



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья  
УДК 338.12; 519.6; 530.182.2; 621.37

DOI: 10.18500/0869-6632-003037  
EDN: INVKIQ

### Взаимосвязанные экономические колебания — динамическая модель синхронизации

*В. В. Матросов*✉, *В. Д. Шалфеев*

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 17.10.2022, принята к публикации 15.12.2022,  
опубликована онлайн 14.04.2023, опубликована 31.05.2023

**Аннотация.** Цель работы. Анализ динамических процессов и, в частности, процессов синхронизации в ансамбле связанных хаотических экономических осцилляторов. Методы. Качественно-численные методы теории нелинейных динамических систем и теории бифуркаций. Результаты. Рассмотрена нелинейная модель экономического осциллятора, построенная на основе идей теории систем автоматического управления. Такого типа общие экономические модели не подходят для получения конкретных экономических оценок или рекомендаций, однако такие модели полезны для развития теории экономических циклов — теории генерации, взаимодействия, синхронизации циклов и др. Проведенные численные эксперименты с рассматриваемыми моделями продемонстрировали хорошее качественное сходство генерируемых в модели хаотических колебаний с реальными экономическими циклами. Показано, что в малом ансамбле связанных экономических осцилляторов возможна синхронизация хаотических экономических циклов с некоторой ошибкой, существенно зависящей от силы связей.

**Ключевые слова:** экономические колебания, динамический хаос, синхронизация.

**Благодарности.** Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031). Авторы выражают благодарность М. И. Рабиновичу и В. П. Пономаренко за полезные дискуссии и советы.

**Для цитирования:** Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Взаимосвязанные экономические колебания — динамическая модель синхронизации // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 254–270. DOI: 10.18500/0869-6632-003037. EDN: INVKIQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Coupled economic oscillations – synchronization dynamical model

V. V. Matrosov<sup>✉</sup>, V. D. Shalfeev

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Received 17.10.2022, accepted 15.12.2022, available online 14.04.2023, published 31.05.2023

**Abstract.** Purpose of this work is the research of the dynamical processes and in particular the phenomenon of the synchronization in an ensemble of coupled chaotic economic oscillators. *Methods.* The research methods are the qualitative and numerical methods of the theory of nonlinear dynamical systems and the theory of the bifurcations. *Results.* The nonlinear model of economic oscillator as the system of automatic control are considered. Such kind of general economic models are unsuitable for getting some concrete economic estimations and recommendations. But such kind models are very useful for a development the theory of the economic cycles, theory of the generation, interactions, synchronization of the cycles and so on. Our numerical experiments demonstrated a good enough qualitative similarity of an chaotic economic oscillations in our model and real economic cycles. The phenomenon of the synchronization of the chaotic oscillations in the ensemble of coupled economic oscillators are considered, however the accuracy of the synchronization depends with couplings essentially.

**Keywords:** economic oscillation, dynamical chaos, synchronization.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSWR-2023-0031). Authors are grateful to M. I. Rabinovich and V. P. Ponomarenko for useful discussions and tips.

**For citation:** Matrosov VV, Shalfeev VD. Coupled economic oscillations – synchronization dynamical model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(3):254–270. DOI: 10.18500/0869-6632-003037

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Экономические колебания (деловые циклы) являются предметом пристального внимания экономистов уже не одно десятилетие. Несмотря на множество выдвинутых теорий (теория периодических циклов, экзогенные теории влияния природных катастроф, социальных, технологических потрясений, эндогенные теории недопотребления, равновесного цикла, перенакопления и др.) [1–4], следует признать, что единой общепринятой теории экономических колебаний сегодня нет, как нет и единого взгляда на причины, порождающие циклы [5]. Еще более неясным и запутанным представляется вопрос о синхронизации экономических колебаний. Ряд авторов изучают синхронизацию циклов на основе анализа time-series [6]. Однако в большинстве экономических работ под синхронизацией понимается не совпадение частот колебаний, а некоторая близость колебаний (concordance analysis), основанная на близости «фаз» (стадий) циклов [7]. Есть авторы — сторонники применения теории динамического хаоса в экономике и финансах, в частности для анализа синхронизации [8, 9].

В [10, 11] рассматривается динамическая модель хаотического экономического осциллятора, функционирующего как система автоматического управления, и процессы генерации и синхронизации экономических циклов на основе этой модели. Настоящая работа представляет собой развитие этих исследований, в частности, продолжает изучение процессов синхронизации в ансамбле связанных экономических осцилляторов.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 обсуждается динамическая модель экономического осциллятора. В разделе 2 приведены результаты исследования процессов синхронизации в ансамбле связанных осцилляторов.

## 1. Модель экономических колебаний

В [10, 11] рассматривается идея построения нелинейной модели гипотетического экономического осциллятора, функционирующего как типовая система автоматического управления. Такой подход к описанию динамического поведения различных технических, биологических, социальных и др. объектов не является новым и в литературе можно найти много примеров использования такого подхода, в частности, пример построения динамической модели покупателя в задаче формирования общественного мнения [12].

Как можно построить модель экономического осциллятора с использованием идей теории автоматического управления? Экономические колебания (бизнес-циклы) определяются несколькими показателями, среди которых наиболее важным является валовый внутренний продукт (ВВП), характеризующийся общей суммой произведенных в стране товаров и услуг. Выберем один определенный вид товара из состава ВВП и построим для него цепь автоматического управления, где в качестве входного сигнала примем трендовое значение стоимости этого товара (постоянное или изменяющееся во времени), а в качестве объекта управления примем некий оценщик величины стоимости товара. Цепь управления будет регулировать выходной сигнал оценщика в соответствии с входным сигналом. Функции различных элементов цепи управления построенной гипотетической системы, очевидно, должны реализовываться управляющими действиями правительства страны, инвестбанков, руководства предприятий и т. д. Поскольку выбранный товар производится, как правило, не одним производителем, а несколькими, возможно, потребуется организация многоконтурной системы управления. Наличие множества агентов, участвующих в управлении, может иметь результатом несогласованность управляющих воздействий, а неизбежное присутствие инерционностей и задержек в цепях управления может привести к неустойчивостям, порождающим возникновение предельных циклов и хаотических аттракторов, в результате чего на выходе системы будут формироваться периодические и хаотические колебания. Для оценки величины стоимости других товаров и услуг, входящих в состав ВВП, аналогичным образом должны быть построены другие системы управления. Суммирование выходных сигналов всех построенных систем управления позволит получить оценку величины ВВП и его динамику, то есть получить в итоге модель бизнес-цикла. Очевидно, что полученная в результате таких построений модель, включающая большое число многоконтурных систем управления, будет столь громоздкой, что не позволит провести исследование динамики и получить какие-либо конкретные данные о бизнес-цикле, поскольку большинство параметров построенной модели будут неизвестны. С учетом этого обстоятельства более целесообразным, по-видимому, будет реализовать самый простой вариант системы автоматического управления для оценки только одного показателя — композитного индекса бизнес-цикла.

Модель экономического осциллятора, функционирующего как система автоматического управления величиной композитного индекса бизнес-цикла [10, 11], представлена на рис. 1.

Здесь объектом управления является оценщик (estimator)  $E$ , на выходе которого формируется текущая оценка величины композитного индекса бизнес-цикла  $I_E(t)$ . На вход системы поступает

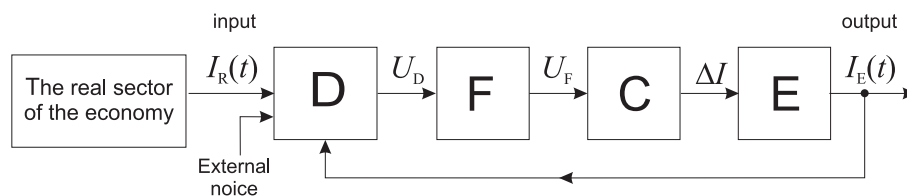


Рис. 1. Модель экономического осциллятора:  $E$  — объект управления, оценщик,  $C$  — управитель,  $F$  — фильтр,  $D$  — дискриминатор

Fig. 1. The model of economic oscillator:  $E$  — estimator,  $C$  — control element,  $F$  — filter,  $D$  — discriminator

$I_R(t)$  — величина реального индекса бизнес-цикла, определяемая реальным сектором экономики (для простоты положим ее постоянной). Дискриминатор  $D$  сравнивает  $I_E(t)$  и  $I_R(t)$ . Сигнал с выхода  $D$  проходит через фильтр  $F$ , убирающий высокочастотные шумы. Сигнал с выхода фильтра  $U_F$  поступает на управитель  $C$ , корректирующий оценку  $I_E(t)$  на величину  $\Delta I$  в сторону сближения с  $I_R(t)$ .

