Бифуркации в динамических системах. Детерминированный хаос. Квантовый хаос

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2)

Обзорная статья
УДК 530.182.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003034
EDN: JVVGQR

Представление точных траекторных решений для хаотических одномерных отображений в форме Шрёдера

В. М. Аникин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: AnikinVM@sgu.ru

Поступила в редакцию 8.01.2023, принята к публикации 2.03.2023,
опубликована онлайн 20.03.2023, опубликована 31.03.2023

Аннотация. *Цель* статьи — проиллюстрировать генезис, смысл и значимость функционального уравнения Шрёдера, введенного в теории итераций рациональных функций, для теории детерминированного хаоса при аналитическом вычислении точных траекторных решений, инвариантных плотностей и показателей Ляпунова одномерных хаотических отображений. Демонстрируется *метод* решения функционального уравнения Шрёдера для различных исходных отображений посредством перехода к топологически сопряженным отображениям, для которых нахождение точного траекторного решения является более простой математической процедурой. Приводятся *результаты* аналитического решения уравнения Шрёдера для 12 хаотических отображений различных типов и расчета соответствующих выражений для точных траекторных решений, инвариантных плотностей и показателей Ляпунова. Делается *заключение* о методической целесообразности формулировки и решений уравнений Шрёдера при изучении динамики одномерных хаотических отображений.

Ключевые слова: итерационная теория, детерминированный хаос, одномерные отображения, уравнение Шрёдера, точные решения.

Для цитирования: *Аникин В. М.* Представление точных траекторных решений для хаотических одномерных отображений в форме Шрёдера // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 128–142. DOI: 10.18500/0869-6632-003034. EDN: JVVGQR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Аникин В. М., 2023*

Review DOI: 10.18500/0869-6632-003034

Representation of exact trajectory solutions for chaotic one-dimensional maps in Schröder form

V. M. Anikin

Saratov State University, Russia
E-mail: AnikinVM@sgu.ru
Received 8.01.2023, accepted 2.03.2023, available online 20.03.2023, published 31.03.2023

Abstract. *Purpose* of the article is to illustrate the genesis, meaning and significance of the functional Schröder equation, introduced in the theory of iterations of rational functions, for the theory of deterministic chaos by analytical calculations of exact trajectory solutions, invariant densities and Lyapunov exponents of one-dimensional chaotic maps. We demonstrate the *method* for solving the functional Schröder equation for various chaotic maps by passing to a topologically conjugate mappings, for which finding the exact trajectory solution is a simpler mathematical procedure. *Results* of the analytical solution of the Schröder equation for 12 chaotic mappings of various types and the calculation of the corresponding expressions for exact trajectory solutions, invariant densities and Lyapunov exponents are presented. *Conclusion* is made about the methodological expediency of formulating and solving the Schröder equations by the study of the dynamics of one-dimensional chaotic mappings.

Keywords: iteration theory, deterministic chaos, one-dimensional maps, Schröder equation, exact solutions.

For citation: Anikin VM. Representation of exact trajectory solutions for chaotic one-dimensional maps in Schröder form. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2):128–142. DOI: 10.18500/0869-6632-003034

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В 1870–1871 гг. немецкий математик Эрнст Шрёдер (Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder, 1841–1902) опубликовал в журнале «Mathematische Annalen» две взаимосвязанные пионерские статьи, содержащие исследования итераций рациональных функций на комплексной плоскости в приложении к нахождению корней нелинейных уравнений [1,2].

В статье «Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen» [1] он, в частности, продемонстрировал применение алгоритма Ньютона для решении *квадратного* уравнения $f(z) = z^2 - 1 = 0$, то есть рассмотрел разностную итерационную схему

$$z_{n+1} = g(z_n) = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n} = \frac{z_n^2 + 1}{2z_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Э. Шрёдер установил области сходимости к двум имеющимся решениям рассматриваемого уравнения: при начальном значении z_0 с положительной вещественной частью ($\operatorname{Re} z_0 > 0$) итерации z_n сходятся к положительному корню $z_1^* = 1$, а при начальном значении z_0 с отрицательной вещественной частью ($\operatorname{Re} z_0 < 0$) притягивающей точкой становится отрицательное значение корня $z_2^* = -1$. В случае же чисто мнимого начального значения ($\operatorname{Re} z_0 = 0$) сходимость отсутствует. Спустя много лет этот результат Шрёдера снисходительно назвали «простым» [3, с. 55].

Несколько отходя от главной линии изложения, отметим, что через несколько лет после выхода названной статьи Шрёдера, в 1879 г., англичанин Артур Кэли (Arthur Cayley, 1821–1895) рассмотрел в комплексной плоскости задачу о сходимости итераций к значениям корней *кубического* уравнения $z^3 - 1 = 0$ (один действительный корень и два комплексно-сопряженных), также пользуясь алгоритмом Ньютона:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2} = \frac{2z_n^3 + 1}{3z_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

На фоне результатов решения этой задачи (получившей название проблемы Кэли) результат Шрёдера для уравнения второго порядка, действительно, выглядел «простым»: оказалось, что области притяжения всех трех корней кубического уравнения тесно и причудливо переплетаются, а их границы носят фрактальный характер [4–6]. Проблема Кэли, как считают, сыграла для Пьера Фату (Pierre Joseph Louis Fatou, 1878–1929) и Гастона Жюлиа (Gaston Maurice Julia, 1893–1978) роль «старта» при построении теории итерированных голоморфных отображений, теории множеств Фату и Жюлиа [7, 8]. А Э. Шрёдер занял, таким образом, первую строчку в хронологическом списке творцов голоморфной динамики.

