центрального вихря и вращающихся вокруг него вихрей-спутников с противоположной центру циркуляцией. В работе рассмотрена простейшая классическая математическая модель триполя — система трёх точечных вихрей, формулируемая в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. Исследование ограничено частным случаем триполя с нулевой суммарной интенсивностью. Изучено влияние скорости перемещения конфигурации на процессы переноса пассивных частиц. **Методы.** Исследование проводилось численно с использованием алгоритмов, основанных на подходах теории динамических систем, включая построение отображения Пуанкаре и анализ переноса маркерных частиц. Применялись расчёты на больших временах, соответствующих сотням и тысячам оборотов триполя вокруг центра. Для решения возникающих задач Коши использовались интеграторы высоких порядков точности, что позволило контролировать адекватность результатов вычислений. **Результаты.** Установлено, что перенос пассивных частиц принципиально различен в зависимости от скорости перемещения триполя. Когда скорость мала, в окрестности вихревой конфигурации возникает обширная область хаотической динамики, которая медленно смещается вместе с триполем. В области хаоса существуют подобласти активного и медленного перемешивания. Перенос частиц состоит из следующих возможных стадий: перенос из левой от триполя области в правую, сильное перемешивание в окрестности вихрей, медленный дрейф в левую от триполя область. При большой скорости конфигурации во всей области хаотической динамики частицы сильно перемешиваются, вихревой триполь перемещает частицы из окрестности своего начального положения на большие расстояния, и практически не захватывает новых частиц по пути своего следования. В промежуточных ситуациях в разной степени реализуются оба процесса. **Заключение.** Обнаружены и описаны нетривиальные сценарии переноса пассивных частиц вихревым триполем, которые могут возникать и в реальных вихревых конфигурациях жидкостей.

**Ключевые слова:** вихревые потоки, система точечных вихрей, перенос частиц, перемешивание пассивной примеси, нелинейные системы, хаос.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-29-06013. Автор благодарен рецензенту за глубокий анализ статьи, полезные замечания и предложения.

**Для цитирования:** Говорухин В. Н. Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 286–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039. EDN: НКQPIN

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Transfer of passive particles in the velocity field of vortex tripole moving on a plane

V. N. Govorukhin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

Received 29.12.2022, accepted 24.03.2023,  
available online 25.04.2023, published 31.05.2023

**Abstract.** Purpose of this article is to study the transport of passive particles in the velocity field of a vortex tripole with a change in the parameter that determines the speed of the configuration movement. A structure consisting of a central vortex and satellite vortices rotating around it with the opposite vorticity is understood as a tripole. We employ a system of three point vortices, the most simple mathematical representation of a vortex tripole, which may be expressed as a system of nonlinear ordinary differential equations with a parameter. Consideration is limited to a particular case of a tripole with zero total vorticity. The influence of the speed values of vortex configuration movement on the processes of passive particle transport has been studied. *Methods.* The study was carried out numerically using algorithms based on the dynamical systems approaches including the construction of the Poincaré map and the analysis of the dynamics of marker particles. Were carried out long times calculations, corresponding to hundreds and thousands of turns around the tripole center. Integrators of high orders of accuracy were used to solve the Cauchy problems, which made it possible to adequacy of the calculation result control. *Results.* We found that transferring passive particles is fundamentally different depending on the speed of the tripole. A vast zone of chaotic dynamics forms in the neighborhood of the vortices when the velocity is low. This zone slowly shifts along with the tripole. There are subregions of active and slow mixing inside the chaos region. The possible stages of particle dynamics are: transfer from the region to the right of the tripole to the area to the left, vigorous mixing near the vortices, and slowly drifting to the region to the left of the tripole. At a high speed of vortex configuration in the entire chaotic region, the particles are strongly mixed. The vortex tripole removes particles from the vicinity of its initial position over long distances and practically does not capture new particles along its path. In intermediate situations, both processes can be realized at varying degrees. *Conclusion.* Non-trivial scenarios for the transport of passive particles by a vortex tripole, which can also occur in real vortex configurations of fluids, have been discovered and described.

**Keywords:** vortex flows, system of point vortices, particle transfer, chaotic mixing, nonlinear systems, chaos.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-29-06013.

**For citation:** Govorukhin V.N. Transfer of passive particles in the velocity field of vortex tripole moving on a plane. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(3):286–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Близкие к двумерным мультипольные вихревые конфигурации встречаются в природе и воспроизводятся в физических экспериментах [1–5]. Под мультиполюм понимается конфигурация, состоящая из центрального вихря и нескольких спутников, причём центр и спутники имеют циркуляцию (интенсивность) противоположных знаков. Для описания подобных структур используются различные математические модели [6–8], но простейшей является система точечных вихрей. Если рассматривать бесконечно тонкие вихревые нити, и предположить [9], что завихренность сосредоточена на прямолинейных нитях, параллельных друг другу, то можно рассматривать движение точек пересечения вихрей с плоскостью. Образ такого вихря на плоскость является точкой, его называют точечным вихрем [10], который описывается координатами на плоскости и значением циркуляции в ней. Системы даже небольшого числа точечных вихрей порождают сложные потоки, и во многих случаях хорошо описывают реальные гидродинамические течения. Так, подобная математическая модель нашла применение при анализе неустойчивости вихревого следа фон Карманом в 1912 г., при возникновении больших когерентных вихрей и во многих других задачах. Математически конфигурация  $N$  точечных вихрей представляет собой гамильтонову систему  $2N$

обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование подобных систем началось, видимо, ещё Гельмгольцем [11] и активно продолжается до сих пор.

Простейшей конфигурацией на плоскости, демонстрирующей большое разнообразие режимов движения в зависимости от параметров (интенсивности и взаимного расположения вихрей), является система трёх вихрей, что объясняет высокий интерес к её изучению (см. работы [2, 12–16] и ссылки в них). Известно, что несмотря на интегрируемость задачи динамики трёх вихрей [17, 18] (в силу существования достаточного числа интегралов), такие конфигурации порождают сложные течения и нетривиальные процессы переноса в жидкостях. Частным случаем трёхвихревой конфигурации является точечный триполь, который состоит из расположенных на одной прямой центрального вихря и находящихся по разные стороны от него двух спутников. Исследована устойчивость триполя, его динамика, структура порождаемого им поля скорости, особое внимание уделено случаю нулевой суммарной циркуляции конфигурации (см. [6, 19, 20] и ссылки в них). В статье [19] показано хорошее совпадение динамики частиц жидкости в поле скорости точечного триполя с результатами физических экспериментов.

Вихревая конфигурация порождает поле скорости, определяющее массоперенос в области течения. Пассивными называют частицы жидкости, которые не оказывают влияния на движение других частиц, но переносятся полем скорости, и могут демонстрировать сложную динамику [21, 22]. Наряду с математическим моделированием переноса пассивных частиц возможны и другие постановки проблем адвекции в жидкости, которые учитывают различные факторы [23, 24], но далее в работе такие задачи не рассматриваются. Изучение процессов переноса и перемешивания пассивных частиц может дать информацию о происходящих процессах в атмосфере, океане, важно для приложений, таких как анализ водных течений, переноса загрязнений, движения циклонов и антициклонов [25, 26]. В частности известно, что поле скорости конфигурации трёх вихрей во многих случаях порождает хаотические процессы переноса, демонстрирующие многообразие свойств и нетривиальные эффекты [14, 15, 19], которые ещё не до конца изучены.

Перенос пассивной частицы  $N$  точечными вихрями может трактоваться как динамика системы из  $N+1$  вихрей, причем интенсивность  $(N+1)$ -го вихря равна нулю. Математически такая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, где переменными являются координаты вихрей и пассивных частиц, а параметрами — интенсивности и расположение вихрей. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются классическим инструментом математического моделирования лагранжевой динамики жидкости. Для их анализа эффективны методы исследования, основанные на положениях теории динамических систем (см., например, [27–31]). Эти подходы включают поиск и анализ инвариантных объектов, их бифуркаций, методы исследования хаотической динамики с использованием показателей Ляпунова, отображений Пуанкаре и др. [32–36].

В данной статье рассматривается вихревой точечный триполь с нулевой суммарной интенсивностью, состоящий из центрального вихря (его интенсивность  $2\omega$ ) и двух спутников (с интенсивностями  $-\omega$ ). Рассматриваемая конфигурация может вращаться на месте (в симметричном случае), а может вместе с вращением перемещаться по плоскости (при нарушении симметрии). Несмотря на простоту, такая математическая модель вихревой динамики позволяет изучить многие реальные процессы и эффекты, оценить влияние на них различных возмущений и внешних воздействий. Основное внимание в работе уделяется изучению динамики пассивных частиц и переноса в зависимости от их начального положения при различных параметрах триполя, определяющих скорость перемещения конфигурации. В силу существенной нелинейности большинство решаемых задач поддается только численному анализу, который является основным инструментом исследования в статье. В силу консервативности системы при решении возникающих задач Коши в работе используются методы интегрирования высокого порядка точности, что необходимо для сохранения интегралов системы. Для качественного анализа динамики и переноса частиц применяется построение сечений Пуанкаре и анализ динамики «маркерных отрезков».

## 1. Простейшая математическая модель вихревого триполя

Кирхгофом [9, 37] показано, что движения  $N$  точечных вихрей на плоскости описываются следующей гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\omega_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \omega_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \omega_i \omega_j \ln(r_{ij}) \quad i = 1 \dots N. \quad (1)$$

Здесь  $(x_i, y_i)$  — координаты вихря с номером  $i$  на плоскости,  $r_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$ , а  $\omega_i$  — его интенсивность (циркуляция). Очевидно, что  $H$  — гамильтониан и первый интеграл системы (1). Интенсивности вихрей и их начальные координаты можно рассматривать как параметры системы. Начальные значения определяют значения интегралов системы точечных вихрей, а значит, инвариантные подпространства, на которых происходит динамика. Функция тока для пассивной частицы в поле скорости системы точечных вихрей имеет вид

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i \ln[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2], \quad (2)$$

где  $(x, y)$  — координаты пассивной частицы на плоскости. То есть динамика частицы описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\sum_{i=1}^N \frac{\omega_i}{2\pi} \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sum_{i=1}^N \frac{\omega_i}{2\pi} \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что воздействие на пассивную частицу системы вихрей равно сумме воздействий на неё всех вихрей, причем в бесконечно малый момент времени каждый вихрь раскручивает частицу по кругу вокруг себя со скоростью, прямо пропорциональной интенсивности и обратно пропорциональной квадрату расстояния между вихрем и частицей.