Уравнение, описывающее динамику модели экономического осциллятора (см. рис. 1), получено в [10, 11] в операторной форме:

$$x + K(p)\Phi(x) = \gamma, \quad p \equiv d/dt. \quad (1)$$

Здесь  $x = (I_E - I_R)/\Delta I_{\max}$  — безразмерное текущее отклонение величины  $I_E$  композитного индекса бизнес-цикла от величины  $I_R$  реального композитного индекса бизнес-цикла.  $\Delta I_{\max} = SE$  ( $S$  — крутизна характеристики управителя,  $E$  — максимальная величина сигнала с выхода  $D$ ),  $\gamma = (I_E^0 - I_R)/\Delta I_{\max}$  — безразмерное отклонение величины композитного индекса бизнес-цикла  $I_E^0$  в начальный момент времени от величины  $I_R$  реального композитного индекса бизнес-цикла,  $K(p)$  — передаточная функция фильтра,  $\Phi(x)$  — нелинейность дискриминатора  $D$ , нормированная к единице.

Принимая  $K(p) = (1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3)^{-1}$  и вводя безразмерное время  $\tau = t/a_1$  и параметры  $\varepsilon = a_2/a_1^2$ ,  $\mu = a_3/a_1^3$ , запишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \mu \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - x - y - \varepsilon z - \Phi(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Динамика (2) изучалась в ряде работ, в частности, в [13] для  $\Phi(x) = 2\beta x/(1 + \beta^2 x^2)$  при  $\beta > 0$ , в [14] для инвертированной нелинейности  $\Phi(x)$  при  $\beta < 0$ , а также в [15] и др. Приведем краткие сведения о динамике (2).

При  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  система (2) сводится к уравнению первого порядка, а при  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$  — к уравнению второго порядка. Динамика (2) в этих случаях определяется состояниями равновесия (рис. 2, а). Для неинвертированной нелинейности  $\Phi(x)$  существует одно устойчивое

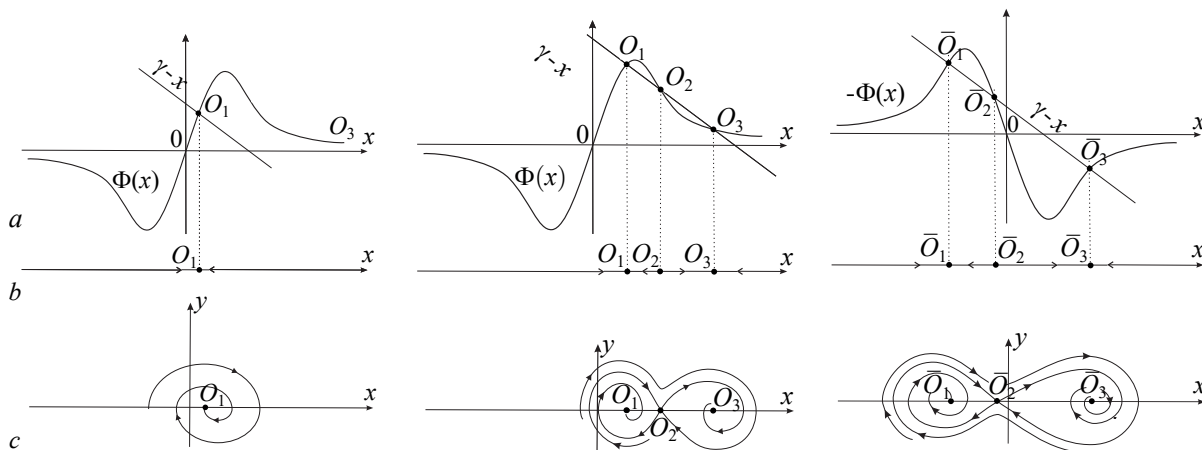


Рис. 2. Состояния равновесия системы (2) (а), фазовые портреты системы (2) при  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  (б), фазовые портреты системы (2) при  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$  (с)

Fig. 2. Equilibrium states of the system (2) (a), phase portraits of the system (2) when  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  (b), phase portraits of the system (2) when  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$  (c)

состояние равновесия  $O_1$  ( $O_3$ ), либо три —  $O_1$ ,  $O_3$  — устойчивые и  $O_2$  — неустойчивое, а для инвертированной нелинейности  $\Phi(x)$  одно устойчивое состояние равновесия  $\bar{O}_1$  ( $\bar{O}_3$ ), либо три —  $\bar{O}_1$  ( $\bar{O}_3$ ) — устойчивые и  $\bar{O}_2$  — неустойчивое. На рис. 2, *b* даны характерные фазовые портреты системы (2) для  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , а на рис. 2, *c* — фазовые портреты для  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , полученные стандартными методами теории колебаний [16].

Динамика системы (2) в трехмерном фазовом пространстве  $(x, y, z)$  достаточно сложна и характеризуется не только наличием состояний равновесия, но и наличием предельных циклов и хаотических аттракторов, как около одного состояния равновесия  $O_1$  или  $O_3$  ( $\bar{O}_1$  или  $\bar{O}_3$ ), так и около трех состояний равновесия  $O_1, O_2, O_3$  ( $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$ ).

Не приводя здесь полного описания динамики (2), представим наиболее важные с точки зрения экономических интерпретаций бифуркации, иллюстрирующие разные пути возбуждения хаотических колебаний в системе (2).

Для случая неинвертированной характеристики  $\Phi(x)$  на рис. 3 представлен параметрический портрет  $(\mu, \gamma)$  системы (2) для  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = 10$ .

Здесь штрихпунктирная линия  $\gamma = \gamma^*$  соответствует бифуркации слияния состояний равновесия  $O_2$  и  $O_3$ , а штрихпунктирная линия  $\gamma = \gamma^{**}$  соответствует бифуркации слияния состояний равновесия  $O_2$  и  $O_1$ . Линии  $\gamma = \gamma^*$  и  $\gamma = \gamma^{**}$  ограничивают область  $C_1$  существования состояния равновесия  $O_1$ , область  $C_2$  существования состояний равновесия  $O_1, O_2, O_3$  и область  $C_3$  существования состояния равновесия  $O_3$ .

Линия 1 соответствует бифуркации Андронова–Хопфа для состояния равновесия  $O_1$ . Первая ляпуновская величина на линии 1 отрицательна, следовательно, эта бифуркация суперкритическая и линия 1 соответствует мягкому рождению устойчивого предельного цикла  $L_1$  вокруг  $O_1$  (рис. 4, *a*) при пересечении линии 1 слева направо.

Пунктирные линии 2 и 3 соответствуют первой бифуркации удвоения периода цикла  $L_1$ , после которой цикл  $L_1$  претерпевает серию бифуркаций удвоения периода, в результате чего

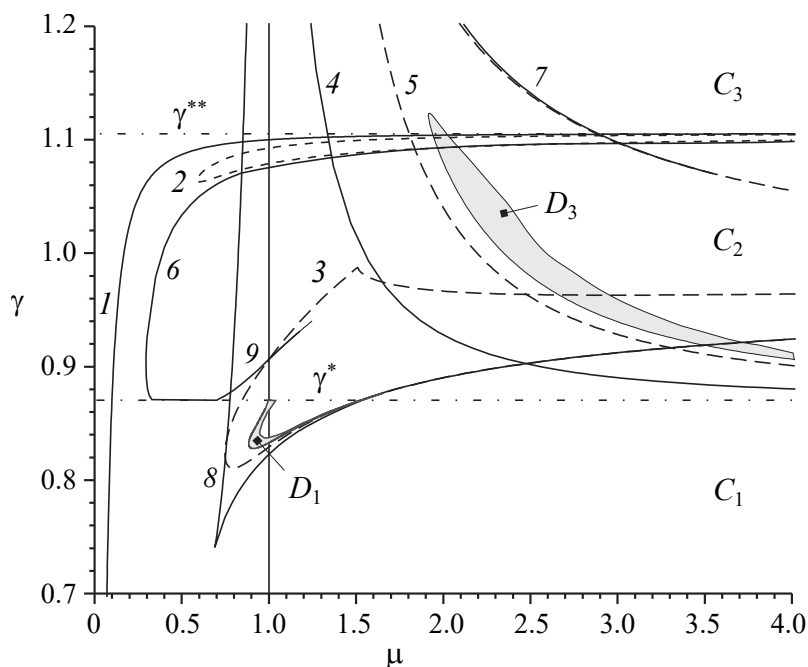


Рис. 3. Параметрический портрет системы (2) при  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = 10$