Возвращаясь к теме статьи, отметим, что в следующей работе «Über iterirte Functionen» [2] Э. Шрёдер предложил специальный методический инструментарий для исследования проблемы сходимости итерационных процедур на основе решения сконструированного им ***функционального уравнения*** (сейчас оно носит его имя), содержащего некую неизвестную функцию, нахождение которой позволяет далее явным образом исследовать асимптотическое поведение итерационного процесса [9, 10].

Первоначально математики уделяли главное внимание аналитическим решениям уравнения Шрёдера на комплексной плоскости. Работы в этом направлении были посвящены доказательству существования функций Шрёдера, их аналитическому представлению, установлению общих условий (теорем) сходимости итерационных процедур, установлению связей уравнения Шрёдера с другими функциональными уравнениями и исследованию особенностей применения последних при анализе итерационных процессов, изучению спектральных свойств выделяемого в уравнении Шрёдера так называемого композиционного оператора и другим сопутствующим проблемам. В итоге за уравнением Шрёдера закрепился статус одного из важнейших уравнений функционального анализа [10, 11].

Для теории детерминированного хаоса главную тему исследования представляют не задачи сходимости итераций в комплексной или действительной областях к некоторым пределам, а, наоборот, «несходимость», реализация хаотических режимов в динамических системах. Уравнение Шрёдера приложимо к анализу и подобного рода задач. Более того, *точных конечных* решений уравнений Шрёдера для этого класса «хаотических» задач можно привести гораздо больше, чем точных конечных (не представимых бесконечными рядами) решений для описания сходящихся процессов! С исторической точки зрения интересен и тот факт, что в статье [2] (а она написана в 1869 г.) Шрёдер привел точное траекторное решение своего уравнения для логистического отображения, записываемого в комплексных переменных как

$$z_{n+1} = 4z_n(1 - z_n), \quad |z_n| < 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В настоящей публикации иллюстрируется прикладная значимость функционального уравнения Э. Шрёдера при установлении точных выражений для точек орбит одномерных хаотических отображений, определенных на действительной числовой прямой, как функций начального значения x_0 и номера n шага итерации $x_n = x_n(x_0, n)$. Знание точных решений позволяет аналитически вычислить инвариантную плотность отображения, соответствующие показатель Ляпунова и автокорреляционную функцию его траекторий. Рассмотрение ведется на примерах как тестовых хаотических отображений, так и новых синтезированных хаотических отображений, обладающих инвариантной плотностью в форме классических вероятностных распределений. Траекторные решения получаются в контексте построения дополнительного хаотического отображения, топологически сопряженного с рассматриваемым, но более удобного при вычислении траекторных и вероятностных характеристик. Подобное «удобство» возникает, если сопрягающая функция обладает специфическими (в частности, как будет показано, — периодическими) свойствами.

1. Уравнение Шрёдера: формулировка

Рассмотрим отображение, заданное вещественной функцией действительного аргумента на некотором интервале числовой оси (a, b):

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad x_n \in (a, b), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

Под функциональным уравнением Шрёдера понимается уравнение

$$\omega(g(x)) = \lambda\omega(x), \tag{2}$$

где $\omega(x)$ и λ — соответственно действительные функция и число, подлежащие нахождению. От функции $\omega(x)$ требуется взаимно-однозначная обратимость и дифференцируемость обратной функции:

$$u = \omega(x), \quad x = \omega^{-1}(u) = \Omega(u), \tag{3}$$

где через $\omega^{-1} = \Omega(u)$ обозначена обратная функция для $\omega(x)$, так что

$$\Omega\big(\omega(x)\big) \equiv x, \quad \omega\big(\Omega(u)\big) \equiv u.$$

Пользуясь свойством обратимости (3) функции $\omega(x)$, из уравнения (2) получим

$$g(x) = \Omega\big(\lambda\omega(x)\big). \tag{4}$$

Применяя (4), можно выразить все члены последовательности x_n, генерируемые (1), через начальное значение x_0 и число итераций n. В самом деле, исходя из начальной точки x_0, получим траекторное «продолжение» x_1:

$$x_1 = g(x_0) = \Omega\big(\lambda\omega(x_0)\big). \tag{5}$$

Если теперь в правую часть (4) подставить значение x_1, то на основании (5) получим следующее представление для x_2:

$$x_2 = g(x_1) = \Omega\big(\lambda\omega(x_1)\big) = \Omega\left(\lambda\omega\big(\Omega(\lambda\omega(x_0))\big)\right) = \Omega\left(\lambda^2\omega(x_0)\right). \tag{6}$$

Полагая, что для n-го шага итераций справедливо соотношение

$$x_n = \Omega\big(\lambda^n\omega(x_0)\big), \tag{7}$$

посредством действий, примененных на первом шаге итераций, получим

$$x_{n+1} = g(x_n) = \Omega\left(\lambda^{n+1}\omega(x_0)\right). \tag{8}$$

В совокупности соотношения (5)–(8) составляют простое доказательство методом математической индукции точного выражения (7) для n-й итерации. Помимо начального значения x_0 и числа итераций n выражение (7) содержит числовой параметр λ, значение которого определяется для конкретного отображения в результате решения функционального уравнения (2), то есть в процессе нахождения функций $\omega(x)$ и $\Omega(x)$. Соотношение (7) в дальнейшем именуется траекторным решением в форме Шрёдера.

