



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)


Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003027

EDN: ABUBJC

О типичности явления взрывной синхронизации в сетях осцилляторов с топологиями связей типа «кольцо» и «малый мир»

А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко 

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Региональный научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»
E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com, mariakurovskaya@gmail.com, o.i.moskalenko@gmail.com

Поступила в редакцию 29.10.2022, принята к публикации 30.11.2022,
опубликована онлайн 29.12.2022, опубликована 31.01.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования состоит в изучении вопроса о том, насколько типичным (или же, наоборот, уникальным) оказывается явление взрывной синхронизации в сетях нелинейных осцилляторов с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир», и каким образом должны соотноситься парциальные частоты взаимодействующих осцилляторов друг с другом для того, чтобы явление взрывной синхронизации в этих сетях было возможным. **Методы.** В данной работе используется аналитическое описание поведения сетей нелинейных элементов с топологиями связей типа «кольцо» и «малый мир», находящихся в полностью синхронном состоянии. Для подтверждения полученных результатов используется численное моделирование. **Результаты.** Показано, что в сетях нелинейных осцилляторов с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир» явление взрывной синхронизации может наблюдаться при различных распределениях парциальных частот осцилляторов сети. **Заключение.** В работе рассмотрено аналитическое описание поведения осцилляторов сети с топологиями «кольцо» и «малый мир» и показано, что явление взрывной синхронизации в подобных сетях является хотя и нетипичным, но и не уникальным.

Ключевые слова: явление взрывной синхронизации, осцилляторы Курамото, сети нелинейных элементов, топология «малый мир», топология «кольцо», парциальные частоты.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФ, проект № 19-12-00037.

Для цитирования: Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И. О типичности явления взрывной синхронизации в сетях осцилляторов с топологиями связей типа «кольцо» и «малый мир» // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 32–44. DOI: 10.18500/0869-6632-003027. EDN: ABUBJC

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On the typicality of the explosive synchronization phenomenon in oscillator networks with the link topology of the “ring” and “small world” types

A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko✉

Saratov State University

Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com, mariakurovskaya@gmail.com, ✉o.i.moskalenko@gmail.com

Received 29.10.2022, accepted 30.11.2022, available online 29.12.2022, published 31.01.2023

Abstract. Purpose of this study is to investigate the problem of how typical (or, conversely, unique) is the phenomenon of explosive synchronization in networks of nonlinear oscillators with topologies of links such as “ring” and “small world”, and, in turn, how the partial frequencies of the interacting oscillators must correlate with each other for the phenomenon of explosive synchronization in these networks can be possible. *Methods.* In this paper, we use an analytical description of the synchronous behavior of networks of nonlinear elements with “ring” and “small world” link topologies. To confirm the obtained results the numerical simulation is used. *Results.* It is shown that in networks of nonlinear oscillators with topologies of links such as “ring” and “small world”, the phenomenon of explosive synchronization can be observed for the different distributions of partial frequencies of network oscillators. *Conclusion.* The paper considers an analytical description of the behavior of network oscillators with “ring” and “small world” topologies of links and shows that the phenomenon of explosive synchronization in such networks is atypical, but not unique.

Keywords: explosive synchronization phenomenon, Kuramoto oscillators, nonlinear element networks, small-world topology, ring topology, partial frequencies.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, project No. 19-12-00037.

For citation: Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI. On the typicality of the explosive synchronization phenomenon in oscillator networks with the link topology of the “ring” and “small world” types. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(1):32–44. DOI: 10.18500/0869-6632-003027

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

При рассмотрении коллективной динамики сетей нелинейных осцилляторов со сложной топологией межэлементных связей [1, 2] среди большого разнообразия возможных типов синхронного поведения встречается так называемый режим *взрывной синхронизации* [3–6] (*explosive synchronization*), при котором при увеличении параметра связи между элементами внезапно происходит взрывной рост числа синхронных осцилляторов сети и вся сеть начинает демонстрировать синхронное поведение. И, наоборот, при уменьшении параметра связи полностью синхронное состояние сети внезапно разрушается, при этом число синхронных осцилляторов (размер возникшего синхронного кластера) существенным образом уменьшается. Явление взрывной синхронизации описано и изучено для сетей фазовых осцилляторов, и, соответственно, под термином «синхронное поведение» взаимодействующих осцилляторов понимается режим фазовой синхронизации, когда имеет место совпадение частот взаимодействующих осцилляторов, а значит, и захват их мгновенных фаз [7, 8].