Fig. 3. Parametric portrait of the (2) when  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = 10$

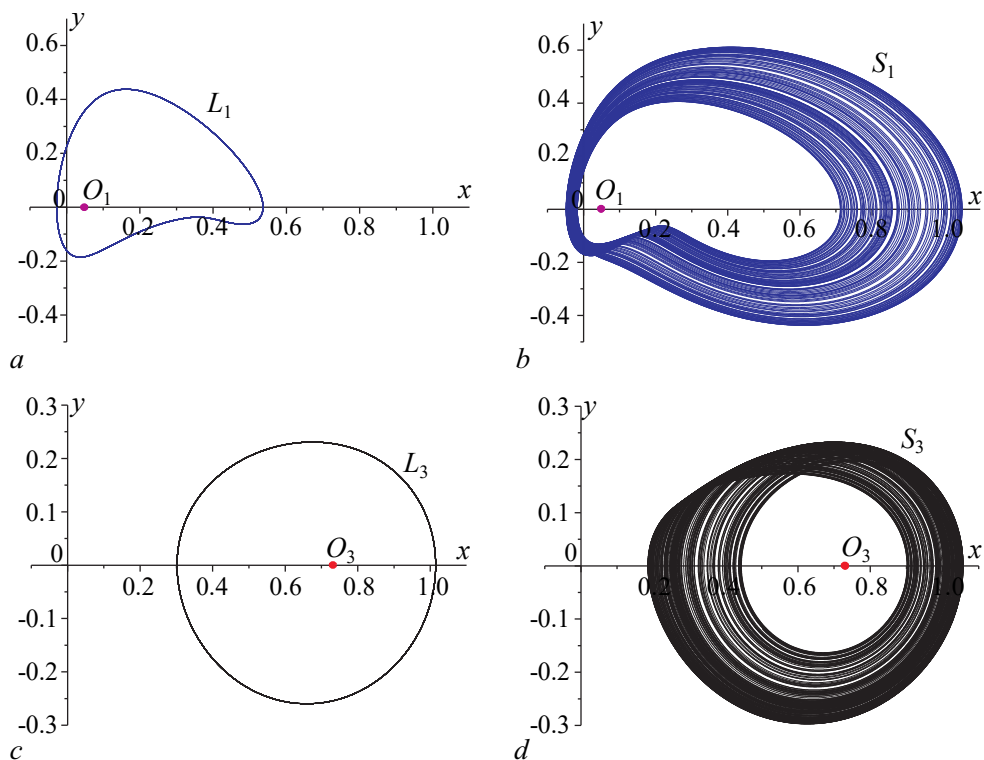


Рис. 4. Проекция аттракторов системы (2) при  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 0.835$ ,  $\mu = 0.4$  (a),  $\gamma = 0.835$ ,  $\mu = 0.9$  (b),  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 2.1$  (c),  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 0.239$  (d) (цвет онлайн)

Fig. 4. Projections of attractors of (2) when  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 0.835$ ,  $\mu = 0.4$  (a),  $\gamma = 0.835$ ,  $\mu = 0.9$  (b),  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 2.1$  (c),  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 0.239$  (d) (color online)

появляется хаотический аттрактор  $S_1$  в соответствии со сценарием Фейгенбаума (рис. 4, b). Область существования аттрактора  $S_1$ , ограниченная линией 2, очень мала и поэтому на рис. 3 не показана, а область существования аттрактора  $S_1$ , ограниченная линией 3, обозначена  $D_1$  на рис. 3.

Линия 4 соответствует потере устойчивости состояния равновесия  $O_3$  в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Первая Ляпуновская величина на линии 4 отрицательна, то есть это суперкритическая бифуркация и на линии 4 вокруг  $O_3$  мягко рождается устойчивый предельный цикл  $L_3$  (рис. 4, c).

Пунктирная линия 5 соответствует первой бифуркации удвоения периода цикла  $L_3$ , затем через серию бифуркаций удвоения периода рождается хаотический аттрактор  $S_3$  в соответствии со сценарием Фейгенбаума (рис. 4, d). Область существования аттрактора  $S_3$  обозначена  $D_3$  на рис. 3.

Кроме описанных выше бифуркаций система (2) демонстрирует другие бифуркации, в частности, бифуркацию влипания цикла  $L_1$  в петлю сепаратрис седла  $O_2$  с последующим исчезновением  $L_1$  (линия 6), седло-узловую бифуркацию исчезновения цикла  $L_3$  (линия 7), седло-узловую бифуркацию рождения цикла  $L_2$ , охватывающего все три состояния равновесия  $O_1, O_2, O_3$  (линия 8), бифуркацию петли сепаратрис седло-фокуса  $O_2$  с отрицательной седловой величиной и положительной седловой величиной (линия 9), в последнем случае имеет место сложная структура параметрического портрета, связанная с бесконечным числом бифуркационных линий, отвечающих кратным циклам и многообходным петлям сепаратрис [17]. Анализ этих бифуркаций здесь не приводится, поскольку выходит за рамки основной цели работы.



Обратимся теперь к динамике системы (2) в случае инвертированной нелинейности  $\Phi(x)$ . На рис. 5 для этого случая представлены наиболее важные бифуркационные кривые, отражающие возникновение и хаотизацию автоколебательных режимов в модели (2), а на рис. 6 приведены примеры проекций соответствующих этим режимам аттракторов.

Штрихпунктирная прямая  $\gamma = \gamma^*$  делит плоскость параметров  $(\mu, \gamma)$  на области  $C_1$  и  $C_2$  существования трех ( $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$ ) и одного ( $\bar{O}_3$ ) состояний равновесия.

Линии 1 и 2 (см. рис. 5) отвечают за рождение устойчивого предельного цикла  $L_1$  вокруг состояния равновесия  $\bar{O}_1$  (рис. 6, а). Линия 1 соответствует бифуркации Андронова–Хопфа состояния равновесия  $\bar{O}_1$ . Точка  $M$ , где первая ляпуновская величина обращается в ноль, разделяет бифуркационную кривую на участки мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний. Часть линии 1, расположенная выше точки  $M$ , отвечает суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа, при пересечении этого участка кривой слева направо смена устойчивости состояния равновесия  $\bar{O}_1$  сопровождается рождением устойчивого предельного цикла  $L_1$  практически нулевой амплитуды. Часть линии 1, расположенная ниже точки  $M$ , отвечает жесткому рождению автоколебаний. Жесткий автоколебательный режим возникает в результате бифуркации двукратного предельного цикла на линии 2. Линия 2 располагается ниже точки  $M$  и проходит левее линии 1. При пересечении линии 2 слева направо в фазовом пространстве модели (2) появляется устойчивый предельный цикл  $L_1$  конечной амплитуды.

Цикл  $L_1$  может испытывать бифуркации удвоения периода, в результате чего на его основе может сформироваться хаотический аттрактор  $S_1$  (рис. 6, б). Пунктирная линия 3 отвечает за первую бифуркацию удвоения периода цикла  $L_1$ , эта бифуркация мягкая, и соответствует появлению устойчивого предельного цикла  $L_1^{(2)}$  удвоенного периода. Заметим, что процесс удвоений периода цикла  $L_1$  не всегда завершается формированием хаотического аттрактора, сценарий Фейгенбаума может прерваться исчезновением предельных циклов больших периодов либо через касательную бифуркацию, либо в результате бифуркаций многообходных петель сепаратрис седла  $\bar{O}_2$ . В частности, на рис. 5 сплошная линия 5 отвечает касательной бифуркации цикла  $L_1^{(2)}$

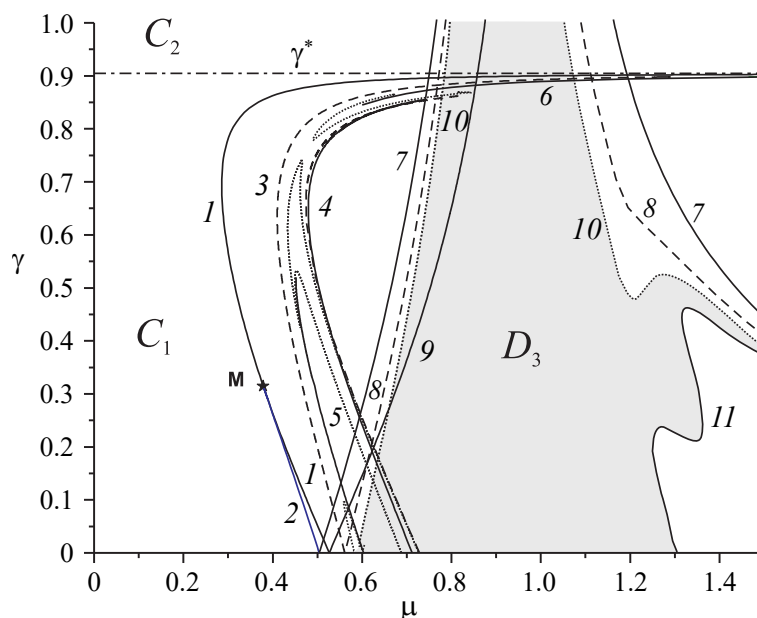


Рис. 5. Параметрический портрет модели (2) в плоскости  $\{\mu, \gamma\}$  при  $\varepsilon = 1, \beta = -10$