2. Уравнение Шрёдера: генезис

Как представляется, Шрёдер сформулировал уравнение (2) в контексте обобщения полученных им результатов для траекторий разнообразных итерационных процессов. Рассмотрим описываемый формулой Ньютона,

$$x_{n-1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{9}$$

сходящийся процесс к значению корня уравнения, задаваемого функцией действительного аргумента,

$$f(x) = x^2 - a = 0, \quad a > 0,$$

начиная с некоторого значения x_0, то есть запишем численный алгоритм извлечения квадратного корня из некоторого положительного числа a. Соотношение (9) примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{10}$$

Данная итерационная процедура по извлечению квадратного корня была известна математикам Древнего Мира. Одно из ее названий — итерационная формула Герона Александрийского (он привел ее в своем труде «Metrica», примерно 60-е гг. н. э.). Имеются также ссылки на использование этого алгоритма вавилонянами.

Обозначим итерируемую функцию в (10) как

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x}\right), \quad a > 0. \tag{11}$$

Введем в (11) монотонную (обратимую) замену переменных с использованием *гиперболических* функций

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \mathrm{cth}(u), \quad u = \mathrm{cth}^{-1}\frac{x}{\sqrt{a}}, \tag{12}$$

где $\mathrm{cth}(u)$ — гиперболический котангенс, $\mathrm{cth}^{-1}(t)$ — ареакотангенс гиперболический (обратная функция). Подстановка (12) в (11) приводит к красивому результату:

$$g(u) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\mathrm{cth}(u) + \frac{1}{\mathrm{cth}(u)}\right) = \sqrt{a}\,\mathrm{cth}(2u), \tag{13}$$

поскольку для гиперболического котангенса двойного аргумента справедливо соотношение (см., например, [12, с. 18]):

$$\mathrm{cth}(2u) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}(u) + \frac{1}{\mathrm{cth}(u)}\right) = \frac{\mathrm{cth}^2(u) + 1}{2\,\mathrm{cth}(u)}.$$

Соответственно, однократная итерация для (11) на основании (13) запишется в виде

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{a}\,\mathrm{cth}\left(2\,\mathrm{cth}^{-1}\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right). \tag{14}$$

Для прояснения структуры решения запишем выражение для второй итерации с использованием (14):

$$x_2 = g(x_1) = g^2(x_0) = \sqrt{a}\,\mathrm{cth}\left(2\sqrt{a}\,\mathrm{cth}^{-1}\frac{x_1}{\sqrt{a}}\right) =$$

$$= \sqrt{a}\,\mathrm{cth}\left(2\sqrt{a}\,\mathrm{cth}^{-1}\frac{\sqrt{a}\,\mathrm{cth}(2\,\mathrm{cth}^{-1}(x_0/\sqrt{a}))}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}\,\mathrm{cth}\left(2^2\,\mathrm{cth}^{-1}\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right). \tag{15}$$

При записи (15) учтено свойство композиции прямой и обратной функций: $\operatorname{cth}(\operatorname{cth}^{-1}(t)) \equiv t$. Из вида (14) и (15) можно предположить, что для n-й итерации функции (11), $x_n = g^n(x_0)$, справедливо соотношение

$$x_n = g^n(x_0) = \sqrt{a}\operatorname{cth}\left(2^n \operatorname{cth}^{-1}\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right). \tag{16}$$

Для завершения доказательства этого предположения методом математической индукции остается показать, что структура (16) справедлива и для $(n+1)$-й итерации функции $g(x)$. В самом деле, используя (16) и результат для однократной итерации (14), придем к требуемому результату:

$$x_{n+1} = g(x_n) = g^{n+1}(x_0) = \sqrt{a}\operatorname{cth}\left(2\sqrt{a}\operatorname{cth}^{-1}\frac{x_n}{\sqrt{a}}\right) =$$

$$= \sqrt{a}\operatorname{cth}\left(2\sqrt{a}\operatorname{cth}^{-1}\frac{\sqrt{a}\operatorname{cth}(2^n\operatorname{cth}^{-1}(x_0/\sqrt{a})}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}\operatorname{cth}\left(2^{n+1}\operatorname{cth}^{-1}\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right). \tag{17}$$

Полученное точное выражение для n-й итерации (17) рассматриваемой функции (11) позволяет:

а) непосредственно установить сходимость итерационного процесса (16) к величине $\sqrt{a}$;
б) установить соответствие представления (16) с видом решения уравнения Шрёдера.

Так, вычисляя предел функции (16) с учетом ограниченности гиперболического тангенса и монотонного стремления его значения к 1 с ростом аргумента, видим:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}\lim_{n\to\infty}\operatorname{cth}\left(2^n\operatorname{cth}^{-1}\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}.$$

Если же ввести обозначения Шрёдера,

$$u = \omega(\tilde{x}) = \operatorname{cth}^{-1}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \Omega(u) = \operatorname{cth}(u), \quad \lambda = 2, \quad \tilde{x} = x/\sqrt{a},$$

то решение (16) примет вид решения уравнения Шрёдера (7) для $\lambda = 2 > 1$. В теории функционального уравнения Шрёдера со сходимостью итерационного процесса, как правило, соотносят значение $\lambda < 1$ [10, 11]. Полученный результат с $\lambda = 2$ — своеобразный «контрпример», обусловленный асимптотическими свойствами сопрягающей гиперболической функции с одновременным существованием для нее формулы удвоения аргумента.