Помимо гамильтониана, система (1), в силу инвариантности относительно переноса и вращения, обладает ещё тремя первыми интегралами:

$$Q = \sum_{i=1}^N \omega_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^N \omega_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^N \omega_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (4)$$

Интеграл  $H$  выражает закон сохранения энергии взаимодействия вихрей, а интегралы (4) являются аналогами законов сохранения компонент импульса и момента импульса для точечных вихрей. Следовательно, динамика системы  $N$  вихрей для  $N = 2, 3$  является интегрируемой, а для  $N \geq 4$  это уже не так, и ее поведение может быть хаотическим. Неинтегрируемость системы четырёх вихрей строго доказана в работе [38]. Отметим, что при  $N = 2, 3$ , в то время как сама система (1) интегрируема, поведение пассивной частицы, то есть система (1)–(3) может демонстрировать хаотическую динамику.

Далее рассматривается триполь, который состоит из центрального точечного вихря  $C$  и двух его спутников  $S_1$  и  $S_2$ , причем интенсивности спутников имеют противоположные знаки с центром. Интерес к анализу движений вихревых триполей обусловлен тем, что они наблюдаются в природе и реализуются в физических экспериментах [1]. Такие конфигурации могут иметь малую суммарную циркуляцию, а два спутника — близкие интенсивности [2]. Мы будем рассматривать идеализацию такой структуры: предполагается, что центральный вихрь  $C$  имеет интенсивность  $\omega_1 = 2\omega$ , а каждый из спутников  $\omega_2 = \omega_3 = -\omega$ . Полагаем, что в начальный момент времени

$S_1$  расположен на плоскости в точке с координатами  $x = 0, y = -d$ ,  $S_2$  — в  $x = 0, y = d$ , а  $C$  — в точке  $x = 0, y = \varepsilon$ .

Тогда система уравнений, описывающая динамику вихревого триполя и пассивных частиц, в координатной форме примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \frac{y_1 - y_3}{r_{13}} \right), \quad \dot{y}_1 = \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \frac{x_1 - x_3}{r_{13}} \right), \\ \dot{x}_2 = -\frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{-2(y_1 - y_2)}{r_{21}} + \frac{y_2 - y_3}{r_{23}} \right), \quad \dot{y}_2 = \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{-2(x_1 - x_2)}{r_{21}} + \frac{x_2 - x_3}{r_{23}} \right), \\ \dot{x}_3 = -\frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{-2(y_1 - y_3)}{r_{31}} + \frac{y_3 - y_2}{r_{32}} \right), \quad \dot{y}_3 = \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{-2(x_1 - x_3)}{r_{31}} + \frac{x_3 - x_2}{r_{32}} \right), \\ \dot{x} = -\frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{2(y - y_1)}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} + \frac{y - y_2}{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} + \frac{y - y_3}{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2} \right), \\ \dot{y} = \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{2(x - x_1)}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} + \frac{x - x_2}{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} + \frac{x - x_3}{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2} \right), \end{array} \right. \quad (5)$$

где  $(x_1, y_1)$  — координаты вихря  $C$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  — координаты  $S_1$  и  $S_2$ , соответственно, а  $(x, y)$  — координаты переносимой частицы. Изучаемый точечный вихревой триполь определяют следующие начальные условия:

$$x_1(0) = 0, \quad y_1(0) = \varepsilon, \quad x_2(0) = 0, \quad y_2(0) = -d, \quad x_3(0) = 0, \quad y_3(0) = d. \quad (6)$$

Далее в расчетах принято  $\omega = 1, d = 1$ . Отметим, что  $\omega$  и  $d$  можно всегда принять равными единице за счет выбора масштабов времени и пространственных координат. Таким образом, в рассматриваемой задаче (5), (6) останется лишь один параметр  $\varepsilon$ , определяющий асимметрию конфигурации.

Динамика системы трёх точечных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью достаточно хорошо изучена (см. [12, 19, 20, 39–41] и ссылки в них). В статье [19] подробно рассмотрен и частный случай системы уравнений (5). В частности, показано хорошее совпадение динамики математической модели с физическими экспериментальными наблюдениями. Следуя этой работе, представим необходимые для изучения переноса пассивной частицы факты о динамике точечного вихревого триполя при изменении параметра  $\varepsilon$ .

Для невозмущенного ( $\varepsilon = 0$ ) симметричного триполя обе компоненты импульса  $P = Q = 0$ , а  $I = -2\omega \neq 0$ . Это означает, что центральный вихрь остается на месте, а спутники вращаются вокруг  $C$  против часовой стрелки. При  $\varepsilon = 0$  известно выражение для периода вращения  $T_0 = 2\pi d^2 / (3\omega)$ . Когда  $0 < \varepsilon < \varepsilon_c$ , структура теряет симметрию, но сохраняет трипольную топологию,  $P = 2\omega\varepsilon \neq 0$  и  $I = -2\omega(1 - \varepsilon^2) \neq 0$ . Оба спутника  $S_1$  и  $S_2$  вращаются вокруг центрального вихря  $C$  в положительном направлении, а вся конфигурация движется на плоскости вдоль горизонтальной оси координат со средней за период  $T$  скоростью  $\langle v_x \rangle$ . Направление движения определяется знаком  $\varepsilon$ , при  $\varepsilon > 0$  — движение вправо. При этом в подвижной системе координат  $x' = x - x_1, y' = y - y_1$ , где точке  $(0, 0)$  соответствует положение центра триполя  $C$ , динамика триполя является периодической с периодом  $T = T(\varepsilon)$ . За время  $0 < t < T$  изменяются расстояния  $d_1 = \|C - S_1\|$  и  $d_2 = \|C - S_2\|$  и угол между отрезками  $[C, S_1]$  и  $[C, S_2]$ , но при  $t = kT, k = 1, 2, \dots$  триполь возвращается в исходное положение в подвижной системе координат. В координатах  $(x, y)$  при  $t = kT$  вихрь  $C$  имеет координаты  $(kT \langle v_x \rangle, \varepsilon)$ , а  $S_1$  и  $S_2$  соответственно  $(kT \langle v_x \rangle, -d)$  и  $(kT \langle v_x \rangle, d)$ . При  $\varepsilon > \varepsilon_c$  (при выбранных для численного анализа значениях

параметров критическое значение  $\epsilon_c \approx 0.544$ ) вихревая конфигурация переходит от триполя в режим диполь-монополяр, когда вихрь  $C$  и один из спутников формируют движущийся диполь. В данной работе этот случай не рассматривается.

Динамику вихревого точечного триполя на плоскости  $(x, y)$  иллюстрирует рис. 1, *a*, на котором изображены траектории центра  $C$ , спутников  $S_1$  и  $S_2$  при  $\epsilon = 0.4$  на  $t \in [0, 6T]$ . Кроме того, показаны положения триполя для трех моментов времени  $t$  ( $t = 10.16 \approx 6T$  соответствует шести оборотам триполя), где кружок обозначает положение центра  $C$ , квадрат — спутника  $S_1$  и ромб —  $S_2$ . На рис. 1, *b* приведены графики периодической зависимости расстояний  $d_1$  и  $d_2$  от времени для  $t \in [0, 4T]$ . Кроме того, рис. 1, *a* демонстрирует перемещение триполя вправо вдоль оси  $x$  с некоторой скоростью  $\langle v_x \rangle$ . Величина  $\langle v_x \rangle$  зависит от параметра  $\epsilon$  и была построена численно (рис. 1, *c*). При  $\epsilon < 0.2$  средняя скорость перемещения триполя по плоскости мала,  $\langle v_x \rangle < 0.1$ , но при  $\epsilon > 0.2$  имеет место её значительный рост, и  $\langle v_x \rangle$  при  $\epsilon \approx \epsilon_c$  почти достигает значения 2.0. Период полного оборота триполя также зависит от параметра  $\epsilon$  (рис. 1, *d*).