Fig. 5. Parameter portrait of the (2) when  $\varepsilon = 1, \beta = -10$

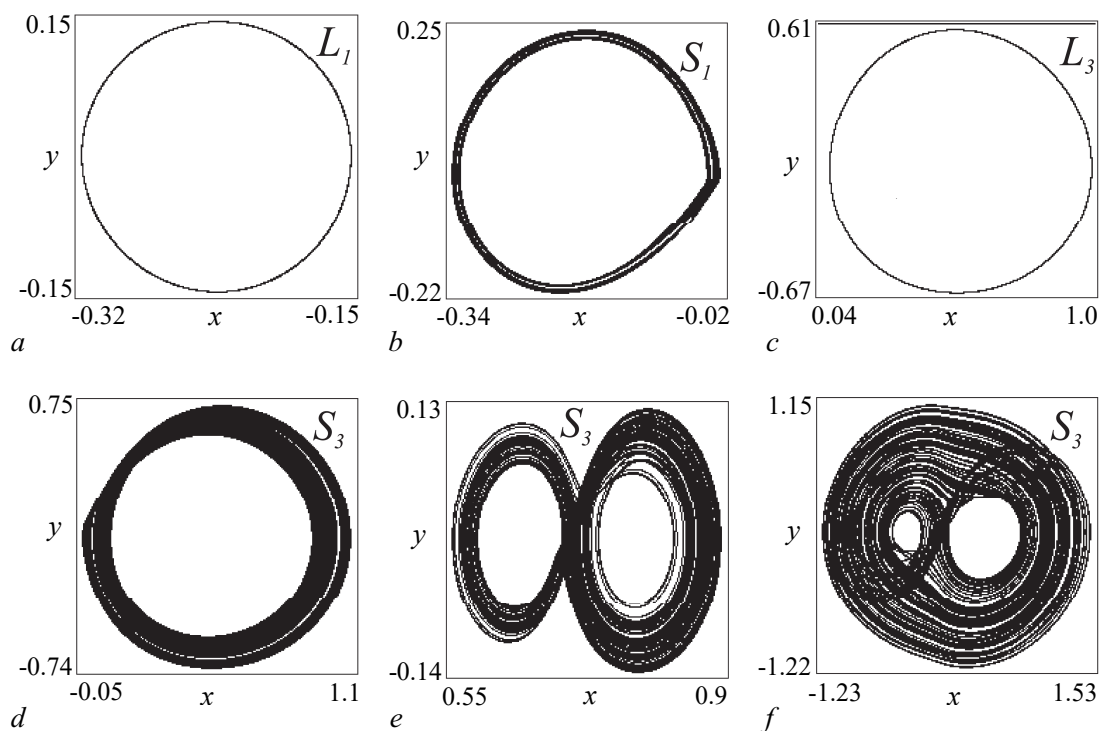


Рис. 6. Проекция аттракторов системы (2) при  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = -10$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\mu = 0.321$  (a),  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 0.463$  (b),  $\gamma = 0.05$ ,  $\mu = 0.529$  (c),  $\gamma = 0.1$ ,  $\mu = 0.623$  (d),  $\gamma = 0.1$ ,  $\mu = 0.66$  (e),  $\gamma = 0.1$ ,  $\mu = 1.27$  (f)

Fig. 6. Projections of attractors of the system (2) when  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = -10$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\mu = 0.321$  (a),  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 0.463$  (b),  $\gamma = 0.05$ ,  $\mu = 0.529$  (c),  $\gamma = 0.1$ ,  $\mu = 0.623$  (d),  $\gamma = 0.1$ ,  $\mu = 0.66$  (e),  $\gamma = 0.1$ ,  $\mu = 1.27$  (f)

удвоенного периода, а сплошная линия 6 — бифуркации двухобходной петли сепаратрис седло-фокуса  $\bar{O}_2$ . Линия 4 ограничивает область существования цикла  $L_1$  справа, на этой кривой цикл  $L_1$  исчезает через касательную бифуркацию. Области существования хаотического аттрактора  $S_1$  на рис. 5 не выделены, поскольку имеют незначительные размеры, однако на параметрический портрет нанесены точечные линии, отражающие переход от регулярных колебаний к хаотическим.

Линия 7 отвечает за рождение устойчивого предельного цикла  $L_3$  (рис. 6, c) через бифуркацию двукратного предельного цикла. При малых  $\gamma$  в момент рождения цикл  $L_3$  охватывает состояние равновесия  $\bar{O}_3$ , с ростом  $\gamma$ , а также при удалении от линии 7 амплитуда цикла  $L_3$  растет, и он начинает охватывать все три состояния равновесия.

Пунктирная линия 8 соответствует началу удвоений периода цикла  $L_3$ , при удалении от этой линии цикл  $L_3$  испытывает каскад бифуркаций удвоения периода, в результате на базе  $L_3$  формируется хаотический аттрактор  $S_3$  (рис. 6, d). Линии 9 и 11 ограничивают область  $D_3$  существования хаотических колебаний. Точечная линия 10 отражает четвертую бифуркацию удвоения периода цикла  $L_3$ , а поскольку бифуркационные значения пятой и последующих бифуркаций удвоения периода  $L_3$  укладываются в интервал  $\Delta\mu = 10^{-4}$ , то значение четвертой бифуркации удвоения периода практически можно использовать в качестве границы области существования хаотических колебаний. На сплошной линии 11 происходит кризис хаотического аттрактора, при выходе из области  $D_3$  через эту линию аттрактор  $S_3$  разрушается, фазовые траектории из его окрестности устремляются в бесконечность. Отметим, что хаотические колебания  $S_3$  могут принимать различный вид, это свидетельствует о широких возможностях рассматриваемой модели по генерации хаотических колебаний с различными характеристиками. Примеры возможных проекций аттрактора  $S_3$  приведены на рис. 6, d-f.



Таким образом, приведенные выше данные показывают, что модель (2) демонстрирует широкие возможности генерации хаотических режимов. Сравнение осциллограмм таких хаотических колебаний [10, 11] с осциллограммами реальных колебаний композитных индексов бизнес-циклов, приведенными в литературе [18], дает возможность сделать вывод о достаточно хорошем качественном сходстве таких колебаний.

## 2. Анализ процессов синхронизации связанных экономических колебаний

Рассмотрим динамику малого ансамбля из пяти экономических осцилляторов (2), связанных по схеме рис. 7.

Связи по схеме рис. 7 позволяют исследовать процессы синхронизации в ансамбле в зависимости от силы связей с осциллятором  $O_0$ . Будем считать связи осцилляторов  $O_1, O_2, O_3, O_4$  примерно одинаковыми, а связи от осциллятора  $O_0$  будем варьировать от слабых до сильных. Такая ситуация может моделировать процессы экономического взаимодействия группы стран, имеющих примерно одинаковые экономики, с одной страной, имеющей существенно более сильную экономику.

