

ISSN 0555-2923

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Проблемы передачи информации



НАУКА
— 1727 —

том 60 вып. 2

2024

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРОБЛЕМЫ

ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Журнал основан
в январе 1965 г.

ISSN: 0555-2923

Выходит
4 раза в год

Том 60, 2024

Вып. 2

Апрель–Май–Июнь

М о с к в а

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Теория кодирования

Амирзаде Ф., Панарио Д., Садеги М.-Р. Квантовые квазициклические МПП-коды с
весом столбцов не менее 3 имеют обхват не выше 6 3

Методы обработки сигналов

Гвоздарев А.С., Артёмова Т.К., Морковкин А.В. Анализ поведения коэффициента
выигрыша от компенсации многолучевости в условиях многопутевого канала с дву-
кратным рэлеевским рассеянием и затенением компоненты прямой видимости 12

Бабилов В.Г., Галяев А.А. Диаграммы статистической и спектральной сложности 25

Теория сетей связи

Карамышев А.Ю., Порай Е.Д., Хоров Е.М. Оценка емкости системы сверхнадежной
связи с низкими задержками с помощью аппроксимаций для многосерверных си-
стем массового обслуживания $G/G/s$ 36

Семинары

Бланк М.Л. О заседаниях Добрушинского семинара в 2024 г. (часть 1) 53

Логинов В.А. О заседаниях Московского телекоммуникационного семинара в 2024 г.
(часть 1) 59

CONTENTS

Coding Theory

Amirzade, F., Panario, D., and Sadeghi, M.-R., Quantum Quasi-cyclic LDPC Codes with Column Weight at Least 3 Have Girth at Most 6	3
--	---

Methods of Signal Processing

Gvozdayev, A.S., Artemova, T.K., and Morkovkin, A.V., Analysis of the Behavior of the Finite-SNR Diversity Gain in a Multipath Fluctuating Double-Rayleigh with Line-of-Sight Fading Channel	12
Babikov, V.G. and Galyaev, A.A., Statistical and Spectral Complexity Diagrams	25

Communication Network Theory

Karamyshev, A.Yu., Porai, E.D., and Khorov, E.M., Capacity Estimation for a Ultra-Reliable Low Latency Communication System via Approximations for $G/G/s$ Multi-Server Queues	36
---	----

Seminars

Blank, M.L., Talks Given at the Dobrushin Seminar in 2024 (Part 1)	53
Loginov, V.A., Talks Given at the Moscow Telecommunication Seminar in 2024 (Part 1)...	59

УДК 621.391 : 519.725

© 2024 г. Ф. Амирзаде, Д. Панарио, М.-Р. Садеги

**КВАНТОВЫЕ КВАЗИЦИКЛИЧЕСКИЕ МПП-КОДЫ С ВЕСОМ
СТОЛБЦОВ НЕ МЕНЕЕ 3 ИМЕЮТ ОБХВАТ НЕ ВЫШЕ 6**

Квантовые квазициклические МПП-коды (ККЦ-МПП-коды) исследуются с точки зрения их циклов. Показано, что все ККЦ-МПП-коды с весом столбцов не менее 3 имеют обхват не выше 6. Известно, что нижняя граница на минимальное расстояние квазициклического МПП-кода с обхватом 6 и весом столбцов 3 равна 4. По ККЦ-МПП-кодам с весом столбцов не менее 3 строятся ККЦ-МПП-коды с весом столбцов 3 и минимальным расстоянием не менее 6.

Ключевые слова: квантовые квазициклические МПП-коды, обхват, граф Таннера.

DOI: 10.31857/S0555292324020013, EDN: LWLTFH

§ 1. Введение

Квантовые компьютеры в перспективе смогут решать некоторые задачи, например, задачу факторизации (разложения на множители) целых чисел, гораздо быстрее, чем классические компьютеры. В 1982 году в работе Вуттерса и Зурека [1] была сформулирована теорема о невозможности определенных квантовых вычислений, известная как *теорема о запрете клонирования*. Согласно этой теореме невозможно создать независимую тождественную копию произвольного неизвестного квантового состояния.

В 1995 году Шор предложил код, в котором один кубит отображается в девять кубитов, с условием, что исходный кубит можно восстановить после декогеренции (т.е. нарушения когерентности) [2]. При использовании этого квантового кода, имеющего скорость $1/9$, можно декодировать только один кубит.

Одними из наиболее распространенных квантовых кодов, исправляющих ошибки, являются *стабилизаторные коды*. Эти коды позволяют хранить и передавать k битов квантовой информации, используя $n > k$ квантовых битов, таким образом, что переданную квантовую информацию можно восстановить, если некоторое подмножество из n квантовых битов содержит ошибки, представляющие собой битовые ошибки, фазовые ошибки и любые их линейные комбинации с тождественным оператором. В 1996 году Калдербэнк и Шор показали, что методы исправления ошибок работают эффективно, если декогеренция различных кубитов возникает независимо [3].

Калдербэнк, Шор и Стин показали как на основе классических линейных кодов можно построить некоторый класс квантовых кодов, называемых *CSS-кодами*. Эти коды являются частным случаем стабилизаторных кодов (см. [4]) и строятся по паре классических линейных кодов. Для восстановления кубита, подвергшегося воздействию окружающей среды, используется проверочное измерение, известное в квантовой теории информации как *стабилизаторный формализм*.

Для двух линейных кодов C и C' код C' называется двойственным кодом для C , т.е. $C' = C^\perp$, если любое кодовое слово кода C' является линейной комбинацией строк проверочной матрицы кода C . Иными словами, если код C' является двойственным кодом для C , а через c мы обозначаем кодовые слова кода C , то код C' определяется следующим образом:

$$C' = \{d \in \mathbb{F}_2^n : d \times c^T = 0, \forall c \in C\},$$

где через c^T обозначен транспонированный вектор c .

CSS-код с параметрами $[[n, k_1 - k_2]]$ строится по двум классическим линейным кодам $[[n, k_1]]$ -коду C_1 и $[[n, k_2]]$ -коду C_2 , таким что $C_2 \subset C_1$ и при этом как минимальное расстояние $d_{\min}(C_1)$ кода C_1 , так и дуальное расстояние $d_{\min}(C_2^\perp)$ кода C_2 равно d . Такой $[[n, k_1 - k_2]]$ -CSS-код исправляет $t = \frac{d-1}{2}$ битовых ошибок и $t = \frac{d-1}{2}$ фазовых ошибок.

Два линейных кода C_1 и C_2 удовлетворяют *условию скрученности* (twisted condition), если $C_1^\perp \subset C_2$ и $C_2^\perp \subset C_1$. Пара линейных кодов C_1 и C_2 , удовлетворяющих условию скрученности, порождает CSS-код [5]. При этом, если H_1 и H_2 – проверочные матрицы кода C_1 и кода, двойственного к C_2 , соответственно, то пара (H_1, H_2) является парой проверочных матриц для квантового кода тогда и только тогда, когда $H_{C_1} \times H_{C_2}^T = 0$. Если для $[[n, k_1 - k_2]]$ -CSS-кода выполнено условие $C_2 = C_1^\perp$, то такой квантовый код называется *содержащим двойственный* (dual-containing).

Коды с малой плотностью проверок (МПП-коды), введенные Галлагером в 1960-х годах [6], – это линейные коды (т.е. векторные пространства над конечными полями) с разреженными проверочными матрицами. МПП-код называется (m, n) -регулярным, если в каждом столбце и каждой строке проверочной матрицы содержится ровно m и n единиц соответственно. Число m называется весом столбцов, а n – весом строк. С каждым МПП-кодом связан двудольный *граф Таннера*, матрица смежности которого является проверочной матрицей кода. Длина кратчайшего цикла в графе Таннера называется обхватом кода.

Известно, что МПП-коды позволяют достигать пропускной способности канала при низкой сложности декодирования. Существуют различные конструкции МПП-кодов, такие как квазициклические МПП-коды (КЦ-МПП-коды), МПП-коды на основе алгебраических конструкций, а также МПП-коды, основанные на комбинаторных схемах. Высокая эффективность МПП-кодов является мотивацией для рассмотрения квантовых CSS-кодов, построенных по двум МПП-кодам C_1 и C_2 ; такие квантовые коды называются QLDPC-кодами [7]. Если H_1 и H_2 – проверочные матрицы кода C_1 и кода, двойственного к коду C_2 , соответственно, то проверочная матрица QLDPC-кода имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}.$$

Согласно [8] в графе Таннера QLDPC-кода, содержащего двойственный, неизбежно присутствуют циклы длины 4, которые ухудшают эффективность этих кодов при использовании итерационных алгоритмов декодирования. Таким образом, все предлагаемые в литературе QLDPC-коды не являются кодами, содержащими двойственные, т.е. их графы Таннера не содержат циклов длины 4. Так, в работах [4, 5, 8], соответственно, для построения QLDPC-кодов с обхватом 6 использовались квадратично-вычетные множества, КЦ-МПП-коды и комбинаторные схемы.

КЦ-МПП-коды являются одними из самых популярных схем кодирования в каналах благодаря своей высокой эффективности при итеративном декодировании. Всякий (m, n) -регулярный КЦ-МПП-код описывается своей характеристической матрицей (exponent matrix) размера $m \times n$.