3. Уравнение Шрёдера: метод решения

Метод Шрёдера решения функционального уравнения (2), приводящий к нахождению неизвестных характеристик в (7), основан на поиске (построении) преобразования, топологически сопряженного рассматриваемому отображению. Пусть T и $\tilde{T}$ — преобразования на действительной оси. Преобразования $T\colon X \to X$ и $\tilde{T}\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ называются сопряженными (топологически эквивалентными, изоморфными) [13, 14], если существует отображение $h\colon X \to \tilde{X}$ такое, что:

1) h является взаимно-однозначным (монотонным, обратимым) преобразованием (существует единственное обратное, причем дифференцируемое, отображение $h^{-1}\colon \tilde{X} \to X$);
2) для конкретных точек композиционные соотношения $h{\circ}Tx{=}\tilde{T}{\circ}h(x)$ или $Tx{=}h^{-1}{\circ}\tilde{T}{\circ}h(x)$ выполняются для всех $x \in X$.

Первое условие означает сохранение структуры сопрягаемых числовых пространств. Второе условие требует, чтобы h однозначно переводило элементы T в $\tilde{T}$ *независимо от «пути» перехода*.

Сопряженное отображению $\tilde{T}\colon X \to \tilde{X}$ преобразование будет иметь, следовательно, вид:

$$\tilde{T}\tilde{x} = h \circ T \circ h^{-1}(\tilde{x}).$$

Смысл произведенных замен переменных в исходном преобразовании и, собственно, получаемого соотношения (7) заключается в том, чтобы найти такую сопрягающую функцию $h(x)$ (в обозначениях Шрёдера — $\omega(x)$), которая обеспечивала бы получение аналитического выражения, представляющего формулу зависимости x_n от начального значения x_0 и числа итераций n. Решение функционального уравнения Шрёдера (2) ориентировано, таким образом, на нахождение специфических функций $\omega(x)$ и $\Omega(u) = \omega^{-1}(u)$, которые должны трактоваться как функции, задающие подходящую замену переменных (сопряжение дискретных динамических систем) с целью выполнения соотношения (7).

В случае хаотичности сопряженных отображений при известной инвариантной плотности одного из них (обозначим ее через $\rho_1(x)$) инвариантная плотность второго отображения $\rho_2(y)$ при связи траекторий отображений через посредство функции $y = h(x)$ вычисляется (см., например, [14]) как

$$\rho_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x)\delta(y - h(x))dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_1(h^{-1}(u))\delta(y - u)dh^{-1}(u) = \rho_1(h^{-1}(y))|dh^{-1}(y)/dy|. \quad (18)$$

Выражение (18) существенно упрощается, если $\rho_1(x)$ описывает равномерное распределение. Для сопряженных отображений показатели Ляпунова и собственные числа операторов Перрона–Фробениуса, ассоциированных с отображениями, являются числовыми инвариантами [14].

Показательно, что к числу важных проблем математического анализа С. Улам в своей книге «Нерешенные математические задачи» относил выяснение возможности сопряжения произвольных функций (в частности, многочленов), отображающих отрезок самого в себя, с *кусочно-линейными* отображениями. Как отмечается в [15, с. 84], «положительный ответ на этот вопрос свел бы изучение итераций к чисто комбинаторному исследованию свойств кусочно-линейных функций».

Тестовый пример. Статья Шрёдера [2], вероятно, является в математической литературе одной из первых, в которой приведен классический пример отображения, обладающего хаотическими свойствами, — логистического отображения с одновременной записью точного траекторного решения. В 1947 г. Дж. фон Нейман и С. Улам впервые применили это отображение в качестве датчика псевдослучайных чисел [16, 17]. Это послужило основанием назвать его (в контексте проблемы машинной генерации последовательностей псевдослучайных чисел) отображением Улама–фон Неймана [14].

Итак, отталкиваясь от отображения

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), \quad x_n \in (0, 1), \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad (19)$$

посредством замены переменных

$$x = h(t) = \sin^2 \frac{\pi t}{2}, \quad t = h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad t \in (0, 1),$$

приходим к соотношению:

$$x_{n+1} = \sin^2 \frac{\pi t_n}{2} = 4 \sin^2 \frac{\pi t_n}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi t_n}{2}\right) = \sin^2 \pi t_n = \sin^2 \left(2 \arcsin \sqrt{x_n}\right).$$

На пути к формуле нового отображения ключевую роль играет формула двойного угла для синуса, что позволяет параллельно получить в компактном виде точное представление для координат точек траектории исходного отображения через начальное значение x_0 и число итераций n:

$$x_n = \sin^2\left(2^n \arcsin\sqrt{x_n}\right). \tag{20}$$

Сопряженным для логистического отображения (19) является пирамидальное отображение (tent map)

$$t_{n+1} = 1 - |2t_n - 1|, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

обладающее точным траекторным решением [14]

$$t_n = 1 - 2\left\{2^{n-1} t_0\right\}$$

(фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа).

Инвариантная плотность. Наличие точного траекторного решения (в данном случае представляемого формулой (20)) позволяет аналитически вычислить инвариантную плотность хаотического отображения, являющуюся неподвижной точкой ассоциированного оператора Перрона–Фробениуса. Инвариантная плотность на единичном интервале определяется следующим образом [18, с. 36]:

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta\left(x - g^k(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta(x - x_k). \tag{21}$$

Здесь, как и раньше, $g^k(x_0) = x_k$ — k-кратная композиция отображения. Для логистического отображения (19), используя выражение для точного траекторного решения (20), из (21) получим

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta(x - x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta\left(x - \sin^2\left(2^k \arcsin\sqrt{x_0}\right)\right). \tag{22}$$

Преобразуем аргумент тригонометрической функции в (22):

$$\sin^2\left(2^k \arcsin\sqrt{x_0}\right) = \sin^2\left(\pi \cdot 2^k \cdot \frac{1}{\pi} \arcsin\sqrt{x_0}\right) = \sin^2\left(\pi\alpha_k\right),$$