Система уравнений, описывающих динамику ансамбля, представленного на рис. 7, может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\
 \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - x_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1 - \Phi_1(x_1) - \kappa_{21}\Phi_2(x_2) - \kappa_{31}\Phi_3(x_3) - \kappa_{01}\Phi_0(x_0), \\
 \frac{dx_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\
 \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - x_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \Phi_2(x_2) - \kappa_{12}\Phi_1(x_1) - \kappa_{42}\Phi_4(x_4) - \kappa_{02}\Phi_0(x_0), \\
 \frac{dx_3}{d\tau} &= y_3, & \frac{dy_3}{d\tau} &= z_3, \\
 \mu_3 \frac{dz_3}{d\tau} &= \gamma_3 - x_3 - y_3 - \varepsilon_3 z_3 - \Phi_3(x_3) - \kappa_{13}\Phi_1(x_1) - \kappa_{43}\Phi_4(x_4) - \kappa_{03}\Phi_0(x_0), \\
 \frac{dx_4}{d\tau} &= y_4, & \frac{dy_4}{d\tau} &= z_4, \\
 \mu_4 \frac{dz_4}{d\tau} &= \gamma_4 - x_4 - y_4 - \varepsilon_4 z_4 - \Phi_4(x_4) - \kappa_{24}\Phi_2(x_2) - \kappa_{34}\Phi_3(x_3) - \kappa_{04}\Phi_0(x_0), \\
 \frac{dx_0}{d\tau} &= y_0, & \frac{dy_0}{d\tau} &= z_0, \\
 \mu_0 \frac{dz_0}{d\tau} &= \gamma_0 - x_0 - y_0 - \varepsilon_0 z_0 - \Phi_0(x_0) - \kappa_{10}\Phi_1(x_1) - \kappa_{20}\Phi_2(x_2) - \kappa_{30}\Phi_3(x_3) - \kappa_{40}\Phi_4(x_4).
 \end{aligned} \tag{3}$$

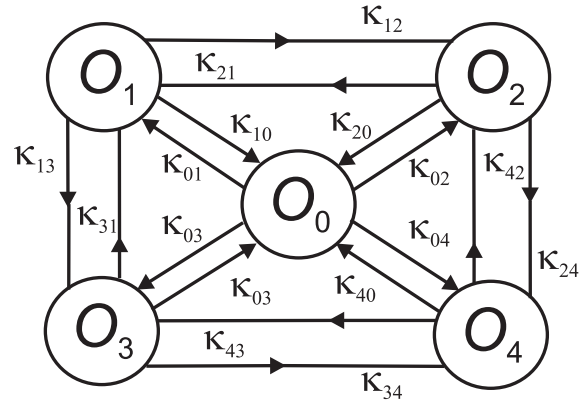


Рис. 7. Ансамбль экономических осцилляторов  
Fig. 7. The ensemble of oscillators

На рис. 8–10 представлены результаты численных экспериментов с системой (3). Проекции хаотических аттракторов для случая отсутствия связей с осциллятором  $O_0$  даны на рис. 8. В этом случае осцилляторы  $O_1 - O_4$  синхронизованы, а синхронизация с осциллятором  $O_0$  отсутствует. На рис. 9 представлен случай слабых связей с осциллятором  $O_0$ . В этом случае синхронизация осцилляторов  $O_1 - O_4$  осталась примерно на прежнем уровне, при этом появилась слабая

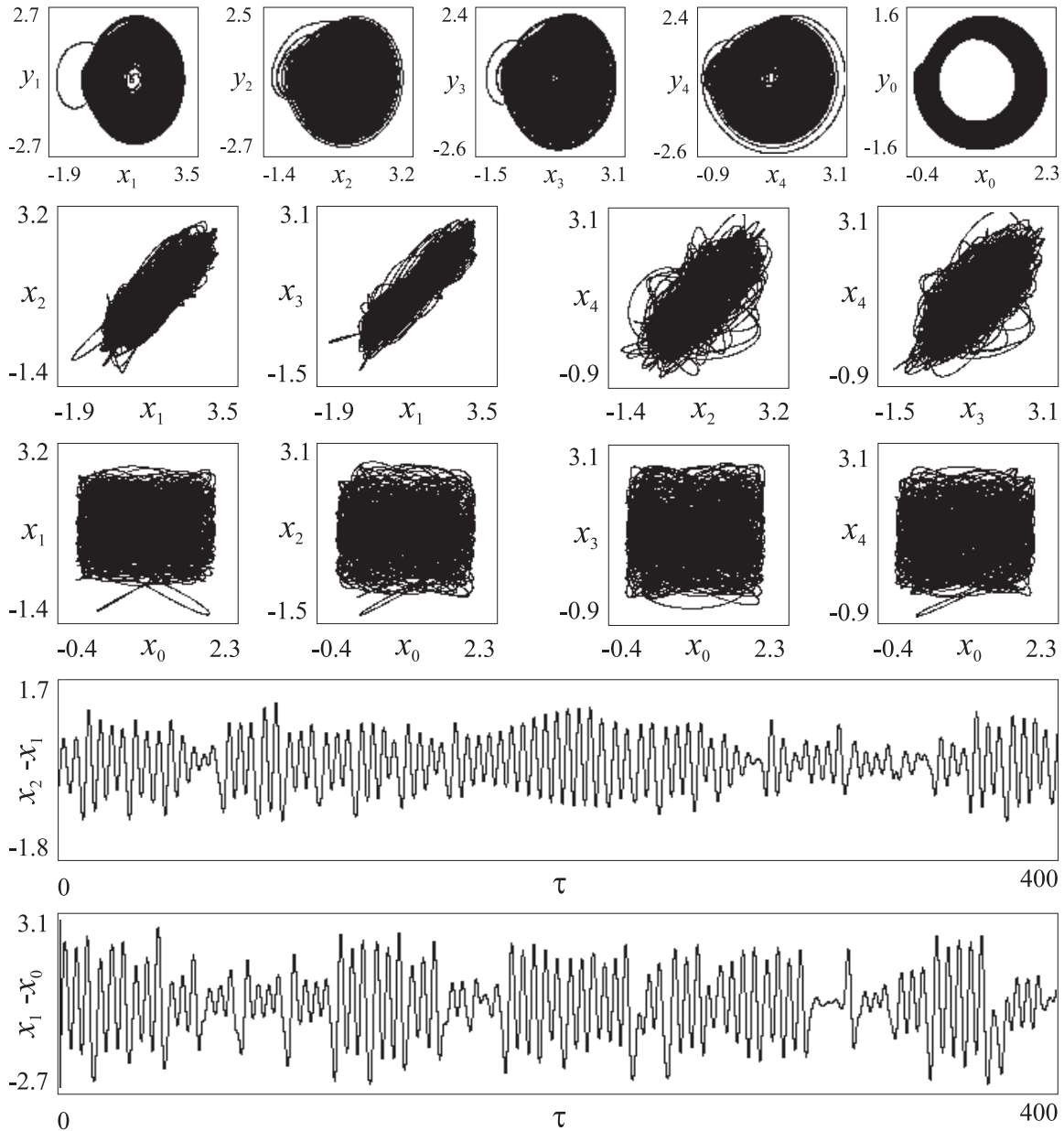


Рис. 8. Проекция аттракторов системы (3) при отсутствии связей от осциллятора  $O_0$  в случае  $\gamma_0 = 0.64$ ,  $\varepsilon_0 = 0.64$ ,  $\mu_0 = 0.53$ ,  $\beta_0 = -10$ ,  $\gamma_1 = 0.64$ ,  $\varepsilon_1 = 0.64$ ,  $\mu_1 = 0.53$ ,  $\beta_1 = -10$ ,  $\gamma_2 = 0.65$ ,  $\varepsilon_2 = 0.61$ ,  $\mu_2 = 0.51$ ,  $\beta_2 = -10$ ,  $\gamma_3 = 0.64$ ,  $\varepsilon_3 = 0.61$ ,  $\mu_3 = 0.51$ ,  $\beta_3 = -10$ ,  $\gamma_4 = 0.63$ ,  $\varepsilon_4 = 0.65$ ,  $\mu_4 = 0.52$ ,  $\beta_4 = -10$ ,  $\kappa_{21} = 0.8$ ,  $\kappa_{31} = 0.98$ ,  $\kappa_{12} = 1$ ,  $\kappa_{42} = 0.1$ ,  $\kappa_{13} = 1$ ,  $\kappa_{43} = 0.06$ ,  $\kappa_{24} = 0.4$ ,  $\kappa_{34} = 0.84$ ,  $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 0$ ,  $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0$

Fig. 8. Projections of attractors of the system (3) when couplings from oscillator  $O_0$  are absent and  $\gamma_0 = 0.64$ ,  $\varepsilon_0 = 0.64$ ,  $\mu_0 = 0.53$ ,  $\beta_0 = -10$ ,  $\gamma_1 = 0.64$ ,  $\varepsilon_1 = 0.64$ ,  $\mu_1 = 0.53$ ,  $\beta_1 = -10$ ,  $\gamma_2 = 0.65$ ,  $\varepsilon_2 = 0.61$ ,  $\mu_2 = 0.51$ ,  $\beta_2 = -10$ ,  $\gamma_3 = 0.64$ ,  $\varepsilon_3 = 0.61$ ,  $\mu_3 = 0.51$ ,  $\beta_3 = -10$ ,  $\gamma_4 = 0.63$ ,  $\varepsilon_4 = 0.65$ ,  $\mu_4 = 0.52$ ,  $\beta_4 = -10$ ,  $\kappa_{21} = 0.8$ ,  $\kappa_{31} = 0.98$ ,  $\kappa_{12} = 1$ ,  $\kappa_{42} = 0.1$ ,  $\kappa_{13} = 1$ ,  $\kappa_{43} = 0.06$ ,  $\kappa_{24} = 0.4$ ,  $\kappa_{34} = 0.84$ ,  $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 0$ ,  $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0$