В настоящей статье рассматриваются QLDPC-коды, построенные по КЦ-МПП-кодам; такие коды мы будем называть *ККЦ-МПП-кодами*. Сначала доказывается, что граф Таннера этих кодов имеет обхват не выше 6, если вес столбцов их проверочной матрицы не меньше 3. Таким образом, все ККЦ-МПП-коды, предложенные в [5], имеют обхват 6. Так как минимальное расстояние кода с весом столбцов 3 не меньше 4 [9], то любая $(3 \times n)$ -подматрица характеристической матрицы из [5] имеет $d_{\min} \geq 4$. Мы укажем те подматрицы, минимальное расстояние которых не меньше 6.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 приводятся основные обозначения и определения. Далее, § 3 посвящен анализу обхвата ККЦ-МПП-кодов с весом столбцов не менее 3. В § 4 получены ККЦ-МПП-коды с весом столбцов 3, обхватом 6 и $d_{\min} \geq 3$. В заключительном § 5 подводятся итоги.

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $B = [b_{ij}]$ – характеристическая матрица размера $m \times n$ квазициклического МПП-кода (КЦ-МПП-кода) с размером циркулянта $N \times N$, где $b_{ij} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ или $b_{ij} = (\infty)$. Если целые числа в характеристической матрице заменить на циркулянтные перестановочные матрицы размера $N \times N$, первая строка которых содержит единицу в b_{ij} -м столбце и нули в остальных столбцах, а элемент (∞) заменить на нулевую матрицу размера $N \times N$, то в результате получается проверочная матрица КЦ-МПП-кода. Нулевое пространство этой проверочной матрицы и образует КЦ-МПП-код [10]. Число единиц в столбце проверочной матрицы называется *весом столбца*, а число единиц в ее строке – *весом строки*. Если проверочная матрица имеет постоянный вес столбцов m и постоянный вес строк n , то она соответствует (m, n) -регулярному КЦ-МПП-коду. Если все элементы характеристической матрицы – целые числа, то полученная проверочная матрица дает *полносвязный КЦ-МПП-код*. Ясно, что характеристическая матрица размера $m \times n$ с целочисленными элементами соответствует полносвязному (m, n) -регулярному КЦ-МПП-коду.

Для проверки наличия циклов длины $2k$ в графе Таннера КЦ-МПП-кода используется характеристическая матрица B и следующая лемма Фоссорье [10]: если

$$\sum_{i=0}^{k-1} (b_{m_i n_i} - b_{m_i n_{i+1}}) \equiv 0 \pmod{N}, \quad (1)$$

где $n_k = n_0$, $m_i \neq m_{i+1}$, $n_i \neq n_{i+1}$, а $b_{m_i n_i} - (m_i, n_i)$ -й элемент матрицы B , то в графе Таннера проверочной матрицы имеются циклы длины $2k$. Наименьшая длина цикла в графе Таннера равна *обхвату* графа Таннера, который обозначается через g .

При проверке циклов длины $2k$ следует учитывать, что уравнение (1) содержит k слагаемых, причем пара последовательных слагаемых, таких как $(b_{m_i n_i} - b_{m_i n_{i+1}})$ и $(b_{m_{i+1} n_{i+1}} - b_{m_{i+1} n_{i+2}})$, имеет различные номера строк m_i и m_{i+1} . Более того, номера строк первого и последнего слагаемых также различны, т.е. $m_0 \neq m_{k-1}$. Например, при проверке циклов длины 6, если в первом слагаемом номер строки равен m_0 , во втором m_1 , а в третьем m_2 , то поскольку m_0 и m_1 – номера строк двух последовательных слагаемых, имеем $m_0 \neq m_1$, а так как m_1 и m_2 – тоже номера строк двух последовательных слагаемых то и $m_1 \neq m_2$. Более того, поскольку m_0 и m_2 – номера строк первого и последнего слагаемых, то $m_0 \neq m_2$. Таким образом, при проверке циклов длины 6 в условии (1) участвуют три *различные* строки. Ситуация с номерами столбцов схожая. А именно, в каждом слагаемом $(b_{m_i n_i} - b_{m_i n_{i+1}})$ участвуют два разных номера столбцов n_i и n_{i+1} , а в паре последовательных слагаемых $(b_{m_i n_i} - b_{m_i n_{i+1}})$ и $(b_{m_{i+1} n_{i+1}} - b_{m_{i+1} n_{i+2}})$ номер столбца второго элемента $b_{m_i n_{i+1}}$ в слагаемом $(b_{m_i n_i} - b_{m_i n_{i+1}})$ равен номеру столбца первого элемента $b_{m_{i+1} n_{i+1}}$ в другом слагаемом. Кроме того, номера столбцов первого

и последнего элементов в уравнении (1) одинаковы, т.е. $n_0 = n_k$. Отсюда получаем, что при проверке циклов длины 6 в условии (1) участвуют три разных номера столбцов. Следовательно, для проверки циклов длины 6 в графе Таннера необходимо рассмотреть каждую (3×3) -подматрицу характеристической матрицы. Для облегчения понимания дальнейшего изложения рассмотрим поподробнее процедуру обнаружения коротких циклов в графе Таннера КЦ-МПП-кода:

а) Для проверки циклов длины 4 с помощью условия (1) в (2×2) -подматрице характеристической матрицы $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ вычисляются величины

$$(b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2}) + (b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1}) \equiv 0 \pmod{N}, \quad i_1 \neq i_2, \quad j_1 \neq j_2.$$

Чтобы рассмотреть все циклы длины 4 в графе Таннера, требуется проверить условие (1) для каждой (2×2) -подматрицы характеристической матрицы.

б) Для каждой (3×3) -подматрицы характеристической матрицы $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ для проверки циклов длины 6 из условия (1) получаем шесть уравнений, одним из которых, например, является

$$(b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2}) + (b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_3}) + (b_{i_3 j_3} - b_{i_3 j_1}) \equiv 0 \pmod{N}, \quad i_1 \neq i_2 \neq i_3, \quad j_1 \neq j_2 \neq j_3.$$

Поскольку номера строк и столбцов попарно не совпадают, для проверки циклов длины 6 в графе Таннера условие (1) необходимо проверить для каждой (3×3) -подматрицы характеристической матрицы. Теперь для каждой (3×3) -подматрицы B мы укажем шесть случаев, которые требуется рассмотреть при проверке циклов длины 6. В каждом случае элементы подматрицы, не входящие в уравнение, обозначены символом “*”:

$$\begin{bmatrix} b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} & * \\ * & b_{i_2 j_2} & b_{i_2 j_3} \\ b_{i_3 j_1} & * & b_{i_3 j_3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{i_1 j_1} & * & b_{i_1 j_2} \\ * & b_{i_2 j_2} & b_{i_2 j_3} \\ b_{i_3 j_1} & b_{i_3 j_2} & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & b_{i_1 j_2} & b_{i_1 j_3} \\ b_{i_2 j_1} & * & b_{i_2 j_3} \\ b_{i_3 j_1} & b_{i_3 j_2} & * \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} * & b_{i_1 j_2} & b_{i_1 j_3} \\ b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} & * \\ b_{i_3 j_1} & * & b_{i_3 j_3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{i_1 j_1} & * & b_{i_1 j_3} \\ b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} & * \\ * & b_{i_3 j_2} & b_{i_3 j_3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} & * \\ b_{i_2 j_1} & * & b_{i_2 j_3} \\ * & b_{i_3 j_2} & b_{i_3 j_3} \end{bmatrix}.$$

Из вышесказанного следует, что существование цикла длины 6 в графе Таннера означает, что характеристическая матрица обязательно имеет не менее трех строк и трех столбцов, т.е. $m \geq 3$ и $n \geq 3$. В противном случае в графе Таннера заведомо нет циклов длины 6.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие того, что из пары КЦ-МПП-кодов получается квантовый код.

Теорема 1 [5]. Пусть $C = [c_{ij}]$ и $D = [d_{ij}]$ – характеристические матрицы размера $m \times n$ некоторых КЦ-МПП-кодов. Пара (C, D) является парой характеристических матриц ККЦ-МПП-кода тогда и только тогда, когда для строк с номерами $i, i' \in \{1, \dots, m\}$ каждый элемент множества

$$R_{i, i'} = \{(c_{ij} - d_{i'j}) \bmod N, 1 \leq j \leq n\}$$

встречается четное число раз.

§ 3. ККЦ-МПП-коды с весом столбцов $m \geq 3$

В этом параграфе мы докажем, что графы Таннера двух характеристических матриц ККЦ-МПП-кода с весом столбцов не менее 3 имеют обхват не выше 6. Затем мы рассмотрим графические структуры графов Таннера ККЦ-МПП-кодов, предложенные в [5]. Для проверки циклов длины 4 с помощью условия (1) в (2×2) -под-

матрице характеристической матрицы $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ вычисляются величины

$$(b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2}) + (b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1}) \equiv 0 \pmod{N}, \quad i_1 \neq i_2, \quad j_1 \neq j_2.$$

Чтобы рассмотреть все циклы длины 4 в графе Таннера, условие (1) необходимо проверить для каждой (2×2) -подматрицы характеристической матрицы. Следующая лемма дает необходимое и достаточное условие существования в графе Таннера ККЦ-МПП-кода циклов длины 4, наличия которых следует избегать.