Несмотря на то, что явление взрывной синхронизации может наблюдаться для сложных сетей с различными топологиями связей — такими как регулярные сети, где каждый элемент сети связан со всеми остальными [9], сети со случайной топологией связей [10], масштабно-инвариантные сети [6, 11, 12], сети малого мира [13] — режим взрывной синхронизации, несомненно,

имеет универсальный характер, но не является типичным. Он наблюдается в достаточно редких случаях, имеет самоподобный характер [10] и требует весьма специфического набора значений управляющих параметров, как для отдельных осцилляторов, так и для всей сети в целом, при этом важную роль играет распределение собственных частот взаимодействующих осцилляторов $g(\omega)$ (см., например, раздел 4.1.1 обзора [3]). В частности, для случая регулярной сети осцилляторов Курамото с топологией связей между элементами «каждый с каждым» явление взрывной синхронизации описано для случая равномерного эквидистантного распределения собственных частот осцилляторов, а также для частных случаев параболического, треугольного и «шляпообразного» эквидистантных распределений парциальных частот взаимодействующих систем [9]. Точно также, явление взрывной синхронизации возникает в случае равномерного эквидистантного распределения собственных частот взаимодействующих осцилляторов в сетях со случайной топологией связей [10], а также в сетях малого мира и регулярных сетях с топологией связей типа «кольцо» [13]. В то же самое время, для того чтобы явление взрывной синхронизации имело место в масштабно-инвариантных сетях, собственные частоты осцилляторов ω_i должны быть связаны со степенью соответствующего узла k_i [14], при этом достаточно часто используется соотношение $\omega_i = k_i$ [6, 11]. В литературе рассматриваются также и другие достаточно «экзотические» варианты сложных сетей и распределений парциальных частот, такие как масштабно-инвариантные сети с запаздывающими связями [15], частотно-взвешенные сети [16], многослойные сети [17] (в том числе, многослойные сети с частичной и слабой корреляцией [18]) и проч.

В настоящей работе, основываясь на особенностях топологии межэлементных связей сетей типа «кольцо» и «малый мир», рассматривается вопрос о возможных видах распределения парциальных частот взаимодействующих фазовых осцилляторов, при которых возможен «взрывной» характер установления (или разрушения) полностью синхронного состояния сети нелинейных осцилляторов при изменении силы связи между осцилляторами.

1. Рассматриваемая модель сети фазовых осцилляторов

Хотя явление взрывной синхронизации наблюдается для различных типов фазовых осцилляторов (в частности, для кусочно-линейных осцилляторов Ресслера [4], обобщенных осцилляторов Курамото [19]), в качестве эталонной модели фазовых осцилляторов, находящихся в узлах сети со сложной топологией связей, используется модель осцилляторов Курамото [20, 21]

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \lambda \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\varphi_k - \varphi_j). \quad (1)$$

В соотношении (1) каждый j -й осциллятор характеризуется мгновенным значением фазы φ_j и частоты ω_j (которая является управляющим параметром для каждого осциллятора), топология связей между осцилляторами задается элементами матрицы $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$, принимающими значения ноль ($a_{jk} = a_{kj} = 0$) или единица ($a_{jk} = a_{kj} = 1$) в случае отсутствия или наличия связи между j -м и k -м осцилляторами, соответственно. Очевидно, что диагональные элементы матрицы \mathbf{A} должны быть тождественно равными нулю, $a_{jj} = 0$. Полное количество осцилляторов в сети задаётся управляющим параметром N , величина которого в настоящей работе полагается равной $N = 10^3$. Интенсивность всех связей сети полагается одинаковой и характеризуется величиной управляющего параметра λ .

Линейное преобразование $\varphi_j \rightarrow \varphi_j + \Omega_0 t$ переводит исходное соотношение (1) само в себя, однако, после этого преобразования переменная φ_j будет иметь смысл разности фаз между

исходным j -м осциллятором сети и некоторым опорным осциллятором (возможно, абстрактным), частота колебаний которого является Ω_0 . Аналогично, парциальная частота ω_j после такого преобразования будет иметь смысл разности частот исходного осциллятора с номером j и частотой Ω_0 . Выбирая Ω_0 лежащим внутри интервала парциальных частот взаимодействующих осцилляторов, $\Omega_0 \in (\omega_{\min}, \omega_{\max})$, можно добиться того, что собственные частоты рассматриваемых осцилляторов могут быть как положительными, так и отрицательными, а при выполнении условия $\Omega_0 = \langle \omega_j \rangle$ множество парциальных частот будет иметь нулевое среднее.

Поскольку в настоящей работе рассматривается регулярная сеть нелинейных осцилляторов Курамото с топологией межэлементных связей типа «кольцо», а также сеть с топологией «малый мир», формируемая из регулярной кольцевой сети с помощью метода Ватса–Строгаца [22], введем в рассмотрение аналогично работе [13] пространственную координату x , направленную «вдоль» кольца, начало которой относительно элементов сети может быть выбрано произвольно. Без потери общности будем считать, что во введённой в рассмотрение системе координат длина кольца будет составлять $2\mathfrak{L}$ единиц, а собственные частоты ω_j элементов сети зависят от координаты x и могут рассматриваться как некоторая функция координаты, $\omega(x)$. Аналогично, мгновенные значения величин φ_j также могут быть рассмотрены как функция пространственной переменной и времени, $\varphi(x, t)$, а в случае полностью синхронного состояния всех элементов сети и выбора значения Ω_0 равным частоте синхронных колебаний — как функция только пространственной переменной, $\varphi(x)$.