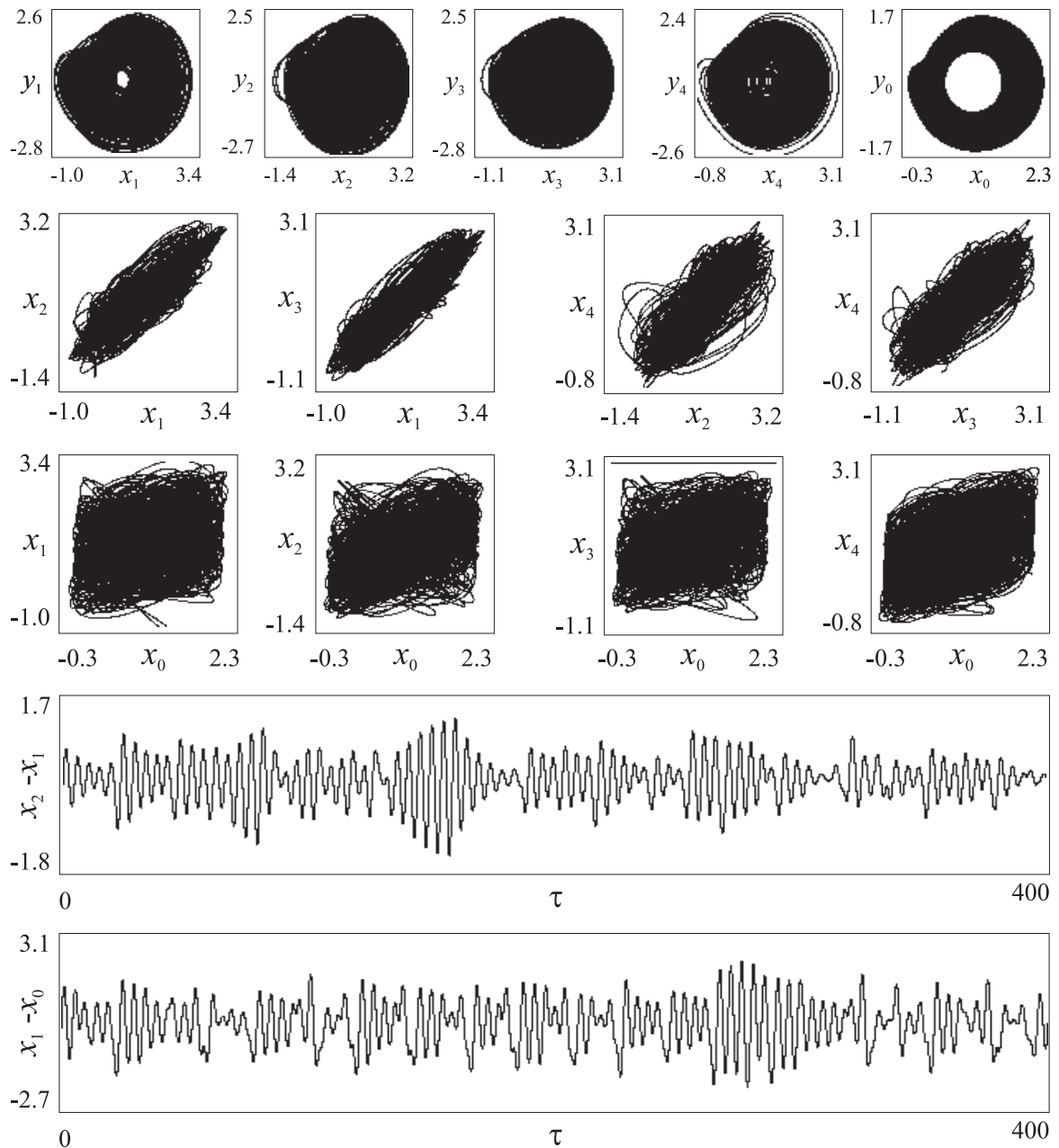


Рис. 9. Проекция аттракторов системы (3) при слабых связях от осциллятора  $O_0$  в случае  $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 0.3$ ,  $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.05$

Fig. 9. Projections of attractors of the (3) when couplings from oscillator  $O_0$  are weak and  $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 0.3$ ,  $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.05$

синхронизация с осциллятором  $O_0$ . На рис. 10 представлен случай сильных связей с осциллятором  $O_0$ , в этом случае существенно улучшилась синхронизация  $O_1-O_4$  и появилась вполне заметная синхронизация  $O_0$  с другими осцилляторами.

Как следует из рис. 8–10, точность полученной синхронизации хаотических колебаний оказалась невысокой. Её можно увеличить, усиливая связи, однако даже тройное увеличение силы связей с элементом  $O_0$  (рис. 10) не привело к значительному увеличению точности синхронизации.

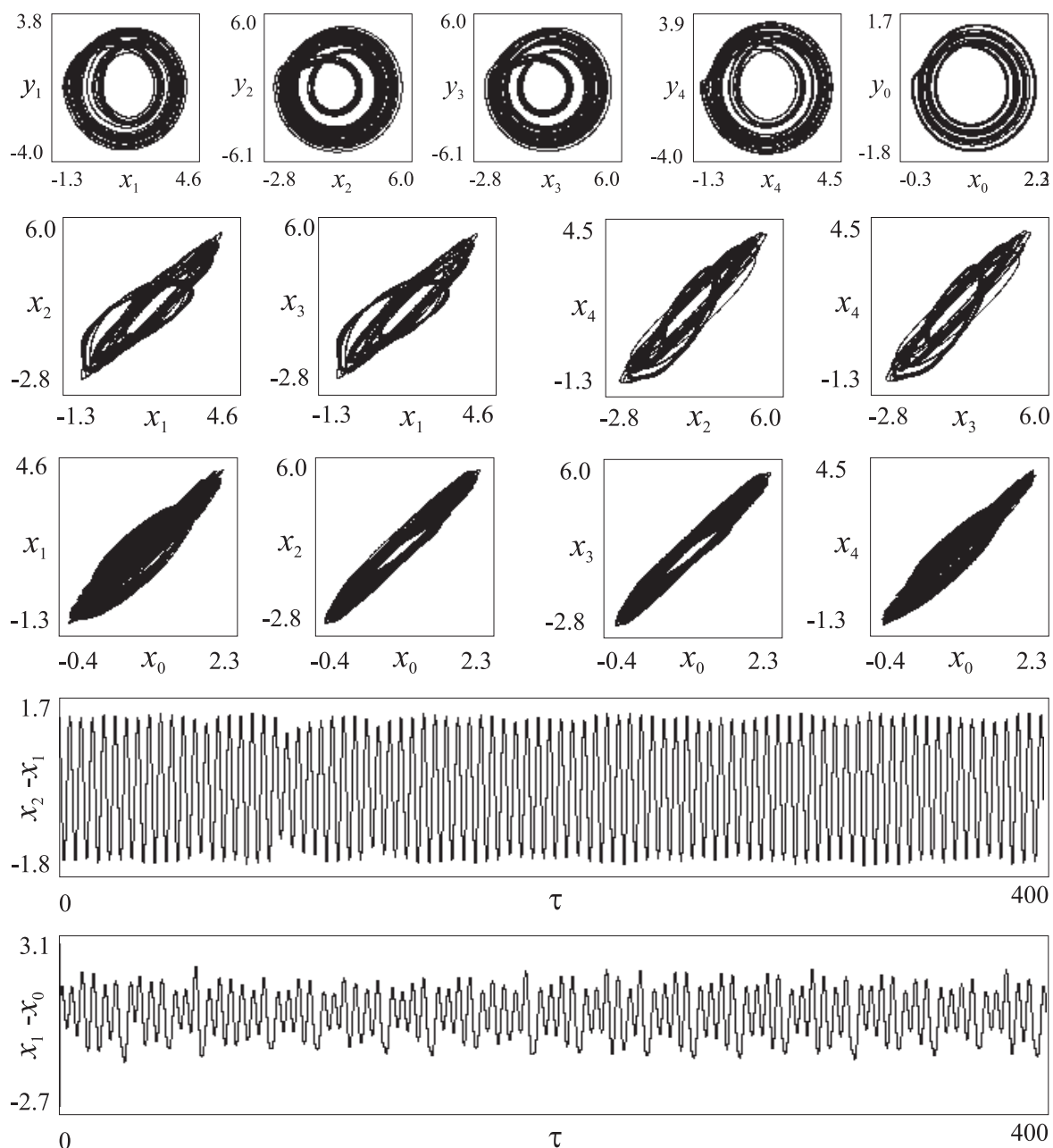


Рис. 10. Проекция аттракторов системы (3) при сильных связях от осциллятора  $O_0$  в случае  $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 3$ ,  $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.1$