Лемма 1 [11]. Пусть $C = [c_{ij}]$ и $D = [d_{ij}]$ – характеристические матрицы размера $m \times n$ двух КЦ-МПП-кодов C_1 и C_2 , причем граф Таннера кода C_1 имеет обхват не менее 6. Коды C_1 и C_2 порождают ККЦ-МПП-код с обхватом не менее 6 тогда и только тогда, когда для любых двух равных элементов $c_{ij} - d_{i'j}$ и $c_{ij'} - d_{i'j'}$ множество $R_{i,i'}$ для двух номеров строк $i \neq i' \in \{1, 2, \dots, m\}$, где $j \neq j' \in \{1, 2, \dots, n\}$, и множества $R_{i,i''}$ и $R_{i'',i'}$ удовлетворяют следующим условиям:

- а) $c_{ij} - d_{i''j} \not\equiv c_{ij'} - d_{i''j'} \pmod{N}$;
- б) $c_{i''j} - d_{i'j} \not\equiv c_{i''j'} - d_{i'j'} \pmod{N}$.

Следующие теоремы задают ограничения на построение ККЦ-МПП-кодов с конкретным обхватом.

Теорема 2 [11]. Любой ККЦ-МПП-код с характеристической матрицей размера 3×4 имеет обхват 4.

Теорема 3. ККЦ-МПП-коды с весом столбцов не менее 3 имеют обхват не выше 6.

Доказательство. Пусть $C = [c_{ij}]$ и $D = [d_{ij}]$ – характеристические матрицы ККЦ-МПП-кода. Согласно теореме 1 каждый элемент множества $R_{i,i'}$ встречается четное число раз. Таким образом, без ограничения общности будем считать, что в множестве

$$R_{1,1} = \{(c_{1j} - d_{1j}), 1 \leq j \leq n\}$$

выполнено $c_{11} - d_{11} = c_{12} - d_{12}$. Тогда по лемме 1 существует целое число $j \neq 2$, для которого $c_{11} - d_{21} = c_{1j} - d_{2j}$ в множестве $R_{1,2}$. Аналогично, в множестве $R_{1,3}$ имеем $j' \neq j$ и $j' \neq 2$, откуда $c_{11} - d_{31} = c_{1j'} - d_{3j'}$. Продолжая этот процесс, можно показать, что существуют номера столбцов k, k' , такие что $c_{12} - d_{22} = c_{1k} - d_{2k}$ и $c_{12} - d_{32} = c_{1k'} - d_{3k'}$. Таким образом, для элементов $d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{22}$ и d_{32} получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} d_{11} &= c_{11} - c_{12} + d_{12}, & d_{21} &= c_{11} - c_{1j} + d_{2j}, & d_{31} &= c_{11} - c_{1j'} + d_{3j'}, \\ d_{22} &= c_{12} - c_{1k} + d_{2k}, & d_{32} &= c_{12} - c_{1k'} + d_{3k'}. \end{aligned}$$

Подставим их в первые три строки характеристической матрицы D , которые обозначим через D' :

$$D' = \begin{bmatrix} c_{11} - c_{12} + d_{12} & d_{12} & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1j'} & \dots \\ c_{11} - c_{1j} + d_{2j} & c_{12} - c_{1k} + d_{2k} & \dots & d_{12j} & \dots & d_{2j'} & \dots \\ c_{11} - c_{1j'} + d_{3j'} & c_{12} - c_{1k'} + d_{3k'} & \dots & d_{3j} & \dots & d_{3j'} & \dots \end{bmatrix}.$$

Теперь, проверяя условие (1) для циклов длины 6, для выделенных элементов приведенной выше матрицы D получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} (D_{11} - D_{12}) + (D_{22} - D_{2j'}) + (D_{3j'} - D_{31}) &= \\ = (c_{11} - c_{12} + d_{12} - d_{12}) + (c_{12} - c_{1k} + d_{2k} - d_{2j'}) + (d_{3j'} - c_{11} + c_{1j'} - d_{3j'}) &= \\ = (c_{11} - c_{12}) + (c_{12} - c_{1k} + d_{2k} - d_{2j'}) + (c_{1j'} - c_{11}) &= \\ = -c_{1k} + d_{2k} - d_{2j'} + c_{1j'}. \end{aligned}$$

Если для любых j' и k правая часть этого уравнения не равна нулю, т.е.

$$(-c_{1k} + d_{2k}) + (c_{1j'} - d_{2j'}) \not\equiv 0 \pmod{N},$$

то $c_{1j'} - d_{2j'} \neq c_{1k} - d_{2k}$, откуда следует, что в множестве $R_{1,2}$ существует элемент типа $c_{1j'} - d_{2j'}$, который встречается один раз, а это противоречит условию четности кратности в множестве $R_{i,i'}$ из теоремы 1. Таким образом, найдется столбец с номером j' , для которого

$$(-c_{1k} + d_{2k}) + (c_{1j'} - d_{2j'}) \equiv 0 \pmod{N},$$

что и доказывает существование циклов длины 6. $\blacktriangle$

Теперь рассмотрим циклы длины 6 для ККЦ-МПП-кодов, приведенных в [5] и имеющих характеристические матрицы вида $C = [P|Q]$ и $D = [-Q^T|-P^T]$. Существование цикла длины $2k$ в графе Таннера, соответствующем характеристической матрице C , равносильно существованию цикла длины $2k$ в графе Таннера, соответствующем характеристической матрице D . Действительно, любое уравнение для цикла длины $2k$ из условия (1) для характеристической матрицы D можно получить, переписав уравнение для цикла длины $2k$ из (1) для характеристической матрицы C . Например, пусть $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ – подматрица матрицы C из ее первой части P , приводящая к циклу длины 4 в графе Таннера. Тогда соответствующее уравнение цикла длины 4 имеет вид

$$(c_{11} - c_{12}) + (c_{22} - c_{21}) \equiv 0 \pmod{N}.$$

Но согласно определению матрицы D ее вторая часть $-P^T$ содержит подматрицу $\begin{bmatrix} -c_{11} & -c_{21} \\ -c_{12} & -c_{22} \end{bmatrix}$. Применяя условие (1) к этой подматрице D , получаем выражение $(-c_{11} + c_{21}) + (-c_{22} + c_{12})$, преобразуя которое, видим, что

$$-[(c_{11} - c_{12}) + (c_{22} - c_{21})] \equiv 0 \pmod{N}.$$

Таким образом, граф Таннера ККЦ-МПП-кода с характеристической матрицей D содержит цикл длины $2k$ тогда и только тогда, когда граф Таннера ККЦ-МПП-кода с характеристической матрицей C содержит цикл длины $2k$. Согласно условию (1) и результатам работы [12] уравнения для циклов длины 6 для характеристической матрицы B имеют следующий вид, где $0 \leq e_i \leq N - 1$:

1. $(b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2}) + (b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_3}) + (b_{i_3 j_3} - b_{i_3 j_1}) = e_1$;
2. $(b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_3}) + (b_{i_2 j_3} - b_{i_2 j_2}) + (b_{i_3 j_2} - b_{i_3 j_1}) = e_2$;
3. $(b_{i_1 j_2} - b_{i_1 j_3}) + (b_{i_2 j_3} - b_{i_2 j_1}) + (b_{i_3 j_1} - b_{i_3 j_2}) = e_3$;
4. $(b_{i_1 j_3} - b_{i_1 j_2}) + (b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1}) + (b_{i_3 j_1} - b_{i_3 j_3}) = e_4$;
5. $(b_{i_1 j_3} - b_{i_1 j_1}) + (b_{i_2 j_1} - b_{i_2 j_2}) + (b_{i_3 j_2} - b_{i_3 j_3}) = e_5$;
6. $(b_{i_1 j_2} - b_{i_1 j_1}) + (b_{i_2 j_1} - b_{i_2 j_3}) + (b_{i_3 j_3} - b_{i_3 j_2}) = e_6$.

Каждое из этих шести уравнений соответствует одной из шести (3×3) -матриц, перечисленных в (2). Для записи циклов длины 6, связанных с характеристической матрицей с номерами столбцов j_1, j_2, j_3 , будем использовать следующее обозначение: $[[j_1, j_2, j_3], [e_1, e_2, \dots, e_6]]$.

Пример 1. Пусть $C = [c_{ij}]$ и $D = [d_{ij}]$ – характеристические матрицы ККЦ-МПП-кода, приведенного в [5], с $N = 7$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие циклы длины 6 для матрицы C такие:

$$\begin{aligned} &[[0, 1, 2], [4, 0, 1, 2, 0, 0]], \quad [[0, 1, 4], [0, 6, 0, 0, 3, 5]], \quad [[0, 2, 3], [5, 0, 3, 6, 0, 0]], \\ &[[0, 4, 5], [0, 2, 0, 0, 1, 4]], \quad [[1, 2, 5], [0, 5, 0, 0, 6, 3]], \quad [[1, 3, 5], [4, 0, 1, 2, 0, 0]], \\ &[[2, 3, 4], [0, 1, 0, 0, 4, 2]], \quad [[3, 4, 5], [5, 0, 3, 6, 0, 0]]. \end{aligned}$$

Любой нулевой элемент в векторе $[e_1, e_2, \dots, e_6]$ означает существование семи циклов длины 6 в графе Таннера, так как для этого графа $N = 7$. Таким образом, количество циклов длины 6 в графе Таннера, соответствующем матрице C , равно $24 \times 7 = 168$.