Цель представленного здесь исследования — изучить, как влияет параметр  $\epsilon$ , а значит, и величина скорости смещения триполя  $\langle v_x \rangle$  на плоскости, на свойства переноса пассивных частиц. В цитируемых выше работах [19, 20, 41] исследование влияния параметра  $\epsilon$  рассматривалось, но изучение, в основном, проводилось в подвижной (с центром в  $C$ ) системе координат  $x' = x - x_1, y' = y - y_1$ . В этом случае динамическую систему для триполя и пассивных частиц (5)

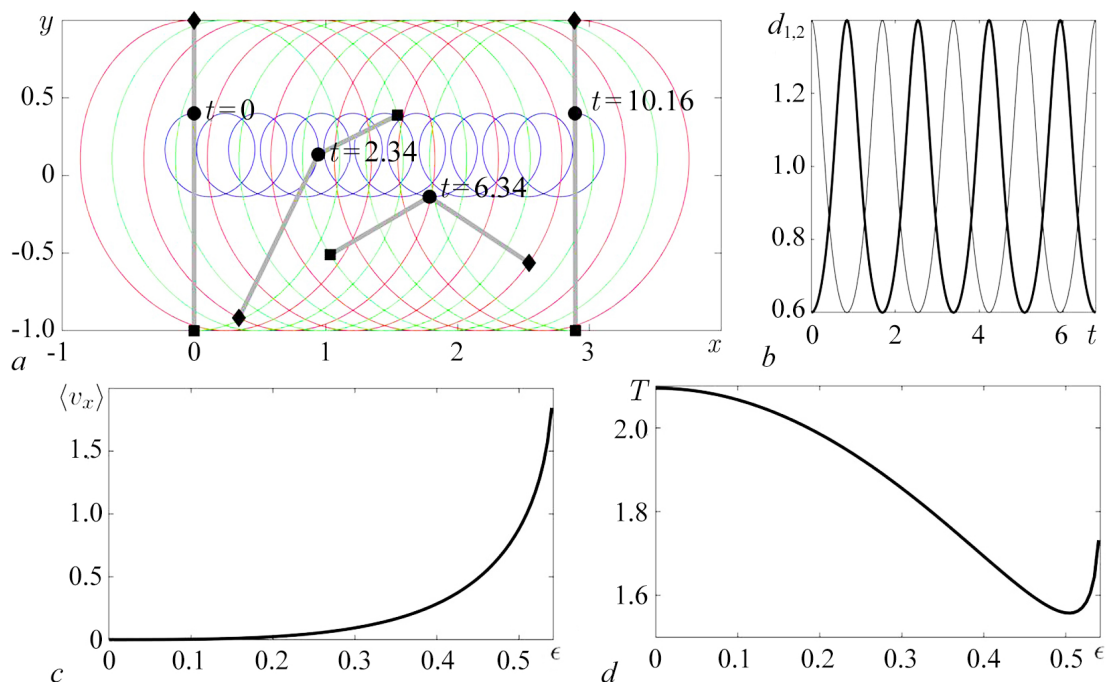


Рис. 1. *a* — Динамика триполя при  $\epsilon = 0.4$ . Изображены траектория центра  $C$  (синяя кривая, помечен кружком) и спутников  $S_1$  (зеленая, квадрат) и  $S_2$  (красная, ромб). *b* — Графики периодической зависимости расстояний  $d_1$  (тонкая линия) и  $d_2$  (жирная линия) от  $t \in [0, 4T]$ . *c* — График зависимости средней за период  $T$  скорости перемещения триполя  $\langle v_x \rangle$  от параметра  $\epsilon$ . *d* — График зависимости периода вращения  $T$  спутников триполя вокруг его центра от параметра  $\epsilon$  (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* — Tripole dynamics at  $\epsilon = 0.4$ . The trajectory of the center  $C$  (blue curve, circled) and satellites  $S_1$  (green, square) and  $S_2$  (red, rhombus) are shown. *b* — Graphs of the periodic dependence of the distances  $d_1$  (thin line) and  $d_2$  (thick line) on  $t \in [0, 4T]$ . *c* — Graph of the dependence of the tripole velocity  $\langle v_x \rangle$  averaged over the period  $T$  on the  $\epsilon$  parameter. *d* — Graph of the dependence of the period of rotation of the satellites of the tripole around its center on the parameter  $\epsilon$  (color online)

удается привести к каноническому виду, и рассматривать с позиций КАМ-теории (положения теории см. в [42, 43] и в ссылках на литературу в этих работах). Удаётся доказать интегрируемость системы при  $\varepsilon = 0$ , найти особые точки, получить выражение для функции Мельникова [19], что позволяет оценить возникновение и развитие хаотических областей. Однако изучения зависимости свойств переноса частиц триполюм от скорости  $\langle v_x \rangle$  на плоскости  $(x, y)$  в предшествующих работах автору обнаружить не удалось.

## 2. Анализ динамики частиц в поле скорости триполя

Из уравнений переноса пассивных частиц в поле скорости точечных вихрей (5) следует, что  $|\dot{x}| \rightarrow 0$  и  $|\dot{y}| \rightarrow 0$  при  $r(x, y) \rightarrow +\infty$ , где  $r(x, y)$  — расстояние от частицы до  $C$ . Это означает, что перемещение пассивных частиц вдалеке от триполя практически отсутствует, и активные перемешивание и перенос частиц происходят в окрестности вихревой конфигурации. Для изучения размеров и формы области перемешивания, характера динамики частиц и других процессов сопровождающих перемещение триполя требуются дополнительные исследования. В силу нелинейности возникающих задач аналитические методы их решения отказываются, и требуется применение численных подходов.

При исследовании переноса пассивных частиц в данной работе большинство расчетов проводились на интервалах  $t \in [0, 1000T]$  и больше. Такие длительные вычисления выдвигают высокие требования к выбору методов решения задачи Коши и построения отображения Пуанкаре, особенно для систем, обладающих первыми интегралами. К таким задачам относится и расчёт динамики частиц несжимаемой невязкой жидкости (см. статью [44] и ссылки в ней). Известно, что все явные интеграторы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений не сохраняют нелинейные интегралы (величина этих нарушений определяется порядком метода), что может приводить к качественно неверным численным результатам. Возможным способом минимизации этой проблемы на больших временах является использование специальных геометрических интеграторов [45], например, симплектические методы приводят к колебаниям вычисленных величин интегралов в окрестности истинных значений. Однако такие методы являются неявными, что создаёт трудности в их реализации и рост вычислительных затрат, особенно для высоких порядков точности. Альтернативой является «силовой» подход — использование явных методов высокого порядка точности с малым шагом интегрирования, что и применяется в представленной статье. Такой подход позволяет сохранять малую погрешность в значениях интегралов на больших временах расчёта.

В работе применялись методы Рунге–Кутты 7, 8 и 9 порядков точности с автоматическим выбором шага и контролем точности с помощью «вложенных формул», см. [46]. Все расчёты и визуализация результатов проводилась в среде пакета MATLAB с использованием встроенных в пакет функций решения задачи Коши `ode78` (метод порядка 7/8) и `ode89` (порядок метода 8/9) (описание методов см. в [47]). Кроме того, использовался метод Рунге–Кутты Дормана–Принса 7/8 порядка точности [48] и его программная реализация `ode87` [49]. Этот метод был основным при численном исследовании и вычислении точек отображения Пуанкаре. В расчетах использовалась относительная погрешность  $\text{rel} = 10^{-10}$ , максимальный шаг  $h_{\max} = 0.05$ , условие принадлежности секущей Пуанкаре  $|x_1 - x_2| < 10 \text{ rel}$ . Шаг ограничивался с целью сокращения влияния алгоритма управления шагом интегрирования. Для уточнения точки траектории на секущей применялся метод Ньютона. Такой подход обеспечивал сохранение инвариантов задачи с необходимой высокой точностью. Во всех проведенных расчётах интегралы  $P$  и  $Q$ , см. (4), сохранялись точно, а погрешность в вычислении  $I$  и  $H$ , см. (1), не превышала  $10^{-8}$  на интервале  $t \in [0, 1000T]$ . Для проверки корректности вычислений расчеты повторялись с  $\text{rel} = 10^{-11}$  и с использованием интеграторов `ode78` и `ode89`. Все численные результаты воспроизводились.

**2.1. Динамика пассивных частиц в подвижной системе координат  $(x', y')$ .** Изучим изменения динамики системы (5) на плоскости  $(x', y')$  при изменении  $\varepsilon$ . На рис. 2 на плоскости  $(x', y')$  даны вычисленные точки отображения Пуанкаре для различных 32-х траекторий и шести значений  $\varepsilon$ . Секущая Пуанкаре задана условием  $x_1 - x_2 = 0, y_2 < 0$ , что соответствует полному обороту триполя (одному периоду  $T$ ) при заданных параметрах. Для каждой траектории рассчитано 3500 пересечений (то есть  $t \in [0, 3500 T]$ ). Начальные точки траекторий идентичны для всех  $\varepsilon$ .

Когда  $\varepsilon = 0$ , система интегрируема,  $x = x', y = y'$ , вся вихревая конфигурация вращается вокруг центра  $C$ , который находится в точке  $x = 0, y = 0$  при всех  $t$ . На плоскости Пуанкаре вихрям триполя соответствуют эллиптические особые точки и имеются две седловые, соединенные сепаратрисами (см. рис. 2). При начальных значениях из плоскости Пуанкаре вне разделенных сепаратрисами зон, включающих эллиптические особые точки, реализуются квазипериодические движения. Им соответствуют замкнутые кривые в отображении Пуанкаре, причем все они охватывают вихревой триполь при  $\varepsilon = 0$ .

При  $\varepsilon \neq 0$  интегрируемость и симметрия динамической системы (5) нарушается, согласно КАМ-теории, в окрестности сепаратрис возникают области хаотической динамики. При малых возмущениях, смотри случай  $\varepsilon = 0.01$ , ширина хаотической области мала. Кроме того, качественно изменяется топологическая структура отображения Пуанкаре в переменных  $(x', y')$  и за пределами области хаоса. Возникает дополнительная эллиптическая особая точка кратности 1 вне области