В предположении большого числа осцилляторов $N \gg 1$ и полностью синхронного состояния всех взаимодействующих осцилляторов для сети нелинейных осцилляторов с топологией межэлементных связей типа «кольцо» исходный оператор эволюции (1) может быть записан в виде

$$\lambda \Delta \cdot \Phi'_s(x) = \omega(x), \quad (2)$$

где величина

$$\Phi_s(x) = -\frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta \sin(\varphi'(x)\eta) d\eta \quad (3)$$

является некоторой функцией, которую будем называть потенциальной (см. также [13]). В соотношении (2) переменная x пробегает диапазон значений от $-\mathfrak{L}$ до $+\mathfrak{L}$, параметр $\Delta = 2\mathfrak{L}/(N-1)$ имеет смысл расстояния (в единицах безразмерной координаты x , введённой в рассмотрение вдоль кольцевой сети) между двумя соседними элементами сети (то есть, между j -м и $(j+1)$ -м осцилляторами), а величина $L = \Delta K$, в свою очередь, характеризует пространственный размер связи (опять же в единицах пространственной переменной x) каждого элемента сети с $2K$ соседями, с которыми он связан.

Действительно, для полностью синхронной сети с топологией межэлементных связей типа «кольцо» и осцилляторов с номерами $j \in [K+1, N-K]$ соотношение (1) может быть записано в виде

$$0 = \omega(x_j) + \lambda \sum_{k=j-K}^{j+K} \sin(\varphi(x_j + (k-j)\Delta) - \varphi(x_j)), \quad (4)$$

где координата x_j соответствует положению j -го осциллятора. В силу замкнутости сети осцилляторов в кольцо, соотношение (4) (при соответствующем переобозначении номеров осцилляторов) будет справедливо и для осцилляторов с номерами меньше $(K+1)$ и больше $(N-K)$.

С помощью переобозначений $k \rightarrow k - j$, $x \rightarrow x_j$

$$-\lambda \sum_{k=-K}^{+K} \sin(\varphi(x + k\Delta) - \varphi(x)) = \omega(x), \quad (5)$$

и последовательной цепочки преобразований

$$-\lambda \sum_{k=0}^K \sin(\varphi(x - k\Delta) - \varphi(x)) - \lambda \sum_{k=0}^K \sin(\varphi(x + k\Delta) - \varphi(x)) = \omega(x), \quad (6)$$

$$-\lambda \sum_{k=0}^K \{\sin(\varphi(x + k\Delta) - \varphi(x)) - \sin(\varphi(x) - \varphi(x - k\Delta))\} = \omega(x), \quad (7)$$

соотношение (4) может быть приведено к виду

$$-\lambda \sum_{k=0}^K \{U_k(x + k\Delta) - U_k(x)\} = \omega(x), \quad (8)$$

где

$$U_k(x) = \sin(\varphi(x) - \varphi(x - k\Delta)). \quad (9)$$

В предположении большого числа осцилляторов ансамбля, $N \gg 1$, и, соответственно, стремящегося к нулю расстояния между осцилляторами, $\Delta \ll 1$, соотношение (8) может быть записано в виде

$$-\lambda \Delta \sum_{k=0}^K k U_k'(x) = \omega(x). \quad (10)$$

Вводя в рассмотрение функцию

$$\tilde{\Phi}_s(x) = - \sum_{k=1}^K k U_k(x) = - \sum_{k=1}^K k \sin(\varphi(x) - \varphi(x - k\Delta)) = - \sum_{k=1}^K k \sin(\varphi_j - \varphi_{j-k}), \quad (11)$$

и, пользуясь свойством линейности оператора суммы, соотношение (10) можно записать как

$$\lambda \Delta \cdot \tilde{\Phi}_s'(x) = \omega(x). \quad (12)$$

Теперь, для перехода от полученного соотношения (12) к виду (2) остаётся только учесть

$$U_k(x) = \sin(\varphi(x) - \varphi(x - k\Delta)) \approx \sin(\varphi'(x)k\Delta) \quad (13)$$

и перейти от дискретного суммирования в (11) к непрерывному интегрированию

$$\sum_{k=1}^K k U_k(x) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k=1}^K (k\Delta) U_k(x) \times \Delta \approx \frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta \sin(\varphi'(x)\eta) d\eta, \quad (14)$$

что приводит соотношения (12) и (11) к виду, полностью идентичному выражениям (2) и (3), соответственно.

Понятно, что при построении сети элементов с топологией связей «малый мир» с использованием метода Ваттса–Строгаца [22] в результате перезамыкания кольцевых связей появляются «длинные» связи, которые не учитываются соотношениями (2) и (3), и, соответственно, поведение сетей малого мира будет искажено относительно аналитического описания. В то же самое время, можно ожидать, что, поскольку свойства «малого мира» в сетях нелинейных элементов проявляются при малых значениях вероятности p перезамыкания связей в методе Ваттса–Строгаца, появляющиеся искажения будут незначительными и не будут сильно влиять на основные аналитические результаты, полученные в ходе рассмотрения.