§ 4. $(3, n)$ -регулярные ККЦ-МПП-коды с $d_{\min} \geq 6$

Теперь рассмотрим некоторые графические структуры в графах Таннера, играющие ключевую роль в определении минимального расстояния МПП-кода. Эти графические структуры известны как *тупиковые множества* (trapping sets). *Тупиковым (a, b) -множеством* называется подграф графа Таннера, состоящий из a символьных вершин и соседних с ними проверочных вершин, b из которых имеют нечетную степень, а число проверочных вершин четной степени произвольно.

Известно, что код C имеет минимальное расстояние $d_{\min}$ тогда и только тогда, когда граф Таннера не содержит тупиковых $(a, 0)$ -множеств при $a < d_{\min}$ и при этом существует хотя бы одно тупиковое $(d_{\min}, 0)$ -множество. Для регулярного МПП-кода с обхватом не менее 6 и весом столбцов $m = 3, 4, 5, 6$ наименьший размер тупикового $(a, 0)$ -множества равен $a = 4, 5, 6, 7$ соответственно [13]. Таким образом, согласно сказанному выше, для (m, n) -регулярного МПП-кода с $m = 3, 4, 5$ и 6 имеем $d_{\min} \geq 4$, $d_{\min} \geq 5$, $d_{\min} \geq 6$ и $d_{\min} \geq 7$ соответственно. В общем случае нижней границей на минимальное расстояние (m, n) -регулярного МПП-кода с обхватом не менее 6 является $m + 1$ (см. [9]).

Согласно теореме 3 обхват всех (m, n) -регулярных ККЦ-МПП-кодов с $m \geq 3$ равен 6. Отсюда следует, что нижняя граница на минимальное расстояние этих кодов равна $m + 1$. Таким образом, для ККЦ-МПП-кода с $m = 3$ имеем $d_{\min} \geq 4$. Например, наличие тупиковых $(4, 0)$ -множеств в графах Таннера ККЦ-МПП-кода из примера 1 свидетельствует о том, что минимальное расстояние этого кода равно 4. Далее мы укажем подматрицы характеристических матриц из работы [5], приводящие к $(3, n)$ -регулярным ККЦ-МПП-кодам с $d_{\min} \geq 6$.

Пример 2. Пусть следующие матрицы $C = [c_{ij}]$ и $D = [d_{ij}]$ представляют собой характеристические матрицы ККЦ-МПП-кода из работы [5] с $N = 101$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 95 & 36 & 87 & 84 & 2 & 89 & 72 & 73 & 67 \\ 84 & 1 & 95 & 36 & 87 & 67 & 2 & 89 & 72 & 73 \\ 87 & 84 & 1 & 95 & 36 & 73 & 67 & 2 & 89 & 72 \\ 36 & 87 & 84 & 1 & 95 & 72 & 73 & 67 & 2 & 89 \\ 95 & 36 & 87 & 84 & 1 & 89 & 72 & 73 & 67 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 99 & 34 & 28 & 29 & 12 & 100 & 17 & 14 & 65 & 6 \\ 12 & 99 & 34 & 28 & 29 & 6 & 100 & 17 & 14 & 65 \\ 29 & 12 & 99 & 34 & 28 & 65 & 6 & 100 & 17 & 14 \\ 28 & 29 & 12 & 99 & 34 & 14 & 65 & 6 & 100 & 17 \\ 34 & 28 & 29 & 12 & 99 & 17 & 14 & 65 & 6 & 100 \end{bmatrix}.$$

Поскольку вес столбцов равен 5, минимальное расстояние не меньше 6. Каждая из этих характеристических матриц содержит 150 подматриц размера 3×3 с векторами $[e_1, e_2, \dots, e_6]$, содержащими только один нулевой элемент. Таким образом, количе-

ство циклов длины 6 в каждом графе Таннера равно $150 \times 101 = 15150$. Более того, матрицы C и D не имеют подматриц размера 3×10 , не содержащих циклов длины 6. Используя метод, предложенный в [14, теоремы 4, 6, 7], можно доказать, что любая (3×10) -подматрица матриц C и D с номерами строк

$$(i_1, i_2, i_3) \in \{(1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)\}$$

приводит к $(3, 10)$ -регулярному ККЦ-МПП-коду, граф Таннера которого не содержит тупиковых $(4, 0)$ -множеств, а значит, его минимальное расстояние не меньше 6. Если же выбрать три строки, отличные от указанных, то минимальное расстояние будет равно 4.

§ 5. Заключение

В статье исследованы графы Таннера ККЦ-МПП-кодов с точки зрения их коротких циклов и обхвата. Доказано, что любой (m, n) -регулярный ККЦ-МПП-код с $m \geq 3$ имеет обхват не менее 6 и минимальное расстояние $d_{\min} \geq m + 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wooters W.K., Zurek W.H. A Single Quantum Cannot be Cloned // Nature. 1982. V. 299. № 5886. P. 802–803. <https://doi.org/10.1038/299802a0>
2. Shor P.W. Scheme for Reducing Decoherence in Quantum Computer Memory // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. № 4. P. R2493–R2496. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.R2493>
3. Calderbank A.R., Shor P.W. Good Quantum Error-Correcting Codes Exist // Phys. Rev. 1996. V. 54. № 2. P. 1098–1105. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.1098>
4. Xie X., Yang J., Sun Q.T. Design of Quantum LDPC Codes From Quadratic Residue Sets // IEEE Trans. Commun. 2018. V. 66. № 9. P. 3721–3735. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2018.2827945>
5. Hagiwara M., Imai H. Quantum Quasi-cyclic LDPC Codes // Proc. 2007 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2007). Nice, France. June 24–29, 2007. P. 806–810. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2007.4557323>
6. Галлагер Р.Дж. Коды с малой плотностью проверок на четность. М.: Мир, 1966.
7. Postol M.S. A Proposed Quantum Low-Density Parity-Check Code. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0108131>, 2001.
8. Babar Z., Botsinis P., Alanis D., Ng S.X., Hanzo L. Construction of Quantum LDPC Codes From Classical Row-Circulant QC-LDPCs // IEEE Commun. Lett. 2016. V. 20. № 1. P. 9–12. <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2015.2494020>
9. Huang Q., Diao Q., Lin S., Abdel-Ghaffar K. Trapping Sets of Structured LDPC Codes // Proc. 2011 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2011). St. Petersburg, Russia. July 31 – Aug. 5, 2011. P. 1086–1090. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2011.6033698>
10. Fossorier M.P.C. Quasi-cyclic Low-Density Parity-Check Codes from Circulant Permutation Matrices // IEEE Trans. Inform. Theory. 2004. V. 50. № 8. P. 1788–1793. <https://doi.org/10.1109/TIT.2004.831841>
11. Amirzade F., Panario D., Sadeghi M.-R. Girth Analysis of Quantum Quasi-Cyclic LDPC Codes // Probl. Inf. Transm. 2024. V. 60. № 2. P. 71–89. <https://doi.org/10.1134/S0032946024020017>
12. Amirzade F., Sadeghi M.-R., Panario D. QC-LDPC Construction Free of Small Size Elementary Trapping Sets Based on Multiplicative Subgroups of a Finite Field // Adv. Math. Commun. 2020. V. 14. № 3. P. 397–411. <https://doi.org/10.3934/amc.2020062>
13. Amirzade F., Sadeghi M.-R. Analytical Lower Bounds on the Size of Elementary Trapping Sets of Variable-Regular LDPC Codes with Any Girth and Irregular Ones with Girth 8 // IEEE Trans. Commun. 2018. V. 66. № 6. P. 2313–2321. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2018.2805834>

14. *Amirzade F., Sadeghi M.-R., Panario D.* Construction of Protograph-Based LDPC Codes with Chordless Short Cycles // IEEE Trans. Inform. Theory. 2023. V. 70. № 1. P. 51–74. <https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3307583>

Амирзаде Фарзана (Amirzade, Farzane)

Школа математики и статистики,
Карлтонский университет, Оттава, Канада

Факультет математики и информатики,

Технологический университет имени Амира Кабира

(Тегеранский политехнический институт), Тегеран, Иран

farzaneamirzadedana@cunet.carleton.ca, famirzade@gmail.com

Панарио Даниэль (Panario, Daniel)

Школа математики и статистики,

Карлтонский университет, Оттава, Канада

daniel@math.carleton.ca

Садеги Мохаммад-Реза[✉] (Sadeghi, Mohammad-Reza)

Школа математики и статистики,

Карлтонский университет, Оттава, Канада

Факультет математики и информатики,

Технологический университет имени Амира Кабира

(Тегеранский политехнический институт), Тегеран, Иран

[✉]msadeghi@aut.ac.ir, msadeghi@math.carleton.ca

Поступила в редакцию

16.12.2023

После доработки

18.07.2024

Принята к публикации

29.08.2024

УДК 621.391 : 621.396.4 : 621.376

© 2024 г. А.С. Гвоздарев, Т.К. Артёмова, А.В. Морковкин

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВЫИГРЫША ОТ КОМПЕНСАЦИИ МНОГОЛУЧЕВОСТИ В УСЛОВИЯХ МНОГОПУТЕВОГО КАНАЛА С ДВУКРАТНЫМ РЭЛЕЕВСКИМ РАССЕЯНИЕМ И ЗАТЕНЕНИЕМ КОМПОНЕНТЫ ПРЯМОЙ ВИДИМОСТИ¹

Проведен анализ поведения величины коэффициента выигрыша от компенсации многолучевости (ВКМ) для беспроводной системы связи, функционирующей в условиях многопутевого распространения сигнала. В качестве модели канала была выбрана недавно предложенная модель с двойным рэлеевским рассеянием и флуктуирующей компонентой прямой видимости. Учитывая, что полученное в рамках исследования выражение для коэффициента ВКМ определяется типом модуляции, в статье рассматривается и проводится сравнительный анализ наиболее часто встречающихся на сегодняшний день модификаций квадратурной амплитудной модуляции с прямоугольной, гексагональной регулярной и нерегулярной формами сигнальных созвездий. Показано, что величина ВКМ при конечных отношениях сигнал-шум (ОСШ) может существенно превышать свое асимптотическое значение (определяемое при бесконечно возрастающем ОСШ). Обнаружена немонотонная зависимость ВКМ от размера сигнального созвездия (для любого типа созвездия): наибольшая величина коэффициента ВКМ для малых размерностей созвездий достигается при малом или умеренном значении ОСШ и чрезвычайно слабой или чрезвычайно сильной компоненте прямой видимости, для малых размерностей созвездий – при умеренном уровне компоненты прямой видимости.