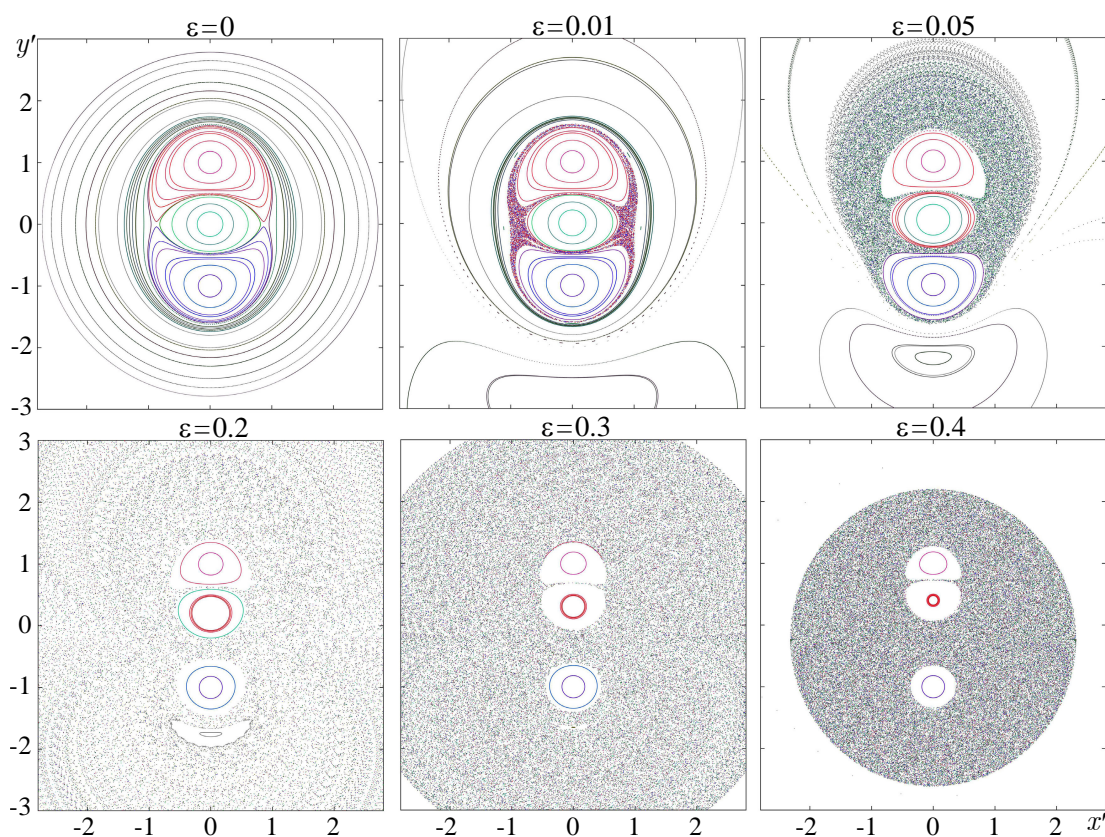


Рис. 2. Отображение Пуанкаре на секущей  $x_1 - x_2 = 0, y_2 < 0$  на плоскости  $(x', y')$  для различных значений  $\varepsilon$ , рассчитано 32 траектории, каждая помечена своим цветом (цвет онлайн)

Fig. 2. Poincaré map by the section  $x_1 - x_2 = 0, y_2 < 0$  on the plane  $(x', y')$  for different values of  $\varepsilon$ , calculated 32 trajectories, each marked with its own color (color online)



вихревого триполя. Квазипериодические движения вокруг этой особой точки не охватывают триполь, см. нижнюю часть рис. 2,  $\epsilon = 0.01$ . То есть на плоскости Пуанкаре формируются две качественно различные области, которые разделяются сепаратрисой.

При росте  $\epsilon$  размер хаотической области увеличивается, смещается в полуплоскость  $y' > 0$ . Интенсивность перемешивания частиц зависит от положения в хаотической области, сильнее в окрестности вихрей триполя, и уменьшается при приближении к границе хаотической области. Вблизи границ хаотической области движения частиц близки к квазипериодическим на  $(x', y')$  с малым радиальным смещением по отношению к триполю. Эти эффекты демонстрирует рис. 2,  $\epsilon = 0.05$ . Возрастание  $\epsilon$  приводит к развитию хаотической области, которая имеет максимальный размер при  $\epsilon \approx 0.2$ . Рост возмущения при  $\epsilon > 0.2$  сопровождается увеличением скорости перемещения триполя  $\langle v_x \rangle$  (см. рис. 1, c), сокращением размеров единой хаотической области (см. рис. 2,  $\epsilon = 0.3$ ), которая приобретает форму круга с небольшими зонами регулярной динамики в окрестности вихрей триполя (см. рис. 2,  $\epsilon = 0.4$ ). Все траектории с начальными данными вне зоны хаоса при  $\epsilon > 0.3$  быстро смещаются в направлении  $x' \rightarrow -\infty$ .

**2.2. Динамика пассивных частиц на плоскости  $(x, y)$ .** Для анализа переноса частиц движущимся триполем в исходных координатах  $(x, y)$  рассмотрим изменение «маркерных отрезков» на плоскости во времени. Под маркерным отрезком  $l(x_0, t, b, n)$  понимается набор из  $n$  пассивных частиц с одинаковой начальной координатой  $x^{(i)} = x_0$  и координатами  $y^{(i)} = -b + i h_y$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $h_y = 2b/n$ . Отслеживание трансформации маркерных отрезков при росте возмущения во времени позволяет исследовать перенос пассивных частиц в поле скорости вихревой конфигурации. В численных экспериментах в качестве характерного времени использовалась величина  $T = T(\epsilon)$ , соответствующая полному обороту спутников вокруг центра триполя, которая зависит от величины возмущения. Также от  $\epsilon$  зависит скорость  $\langle v_x \rangle$  движения триполя по плоскости  $(x, y)$ , см. предыдущий раздел и рис. 1. В представленных ниже расчётах использовались четыре маркерных отрезка  $l(x_0, t, b, k)$  для  $x_0 = -5, -2, 2, 5$  при  $b = 6$ ,  $k = 1000$ . То есть в каждом расчёте решалась задача Коши для системы уравнений (5), состоящей из 6 уравнений, описывающих динамику точечных вихрей и  $n = 1000 \times 4 \times 2 = 8000$  уравнений для частиц, задающих  $l(x_0, t, 6, 1000)$ ,  $x_0 = -5, -2, 2, 5$ . Полученные результаты представлены графически, начальные позиции маркерных отрезков для всех расчетов иллюстрирует рис. 3. На рисунках частицы каждого маркерного отрезка помечены одним цветом и символом.

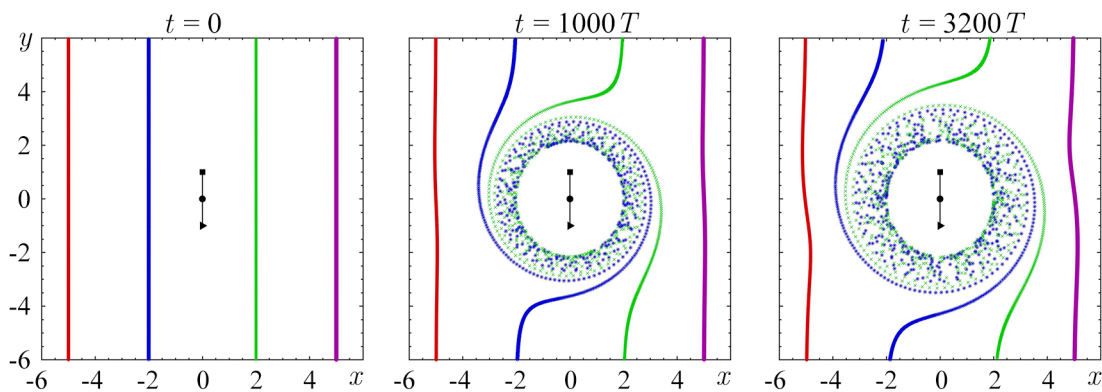


Рис. 3. Маркерные отрезки на плоскости  $(x, y)$  в начальный момент времени  $t = 0$ , и для  $t = 1000 T$ ,  $3200 T$ , то есть после 1000 и 3200 полных оборотов триполя при  $\epsilon = 0$ . Символами, соединенными отрезками, изображен вихревой триполь (цвет онлайн)

Fig. 3. Marker segments on the plane  $(x, y)$  at the initial time  $t = 0$ , and for  $t = 1000 T$ ,  $3200 T$ , i.e. after 1000 and 3200 full rotations of the tripole at  $\epsilon = 0$ . Symbols connected by lines depict a vortex tripole (color online)

В симметричном случае ( $\varepsilon = 0$ ) вихри  $S_1$  и  $S_2$  вращаются вокруг центра  $C$  с постоянной скоростью, триполь не перемещается по плоскости,  $\langle v_x \rangle = 0$ . Тогда  $x = x', y = y'$  и структура линий тока пассивных частиц на плоскости  $(x, y)$  описывается рис. 2. В этом случае перенос частиц является регулярным с высокой скоростью в окрестности вихревой конфигурации, и затухающим при удалении от неё. Это иллюстрирует динамика маркерных отрезков, изображенная на рис. 3. Удаленные отрезки  $l(-5, t, 6, 1000)$  и  $l(5, t, 6, 1000)$  практически не затрагиваются триполем на временах порядка сотен оборотов, и только на временах порядка  $1000 T$  и выше наблюдается их небольшая деформация. Для отрезков  $l(-2, t, 6, 1000)$  и  $l(2, t, 6, 1000)$  ситуация иная — их середины попадают в область быстрых движений в окрестности триполя, растягиваются и трансформируются, принадлежащие им частицы вращаются вокруг триполя. Концы же маркерных отрезков практически не меняют своего положения, так как находятся в областях с малой скоростью  $\dot{x}^{(i)}, \dot{y}^{(i)}$ .