Fig. 10. Projections of attractors of the (3) when couplings from oscillator  $O_0$  are strong and  $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 3$ ,  $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.1$

Далее рассмотрим влияние параметров связей на величину ошибок синхронизации. В качестве количественной оценки точности синхронизации  $i$ -го и  $j$ -го осцилляторов будем использовать величину  $\Delta_{i,j}$ , рассчитанную по формуле

$$\Delta_{i,j} = \max_{\tau \in [0, T]} |x_i(\tau) - x_j(\tau)| / \sqrt{(x_i^{\min} - x_j^{\min})^2 + (x_i^{\max} - x_j^{\max})^2}. \quad (4)$$

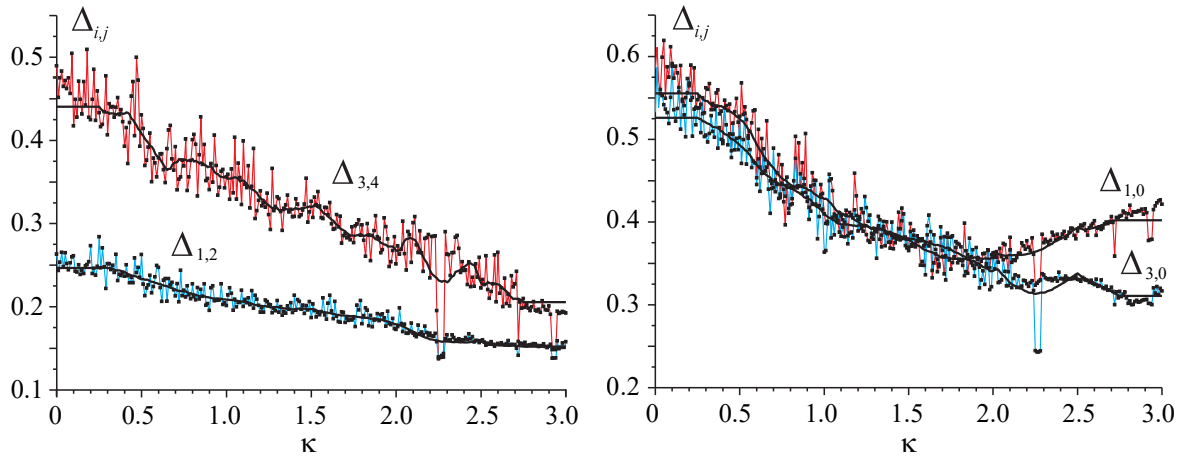


Рис. 11. Эволюция ошибок синхронизации при увеличении связей от осциллятора  $O_0$  в случае  $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = \kappa$ ,  $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.1$  (цвет онлайн)

Fig. 11. The evolution of synchronization errors when couplings from oscillator  $O_0$  are  $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = \kappa$ ,  $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.1$  (color online)

Эта величина характеризует максимальное отклонение фазовых переменных  $x_i(\tau)$  и  $x_j(\tau)$  от прямой  $x_i = x_j$  за время наблюдения  $T$ , отнесенное к размеру проекции аттрактора на плоскость соответствующих координат [19]. Количественные оценки точности синхронизации осцилляторов ансамбля, рассчитанные по формуле (4) на интервале  $T = 15000$ , представлены на рис. 11. Из приведенных результатов следует, что зависимость  $\Delta_{i,j}$  от  $\kappa$  представляет собой нерегулярный процесс в целом со спадающим трендом. Сплошные толстые линии на рис. 11 являются результатом сглаживания значений  $\Delta_{i,j}$  с использованием алгоритма Савицкого–Голея, которые более наглядно отражают тенденции в эволюции ошибок синхронизации при увеличении связи. Из анализа представленных результатов следует, что ошибки синхронизации с ростом  $\kappa$  спадают не монотонно;  $\Delta_{1,2}$  и  $\Delta_{3,4}$  убывают;  $\Delta_{1,0}$  и  $\Delta_{3,0}$  имеют минимумы\*. Заметим, что усиление связей влечет увеличение размеров аттрактора, а также может привести к регуляризации хаотических колебаний осцилляторов. В последнем случае наблюдается резкое уменьшение значений  $\Delta_{i,j}$ . На рис. 11 резкие «провалы»  $\Delta_{i,j}$ , в частности, в районе  $\kappa = 2.26$  обусловлены регуляризацией хаотических колебаний.

Другой путь улучшения синхронизации — изменение типа связей, а именно организация связей осцилляторов не по переменной  $x$ , а по скорости ее изменения  $y$ . В этом случае для двух связанных осцилляторов (2) математическая модель будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\
 \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - x_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1 - \Phi_1(x_1) - \kappa_2 \Phi_2(y_1 - y_2), \\
 \frac{dx_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\
 \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - x_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \Phi_1(x_2) - \kappa_1 \Phi_2(y_2 - y_1).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Результаты численного эксперимента с моделью (5) представлены на рис. 12. На основании этих результатов можно сделать вывод, что связь осцилляторов (2) по координате  $y$  позволяет

\*Значения  $\Delta_{1,3}$  и  $\Delta_{2,4}$  близки к значениям  $\Delta_{1,2}$  и  $\Delta_{3,4}$ , а значения  $\Delta_{2,0}$  и  $\Delta_{4,0}$  — к значениям  $\Delta_{1,0}$  и  $\Delta_{3,0}$ , соответственно.

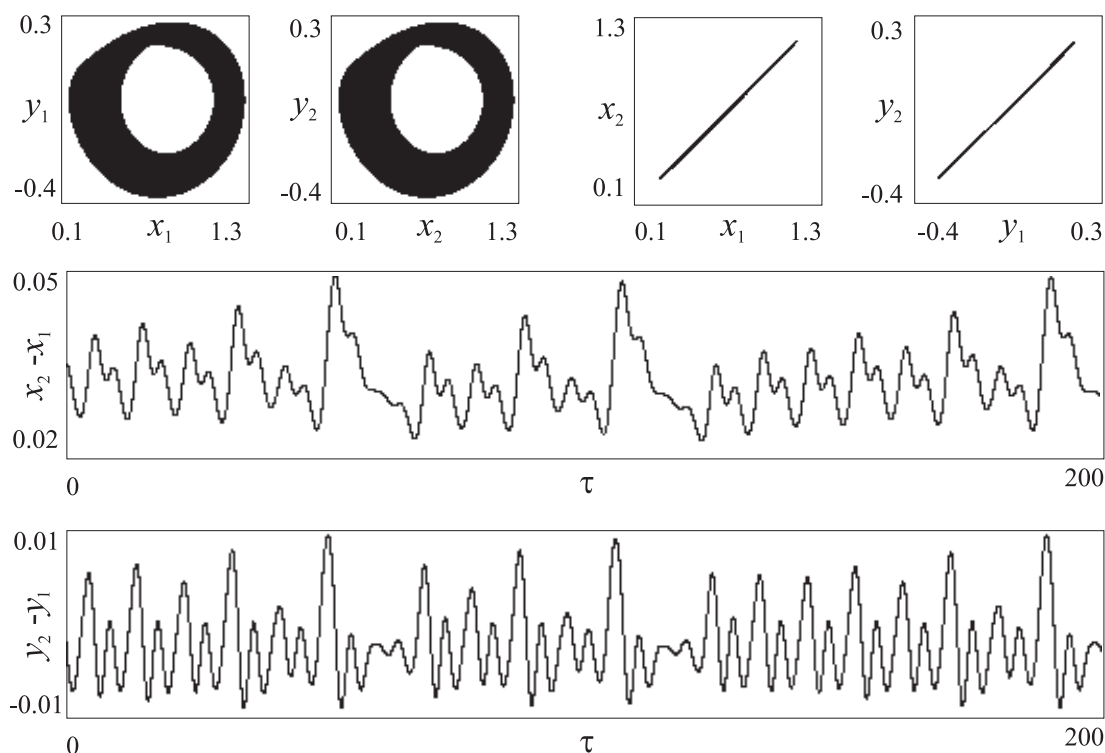


Рис. 12. Проекция аттракторов системы (5) при  $\gamma_1 = 1.06$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\mu_1 = 2.1$ ,  $\gamma_2 = 1.05$ ,  $\varepsilon_2 = 0.96$ ,  $\mu_2 = 2.06$ ,  $\beta_1 = 10$ ,  $\beta_2 = 10$ ,  $\kappa_1 = 0.07$ ,  $\kappa_2 = 0.2$

Fig. 12. Projections of attractors of the (5) when  $\gamma_1 = 1.06$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\mu_1 = 2.1$ ,  $\gamma_2 = 1.05$ ,  $\varepsilon_2 = 0.96$ ,  $\mu_2 = 2.06$ ,  $\beta_1 = 10$ ,  $\beta_2 = 10$ ,  $\kappa_1 = 0.07$ ,  $\kappa_2 = 0.2$

достичь хорошей точности синхронизации моделируемых экономических колебаний в ансамбле. Тем не менее такого типа связь для реальных экономических осцилляторов представляется малореалистичной, поскольку измерение скоростей  $y$  изменения экономических переменных  $x$  для управления осцилляторами скорее всего маловероятно или практически невозможно.