Ключевые слова: теория связи, беспроводной канал, замирания, модуляция, вероятность ошибки.

DOI: 10.31857/S0555292324020025, **EDN:** PFPDZH

§ 1. Введение

Достижения в области беспроводных сетей связи (включая интернет вещей, сенсорные сети и т.д.) имеют решающее значение для формирования новых телекоммуникационных стандартов, таких как 5G/B5G/6G [1]. Однако при распространении беспроводного сигнала существуют такие отягчающие эффекты, как затухание и затенение, влияние которых особенно существенно в системах оптической связи в свободном пространстве (FSO) и в городских условиях [2]. В системах связи с многопутевым распространением сигнала такие эффекты обычно приводят к ухудшению качества и целостности сигнала вследствие интерференции в приемнике волн, распространяющихся по разным путям, что порождает увеличение частоты ошибок и вероятности сбоев в работе. Поскольку, как правило, эти события имеют случайную природу, увеличение интервала анализа (т.е. времени приема) или изменение

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-29-00516, <https://rscf.ru/en/project/24-29-00516/>).

относительного положения передатчика/приемника (т.е. изменение структуры отражения беспроводного канала распространения), возможно, приведет к улучшению качества сеанса связи. Если характеризовать это качество в терминах средней вероятности ошибки или средней вероятности прерывания сеанса связи, то для количественной характеристики потенциального повышения производительности системы (и следовательно, рекомендаций к действиям, которые его вызовут), можно использовать “выигрыш от разнесения” или “коэффициент разнесения” (diversity gain), понимаемый как выигрыш от компенсации многолучевости (ВКМ) вследствие изменчивости канала [3].

С 2003 г., когда в [3] была показана простота и универсальность коэффициента разнесения, он стал одним из основных показателей для оценки производительности систем беспроводной связи. Он описывает достижимое улучшение качества связи за счет улучшения условий многолучевого распространения, и поэтому зависит от модели многолучевого канала (через ее параметры), а также от модели сигнала [3]. Изначально он определялся как коэффициент наклона кривой вероятности ошибок в логарифмическом масштабе при стремлении среднего отношения сигнал/шум (ОСШ) к бесконечности (т.е. асимптотически), что не давало адекватного представления о производительности системы при конечном отношении сигнал/шум. Для решения этой проблемы была предложена концепция ВКМ с конечным ОСШ. Первоначально ВКМ, как и традиционный асимптотический выигрыш от компенсации многолучевости (АВКМ), вводился только для систем связи с несколькими входами и несколькими выходами (MIMO) с особым упором на решение компромиссной проблемы разнесения/мультиплексирования [4, 5]. Впоследствии этот подход был пересмотрен и обобщен и на случай одноэлементных (SISO) систем [6, 7], а сам показатель недавно получил новое название “operational diversity” [8] (рабочий выигрыш от разнесения). ВКМ можно определять в терминах вероятности ошибки [6], либо в терминах вероятности прерывания сеанса связи [5, 8]. В этой статье мы используем первый вариант.

Для конкретной модели канала выигрыш от разнесения выражается в терминах ее параметров. Среди различных моделей каналов с замираниями наибольшее внимание в настоящее время уделяется моделям с многократным рассеянием мощности [9]. Модель рэлеевского канала с двойным рассеянием и флуктуирующей компонентой прямой видимости (fluctuating double-Rayleigh with Line-of-Sight, fdRLoS) [10] – недавняя разработка, которая хорошо описывает как беспроводную радиочастотную, так и беспроводную оптическую связь. С ее помощью уже анализировались вероятность прерывания сеанса связи [10], средняя ошибка на бит [11], пропускная способность для различных схем адаптации [12], а также диапазоны изменения параметров канала, соответствующие различным режимам замираний [13].

На величину ВКМ также влияет структура распространяющегося сигнала, которая для однопользовательской связи без мультиплексирования по существу сводится к используемому на физическом уровне формату модуляции. Исследование проводится для одной из наиболее широко используемых модуляций – квадратурной амплитудной модуляции (КАМ; англ. – QAM) [14]. Развитие схем КАМ с целью дальнейшего повышения энергетической или спектральной эффективности привело к созданию довольно сложных разновидностей сигнальных созвездий КАМ [15, 16], включая так называемые гексагональные и нерегулярные. Процедуры обнаружения и анализа для них более сложны, чем для классического созвездия квадратной формы [14], поскольку преобразование символов в биты усложняется. Более того, хотя в случае классических каналов с замираниями сложные формы созвездий более выгодны (обеспечивая около 0,8 дБ ОСШ выигрыша для той же вероятности ошибки [14]), для некоторых классов сложных каналов этот выигрыш нивелируется или даже превращается в проигрыш [17].

В данном исследовании проводится сравнительный анализ ВКМ для модуляций QAM с регулярными и нерегулярными гексагональными созвездиями для fdRLoS-канала. Основные выводы из представленного материала можно сформулировать следующим образом:

- Получено и проанализировано точное выражение для ВКМ в зависимости от параметров fdRLoS-канала, типа и размера созвездия КАМ.
- С помощью численного моделирования установлен характер поведения ВКМ при изменении ОСШ, К-фактора Райса, коэффициента формы распределения затенения компоненты прямой видимости.
- Показано, что для ОСШ в диапазоне от низких до умеренных, чрезвычайно слабой или чрезвычайно сильной компоненты прямой видимости самый высокий ВКМ достигается при меньших сигнальных созвездиях, тогда как для компонент прямой видимости умеренной величины – при больших компонентах.
- Показано, что при всех реалистичных значениях параметров модели fdRLoS наиболее выгодной (с точки зрения ВКМ) формой сигнального созвездия QAM является нерегулярная шестиугольная, а наиболее неблагоприятной – классическая квадратная. В случаях же, когда модель вырождается в классическую двойную рэлеевскую, преимущество дает квадратное созвездие.
- Обнаружено, что ВКМ может в разы превышать значение АВКМ, и были определены сценарии, при которых это может произойти (например, максимум достигается в условиях слабого затенения и сильной компоненты прямой видимости).

Остальная часть статьи построена следующим образом: § 2 содержит основные аналитические результаты, некоторую информацию об используемых моделях канала и системы, формализует задачу получения показателей производительности, т.е. выигрыша от разнесения и его модификации для конечного ОСШ, а также средней вероятности ошибки на бит в качестве основы для оценки ВКМ; в § 3 представлены основные численные результаты и результаты моделирования, а также их анализ для различных условий распространения и сигнальных созвездий; в § 4 содержатся выводы.

§ 2. Общее описание задачи

2.1. Модель рассматриваемых сигналов и канала связи. Рассмотрим систему связи с одним передатчиком и одним приемником. Для описания процессов в канале будем использовать одну из новых обобщенных моделей беспроводных каналов – рэлеевский канал с двойным рассеянием и флуктуирующей компонентой прямой видимости (fdRLoS) [10].

В основе этой модели лежит ряд предположений об условиях распространения сигнала от передатчика к приемнику:

- Распространение сигнала является многолучевым, в сигнале можно выделить составляющую прямой видимости (соответствующую распространению по кратчайшему пути) и многопутевые составляющие (вызванные переотражениями от различных препятствий и/или неоднородностей среды распространения). Эта структура сигнала характеризуется К-фактором Райса k , т.е. соотношением мощностей волн прямой видимости и многолучевого распространения, при условии, что средние амплитуды этих компонент a_0 и a_2 соответственно.
- Кластеры многопутевых компонент формируются из доминантных и множественных диффузно рассеянных некоррелированных компонент, которые с достаточной точностью можно считать гауссовскими, поэтому наблюдается рэлеевское затухание как на путях от передатчика к отражателям (с канальным коэффициентом G_2), так и на путях от отражателей к приемнику (с канальным коэффициентом G_3). Здесь G_2 , G_3 считаются комплексными нормальными случайными

величинами с нулевым средним значением и нормированной единичной мощностью (т.е., $G_2, G_3 \sim \mathcal{CN}(0, 1)$).