При  $\varepsilon > 0$  нарушается симметрия триполя, возникает движение вихревой конфигурации со скоростью  $\langle v_x \rangle$  вдоль оси абсцисс на плоскости  $(x, y)$ , качественно меняется структура фазового пространства динамической системы для пассивных частиц (5) в координатах  $(x', y')$ , см. предыдущий подраздел и рис. 2. Изменение процессов переноса при росте  $\varepsilon$  хорошо иллюстрируют трансформации маркерных отрезков. При малых  $\varepsilon > 0$   $\langle v_x \rangle \ll 1$  движение триполя медленное, но структура переноса принципиально отличается от симметричного случая  $\varepsilon = 0$ . На рис. 4 приведены результаты расчетов для  $\varepsilon = 0.05$ , когда  $\langle v_x \rangle = 0.0003$ ,  $T = 2.0874$ . Видно, что между триполем и возникшей застойной зоной (с координатой центра  $y \approx -2$ ) возникает область быстрого перемещения частиц из области слева от триполя в правую (см. рис. 4,  $t = 20 T, 200 T$ ). На больших временах, соответствующих сотням оборотов триполя, оба маркерных отрезка

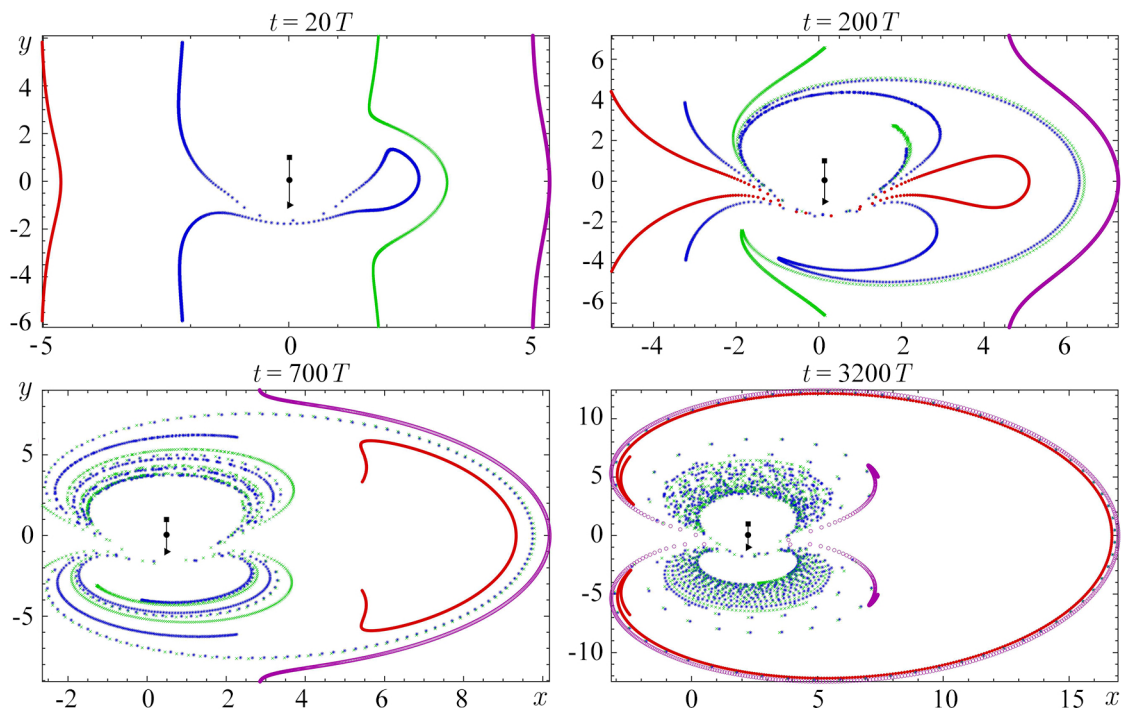


Рис. 4. Положение частиц маркерных отрезков  $l(x_0, t, 6, 1000)$  для  $x_0 = -5, -2, 2, 5$  при  $\varepsilon = 0.05$  в различные моменты времени (цвет онлайн)

Fig. 4. The position of particles of marker segments  $l(x_0, t, 6, 1000)$  for  $x_0 = -5, -2, 2, 5$  at  $\varepsilon = 0.05$  at different times (color online)

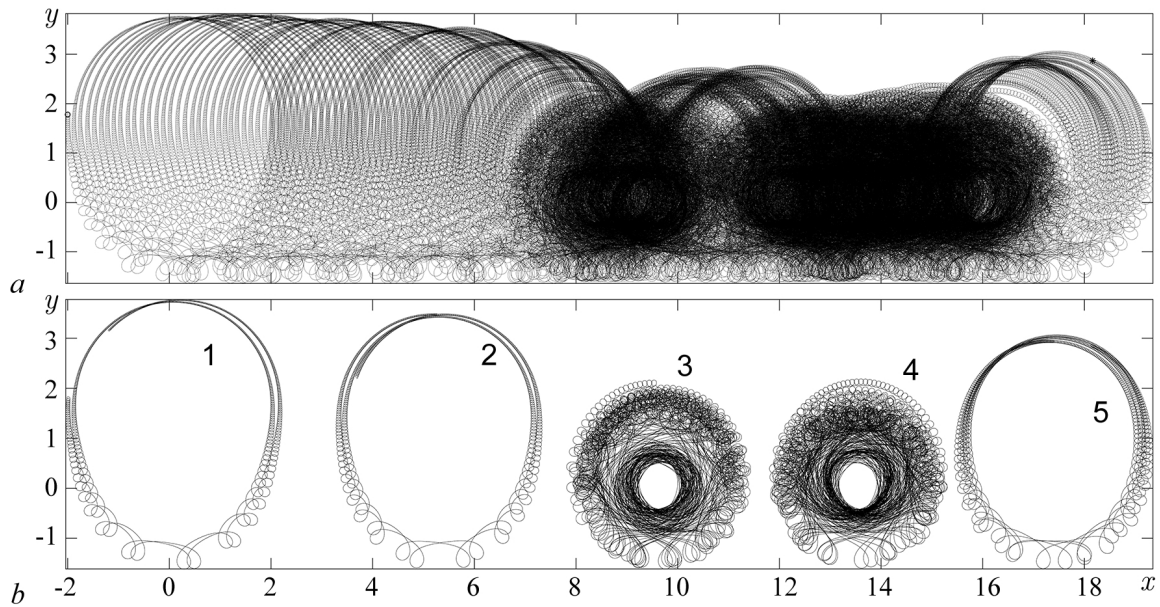


Рис. 5. Траектория одной из пассивных частиц на плоскости  $(x, y)$  при  $\varepsilon = 0.05$ .  $a$  – На всем временном интервале  $t \in [0, 25000 T]$ ;  $b$  – пять участков траектории для: 1 –  $t \in [0, 350 T]$ , 2 –  $t \in [7450 T, 7800 T]$ , 3 –  $t \in [13500 T, 13850 T]$ , 4 –  $t \in [19200 T, 19550 T]$ , 5 –  $t \in [24650 T, 25000 T]$

Fig. 5. Trajectory of one of the passive particles on the  $(x, y)$  plane at  $\varepsilon = 0.05$ .  $a$  – Over the entire time interval  $t \in [0, 25000 T]$ ;  $b$  – five sections of the trajectory for: 1 –  $t \in [0, 350 T]$ , 2 –  $t \in [7450 T, 7800 T]$ , 3 –  $t \in [13500 T, 13850 T]$ , 4 –  $t \in [19200 T, 19550 T]$ , 5 –  $t \in [24650 T, 25000 T]$

с  $x_0 < 0$  полностью перемещаются вправо от триполя ( $t = 700 T$ ). Часть частиц отрезков с  $x_0 > 0$  (с координатой  $y$  на уровне вихрей) растягиваются и смещаются по движению вихревой конфигурации, а остальные – против движения (см. рис. 4,  $t = 10 T, 350 T$ ). На больших временах (более нескольких тысяч оборотов триполя) эти частицы попадают в полуплоскость  $x < x_1(t)$ , медленно стремятся к области перетока частиц, и переносятся через область быстрого перемещения в полуплоскость  $x > x_1(t)$ . Отметим, что динамика каждой частицы маркерных отрезков оказывается не регулярной (то есть, все они попадают в область хаотической динамики) и состоит из медленных и быстрых движений. Медленные состоят в близких к квазипериодическим движениям вдалеке от триполя, причём при этом расстояние до триполя может как увеличиваться, так и уменьшаться. Быстрые движения происходят в окрестности точечных вихрей, и заключаются в их переносе из области  $x < x_1(t)$  в  $x > x_1(t)$  или в хаотических движениях вблизи вихрей триполя. Это иллюстрирует траектория одной из частиц, построенная для  $t \in [0, 25000 T]$ , и изображенная на рис. 5. Видно, что она состоит из качественно различных участков. Так, кривые, помеченные символами 1, 2, 5 соответствуют медленной нерегулярной динамике, а 3, 4 – хаотическим движениям в окрестности триполя. Таким образом, при  $\varepsilon = 0.05$  возникает обширная область хаотической динамики, причем она состоит из двух качественно различных подобластей – активного и медленного перемешивания. Область хаотической динамики на плоскости  $(x', y')$  дана на рис. 2,  $\varepsilon = 0.05$ .

Увеличение  $\varepsilon$  приводит к росту зоны хаотической динамики и расширению подобласти активного перемешивания частиц. Эти процессы можно видеть на рис. 6 где даны положения частиц маркерных отрезков для различных значений  $T$  и  $\varepsilon = 0.1$ . При этом значении параметра скорость перемещения триполя на порядок больше, чем при  $\varepsilon = 0.05$ , но остается малой  $\langle v_x \rangle = 0.0027$ , время полного оборота триполя  $T = 2.0667$ . И в этом случае маркерные отрезки с  $x_0 < 0$  целиком переходят в область  $x > x_1(t)$  после приблизительно 500 оборотов триполя, но при этом частицы