2. Полностью синхронный режим и его разрушение

Как уже обсуждалось во Введении, режим взрывной синхронизации заключается в резком, внешне внезапном увеличении числа синхронизованных осцилляторов в сети и переходе сети к полностью синхронному состоянию при увеличении силы связи между элементами сети. Аналогично, при уменьшении силы связи происходит внезапное разрушение полностью синхронного состояния сети и резкое уменьшение числа синхронизованных осцилляторов. Важно отметить, что установление и разрушение полностью синхронного состояния сети, как правило, сопровождается гистерезисом [3], иными словами, критические значения параметра связи при увеличении и уменьшении силы связи могут быть различными.

Аналитические соотношения (2) и (3) в разделе 1 были получены для случая полностью синхронного состояния сети осцилляторов Курамото. В то же самое время, очевидно, что в том случае, когда известна закономерность $\omega(x)$, по которой заданы парциальные частоты взаимодействующих осцилляторов (сделаем предположение об интегрируемости данной закономерности $\omega(x)$), для соотношения (2) всегда существует решение в виде

$$\Phi_s(x) = \frac{1}{\lambda\Delta} \int \omega(x) dx \quad (15)$$

на всем интервале рассмотрения $x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]$, независимо от величины силы связи λ (разумеется, при условии $\lambda \neq 0$) и степени синхронности динамического режима осцилляторов сети. С учётом вышеизложенного, представляется очевидным, что потенциальная функция $\Phi_s(x)$, определяемая соотношением (15), должна обладать (опять же, на всем интервале рассмотрения $x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]$) неким определённым свойством в режиме полностью синхронного состояния сети, и, наоборот, не обладать этим свойством в случае невозможности существования полностью синхронного состояния сети при малых значениях параметра связи. Более того, потеря этого свойства потенциальной функцией $\Phi_s(x)$ должна соответствовать критическому значению управляющего параметра λ , соответствующему моменту разрушения полностью синхронного состояния сети взаимосвязанных осцилляторов.

Поскольку из рассмотрения, проведённого в разделе 1, нам известна некоторая информация о потенциальной функции $\Phi_s(x)$ (см. соотношение (3)), и учитывая результаты работы [13], можно предположить, что данным свойством является свойство ограниченности значений потенциальной функции $\Phi_s(x)$ на всем интервале рассмотрения $x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]$ в некотором диапазоне значений

$$-S \leq \Phi_s(x) \leq S, \quad S > 0. \quad (16)$$

Оценить значение величины S можно из соотношения (3): несмотря на то, что явный вид зависимости фаз осцилляторов от координаты $\varphi(x)$ (производная от которой фигурирует в соотношении (3)) нам не известен, очевидно, что максимально и минимально возможными значениями подинтегральной функции $\sin(\varphi'(x)\eta)$ являются ± 1 , а соответственно, максимально и минимально возможные значения $\Phi_s(x)$ могут быть оценены (сверху) как

$$\pm \frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta d\eta = \pm \frac{L^2}{2\Delta^2} = \pm \frac{K^2}{2}, \quad (17)$$

и, соответственно,

$$0 < S \leq \frac{K^2}{2}. \quad (18)$$

Таким образом, по результатам вышеприведённого рассмотрения можно сформулировать следующие промежуточные выводы: в сетях фазовых осцилляторов с топологиями межэлементных связей «кольцо» и «малый мир», задавая явный вид распределения парциальных частот

взаимодействующих осцилляторов ω_j (и, соответственно, $\omega(x)$) и отслеживая выполнение условия (16) для потенциальной функции $\Phi_s(x)$ (вид которой известен из соотношения (15)), можно «конструировать» ситуации, в которых при увеличении/уменьшении силы связи между взаимодействующими осцилляторами будет реализоваться взрывной переход (*взрывная синхронизация*) между полностью синхронным состоянием сети и состоянием, в котором существуют синхронные кластеры осцилляторов, размеры которых ощутимо меньше полного числа осцилляторов сети N . Очевидно, что таких зависимостей $\omega(x)$, и, соответственно, конфигураций сетей, в которых возможна реализация взрывной синхронизации, по-видимому, может быть достаточно много, что, в свою очередь, говорит о том, что в сетях с топологиями межэлементных связей «кольцо» и «малый мир» явление взрывной синхронизации является, по крайней мере, не уникальным.

3. Пример: гармоническая зависимость частоты от номера осциллятора

Для того чтобы проиллюстрировать вышесказанное, рассмотрим сети с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир», состоящие из $N = 10^3$ осцилляторов Курамото (1), парциальные частоты которых зависят от номера осциллятора по гармоническому закону

$$\omega_j = \Omega \sin\left(\frac{2m\pi}{N}j\right), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (19)$$

где $\Omega > 0$ — максимально возможное значение парциальной частоты осцилляторов, m — число периодов в зависимости парциальных частот от номеров осцилляторов. Выберем величину параметра $K = 8$, что будет означать, что каждый элемент сети связан с 16 ближайшими осцилляторами. Поскольку теоретическое рассмотрение в разделах 1 и 2 проводилось в диапазоне значений координаты $x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]$, для непрерывной модели (2) зависимость (19) будет соответствовать зависимости

$$\omega(x) = -\Omega \sin\left(\frac{m\pi}{\mathfrak{L}}x\right), \quad x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]. \quad (20)$$