где

$$\alpha_k = 2^k \frac{1}{\pi} \arcsin\sqrt{x_0} = \left[2^k \frac{1}{\pi} \arcsin\sqrt{x_0}\right] + \left\{2^k \frac{1}{\pi} \arcsin\sqrt{x_0}\right\} = [\alpha_k] + \{\alpha_k\}$$

(квадратные и фигурные скобки обозначают, соответственно, операции выделения целой части и дробной части числа α_k). Тогда (22) примет вид:

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta\left(x - \sin^2(\pi\alpha_k)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta\left(x - \sin^2(\pi\{\alpha_k\})\right). \tag{23}$$

Иррациональная величина $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\arcsin\sqrt{x_0}$ принимает значения из интервала $(0, 1)$. Согласно критерию Г. Вейля [19, 20] о равномерном распределении дробных долей вещественных чисел в единичном интервале последовательность

$$\{\alpha_k\} = \left\{2^k \frac{1}{\pi} \arcsin\sqrt{x_0}\right\}, \quad k = 1, 2, ...$$

как удовлетворяющая этому критерию будет равномерно распределена в области $(0,1)$, что означает возможность представления (23) интегралом Римана на единичном интервале с подынтегральной функцией $\delta(x-\sin^2(\pi\alpha))$

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta\left(x-\sin^2\left(\pi\{\alpha_k\}\right)\right)=\int\limits_0^1\delta\left(x-\sin^2(\pi\alpha)\right)d\alpha=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\delta\left(x-\sin^2(\alpha)\right)d\alpha=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\delta(x-\xi)\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi(1-\xi)}}=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},\quad x\in(0,1).$$

Таким образом, расчет плотности инвариантного распределения Улама–фон Неймана на основе точного решения для итераций приводит к результату

$$\rho(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},\quad x\in(0,1),$$

правильность которого может быть подтверждена дифференцированием функции $h^{-1}(x)=$ $=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$.

Показатель Ляпунова. Показатель Ляпунова $\Lambda(x_0)$ для логистического отображения как характеристика степени чувствительности к начальным условиям при итерировании функции (19), по определению, может быть вычислен на основе точного решения $x_n=x_n(x_0,n)$:

$$\Lambda(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{dg^n(x_0)}{dx_0}\right|.$$

Получаем согласно (16):

$$\Lambda(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{d}{dx_0}\left(\sin^2\left(2^n\arcsin\sqrt{x_0}\right)\right)=\ln 2.$$

Автокорреляционная функция. Для известной инвариантной плотности выражение для автокорреляционной функции траекторий хаотической отображения представляется интегралом [14, 18]:

$$R(m)=\int\limits_0^1 xg^m(x)\rho(x)dx-\left(\int\limits_0^1 x\rho(x)dx\right)^2$$

(усреднение ведется по инвариантной плотности отображения). В случае логистического отображения (Улама–фон Неймана) имеем [14]:

$$R(m)=\begin{cases}1/8, & m=0,\\ 0, & m\geqslant 0.\end{cases}$$

Отсутствие корреляции между сечениями процесса соотносится с понятием *дискретного белого шума*. Это обстоятельство подпитывает особый интерес к отображению Улама–фон Неймана.

4. Уравнение Шрёдера: хаос в схеме Ньютона

Изменим знак в алгоритме извлечения квадратного корня по алгоритму Ньютона (10), считая $a>0$, то есть представим разностное уравнение в виде:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{a}{x_n}\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right),\quad n=0,1,2,...;\quad x_n\in(-\infty,+\infty).\qquad(24)$$

Итерационная схема (24) демонстрирует хаотическое поведение — блуждание траектории по всей (!) числовой оси. Для нахождения точного выражения для траекторий отображения (24) введем непрерывную монотонную замену переменных на основе *тригонометрических* функций:

$$x_n = \sqrt{a} \cdot \operatorname{ctg}(\pi \nu_n), \quad \nu_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{x_n}{\sqrt{a}}, \quad \nu_n \in (0,1). \tag{25}$$

При подстановке (25) в (24) возникнет ситуация, связанная с применением формулы котангенса двойного угла

$$\operatorname{ctg}(2u) = \frac{\operatorname{ctg}^2 u - 1}{2 \operatorname{ctg} u} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg} u - \frac{1}{\operatorname{ctg} u}\right),$$

что позволяет получить из (24) с учетом периодичности котангенса уравнение

$$\operatorname{ctg}(\pi \nu_{n+1}) = \operatorname{ctg}(\pi \cdot 2\nu_n) = \operatorname{ctg}(\pi[2\nu_n] + \pi\{2\nu_n\}) \equiv \operatorname{ctg}(\pi\{2\nu_n\}).$$

Отсюда следует разностное уравнение для переменной ν_n

$$\nu_{n+1} = \{2\nu_n\} = 2\nu_n \bmod 1, \quad n = 0, 1, ..., \quad \nu_n \in (0,1) \tag{26}$$

(фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа). Преобразование (26) представляет хаотическое кусочно-линейное отображение, именуемое сдвигом Бернулли, траекторное решение для которого имеет вид

$$\nu_n = 2^n \nu_0 \bmod 1, \quad n = 0, 1, ...$$

Соответственно (это можно показать, пользуясь индукцией), точное решение для траекторий отображения (24) может быть представлено в виде

$$x_n = \sqrt{a} \operatorname{ctg}\left(2^n \operatorname{arcctg} \frac{x_0}{\sqrt{a}}\right). \tag{27}$$