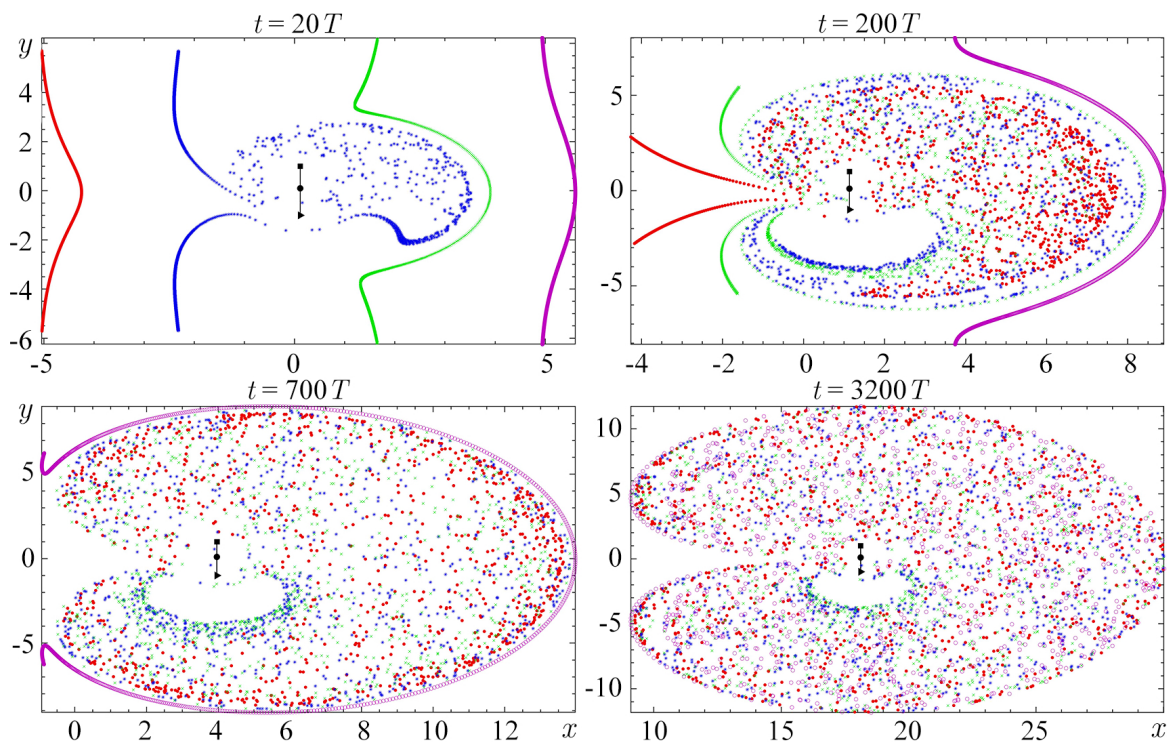


Рис. 6. Положение частиц четырех маркерных отрезков при  $\varepsilon = 0.1$  в различные моменты времени (цвет онлайн)  
 Fig. 6. The position of the particles of the four marker segments at  $\varepsilon = 0.1$  at different times (color online)

сразу попадают в область сильного перемешивания в окрестности триполя, см.  $t = 20T, 200T$ . При  $t = 3200T$  частицы всех четырех маркерных отрезков перемешались между собой и находятся в области хаотической динамики. То есть при такой геометрии триполя вся вихревая структура перемещается с малой скоростью вдоль оси  $x$ , затягивая в область сильного перемешивания частицы из широкой области вокруг себя. Кроме того, все частицы маркерных отрезков переносятся на достаточно большое расстояние вместе с триполем (см. рис. 6,  $t = 3200T$ ).

Дальнейший рост возмущения симметрии триполя приводит к качественному изменению структуры переноса маркерных отрезков. На рис. 7 приведены результаты вычислений при  $\varepsilon = 0.2$ .

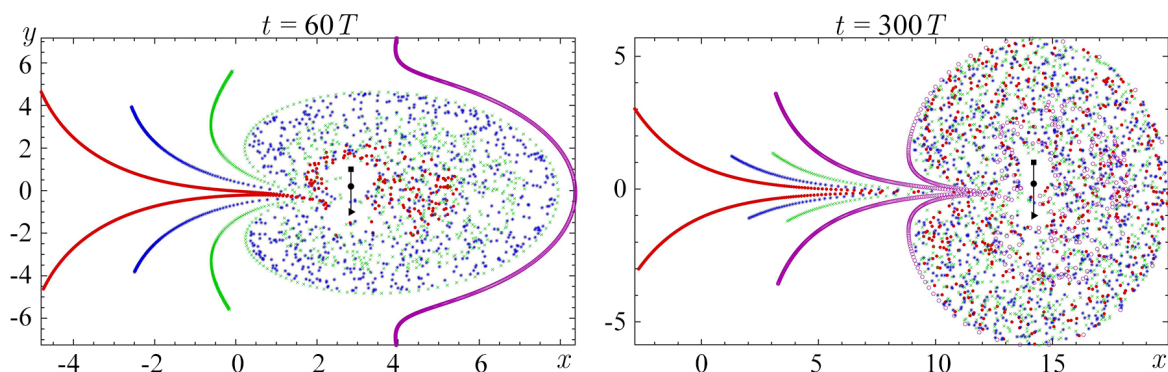


Рис. 7. Положение частиц четырех маркерных отрезков при  $\varepsilon = 0.2$  в различные моменты времени (цвет онлайн)  
 Fig. 7. The position of the particles of the four marker segments at  $\varepsilon = 0.2$  at different times (color online)

При этом значении параметра скорость перемещения  $\langle v_x \rangle = 0.0238$ , то есть выросла ещё почти на порядок, а период уменьшился,  $T = 1.985$ . Принципиальное изменение переноса частиц состоит в том, что при такой скорости  $\langle v_x \rangle$  не все частицы маркерных отрезков попадают в окрестность триполя, и остаются в области  $x < x_1(t)$ , так как скорость их перемещения оказывается меньше чем  $\langle v_x \rangle$ , и уменьшается с ростом  $t$ . Остальные частицы попадают в область хаоса, как и в предыдущих случаях. Зона хаотической динамики смещается вместе с вихревой конфигурацией, в ней присутствуют частицы всех четырёх маркерных отрезков.

Последующее увеличение  $\epsilon$  приводит к существенному росту скорости  $\langle v_x \rangle$  перемещения вихревой конфигурации (см. рис. 1, *c*), ускорению вращения (см. рис. 1, *d*), и уменьшению области хаоса на плоскости  $(x', y')$  (см. рис. 2 при  $\epsilon = 0.3, 0.4$ ). Это радикально меняет динамику пассивных частиц и их перенос в поле скорости триполя. На рис. 8 в одинаковых осях координат на плоскости  $(x, y)$  даны положения частиц маркерных отрезков в четыре момента времени при  $\epsilon = 0.4$  ( $\langle v_x \rangle = 0.2846$ ,  $T = 1.6931$ ). В этом случае триполь захватывает часть частиц маркерных отрезков  $l(-2, t, 6, 1000)$  и  $l(2, t, 6, 1000)$ , и они попадают в область хаоса. Остальные частицы этих отрезков на первом этапе динамики смещаются, а с удалением триполя их скорости стремятся к нулю, и частицы останавливаются. Все маркерные частицы  $l(-5, t, 6, 1000)$  остаются недалеко от начального положения. Отрезок  $l(5, t, 6, 1000)$  на первом этапе растягивается, затем триполь «проходит сквозь» этот маркерный отрезок, и с удалением триполя, большая часть его частиц (а возможно, и все) останавливается. На всех рассмотренных в численном эксперименте временах  $t \in [0, 1000T]$  в области хаоса находятся только частицы отрезков  $l(-2, t, 6, 1000)$  и  $l(2, t, 6, 1000)$ . Это даёт основание предположить, что при движении с достаточно большой скоростью вихревой триполь переносит частицы из окрестности начального положения, и практически не захватывает новых частиц по пути своего следования вдоль оси  $x$ , частицы впереди его движения «обтекают» хаотическую область.

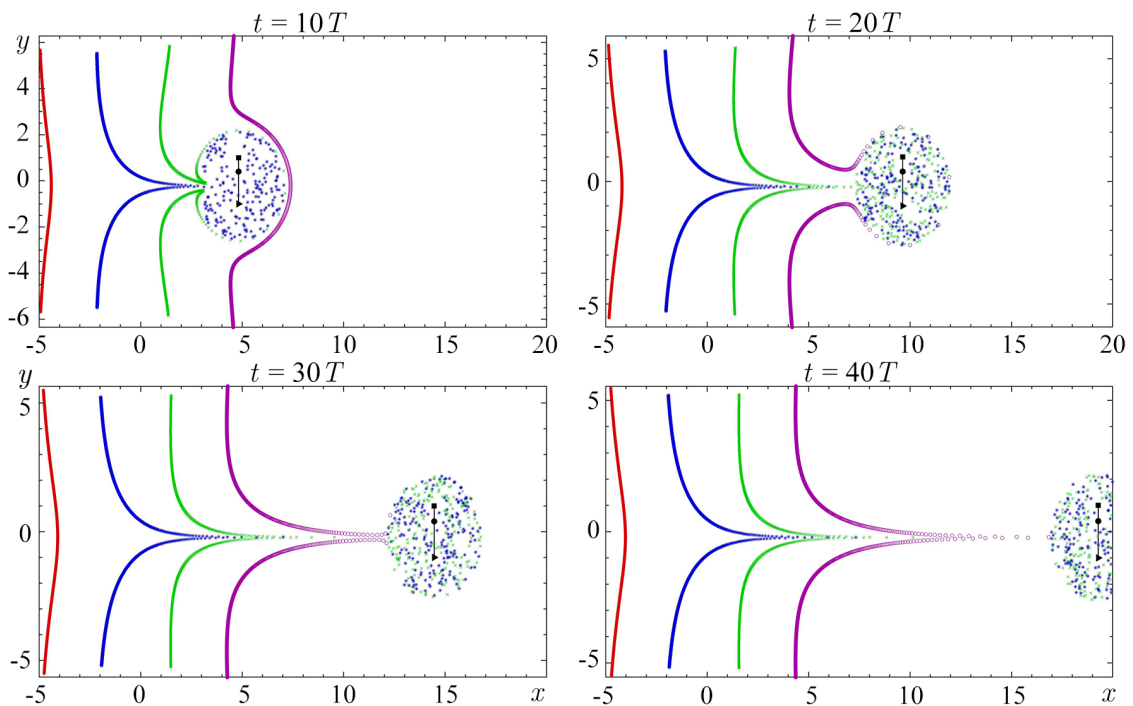


Рис. 8. Положение частиц четырех маркерных отрезков при  $\epsilon = 0.4$  в различные моменты времени (цвет онлайн)

Fig. 8. The position of the particles of the four marker segments at  $\epsilon = 0.4$  at different times (color online)

## Заключение

В статье изучен перенос пассивных частиц в поле скорости вихревого триполю. Для описания вихревой структуры использована простейшая классическая математическая модель — система точечных вихрей. Под триполем понимается конфигурация, состоящая из центрального вихря и двух спутников, причем интенсивности центра и спутников противоположны по знаку, все три вихря расположены в начальный момент на одной прямой, центр находится между спутниками. В работе рассмотрение ограничено частным случаем триполя с нулевой суммарной интенсивностью, когда модуль интенсивности центра в два раза больше, чем модули интенсивности каждого из спутников. В симметричном случае (когда расстояния от центра до спутников в начальный момент одинаковы) центр такой конфигурации остаётся на месте, а спутники вращаются вокруг центра. При нарушении симметрии (расстояния между спутниками и центром различны) возникает движение всей конфигурации по плоскости, и чем больше разница расстояний, тем больше скорость перемещения. Проведен анализ влияния величины возмущения симметрии триполя, а значит, и скорости его перемещения, на процессы переноса пассивных частиц.