При рассмотрении данного примера выберем для удобства $\mathfrak{L} = 0.5$, тогда, как легко видеть, величина управляющего параметра Δ будет равна 10^{-3} . Нетрудно видеть, что для рассматриваемой зависимости (20) потенциальная функция (15) будет иметь вид

$$\Phi_s(x) = \frac{\mathfrak{L}\Omega}{m\pi\lambda\Delta} \cos\left(\frac{m\pi x}{\mathfrak{L}}\right) + C, \quad (21)$$

где C — константа интегрирования, которую, в силу симметрии соотношений (3), (16), (17), (20), будем считать тождественно равной нулю.

Очевидно, что выполнение условия (16) будет иметь место при

$$\frac{\mathfrak{L}\Omega}{m\pi\lambda\Delta} \lesssim \frac{K^2}{2}, \quad (22)$$

что даёт возможность оценить критическое значение параметра связи λ_c , при котором (в случае уменьшения силы связи) должно произойти разрушение полностью синхронного состояния сети осцилляторов Курамото

$$\lambda_c \gtrsim \lambda_* = \frac{2\mathfrak{L}\Omega}{m\pi\Delta K^2}. \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что при выбранных значениях управляющих параметров $\Omega = 0.5$ и $m = 1$ величина λ_c должна быть равна или превышать $\lambda_* = 2.4868$. Иными словами, можно ожидать,

что для указанных значений управляющих параметров при силе связи между элементами сети, находящейся ниже значения λ_* , сеть осцилляторов Курамото (1) с топологией межэлементных связей типа «кольцо» не может находиться в полностью синхронном режиме, а выше этой точки возможно явление взрывной синхронизации.

На рис. 1 показаны зависимости числа осцилляторов в максимальном синхронном кластере сети от величины параметра связи λ при различных значениях управляющих параметров, характеризующих сеть осцилляторов Курамото, полученные с помощью непосредственного численного моделирования модельной системы. Из рисунка хорошо видно, что для всех рассматриваемых случаев в сети осцилляторов наблюдается резкий переход между полностью синхронным состоянием осцилляторов сети и состоянием, когда такое полностью синхронное состояние отсутствует. Кривая 1, соответствующая $\Omega = 0.5$ и $m = 1$, претерпевает резкий переход при $\lambda_c = 2.5224$, что очень хорошо соотносится с полученным значением $\lambda_* = 2.4868$. Выше критического значения сеть осцилляторов Курамото оказывается полностью синхронизованной, тогда как ниже λ_c в сети существуют два равносильных синхронных кластера осцилляторов, точно так же, как это имеет место в случае сети осцилляторов Курамото с равномерным эквидистантным распределением парциальных частот (см. [13]).

Интересно также отметить, что увеличение количества периодов колебаний зависимости $\omega(x)$ на рассматриваемом интервале $[-\mathcal{L}; \mathcal{L}]$ приводит к соответствующему уменьшению величины λ_* и, соответственно, критического значения λ_c (см. соотношение (23), а также ср. кривые 1 и 2, 3 и 4 на рис. 1). В том случае, когда одновременно с количеством периодов колебаний m изменяется частота Ω таким образом, чтобы отношение Ω/m оставалось неизменным, соответствующие зависимости $N_s(\lambda)$ будут практически совпадать друг с другом (см. (23) и ср. кривые 2 и 3 на рис. 1).

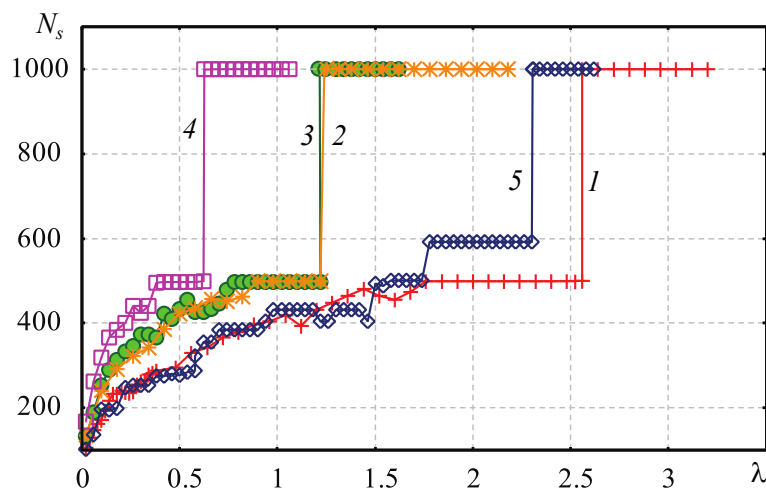


Рис. 1. Зависимость числа синхронных осцилляторов в максимальном синхронном кластере, N_s , от величины параметра связи λ для сети осцилляторов Курамото (1) с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» (кривые 1–4) и «малый мир» (кривая 5). Значения управляющих параметров выбраны следующими: $\mathcal{L} = 0.5$, $N = 10^3$, $K = 8$; $\Omega = 0.5$, $m = 1$ (кривая 1); $\Omega = 0.5$, $m = 2$ (кривая 2); $\Omega = 0.25$, $m = 1$ (кривая 3); $\Omega = 0.25$, $m = 2$ (кривая 4); $\Omega = 0.5$, $m = 1$, $p = 0.01$ (кривая 5). Зависимости построены при уменьшении параметра λ (цвет онлайн)