В силу топологического сопряжения с хаотическим сдвигом Бернулли отображение (24) также обладает хаотическими свойствами. Показатель Ляпунова, являясь инвариантом для сопряженных отображений, в данном случае положителен и равен $\Lambda = \ln 2$. Установление факта сопряженности отображений (24) и (26) позволяет простым дифференцированием обратной функции в (25) определить вид инвариантной плотности отображения (24):

$$\rho(x) = \left| \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{28}$$

Законом (28) на всей действительной числовой оси задается распределение Коши, принадлежащее к числу «патологических» распределений, для которых математическое ожидание и начальные моменты не определены. Возникновение хаоса в схеме (24) можно интерпретировать как результат формального применения разностной схемы Ньютона для вычисления квадратного корня из отрицательного числа в рамках арифметики вещественных чисел.

5. Представление уравнений хаотических траекторий в форме Шрёдера

Примеры хаотических отображений, чьи траекторные решения приведены к форме Шрёдера, представлены в Таблице. Разностные уравнения для 12 отображений, демонстрирующих хаотическое поведение, записаны в первом столбце Таблицы. Они получены посредством топологического сопряжения с кусочно-линейными хаотическими отображениями. Вид сопрягающих

Таблица. Характеристики хаотических отображений с точным траекторным решением в форме Шрёдера
Table. Characteristics of chaotic mappings with an exact trajectory solution in the Schröder form

Отображение	Инвариантная плотность	Точное траекторное решение
Отображения на единичном интервале		
$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$, $x_n \in (0,1)$, $n = 0,1,2,...$	$\rho(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$	$x_n = \sin^2(2^n \arcsin\sqrt{x_0})$
$x_{n+1} = 16\left(1-\sqrt{x_n}\right)^2$, $x_n \in (0,1)$	$\rho(x) = \dfrac{1}{2\pi x^{3/4}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$	$x_n = \sin^4(2^n \arcsin\sqrt[4]{x_0})$
$x_{n+1} = \sqrt{2}(1-x_n^4)^{1/4}$, $x_n \in (0,1)$	$\rho(x) = \dfrac{4x}{\pi\sqrt{1-x^4}}$	$x_n = \sqrt{\lvert\sin(2^n \arcsin x_0^2\rvert}$
Хаотические отображения на основе полиномов Чебышёва		
$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, $x_n \in (-1,1)$	$\rho(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$	$x_n = \cos(2^n \arccos x_0)$
$x_{n+1} = 4x_n^3 - 3x_n$, $x_n \in (-1,1)$	$\rho(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$	$x_n = -\sin(3^n \arcsin x_0)$
$x_{n+1} = 16x_n^5 - 20x_n^3 + 5x_n$, $x_n \in (-1,1)$	$\rho(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$	$x_n = \sin(5^n \arcsin x_0)$
Хаотические отображения на бесконечных (полубесконечных) интервалах		
$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n - \dfrac{\lvert a\rvert}{x_n}\right)$, $x \in (-\infty,+\infty)$	Распределение Коши $\rho(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{a^2+x^2}$	$x_n = \sqrt{a}\,\mathrm{ctg}\left(2^n \,\mathrm{arcctg}\,\dfrac{x_0}{\sqrt{a}}\right)$
$x_{n+1} = \dfrac{4x_n}{(1-x_n)^2}$, $x_n \in (0,+\infty)$	F-распределение $\rho(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)}$	$x_n = \mathrm{tg}^2\left(2^n \,\mathrm{arcctg}\sqrt{x_0}\right)$
$x_{n+1} = -\ln\lvert\sinh x_n\rvert$, $x_n \in (-\infty,+\infty)$	Z-распределение $\rho(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\cosh(x)}$	$x_n = -\ln\lvert\mathrm{ctg}\,(2^n \,\mathrm{arcctg}(\exp(-x_0)))\rvert$
Отображение, генерирующее хаос в области непрерывного изменения параметра		
$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)\dfrac{1-k^2x_n}{(1-k^2x_n^2)^2}$, $0 < x_n < 1$	$\rho(x) = \dfrac{1}{2K\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$	$x_n = \mathrm{sn}^2\left(2^n \mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{x_0}, k\right), k\right)$
$x_{n+1} = 1 - \dfrac{2x_n^2}{(1-k^2x_n^2)^2}$, $-1 < x_n < 1$	$\rho(x) = \dfrac{1}{2K\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}}$	$x_n = -\mathrm{cn}^2\left(2^n \mathrm{cn}^{-1}\left(x_0, k\right), k\right)$
$x_{n+1} = \dfrac{k'^2 - 2k'^2x_n^2 + x_n^4}{k'^2 + 2x_n^2 - x_n^4}$, $k' \leqslant x_n \leqslant 1$	$\rho(x) = \dfrac{1}{K\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}$	$x_n = \mathrm{dn}\left(2^n \mathrm{dn}^{-1}\left(x_0, k'\right), k'\right)$, $k' \leqslant x_0 \leqslant 1$

функций «читается» в выражениях для инвариантных плотностей (второй столбец) и точных траекторных решений (третий столбец), отвечающих отображениям из первого столбца.

Хаотические отображения в Таблице разделены на четыре группы.

Первая группа — отображения на единичном интервале. «Возглавляет» группу подробно рассмотренное выше логистическое отображение, а два других примера показывают изобретательские возможности при синтезе новых отображений на базе тригонометрических функций.