- Компонента прямой видимости также характеризуется случайной фазой φ , которая из-за невозможности заранее предсказать местоположение приемника считается равномерно распределенной в диапазоне от 0 до 2π , и параметром затенения ξ . Предполагается, что он имеет гамма-распределение (с коэффициентом формы m), нормализованное так, что его мощность $\mathbf{E}[\xi^2]$ равна единице (а мощность всей компоненты прямой видимости $\mathbf{E}[\xi^2 a_0^2] = a_0^2$).
- В модели учитывается затенение только компоненты прямой видимости, поскольку затенение многопутевых компонент может быть проще описано различными условиями затухания в канале (например, изменениями в k).

С учетом всего вышеперечисленного математическая модель принятого сигнала имеет вид [10]

$$S = a_0 \sqrt{\xi} e^{j\varphi} + a_2 G_2 G_3, \quad (1)$$

где первое слагаемое соответствует компоненте прямой видимости, а второе – многопутевым компонентам с двойным рэлеевским рассеянием. Таким образом, модель канала имеет два параметра: К-фактор Райса k и параметр m , который управляет интенсивностью затенения компоненты прямой видимости – чем больше m , тем больше мощность сигнала на входе приемника.

Функция плотности вероятности мгновенного значения ОСШ γ имеет вид [10]

$$f(\gamma) = \int_0^\infty \frac{m^m (1 + k_x)}{(m + k_x)^m \bar{\gamma}_x} e^{-\frac{1+k_x}{\bar{\gamma}_x} \gamma} {}_1F_1 \left(m, 1, \frac{k_x (1 + k_x)}{k_x + m} \frac{\gamma}{\bar{\gamma}_x} \right) e^{-x} dx, \quad (2)$$

где $x = |G_3|^2$, $\bar{\gamma}$ – среднее значение ОСШ, $\bar{\gamma}_x = \frac{k+x}{k+1} \bar{\gamma}$, $k_x = \frac{k}{x}$, а ${}_1F_1(a, b, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Будем анализировать систему связи, использующую модуляцию из семейства квадратурных амплитудных модуляций (QAM), различающихся по форме и количеству точек M в сигнальном созвездии, образующем символ. Мы рассмотрим три типа модуляции QAM, которые доказали свою энергоэффективность: квадратная QAM (SQAM), регулярная и нерегулярная гексагональные QAM (RHQAM и IHQAM).

Форма сигнального созвездия определяется расположением точек созвездия на плоскости I - Q : в центрах одинаковых квадратов с идеально выровненными сторонами (SQAM) или правильных шестиугольников, образующих плотную компоновку (HQAM). Границы этих фигур определяют границы принятия решения для обнаружения полученного символа, а энергетическая эффективность различных схем модуляции, которые различаются по форме, зависит от расстояния между точками и размера области принятия решений вокруг каждой точки созвездия. Поскольку площадь для HQAM больше, чем для SQAM, HQAM более энергоэффективна [14], но конкретная разница в требуемых значениях ОСШ и достижимом ВКМ зависит от модели распространения и подлежит изучению, так как, с другой стороны, SQAM так популярна из-за простоты, допускающей использование для обнаружения простого алгоритма максимального правдоподобия. Регулярные и нерегулярные HQAM созвездия отличаются методом размещения точек созвездия на плоскости I - Q : при больших размерах созвездия IHQAM приближаются по форме к кругу, а RHQAM – к квадрату или кресту.

Будем предполагать, что в анализируемой системе связи реализована возможность адаптации модуляции к условиям распространения в канале, а именно: предусмотрена регулярная оценка состояния канала, на основе которой выбираются фор-

ма и размер сигнального созвездия в соответствии с каким-то критерием, например, максимума спектральной эффективности или поддержания постоянного ОСШ в канале.

Представляет интерес изучить как характер, так и величину влияния различных модуляций или перехода от одной модуляции к другой на ВКМ.

2.2. Выигрыш от компенсации многолучевости при конечном ОСШ. Зависимость средней вероятности ошибки $\bar{P}_{\text{er}}$ от среднего отношения сигнал/шум $\bar{\gamma}$ для высоких ОСШ является приблизительно линейной в двойном логарифмическом масштабе (т.е. наблюдается постоянная скорость уменьшения $\bar{P}_{\text{er}}$ с ростом $\bar{\gamma}$), поэтому при высоких ОСШ она может быть аппроксимирована прямой [3], т.е.

$$\bar{P}_{\text{er}}(\bar{\gamma})|_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \approx (G_C \cdot \bar{\gamma})^{-G_D^A}, \quad (3)$$

где G_C – “кодирование усиление” (coding gain), а асимптотическое по $\bar{\gamma}$ значение скорости уменьшения $\bar{P}_{\text{er}}$ (вычисляемое как производная) является традиционным асимптотическим выигрышем от компенсации многолучевости G_D^A , т.е.

$$G_D^A = - \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{d \lg \bar{P}_{\text{er}}(\bar{\gamma})}{d \lg \bar{\gamma}}. \quad (4)$$

АВКМ – параметр, значение которого можно предсказать заранее для теоретического сценария, при котором среднее ОСШ в канале стремится к бесконечности. На практике его можно получить при очень высоких ОСШ (50–70 dB [6]) на входе приемника, хотя типичные значения много меньше.

Для оценки свойств системы в динамике при типичных ОСШ, меняющихся в зависимости от условий распространения (в том числе замираний и затенения), можно использовать выигрыш от компенсации многолучевости (ВКМ, G_D) [5]:

$$G_D = - \frac{d \lg \bar{P}_{\text{er}}(\bar{\gamma})}{d \lg \bar{\gamma}}. \quad (5)$$

ВКМ – это значение скорости изменения вероятности ошибки из-за небольшого изменения ОСШ при работе с конечными ОСШ, этот параметр характеризует рабочую (мгновенную) чувствительность системы связи к изменениям условий работы канала при сохранении других параметров неизменными. Это условие для fdRLoS-канала подразумевает неизменность К-фактора Райса, что может произойти, например, из-за уменьшения мощности компоненты прямой видимости (числитель k) в результате изменения размера сигнального созвездия, сопровождающегося соответствующим уменьшением (в то же число раз) общей мощности многопутевых компонент (знаменатель равен k) из-за изменений в окружающей обстановке, приводящих к уменьшению количества путей.

2.3. Аналитическое описание коэффициента ВКМ для fdRLoS-канала. Для расчета ВКМ необходимо знать зависимость средней вероятности ошибки от ОСШ. Средняя вероятность ошибки на бит (ABER)

$$\bar{P}_{\text{er}} = \int_0^{\infty} P_{\text{er}}(\gamma) f_{\gamma}(\gamma) d\gamma \quad (6)$$

вычисляется на основе известной вероятности $P_{\text{er}}(\gamma)$. В свою очередь, $P_{\text{er}}(\gamma)$ зависит от типа модуляции и, как показано в [18], для когерентного приема может быть

аппроксимирована линейной комбинацией Q-функций Гаусса [19]:

$$P_{\text{er}} = \delta_1 \sum_{i=1}^{\delta_3} Q(\sqrt{2\delta_{2,i}\gamma}). \quad (7)$$

Параметры $\delta_1, \delta_{2,i}, \delta_3$ в формуле (7) определяют конкретную модуляцию (см., например, [14]). Отсюда

$$\bar{P}_{\text{er}} = \delta_1 \sum_{i=1}^{\delta_3} \int_0^{\infty} Q(\sqrt{2\delta_{2,i}\gamma}) f_{\gamma}(\gamma) d\gamma. \quad (8)$$

В [11] было получено выражение $\bar{P}_{\text{er}}$ для fdRLoS-канала в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{er}}(m, k, \bar{\gamma}) = & \delta_1 \sum_{i=1}^{\delta_3} \frac{\sin(\varepsilon m)}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_{\ell+n}}{(2)_{\ell+n} \ell! n!} \left(\frac{\varepsilon m(k+1)}{\bar{\gamma} \delta_{2,i} k + \varepsilon m(k+1)} \right)^{n+\varepsilon m} \times \\ & \times G_{0,1;1,1;1,1}^{1,0;1,1;1,1} \left(- \left| \begin{matrix} 1 - \varepsilon m - n \\ 0 \end{matrix} \right| \varepsilon m - n \left| \begin{matrix} \varepsilon m - \ell \\ 0 \end{matrix} \right| \frac{\varepsilon m \bar{\gamma} \delta_{2,i}}{\bar{\gamma} \delta_{2,i} k + \varepsilon m(k+1)}, \frac{\bar{\gamma} \delta_{2,i}}{k+1} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$G_{p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3}^{n_1, m_1; n_2, m_2; n_3, m_3} \left(\left(\begin{matrix} a_{p_1} \\ b_{q_1} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} a_{p_2} \\ b_{q_2} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} a_{p_3} \\ b_{q_3} \end{matrix} \right) \middle| x, y \right)$$

– расширенная обобщенная двумерная G-функция Мейера, определенная в соответствии с [20], $(\cdot)_{\ell+n}$ – символ Похгаммера [19], а ε позволяет получить единое выражение, справедливое и для целых, и для нецелых значений m , путем введения бесконечно малого сдвига Δ : $\varepsilon = 1$, если $m \notin \mathbb{Z}$, и $\varepsilon = 1 + \Delta$, если $m \in \mathbb{Z}$.

Выражение для средней вероятности ошибки на бит остается верным не только для целых m , но и для дробных, включая значения, меньшие единицы. Кроме того, как показано в [11], ряды в (9) очень быстро сходятся.