Fig. 1. The dependence of the number of the synchronous oscillators into the maximal synchronous cluster, N_s , on the coupling strength λ for the Kuramoto oscillator network (1) with topology of links belonging to the types “ring” (curves 1–4) and “small world” (curve 5). The control parameter values are the following: $\mathcal{L} = 0.5$, $N = 10^3$, $K = 8$; $\Omega = 0.5$, $m = 1$ (curve 1); $\Omega = 0.5$, $m = 2$ (curve 2); $\Omega = 0.25$, $m = 1$ (curve 3); $\Omega = 0.25$, $m = 2$ (curve 4); $\Omega = 0.5$, $m = 1$, $p = 0.01$ (curve 5). All curves have been obtained for the decreasing coupling parameter λ (color online)

Из рисунка также видно, что в случае сети малого мира взрывной переход происходит при меньшем (хотя и близком) значении управляющего параметра λ по сравнению с аналогичной сетью осцилляторов Курамото типа «кольцо» (ср. кривые 1 и 5, рис. 1). Подобное различие может быть объяснено тем, что небольшое количество «длинных» связей, образовавшихся в силу перезамыкания связей между осцилляторами при построении сети малого мира из кольца по методу Ваттса–Строгаца [22], вносит некоторые искажения в поведение сети малого мира по сравнению с теоретическими соотношениями, приведёнными в настоящей работе.

Полученное теоретическое соотношение (21) для потенциальной функции $\Phi_s(x)$ можно сопоставить с результатами непосредственного численного моделирования сети осцилляторов Курамото (1), при этом численная зависимость потенциальной функции от координаты x может быть рассчитана с помощью соотношения (11), поскольку для числа элементов сети N , стремящегося к бесконечности, дискретный аналог потенциальной функции $\tilde{\Phi}_s(x)$ стремится к потенциальной функции $\Phi_s(x)$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}_s(x) = \Phi_s(x). \quad (24)$$

Так как при численном моделировании поведения сети осцилляторов Курамото в качестве пространственной координаты используется номер элемента j , для сопоставления (11) с (21) имеет смысл перейти к безразмерной координате $x = (j - N/2)/N$.

На рис. 2 показаны сопоставления профилей теоретического $\Phi_s(x)$ и численного $\tilde{\Phi}_s(x)$ представлений потенциальной функции для сети осцилляторов Курамото (1), находящейся в полностью синхронном состоянии. Рис. 2, *a* соответствует случаю сети осцилляторов с топологией связей типа «кольцо», рис. 2, *b* — топологии связей «малый мир». Из рис. 2, *a* видно отличное соответствие результата численного моделирования и теоретической зависимости (21), что позволяет говорить об адекватности предложенного теоретического подхода. В случае сети «малого мира» неучтенные при построении теоретического описания «длинные» связи несколько искажают профиль потенциальной функции. «Длинные» связи, возникшие в результате применения метода Ваттса–Строгаца [22], можно рассматривать как некоторое случайное воздействие на потенциальную функцию, которое искажает её профиль. Искажения гладкого профиля потенциальной функции приводят к тому, что для сети малого мира в некоторых точках x_e потенциальная

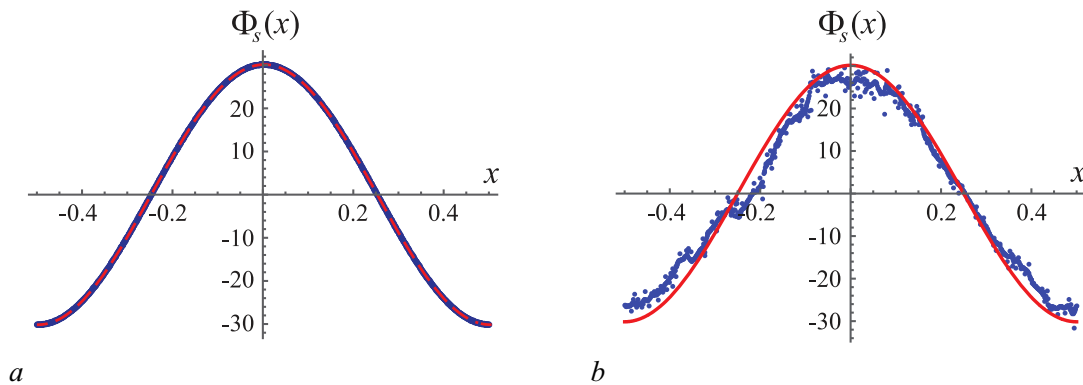


Рис. 2. Зависимость дискретного и непрерывного представлений потенциальной функции от координаты x для сети осцилляторов Курамото (1) с топологией межэлементных связей типа «кольцо» (а) и «малый мир» (б), $\lambda = 2.64$, $\Omega = 0.5$, $m = 1$, $p = 0.01$ (цвет онлайн)