Вторая группа хаотических преобразований — отображения в форме полиномов Чебышёва первого рода на интервале $(-1, 1)$. Все полиномы Чебышёва первого рода могут служить генераторами хаоса (но с одним и тем же инвариантным распределением!), поскольку сопрягаются с хаотическими кусочно-линейными отображениями. В первом отображении из этой группы «завуалирована» формула синуса двойного угла, во втором — формула синуса тройного угла, в третьем — формула вычисления синуса пятикратно увеличенного угла. Значения показателя Ляпунова для этих отображений соответственно равны $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$.

В третьем блоке Таблицы представлены хаотические отображения, область действия которых распространяется на бесконечные интервалы (подынтервалы). Сопрягающие функции выбраны специальным образом, чтобы инвариантные плотности совпадали с известными вероятностными законами распределения (Коши, F-распределения, Z-распределения), находящих широкое применение в различных задачах физики, биофизики, теории надежности и т. п. [21]. Получение отображения с инвариантным распределением в форме закона Коши подробно рассматривалось выше. Другие отображения из этого блока построены на базе формулы (18).

В заключительном блоке Таблицы представлены отображения, включающие зависимость от параметра и демонстрирующее хаотическое поведение для *области непрерывного его изменения*. Построены это отображения на базе эллиптических функций Якоби [22].

Напомним, что эллиптический синус Якоби $\mathrm{sn}(u, k)$ определяется как обращение эллиптического интеграла первого рода [23, гл. 22]:

$$u = \int\limits_0^{\mathrm{sn}(u,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{x}, k\right) = \int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$(0 < k < 1)$. Эллиптический косинус Якоби $\mathrm{cn}(u, k)$ является обращением интеграла

$$u = \int\limits_{\mathrm{cn}(u,k)}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+t^2)}}, \quad \mathrm{cn}^{-1}(x, k) = \int\limits_x^0 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+t^2)}}$$

$(k'^2 = 1 - k^2)$. Эллиптическая функция $\mathrm{dn}(u, k)$ — обращение эллиптического интеграла

$$u = \int\limits_{\mathrm{dn}(u,k)}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}, \quad \mathrm{dn}^{-1}(x, k') = \int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}.$$

Полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Периодичность функций Якоби позволяет свести выражения для траекторных решений хаотических отображений к форме Шрёдера.

Заключение

Представление выражений для траекторий итерационных процессов в форме Шрёдера позволяет *аналитически* оценить наличие или отсутствие сходимости вычислительной процедуры к решению заданного уравнения. Решение уравнения Шрёдера связано с построением отображения, топологически сопряженного с исходным. В целом, как проиллюстрировано в статье, метод построения топологически сопряженных отображений весьма продуктивен. Теоретический и прикладной интерес к идее изоморфных преобразований базовых (как правило, кусочно-линейных) эндоморфизмов, для которых выявлены особенности их хаотического поведения (эргодичность, перемешивания, точности и т. п.) стимулируется:

а) перспективой построения для различных приложений новых нелинейных хаотических генераторов с разнообразными статистическими характеристиками — областями задания, заданными точными инвариантными плотностями, гладкими или разрывными итеративными функциями, различными по значению ляпуновскими показателями и т. д.;

б) возможностью использования при изучении новых отображений инвариантных свойств и характеристик хаотических отображений, результатов траекторного, множественного и спектрального анализа известных отображений;

в) разработкой аналитических методов решения разностных уравнений, «генерирующих» хаос, прямой и обратной задач для интегрального уравнения Фробениуса–Перрона с сингулярным ядром или соответствующего функционального уравнения, связывающих инвариантные плотности и итеративные функции.

Для отображений, демонстрирующих хаотическое поведение, сходимость, как и для регулярных процессов вычислительной математики, тоже очень важна. Но эта сходимость носит термодинамический «оттенок»: речь идет о сходимости к равновесному состоянию, определяемому установлением инвариантного распределения в динамической системе. И в этом случае можно говорить о сходимости процесса к «точке», но эта точка является неподвижной точкой линейного несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса, ассоциированного с хаотическим отображением [24].

Список литературы

1. *Schröder E.* Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen // Mathematische Annalen. 1870. Bd. 2, Heft 2. S. 317–365. DOI: 10.1007/BF01444024.
2. *Schröder E.* Ueber iterirte Functionen // Mathematische Annalen. 1870[1]. Bd. 3, Heft 2. S. 296–322. DOI: 10.1007/BF01443992.
3. *Милнор Дж.* Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.
4. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.-Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
5. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
6. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 528 с.
7. *Alexander D. S.* A History of Complex Dynamics: From Schröder to Fatou and Julia. Vol. E24 of Aspects of Mathematics. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1994. 165 p.
8. *Alexander D. S., Iavernaro F., Rosa A.* Early Days in Complex Dynamics: A History of Complex Dynamics in One Variable During 1906–1942. Vol. 38 of History of Mathematics. Providence, RI, London: London Mathematical Society, 2012. 454 p.

[1]Том (Band) 3 журнала «Mathematische Annalen» с выходными данными «1871» состоит из двух выпусков (Heft 1 и Heft 2), на выходных данных которых стоит 1870 год. Статья Э. Шрёдера поступила в журнал в июне 1869 г.

9. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 576 p. DOI: 10.1017/CBO9781139086639.
10. *Kuczma M.* Functional Equations in a Single Variable. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers, 1968. 383 p.
11. *де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: Иностранная литература, 1961. 248 с.
12. *Янпольский А. Р.* Гиперболические функции. М.: Физматгиз, 1960. 195 с.
13. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969. 239 с.
14. *Аникин В. М., Голубенцев А. Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
15. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.
16. *Ulam S. M., von Neumann J.* On combination of stochastic and deterministic processes // Bulletin of the American Mathematical Society. 1947. Vol. 53, no. 11. P. 1120.
17. *von Neumann J.* Collected Works. Vol. 5. New York: Macmillan, 1963. P. 768–770.
18. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
19. *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. СПб.: Невский Диалект; М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009. 192 с.
20. *Кейперс Л., Нидеррайтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985. 408 с.
21. *Golubentsev A. F., Anikin V. M.* The explicit solutions of Frobenius-Perron equation for the chaotic infinite maps // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8, no. 5. P. 1049–1051. DOI: 10.1142/S0218127498000863.
22. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М.* Специальные функции в теории детерминированного хаоса // Известия вузов. ПНД. 2000. Т. 8, № 3. С. 50–58.
23. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. В 2 ч. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 500 с.
24. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике / под ред. В. М. Аникина. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2015. 96 с.

References

1. Schröder E. Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Mathematische Annalen. 1870;2(2):317–365 (in German). DOI: 10.1007/BF01444024.
2. Schröder E. Ueber iterirte Functionen. Mathematische Annalen. 1870[2];3(2):296–322 (in German). DOI: 10.1007/BF01443992.
3. Milnor J. Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures. 3rd edition. Princeton: Princeton University Press; 2006. 320 p.
4. Peitgen H-O, Richter PH. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag; 1986. 202 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61717-1.
5. Crownover RM. Introduction to Fractals and Chaos. Boston, London: Jones and Bartlett Publishers; 1995. 350 p.
6. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise. New York: Dover Publications; 2009. 448 p.
7. Alexander DS. A History of Complex Dynamics: From Schröder to Fatou and Julia. Vol. E24 of Aspects of Mathematics. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn; 1994. 165 p.
8. Alexander DS, Iavernaro F, Rosa A. Early Days in Complex Dynamics: A History of Complex Dynamics in One Variable During 1906–1942. Vol. 38 of History of Mathematics. Providence, RI, London: London Mathematical Society; 2012. 454 p.

[2]Volume (Band) 3 of the Mathematische Annalen with the imprint “1871” consists of two issues (Heft 1 and Heft 2) with the imprint dated 1870. The article by E. Schröder entered the journal in June 1869.

9. Kuczma M, Choczewski B, Ger R. Iterative Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press; 1990. 576 p. DOI: 10.1017/CBO9781139086639.
10. Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers; 1968. 383 p.
11. de Bruijn NG. Asymptotic Methods in Analysis. New York: Dover Publications; 1981. 296 p.
12. Yanpol'skii AR. Hyperbolic Functions. Moscow: Fizmatgiz; 1960. 195 p. (in Russian).
13. Billingsley P. Ergodic Theory and Information. New York: John Wiley & Sons; 1965. 193 p.
14. Anikin VM, Golubentsev AF. Analytical Models of Deterministic Chaos. Moscow: FIZMATLIT; 2007. 328 p. (in Russian).
15. Ulam SM. A Collection of Mathematical Problems. New York, London: Interscience Publishers; 1960. 150 p.
16. Ulam SM, von Neumann J. On combination of stochastic and deterministic processes. Bulletin of the American Mathematical Society. 1947;53(11):1120.
17. von Neumann J. Collected Works. Vol. 5. New York: Macmillan; 1963. P. 768–770.
18. Schuster HG, Just W. Deterministic Chaos: An Introduction. 4th, Revised and Enlarged Edition. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA; 2005. 299 p. DOI: 10.1002/3527604804.
19. Ermakov SM. Monte Carlo Method in Computational Mathematics. Saint Petersburg: Nevskii Dialect; Moscow: BINOM, Laboratorija Znanij; 2009. 192 p. (in Russian).
20. Kuipers L, Niederreiter H. Uniform Distribution of Sequences. Mineola, New York: Dover Publications; 2006. 416 p.
21. Golubentsev AF, Anikin VM. The explicit solutions of Frobenius-Perron equation for the chaotic infinite maps. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1998;8(5):1049–1051. DOI: 10.1142/S0218127498000863.
22. Golubentsev AF, Anikin VM. Special functions in the theory of deterministic chaos. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2000;8(3):50–58 (in Russian).
23. Whittaker ET, Watson GN. A Course of Modern Analysis. 4th Edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1996. 616 p. DOI: 10.1017/CBO9780511608759.
24. Anikin VM, Arkadakskii SS, Remizov AS. Non-Self-Adjoint Linear Operators in Chaotic Dynamics. Saratov: Saratov University Publishing; 2015. 96 p. (in Russian).

Аникин Валерий Михайлович — родился в г. Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (1970). Доктор физико-математических наук (2005), имеет ученое звание профессора (2008). Почетный работник высшего профессионального образования РФ (2012). Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации (2019). Декан физического факультета СГУ (2010–2020). Ученый секретарь (с 1991) и председатель (с 2019) диссертационного совета по физико-математическим наукам на базе СГУ. Заведующий кафедрой общей, теоретической и компьютерной физики Института физики СГУ. Член редколлегий журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» и «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика». Автор статей и монографий по теории случайных и хаотических процессов, диссертациеведению, истории физико-математического образования в Саратовском университете, в том числе монографий «Аналитические модели детерминированного хаоса» (совместно с А. Ф. Голубенцевым; Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007), «Диссертациеведение: пролегомены» (совместно с Б. Н. Пойзнером; Саратов: издательство Саратовского университета, 2019).

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: AnikinVM@sgu.ru
ORCID: 0000-0002-6506-6997
AuthorID (eLibrary.Ru): 166229