Математически модель формулируется в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром — величиной возмущения триполя. Исследование проводилось численно с использованием интеграторов высокого порядка точности и алгоритмов, основанных на подходах теории динамических систем, включая построение отображения Пуанкаре и анализ трансформации «маркерных отрезков», которые представляют собой набор пассивных частиц, расположенных на отрезке в начальный момент. Расчеты проводились на больших временах, соответствующих сотням и тысячам оборотов триполя вокруг его центра.

В результате численного исследования установлено, что перенос пассивных частиц принципиально различен при малой и большой скоростях движения триполя по плоскости. Когда скорость мала (при малых возмущениях триполя), в окрестности вихревой конфигурации возникает обширная область хаотической динамики, которая состоит из двух качественно различных подобластей — активного и медленного перемешивания. Вся область медленно смещается вместе с триполем, а триполь выступает в качестве «смесителя», перемещающего и перемешивающего частицы из левой от себя области в правую, причем этот процесс захватывает большую площадь на плоскости. При достаточно большой скорости вихревого триполя область хаотической динамики существенно меньше, она полностью состоит из области активного перемешивания. В этом случае вихревая конфигурация является «перевозчиком», который перемещает частицы из окрестности своего начального положения на большие расстояния, и практически не захватывает новых частиц по пути своего следования. В промежуточных ситуациях в разной степени, что определяется параметром возмущения, реализуются оба процесса. Естественно предположить, что и реальные трипольные вихревые конфигурации жидкостей и газов могут демонстрировать аналогичные зависимости свойств переноса от их геометрии и скорости перемещения.

## Список литературы

1. *van Heijst G. J. F., Kloosterziel R. C.* Tripolar vortices in a rotating fluid // *Nature*. 1989. Vol. 338, no. 6216. P. 569–571. DOI: 10.1038/338569a0.
2. *Kloosterziel R. C., van Heijst G. J. F.* An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid // *J. Fluid Mech.* 1991. Vol. 223. P. 1–24. DOI: 10.1017/S0022112091001301.
3. *Carnevale G. F., Kloosterziel R. C.* Emergence and evolution of triangular vortices // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 259. P. 305–331. DOI: 10.1017/S0022112094000157.
4. *Trieling R. R., van Heijst G. J. F., Kizner Z.* Laboratory experiments on multipolar vortices in a rotating fluid // *Physics of Fluids*. 2010. Vol. 22, no. 9. P. 094104. DOI: 10.1063/1.3481797.
5. *Rostami M., Zeitlin V.* Evolution of double-eye wall hurricanes and emergence of complex tripolar

- end states in moist-convective rotating shallow water model // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34, no. 6. P. 066602. DOI: 10.1063/5.0096554.
6. *Carton X., Legras B.* The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 267. P. 53–82. DOI: 10.1017/S0022112094001114.
  7. *Kizner Z., Khvoles R.* The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions // *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 70, no. 1. P. 016307. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016307.
  8. *Víudez A.* A stable tripole vortex model in two-dimensional Euler flows // *J. Fluid Mech.* 2019. Vol. 878. P. R5. DOI: 10.1017/jfm.2019.730.
  9. *Курхгоф Г.* Механика: Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 404 с.
  10. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.
  11. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1858. Bd. 55. S. 25–55. DOI: 10.1515/crll.1858.55.25.
  12. *Aref H.* Motion of three vortices // *Physics of Fluids*. 1979. Vol. 22, no. 3. P. 393–400. DOI: 10.1063/1.862605.
  13. *Борисов А. В., Мамаев И. С., Васькина А. В.* Новые относительные равновесия в системе трех точечных вихрей в круговой области и их устойчивость // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, № 1. С. 119–138. DOI: 10.20537/nd1101006.
  14. *Kuznetsov L., Zaslavsky G. M.* Passive particle transport in three-vortex flow // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 61, no. 4. P. 3777–3792. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.3777.
  15. *Leoncini X., Kuznetsov L., Zaslavsky G. M.* Motion of three vortices near collapse // *Physics of Fluids*. 2000. Vol. 12, no. 8. P. 1911–1927. DOI: 10.1063/1.870440.
  16. *Yim H., Kim S.-C., Sohn S.-I.* Motion of three geostrophic Bessel vortices // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2022. Vol. 441. P. 133509. DOI: 10.1016/j.physd.2022.133509.
  17. *Gröbli W.* Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // *Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Gesellsch.* 1877. Bd. 22. S. 129–165.
  18. *Новиков Е. А.* Динамика и статистика системы вихрей // *ЖЭТФ*. 1975. Т. 68, № 5. С. 1868–1882.
  19. *Velasco Fuentes O. U., van Heijst G. J. F., van Lipzig N. P. M.* Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 307. P. 11–41. DOI: 10.1017/S002211209600002X.
  20. *Гудименко А. И., Захаренко А. Д.* Движение трех вихрей с нулевой суммарной интенсивностью // *Прикладная механика и техническая физика*. 2010. Т. 51, № 3. С. 55–65.
  21. *Aref H.* Stirring by chaotic advection // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 143. P. 1–21. DOI: 10.1017/S0022112084001233.
  22. *Govorukhin V. N., Morgulis A., Yudovich V. I., Zaslavsky G. M.* Chaotic advection in compressible helical flow // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60, no. 3. P. 2788–2798. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2788.
  23. *Борисов А. В., Мамаев И. С., Рамоданов С. М.* Основные принципы и модели динамической адвекции // *Доклады Академии наук*. 2010. Т. 432, № 1. С. 41–44.
  24. *Ryzhov E. A., Koshel K. V.* Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow // *Chaos*. 2015. Vol. 25, no. 10. P. 103108. DOI: 10.1063/1.4930897.
  25. *Koshel K. V., Sokolovskiy M. A., Davies P. A.* Chaotic advection and nonlinear resonances in an oceanic flow above submerged obstacle // *Fluid Dynamics Research*. 2008. Vol. 40, no. 10. P. 695–736. DOI: 10.1016/j.fluiddyn.2008.03.001.
  26. *Aref H., Blake J. R., Budišić M., Cardoso S. S. S., Cartwright J. H. E., Clercx H. J. H., El Omari K., Feudel U., Golestanian R., Gouillart E., van Heijst G. F., Krasnopolskaya T. S., Le Guer Y., MacKay R. S., Meleshko V. V., Metcalfe G., Mezić I., De Moura A. P. S., Piro O., Speetjens M. F. M., Sturman R., Thiffeault J.-L., Tival I.* Frontiers of chaotic advection // *Rev. Mod. Phys.* 2017. Vol. 89, no. 2. P. 025007. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.025007.

27. *Говорухин В. Н.* Численное исследование динамической системы, порождаемой САВС векторным полем // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 6. С. 633–642. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-633-642.
28. *Петровская Н. В.* Конечномерные модели динамики вихревых течений идеальной жидкости в квадратной области // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 6. С. 159–172. DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-6-159-172.
29. *Delbende I., Selçuk C., Rossi M.* Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach // Phys. Rev. Fluids. 2021. Vol. 6, no. 8. P. 084701. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.084701.
30. *Sengupta T. K., Singh N., Suman V. K.* Dynamical system approach to instability of flow past a circular cylinder // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 656. P. 82–115. DOI: 10.1017/S0022112010001035.
31. *Prants S. V.* Dynamical systems theory methods to study mixing and transport in the ocean // Physica Scripta. 2013. Vol. 87, no. 3. P. 038115. DOI: 10.1088/0031-8949/87/03/038115.
32. *Ryzhov E. A., Koshel K. V., Carton X. J.* Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow // European Journal of Mechanics - B/Fluids. 2012. Vol. 34. P. 121–130. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.005.
33. *Говорухин В. Н.* Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 8. С. 1491–1505. DOI: 10.7868/S004446691608007X.
34. *Говорухин В. Н., Филимонова А. М.* Анализ структуры плоских вихревых течений и их изменений во времени // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 4. С. 367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
35. *Govorukhin V. N.* An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2023. Vol. 95, no. 4. P. 579–602. DOI: 10.1002/flid.5163.
36. *Metcalf G., Lester D., Trefry M.* A primer on the dynamical systems approach to transport in porous media // Transport in Porous Media. 2023. Vol. 146, no. 1–2. P. 55–84. DOI: 10.1007/s11242-022-01811-6.
37. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Математические методы динамики вихревых структур. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 368 с.
38. *Зиглин С. Л.* Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей // Доклады Академии наук СССР. 1980. Т. 250, № 6. С. 1296–1300.
39. *Aref H.* Stability of relative equilibria of three vortices // Physics of Fluids. 2009. Vol. 21, no. 9. P. 094101. DOI: 10.1063/1.3216063.
40. *Kizner Z.* Stability of point-vortex multipoles revisited // Physics of Fluids. 2011. Vol. 23, no. 6. P. 064104. DOI: 10.1063/1.3596270.
41. *Rott N.* Three-vortex motion with zero total circulation // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1989. Vol. 40, no. 4. P. 473–494. DOI: 10.1007/BF00944801.
42. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Неиштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–290.
43. *Де Ла Яве Р.* Введение в КАМ-теорию. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 176 с.
44. *Говорухин В. Н.* О выборе метода интегрирования уравнений движения множества жидких частиц // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 4. С. 697–710. DOI: 10.7868/S0044466914040073.
45. *Hairer E., Wanner G., Lubich C.* Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Vol. 31 of Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. 515 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05018-7.



46. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
47. Verner J. H. Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants // Numerical Algorithms. 2010. Vol. 53, no. 2–3. P. 383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3.
48. Prince P. J., Dormand J. R. High order embedded Runge-Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1981. Vol. 7, no. 1. P. 67–75. DOI: 10.1016/0771-050X(81)90010-3.
49. Govorukhin V. ode87 Integrator [Electronic resource] // MATLAB Central File Exchange. Retrieved February 28, 2023. Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3616-ode87-integrator>.

## References

1. van Heijst GJF, Kloosterziel RC. Tripolar vortices in a rotating fluid. *Nature*. 1989;338(6216):569–571. DOI: 10.1038/338569a0.
2. Kloosterziel RC, van Heijst GJF. An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* 1991;223:1–24. DOI: 10.1017/S0022112091001301.
3. Carnevale GF, Kloosterziel RC. Emergence and evolution of triangular vortices. *J. Fluid Mech.* 1994;259:305–331. DOI: 10.1017/S0022112094000157.
4. Trieling RR, van Heijst GJF, Kizner Z. Laboratory experiments on multipolar vortices in a rotating fluid. *Physics of Fluids*. 2010;22(9):094104. DOI: 10.1063/1.3481797.
5. Rostami M, Zeitlin V. Evolution of double-eye wall hurricanes and emergence of complex tripolar end states in moist-convective rotating shallow water model. *Physics of Fluids*. 2022;34(6):066602. DOI: 10.1063/5.0096554.
6. Carton X, Legras B. The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows. *J. Fluid Mech.* 1994;267:53–82. DOI: 10.1017/S0022112094001114.
7. Kizner Z, Khvoles R. The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions. *Phys. Rev. E*. 2004;70(1):016307. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016307.
8. Viúdez A. A stable tripole vortex model in two-dimensional Euler flows. *J. Fluid Mech.* 2019;878:R5. DOI: 10.1017/jfm.2019.730.
9. Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1: Mechanik. Leipzig: Teubner; 1876. 489 s. (in German).
10. Batchelor GK. An Introduction to Fluid Dynamics. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. 658 p. DOI: 10.1017/CBO9780511800955.
11. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1858;55:25–55 (in German). DOI: 10.1515/crll.1858.55.25.
12. Aref H. Motion of three vortices. *Physics of Fluids*. 1979;22(3):393–400. DOI: 10.1063/1.862605.
13. Borisov AV, Mamaev IS, Vaskina AV. Stability of new relative equilibria of the system of three point vortices in a circular domain. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2011;7(1):119–138 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1101006.
14. Kuznetsov L, Zaslavsky GM. Passive particle transport in three-vortex flow. *Phys. Rev. E*. 2000;61(4):3777–3792. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.3777.
15. Leoncini X, Kuznetsov L, Zaslavsky GM. Motion of three vortices near collapse. *Physics of Fluids*. 2000;12(8):1911–1927. DOI: 10.1063/1.870440.
16. Yim H, Kim SC, Sohn SI. Motion of three geostrophic Bessel vortices. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2022;441:133509. DOI: 10.1016/j.physd.2022.133509.
17. Gröbli W. Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. *Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Gesellsch.* 1877;22:129–165 (in German).

18. Novikov EA. Dynamics and statistics of a system of vortices. *Sov. Phys. JETP*. 1975;41(5): 937–943.
19. Velasco Fuentes OU, van Heijst GJF, van Lipzig NPM. Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole. *J. Fluid Mech.* 1996;307:11–41. DOI: 10.1017/S002211209600002X.
20. Gudimenko AI, Zakharenko AD. Three-vortex motion with zero total circulation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2010;51(3):343–352. DOI: 10.1007/s10808-010-0047-5.
21. Aref H. Stirring by chaotic advection. *J. Fluid Mech.* 1984;143:1–21. DOI: 10.1017/S0022112084001233.
22. Govorukhin VN, Morgulis A, Yudovich VI, Zaslavsky GM. Chaotic advection in compressible helical flow. *Phys. Rev. E*. 1999;60(3):2788–2798. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2788.
23. Borisov AV, Mamaev IS, Ramodanov SM. Basic principles and models of dynamic advection. *Dokl. Phys.* 2010;55(5):223–227. DOI: 10.1134/S1028335810050058.
24. Ryzhov EA, Koshel KV. Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow. *Chaos*. 2015;25(10):103108. DOI: 10.1063/1.4930897.
25. Koshel KV, Sokolovskiy MA, Davies PA. Chaotic advection and nonlinear resonances in an oceanic flow above submerged obstacle. *Fluid Dynamics Research*. 2008;40(10):695–736. DOI: 10.1016/j.fluiddyn.2008.03.001.
26. Aref H, Blake JR, Budišić M, Cardoso SSS, Cartwright JHE, Clercx HJH, El Omari K, Feudel U, Golestanian R, Gouillart E, van Heijst GF, Krasnopolskaya TS, Le Guer Y, MacKay RS, Meleshko VV, Metcalfe G, Mezić I, De Moura APS, Piro O, Speetjens MFM, Sturman R, Thiffeault JL, Tuval I. Frontiers of chaotic advection. *Rev. Mod. Phys.* 2017;89(2):025007. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.025007.
27. Govorukhin VN. Numerical study of dynamical system generated by CAB vector field. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(6):633–642 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-633-642.
28. Petrovskaja NV. Low-order dynamical models for vortical flows of inviscid fluid in square area. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2009;17(6):159–172 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-6-159-172.
29. Delbende I, Selçuk C, Rossi M. Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach. *Phys. Rev. Fluids*. 2021;6(8):084701. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.084701.
30. Sengupta TK, Singh N, Suman VK. Dynamical system approach to instability of flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 2010;656:82–115. DOI: 10.1017/S0022112010001035.
31. Prants SV. Dynamical systems theory methods to study mixing and transport in the ocean. *Physica Scripta*. 2013;87(3):038115. DOI: 10.1088/0031-8949/87/03/038115.
32. Ryzhov EA, Koshel KV, Carton XJ. Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 2012;34:121–130. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.005.
33. Govorukhin VN. Numerical analysis of the dynamics of distributed vortex configurations. *Comput. Math. Math. Phys.* 2016;56(8):1474–1487. DOI: 10.1134/S0965542516080078.
34. Govorukhin VN, Filimonova AM. Analysis of the structure of vortex planar flows and their changes with time. *Computational Continuum Mechanics*. 2021;14(4):367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
35. Govorukhin VN. An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2023;95(4):579–602. DOI: 10.1002/fld.5163.
36. Metcalfe G, Lester D, Trefry M. A primer on the dynamical systems approach to transport in porous media. *Transport in Porous Media*. 2023;146(1–2):55–84. DOI: 10.1007/s11242-022-01811-6.

37. Borisov AV, Mamaev IS. *Mathematical Methods in the Dynamics of Vortex Structures*. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science; 2005. 368 p. (in Russian).
38. Ziglin SL. Nonintegrability of a problem on the motion of four point vortices. *Sov. Math. Dokl.* 1980;21:296–299.
39. Aref H. Stability of relative equilibria of three vortices. *Physics of Fluids*. 2009;21(9):094101. DOI: 10.1063/1.3216063.
40. Kizner Z. Stability of point-vortex multipoles revisited. *Physics of Fluids*. 2011;23(6):064104. DOI: 10.1063/1.3596270.
41. Rott N. Three-vortex motion with zero total circulation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. 1989;40(4):473–494. DOI: 10.1007/BF00944801.
42. Arnold VI, Kozlov VV, Neishtadt AI. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. 2nd edition. Berlin, Heidelberg: Springer; 1997. 294 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61237-4.
43. de la Llave R. A tutorial on KAM theory. In: Katok A, de la Llave R, Pesin Y, Weiss H, editors. *Smooth Ergodic Theory and Its Applications*. Rhode: American Mathematical Society; 2001. 133 p. DOI: 10.1090/pspum/069/1858536.
44. Govorukhin VN. On the choice of a method for integrating the equations of motion of a set of fluid particles. *Comput. Math. Math. Phys.* 2014;54(4):706–718. DOI: 10.1134/S0965542514040071.
45. Hairer E, Wanner G, Lubich C. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Vol. 31 of Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer; 2002. 515 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05018-7.
46. Hairer E, Nørsett SP, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1987. 482 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12607-3.
47. Verner JH. Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants. *Numerical Algorithms*. 2010;53(2–3):383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3.
48. Prince PJ, Dormand JR. High order embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1981;7(1):67–75. DOI: 10.1016/0771-050X(81)90010-3.
49. Govorukhin V. ode87 Integrator [Electronic resource]. MATLAB Central File Exchange. Retrieved February 28, 2023. Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3616-ode87-integrator>.



*Говорухин Василий Николаевич* — родился в Ростове-на-Дону (1962). Окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1984). Защитил докторскую (2021) диссертацию в области численного исследования вихревых и конвективных течений жидкости. Опубликовал более 70 научных статей по вычислительной математике, гидродинамике, математической биологии и нелинейной динамике. Работает профессором кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а  
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ  
 E-mail: [vngovoruhin@sfnu.ru](mailto:vngovoruhin@sfnu.ru)  
 ORCID: 0000-0001-8459-7841  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 13438