Fig. 2. The dependence of the discrete and continuous representations of the potential function on coordinate x for the Kuramoto oscillator network with “ring” (a) and “small world” (b) topologies, $\lambda = 2.64$, $\Omega = 0.5$, $m = 1$, $p = 0.01$ (color online)

функция $\tilde{\Phi}_s(x)$ достигает ограничительных значений S при меньших значениях управляющего параметра λ по сравнению с аналогичной сетью (характеризующейся тем же самым набором значений управляющих параметров) с топологией межэлементных связей типа «кольцо», что приводит к сдвигу области резкого перехода в сторону меньших значений параметра связи λ (см. рис. 1, кривые 1 и 5). Тем не менее эти отличия носят, в основном, несущественный количественный характер и общие закономерности в поведении потенциальной функции для сети синхронных осцилляторов оказываются одинаковыми для топологий межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир», поэтому все выводы, полученные для сети с топологией связей «кольцо» остаются справедливыми и для сетей малого мира.

Заключение

Таким образом, основываясь на теоретических результатах, изложенных в разделах 1 и 2, подтверждённых результатами численного моделирования (раздел 3) динамики сетей осцилляторов Курамото с топологиями межэлементных связей типа «малый мир» и «кольцо», можно сделать вывод о том, что взрывной характер перехода к полностью синхронному состоянию в подобных сетях может наблюдаться для достаточно большого числа возможных зависимостей парциальных частот ω_j осцилляторов от номера осциллятора j , а следовательно, такой взрывной переход в подобных сетях является явлением хотя и нетипичным, но и не уникальным. Более того, предложенный в настоящей работе подход, основанный на задании последовательности парциальных частот ω_j , позволяет целенаправленно «конструировать» сети с топологиями «кольцо» и «малый мир», которые будут демонстрировать явление взрывной синхронизации.

Список литературы

1. Boccaletti S., Latora V., Moreno V., Chavez M., Hwang D.-U. Complex networks: Structure and dynamics // *Physics Reports*. 2006. Vol. 424, no. 4–5. P. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
2. Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C. Synchronization in complex networks // *Physics Reports*. 2008. Vol. 469, no. 3. P. 93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
3. Boccaletti S., Almendral J. A., Guan S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zou Y. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization // *Physics Reports*. 2016. Vol. 660. P. 1–94. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.10.004.
4. Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Buldú J. M., Sendiña-Nadal I., Gómez-Gardeñes J., Arenas A., Moreno Y., Gómez S., Jaimés-Reátegui R., Boccaletti S. Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 108, no. 16. P. 168702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.168702.
5. Leyva I., Navas A., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Buldú J. M., Zanin M., Papo D., Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators // *Scientific Reports*. 2013. Vol. 3. P. 1281. DOI: 10.1038/srep01281.
6. Gómez-Gardeñes J., Gómez S., Arenas A., Moreno Y. Explosive synchronization transitions in scale-free networks // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, no. 12. P. 128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.128701.
7. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
8. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // *Радиотехника и электроника*. 2004. Т. 49, № 1. С. 77–83.
9. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72, no. 4. P. 046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046211.

10. *Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I., Hramov A., Boccaletti S.* Self-similarity in explosive synchronization of complex networks // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062312. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062312.
11. *Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A.* Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 5. P. 056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056108.
12. *Zou Y., Pereira T., Small M., Liu Z., Kurths J.* Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, no. 11. P. 114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.114102.
13. *Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И.* О возможности явления взрывной синхронизации в сетях малого мира // *Известия вузов. ПНД.* 2021. Т. 29, № 4. С. 467–479. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479.
14. *Zhu L., Tian L., Shi D.* Criterion for the emergence of explosive synchronization transitions in networks of phase oscillators // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042921. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042921.
15. *Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A.* Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 1. P. 016102. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016102.
16. *Leyva I., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Navas A., Olmi S., Boccaletti S.* Explosive synchronization in weighted complex networks // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042808. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042808.
17. *Jiang X., Li M., Zheng Z., Ma Y., Ma L.* Effect of externality in multiplex networks on one-layer synchronization // *Journal of the Korean Physical Society.* 2015. Vol. 66, no. 11. P. 1777–1782. DOI: 10.3938/jkps.66.1777.
18. *Su G., Ruan Z., Guan S., Liu Z.* Explosive synchronization on co-evolving networks // *EPL (Europhysics Letters).* 2013. Vol. 103, no. 4. P. 48004. DOI: 10.1209/0295-5075/103/48004.
19. *Hu X., Boccaletti S., Huang W., Zhang X., Liu Z., Guan S., Lai C.-H.* Exact solution for first-order synchronization transition in a generalized Kuramoto model // *Scientific Reports.* 2014. Vol. 4, no. 1. P. 7262. DOI: 10.1038/srep07262.
20. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // In: Araki H. (eds) *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics.* Vol. 39 of *Lecture Notes in Physics.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
21. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez-Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, no. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
22. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of ‘small-world’ networks // *Nature.* 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440–442. DOI: 10.1038/30918.