### Заключение

Рассмотрена задача о синхронизации ансамбля связанных хаотических экономических осцилляторов. Модель экономического осциллятора является эндогенной динамической моделью, построенной на основе идей теории систем автоматического управления. Конечно, такого сорта общие динамические модели нельзя использовать для получения каких-либо конкретных экономических оценок или конкретных рекомендаций для принятия экономических решений. Однако такие модели полезны для развития динамических теорий экономических циклов, теорий их генерации, взаимодействия, синхронизации и т. п. Численные эксперименты с рассматриваемой в работе моделью продемонстрировали качественное сходство генерируемых моделью хаотических колебаний с реальными экономическими колебаниями, представленными в литературе. Установлено, что малый ансамбль связанных экономических осцилляторов демонстрирует появление синхронизации хаотических колебаний при достижении определенных величин коэффициентов связей. Для полученной в численных экспериментах синхронизации хаотических колебаний характерно наличие заметной ошибки синхронизации, величина которой существенно зависит от силы связей между осцилляторами.



## Список литературы

1. Самуэльсон П. Э., Нордхаус В. Д. Экономика. 16-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. 672 с.
2. Вечканов Г. С., Вечканова Г. Р. Макроэкономика. СПб.: Питер, 2002. 412 с.
3. Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 17 (224). С. 50–61.
4. Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты (окончание) // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 18 (225). С. 42–56.
5. Лебедева А. С. Генезис теории экономического цикла // Международный научно-исследовательский журнал. 2013. № 8–3 (15). С. 31–34.
6. Lopes A. M., Machado J. A. T., Huffstot J. S., Mata M. E. Dynamical analysis of the global business-cycle synchronization // PLoS ONE. 2018. Vol. 13, no. 2. P. e0191491. DOI: 10.1371/journal.pone.0191491.
7. Otman W. The synchronization of business cycles and financial cycles in Euro area // International Journal of Central Banking. 2019. Vol. 15, no. 1. P. 327–362.
8. Guegan D. Chaos in economics and finance // Annual Reviews in Control. 2009. Vol. 33, no. 1. P. 89–93. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2009.01.002.
9. Volos C., Kyprianidis I., Stouboulos I. N. Synchronization phenomena in coupled nonlinear systems applied in economic cycles // WSEAS Transactions on Systems. 2012. Vol. 11, no. 12. P. 681.
10. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов. ПНД, 2021. Т. 29, № 4. С. 515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
11. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование процессов синхронизации бизнес-циклов в ансамбле связанных экономических осцилляторов // Известия вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64, № 10. С. 833–843. DOI: 10.52452/00213462\_2021\_64\_10\_833.
12. McCullen N. J., Ivanchenko M. V., Shalfeev V. D., Gale W. F. A dynamical model of decision-making behavior in a network of consumers with applications to energy choices // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21, no. 9. P. 2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
13. Пономаренко В. П. Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Известия вузов. ПНД, 1997. Т. 7, № 5. С. 44–55.
14. Пономаренко В. П., Заулин И. А. Динамика автогенератора, управляемого петлей автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828–835.
15. Касаткин Д. В., Матросов В. В. Хаотические колебания в двух каскадно связанных осцилляторах с частотным управлением // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 8. С. 71–77.
16. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
17. Беляков Л. А. О структуре бифуркационных множеств в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса // В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям: Тез. докл. Киев: ИМ АН УССР, 1981. С. 57.
18. Schüller Y. S., Hiebert P., Peltonen T. A. Characterising the financial cycle: a multivariate and time-varying approach // ECB Working Paper Series. No. 1846. Frankfurt am Main: European Central Bank, 2015. 54 p. DOI: 10.2139/ssrn.2664126.
19. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2013. 366 с.

## References

1. Samuelson P, Nordhaus W. Economics. 15th edition. New York: McGraw Hill; 1995. 792 p.
2. Vechkanov GS, Vechkanova GR. Macroeconomics. Saint Petersburg: Piter; 2002. 412 p. (in Russian).
3. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results. Economic Analysis: Theory and Practice. 2011;10(17(224)):50–61 (in Russian).
4. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results (end). Economic Analysis: Theory and Practice. 2011;10(18(225)):42–56 (in Russian).
5. Lebedeva AS. The genesis of the economic cycle theory. International Research Journal. 2013; 8–3(15):31–34 (in Russian).
6. Lopes AM, Machado JAT, Huffstot JS, Mata ME. Dynamical analysis of the global business-cycle synchronization. PLoS ONE. 2018;13(2):e0191491. DOI: 10.1371/journal.pone.0191491.
7. Oman W. The synchronization of business cycles and financial cycles in Euro area. International Journal of Central Banking. 2019;15(1):327–362.
8. Guegan D. Chaos in economics and finance. Annual Reviews in Control. 2009;33(1):89–93. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2009.01.002.
9. Volos C, Kyprianidis I, Stouboulos IN. Synchronization phenomena in coupled nonlinear systems applied in economic cycles. WSEAS Transactions on Systems. 2012;11(12):681.
10. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4):515–537 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
11. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of the business-cycle synchronization processes in an ensemble of coupled economic oscillators. Radiophysics and Quantum Electronics. 2022;64(10): 750–759. DOI: 10.1007/s11141-022-10176-1.
12. McCullen NJ, Ivanchenko MV, Shalfeev VD, Gale WF. A dynamical model of decision-making behavior in a network of consumers with applications to energy choices. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2011;21(9):2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
13. Ponomarenko VP. Modeling the evolution of dynamic modes in an oscillator system with frequency control. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 1997;7(5):44–55 (in Russian).
14. Ponomarenko VV, Zaulin IA. The dynamics of an oscillator controlled by a frequency-locked loop with an inverted discriminator characteristic. J. Commun. Technol. Electron. 1997;42(7):828–835 (in Russian).
15. Kasatkin DV, Matrosov VV. Chaotic oscillations of two cascade-coupled oscillators with frequency control. Tech. Phys. Lett. 2006;32(4):357–360. DOI: 10.1134/S1063785006040250.
16. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. Theory of Oscillators. New York: Dover Publications; 1987. 815 p.
17. Belyakov LA. About structure of bifurcation multitudes in systems with separatrix loop of saddle-focus. In: Abstracts of the IX International Conference on Nonlinear Oscillations. Kiev: Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR; 1981. P. 57 (in Russian).
18. Schüler YS, Hiebert P, Peltonen TA. Characterising the financial cycle: a multivariate and time-varying approach. ECB Working Paper Series. No. 1846. Frankfurt am Main: European Central Bank; 2015. 54 p. DOI: 10.2139/ssrn.2664126.
19. Shalfeev VD, Matrosov VV. Nonlinear Dynamics of Phase Synchronization Systems. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Press; 2013. 366 p. (in Russian).



*Матросов Валерий Владимирович* – родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «Прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н. И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Под его руководством защищено 5 кандидатских диссертаций. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак); научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: matrosov@rf.unn.ru  
ORCID: 0000-0003-3146-111X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 24397



*Шалфеев Владимир Дмитриевич* – родился в 1941 году, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1963). Доктор физико-математических наук (1991), профессор (1991). Заведующий лабораторией, заместитель директора по научной работе НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ (1963–1976). Декан факультета вычислительной математики и кибернетики ГГУ (1976–1981), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (1981–2012). Руководитель 12 кандидатских и 3 докторских диссертаций. Лауреат премии Ленинского комсомола (1974), премии РАН им. А. А. Андропова (2012). Действительный член Академии инженерных наук РФ (2000). Область научных интересов: динамика нелинейных систем синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Автор и соавтор более 200 публикаций, в том числе 8 книг.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: shalfeev@rf.unn.ru  
AuthorID (eLibrary.Ru): 19690