ВКМ возможно получить на основе выражения для $\bar{P}_{\text{er}}$. Классический АВКМ для системы связи с fdRLoS-каналом может быть выведен путем анализа асимптотического по ОСШ поведения $\bar{P}_{\text{er}}$ [11]:

$$\bar{P}_{\text{er}}|_{\gamma \rightarrow \infty} = \frac{\delta_1(k+1)}{4\bar{\gamma}} \Gamma(m) U\left(m; 1; \frac{k}{m}\right) \sum_{i=1}^{\delta_3} \frac{1}{\delta_{2,i}}, \quad (10)$$

где $U\left(m; 1; \frac{k}{m}\right)$ – функция Трикоми [19]. Так как $\bar{P}_{\text{er}}|_{\gamma \rightarrow \infty} \propto \bar{\gamma}^{-1}$, АВКМ для анализируемой системы равен 1, что означает, что вероятность ошибки на бит уменьшается в 10 раз при таком же увеличении $\bar{\gamma}$ независимо от значений параметров m , k и M . Форма сигнального созвездия также не влияет на величину АВКМ. Однако, как будет показано ниже, на практике важно, какую из модуляций предпочесть. Как видно из выражения для $\bar{P}_{\text{er}}$, реальный выигрыш, т.е. ВКМ, будет демонстрировать гораздо более сложную зависимость от параметров канала. Поэтому дальнейший анализ будет проведен на основе численного моделирования.

Для нахождения ВКМ в явном виде удобно переписать его следующим образом:

$$G_D = - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{P}_{\text{er}}} \frac{d\bar{P}_{\text{er}}(\bar{\gamma})}{d\bar{\gamma}}, \quad (11)$$

где для $\bar{P}_{\text{er}}$ используется выражение (9).

Чтобы получить производную от вероятности ошибки по среднему ОСШ, можно сначала выделить члены, зависящие от среднего ОСШ, и ввести следующие замены для простоты обозначения: $\xi_1 = \frac{\varepsilon m}{k}$, $\xi_2 = \frac{\delta_{2,i}}{k+1}$, $\xi_3 = \frac{\xi_1}{\xi_2}$. Тогда каждое слагаемое ВКМ с индексами ℓ и n будет пропорционально

$$\frac{d}{d\bar{\gamma}} \left\{ \left(\frac{\xi_3}{\bar{\gamma} + \xi_3} \right)^{n+\varepsilon m} G_{0,1;1,1;1,1}^{1,0;1,1;1,1} \left(- \left| \begin{matrix} 1 - \varepsilon m - n \\ 0 \end{matrix} \right| \varepsilon m - \ell \left| \begin{matrix} \xi_1 \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma} + \xi_3 \end{matrix} \right|, \xi_2 \bar{\gamma} \right) \right\}. \quad (12)$$

Для вычисления производной двумерной G-функции Мейера в (12) можно воспользоваться ее представлением в виде двойного интеграла Меллина – Барнса [20]. Производя дифференцирование под знаком интеграла, используя свойства гамма-функций [19] и сворачивая полученные выражения к функции Мейера, окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\bar{\gamma}} G_{0,1;1,1;1,1}^{1,0;1,1;1,1} \left(- \left| \begin{matrix} 1 - \varepsilon m - n \\ 0 \end{matrix} \right| \varepsilon m - \ell \left| \begin{matrix} \xi_1 \\ \bar{\gamma} + \xi_3 \end{matrix} \right| \bar{\gamma}, \xi_2 \bar{\gamma} \right) = \\ & = \frac{1}{(\bar{\gamma} + \xi_3)} G_{0,1;1,2;1,1}^{1,0;2,2;1,1} \left(- \left| \begin{matrix} 1 - \varepsilon m - n, 0 \\ 0, 1 \end{matrix} \right| \varepsilon m - \ell \left| \begin{matrix} \xi_1 \\ \bar{\gamma} + \xi_3 \end{matrix} \right| \bar{\gamma}, \xi_2 \bar{\gamma} \right) - \\ & - \frac{1}{\bar{\gamma}} G_{0,1;1,1;1,1}^{1,0;1,1;1,1} \left(- \left| \begin{matrix} 1 - \varepsilon m - n \\ 0 \end{matrix} \right| \varepsilon m - \ell \left| \begin{matrix} \xi_1 \\ \bar{\gamma} + \xi_3 \end{matrix} \right| \bar{\gamma}, \xi_2 \bar{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Наконец, выражение для ВКМ можно легко получить, объединяя полученные выражения (11)–(13).

§ 3. Моделирование и обсуждение результатов

Чтобы проверить корректность полученных выражений и изучить качество систем связи с различными формами сигнальных созвездий QAM, было проведено моделирование.

Моделирование проводилось для квадратурной амплитудной модуляции с тремя формами сигнального созвездия: прямоугольной (SQAM), регулярной гексагональной (RHQAM), нерегулярной гексагональной (IHQAM). Размер созвездия был равен степени 2 и изменялся от 16 до 256. Анализировался широкий спектр условий распространения сигнала в канале, соответствующий изменению значения К-фактора Райса k от -40 до 50 дБ и изменению параметра формы распределения затенения компоненты прямой видимости сигнала от $0,01$ до 50 . Среднее значение ОСШ в канале изменялось от 0 до 50 дБ.

На рис. 1 показано влияние К-фактора Райса на значения ВКМ, достижимые при различных условиях затенения (различных m), модуляции с малым размером созвездия ($M = 16$).

При значениях К-фактора Райса ниже определенного порога (при ОСШ около 20 дБ он равен приблизительно -16 дБ), ни k , ни коэффициент формы распределения затенения m не имеют влияния на величину ВКМ. Кривые ВКМ на рис. 1 сливаются в одну линию, параллельную оси k .

При $m \leq 1$ значения ВКМ меньше 1 для любых k . При $m > 1$ и $k > -14$ дБ ВКМ больше 1 и растет с ростом m . Следовательно, более частые события затенения уменьшают ВКМ.

Для канала с рэлеевскими замираниями выигрыш от компенсации многолучевости в классическом смысле равен 1. Поэтому в условиях, когда ВКМ меньше 1, распространение сигнала является более сложной задачей, чем в рэлеевском канале, и динамический ВКМ меньше или равен статическому (асимптотическому), что

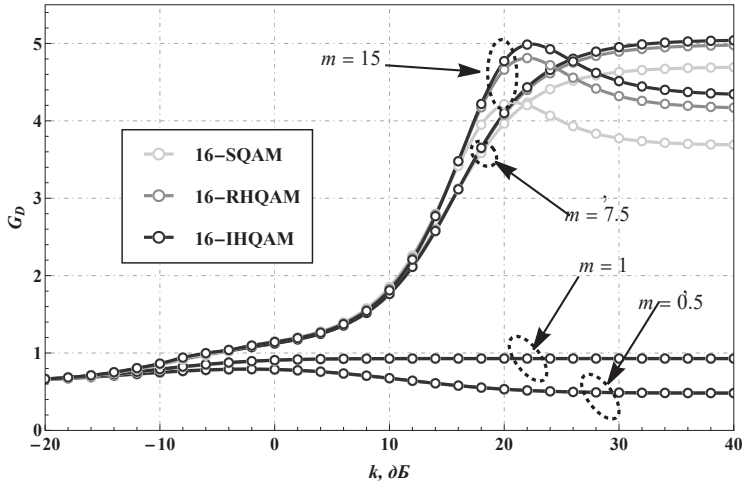


Рис. 1. Зависимость величины ВКМ от К-фактора Райса для модуляции 16-QAM с различными формами сигнала при $\bar{\gamma} = 20$ дБ

делает менее выгодным измерение параметров канала в режиме реального времени или адаптацию параметров системы (таких как размер сигнала M). Наоборот, когда ВКМ превышает 1, эти измерения и адаптация могут быть более эффективными и заслуживают усилий по их воплощению.

Кривые ВКМ демонстрируют насыщение при больших значениях k (приблизительно выше 35 дБ). Максимальный ВКМ при использовании исследуемых модуляций для $\bar{\gamma} = 20$ дБ достигается при $m = 7.5$ и 16-IHQAM и равняется 5,04. Регулярная гексагональная форма созвездия обеспечивает максимум ВКМ, равный 4,95, а квадратная форма (SQAM) – максимум 4,78. Следовательно, в этих условиях использование 16-IHQAM наиболее выгодно. Оно дает увеличение ВКМ на 0,27 по сравнению с 16-SQAM. Этот рост заслуживает внимания. Он означает, что если $\bar{\gamma}$ изменяется на 10 дБ и система изменяет одну форму созвездия на другую, то $\bar{P}_{\text{er}}$ изменяется в 2,7 раза. В условиях, когда параметр затенения $m = 15$, достижимый максимум ВКМ лежит в диапазоне 4,2–5,0, а смена модуляции оказывает эффект на ВКМ в размере не более 0,8. Следовательно, ВКМ уменьшается с уменьшением m , т.е. по мере того как условия распространения становятся более тяжелыми для компоненты прямой видимости, в то же самое время и эффект от смены SQAM модуляции на IHQAM падает. При m менее 5 кривые для различных форм созвездий визуально не отличаются.

Влияние параметра k на значения ВКМ, достижимые при различных модуляциях, показано на рис. 2 (при $m = 10$).