References

1. Boccaletti S, Latora V, Moreno V, Chavez M, Hwang DU. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports.* 2006;424(4–5):175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
2. Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C. Synchronization in complex networks. *Physics Reports.* 2008;469(3):93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
3. Boccaletti S, Almendral JA, Guan S, Leyva I, Liu Z, Sendiña-Nadal I, Wang Z, Zou Y. Explosive transitions in complex networks’ structure and dynamics: Percolation and synchronization. *Physics Reports.* 2016;660:1–94. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.10.004.
4. Leyva I, Sevilla-Escoboza R, Buldú JM, Sendiña-Nadal I, Gómez-Gardeñes J, Arenas A, Moreno Y, Gómez S, Jaimes-Reátegui R, Boccaletti S. Explosive first-order transition to synchrony in

- networked chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2012;108(16):168702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.168702.
5. Leyva I, Navas A, Sendiña-Nadal I, Almendral JA, Buldú JM, Zanin M, Papo D, Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators. *Scientific Reports.* 2013;3:1281. DOI: 10.1038/srep01281.
 6. Gómez-Gardeñes J, Gómez S, Arenas A, Moreno Y. Explosive synchronization transitions in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(12):128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.128701.
 7. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences.* Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
 8. Anishchenko VS, Vadivasova TE. Relationship between frequency and phase characteristics of chaos: Two criteria of synchronization. *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2004;49(1):69–75.
 9. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model. *Phys. Rev. E.* 2005;72(4):046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046211.
 10. Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI, Hramov A, Boccaletti S. Self-similarity in explosive synchronization of complex networks. *Phys. Rev. E.* 2017;96(6):062312. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062312.
 11. Peron TKDM, Rodrigues FA. Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations. *Phys. Rev. E.* 2012;86(5):056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056108.
 12. Zou Y, Pereira T, Small M, Liu Z, Kurths J. Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 2014;112(11):114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.114102.
 13. Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI. On the possibility of explosive synchronization in small world networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):467–479 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479.
 14. Zhu L, Tian L, Shi D. Criterion for the emergence of explosive synchronization transitions in networks of phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2013;88(4):042921. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042921.
 15. Peron TKDM, Rodrigues FA. Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling. *Phys. Rev. E.* 2012;86(1):016102. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016102.
 16. Leyva I, Sendiña-Nadal I, Almendral JA, Navas A, Olmi S, Boccaletti S. Explosive synchronization in weighted complex networks. *Phys. Rev. E.* 2013;88(4):042808. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042808.
 17. Jiang X, Li M, Zheng Z, Ma Y, Ma L. Effect of externality in multiplex networks on one-layer synchronization. *Journal of the Korean Physical Society.* 2015;66(11):1777–1782. DOI: 10.3938/jkps.66.1777.
 18. Su G, Ruan Z, Guan S, Liu Z. Explosive synchronization on co-evolving networks. *EPL (Europhysics Letters).* 2013;103(4):48004. DOI: 10.1209/0295-5075/103/48004.
 19. Hu X, Boccaletti S, Huang W, Zhang X, Liu Z, Guan S, Lai CH. Exact solution for first-order synchronization transition in a generalized Kuramoto model. *Scientific Reports.* 2014;4(1):7262. DOI: 10.1038/srep07262.
 20. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H, editor. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics.* Vol. 39 of *Lecture Notes in Physics.* Berlin, Heidelberg: Springer; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
 21. Acebrón JA, Bonilla LL, Pérez-Vicente CJ, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
 22. Watts DJ, Strogatz SH. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature.* 1998;393(6684):440–442. DOI: 10.1038/30918.



Короновский Алексей Александрович — родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Проректор по научной работе и цифровому развитию СГУ, заведующий кафедрой физики открытых систем Института физики СГУ. Область научных интересов — динамический хаос, синхронизация, нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой деятельности. Автор научных монографий и статей в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3585-317X
AuthorID (eLibrary.Ru): 73470



Куровская Мария Константиновна — окончила с отличием факультет нелинейных процессов СГУ (2007). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2009). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ (с 2018 г.). Научные интересы — хаотическая синхронизация, перемежающееся поведение, влияние шума на установление синхронных режимов, динамика сложных сетей, нейрофизиология. Опубликовала около 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: mariakurovskaya@gmail.com
ORCID: 0000-0002-2805-8402
AuthorID (eLibrary.Ru): 560945



Москаленко Ольга Игоревна — родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006). Кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012), доктор физико-математических наук (2017). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов — исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор около 200 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах, нескольких монографий и патентов на изобретения и полезные модели.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5727-5169
AuthorID (eLibrary.Ru): 150252