С ростом k ВКМ тоже непрерывно возрастает и, начиная с некоторого значения k_{th} ($k_{\text{th}} = 25\text{--}40$ дБ в зависимости от M , $\bar{\gamma}$ и формы сигнала M), достигает области насыщения. Это означает, что при достаточно больших k ($k \geq k_{\text{th}}$) никакие дальнейшие изменения условий распространения сигнала (которые приводили бы к росту отношения мощностей компоненты прямой видимости и многопутевых) не приводят к росту ВКМ. Иными словами, в этом случае нельзя снизить мощность передачи без потери производительности.

Пороговое значение k_{th} увеличивается с ростом сигнала M . Например, при $m = 10$ и $\bar{\gamma} = 20$ дБ, $k_{\text{th}} \approx 25$ дБ для $M = 256$, 26 дБ для $M = 64$ и 34 дБ для $M = 16$ (см. рис. 2,а).

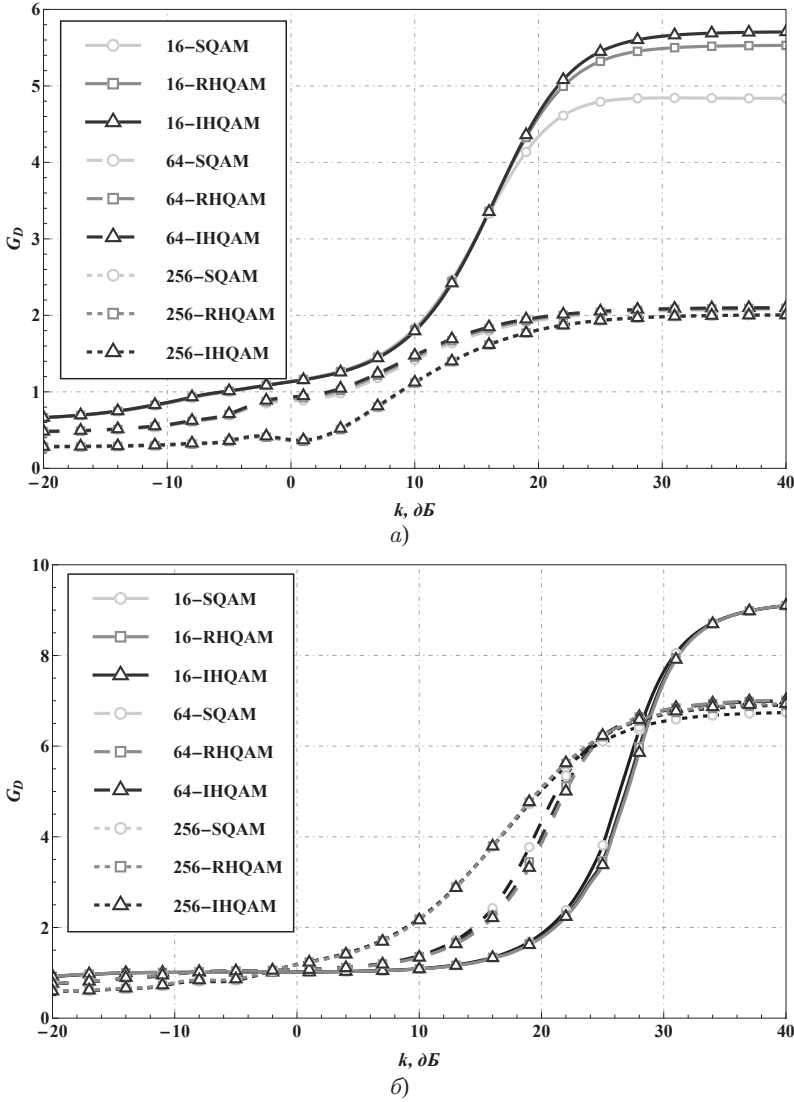


Рис. 2. Зависимость величины ВКМ от К-фактора Райса для $m = 10$: а) $\bar{\gamma} = 20$ дБ, б) $\bar{\gamma} = 30$ дБ

Достижимый максимум ВКМ зависит от нескольких факторов. Наибольшее влияние оказывает ОСШ. Оно влияет на порядок следования линий ВКМ(k) для различных значений M . Если среднее ОСШ ниже, чем $\bar{\gamma}_{\text{int}}$ (т.е. области значений ОСШ, около 20–30 дБ, в которой пересекаются графики вероятности ошибки на бит, полученные при различных условиях; см. [11]), то линии для M , равных 16, 64 и 256, не пересекутся (см. рис. 2,а, полученный при $\bar{\gamma} = 20$ дБ). С ростом M достижимые значения ВКМ уменьшаются. Однако если среднее ОСШ превышает порог $\bar{\gamma}_{\text{int}}$ (как показано на рис. 2,б, полученном для ОСШ около 30 дБ), ситуация принципиально меняется.

Существует узкий диапазон значений среднего ОСШ (около $k = -2,5$ дБ), при которых кривые ВКМ пересекаются для всех M . Также существуют точки, в которых кривые, соответствующие различным размерам сигнальных созвездий, пересекают-

ся попарно: кривые 64-QAM и 256-QAM пересекаются при $k = 24$ дБ, 64- и 16-QAM – при 24 дБ, 16- и 256-QAM – при 28,2 дБ. Наличие точек пересечения указывает на то, что когда условия распространения соответствуют вышеупомянутым значениям k , выбор M влияет на среднюю вероятность ошибки (т.е. на качество системы связи), но не на ВКМ, как показано на рис. 2,б. В точках пересечения порядок линий, соответствующих модуляции с различным размером сигнального созвездия M , меняется. Это показывает, что с ростом ОСШ эффект (в терминах ВКМ) от использования некоторого типа модуляции, который был ранее малым, становится значительным. Например, при $k = 10$ дБ рост $\bar{\gamma}$ с 20 до 30 дБ обеспечивает почти удвоение ВКМ при 256-хQAM, но при 16-хQAM – падение ВКМ почти в два раза.

Опираясь на этот рисунок, можно разбить весь диапазон условий распространения сигнала, описываемый с помощью k , на три зоны. В первой зоне, при $k \leq -2,5$ дБ (при $\bar{\gamma} = 30$ дБ) ВКМ меньше чем 1. Во второй зоне, при $k > -2,5$ дБ и далее, вплоть до точек пересечения между парами кривых, максимальные ВКМ дают крупные созвездия ($M = 256$). Наконец, в третьей зоне, при значениях k , больших наибольшей из абсцисс точек пересечения (что соответствует области значений k непосредственно перед началом области насыщения), характер влияния M возвращается к тому же, какой наблюдается в первой зоне. Следовательно, при малых значениях k (менее $-2,5$ дБ, т.е. слабой компоненте прямой видимости относительно многопутевых), или при больших значениях k (т.е. доминантной компоненте прямой видимости), меньшие сигнальные созвездия делают систему связи более чувствительной к изменениям $\bar{\gamma}$. Для промежуточных значений k (от $-2,5$ до 30 дБ), тот же самый эффект дают более крупные созвездия.

Описанные изменения во влиянии M на ВКМ происходят при значениях ОСШ, лежащих внутри диапазона от 20 до 30 дБ, в зависимости от параметра затенения (m). В отличие от такого различного характера влияния M на ВКМ, форма сигнального созвездия влияет одинаково, независимо от остальных параметров. Рис. 2 показывает, что среди трех проанализированных схем модуляции INQAM постоянно обеспечивает наибольший ВКМ, RИQAM находится на втором месте, и SQAM дает наименьшие значения. Однако разница (Δ) величин достигаемого ВКМ становится заметной, только начиная с некоторого значения k_{spl} , напрямую зависящего от M . Эти различия могут быть разной значимости для созвездий различного размера: пренебрежимо малыми (при размере созвездия $M = 256$), малыми и умеренными (при $M = 16$, например, $\Delta \leq 1$ при среднем ОСШ 30 дБ и не более 0,82 при $\bar{\gamma} = 20$ дБ), а также существенными (при $M = 64$, $\Delta \leq 0,15$ и 0,18 при ОСШ 20 и 30 дБ соответственно). У малых созвездий максимальная разница ВКМ наблюдается в третьей зоне, у больших – во второй, где значения ВКМ не столь велики.

Как можно видеть, с ростом среднего ОСШ величина Δ растет. Иными словами, INQAM делает систему связи более чувствительной к изменению $\bar{\gamma}$, чем другие модуляции, позволяя более эффективно использовать мощность передатчика.

Итого, форма сигнального созвездия оказывает существенное влияние на ВКМ в первую очередь при сильной компоненте прямой видимости (больших k), слабом затенении (больших m), высоких ОСШ ($\bar{\gamma} \geq 25$ дБ) и малых сигнальных созвездиях. При $M \geq 256$ и сильной компоненте прямой видимости выбор формы созвездия не имеет смысла, независимо от значений других анализируемых параметров системы.

Детали влияния параметра затенения m на ВКМ иллюстрирует рис. 3 (полученный для среднего ОСШ 20 дБ).

Сплошные линии показывают возможности низкоразмерной модуляции ($M = 16$). По мере увеличения m ВКМ быстро возрастает и затем, начиная с некоторого m_{th} , достигает области насыщения. То есть, дальнейшее уменьшение интенсивности затенения (или уменьшение числа событий затенения компоненты прямой видимости), соответствующие высоким значениям m , не оказывают влияния на ВКМ. При

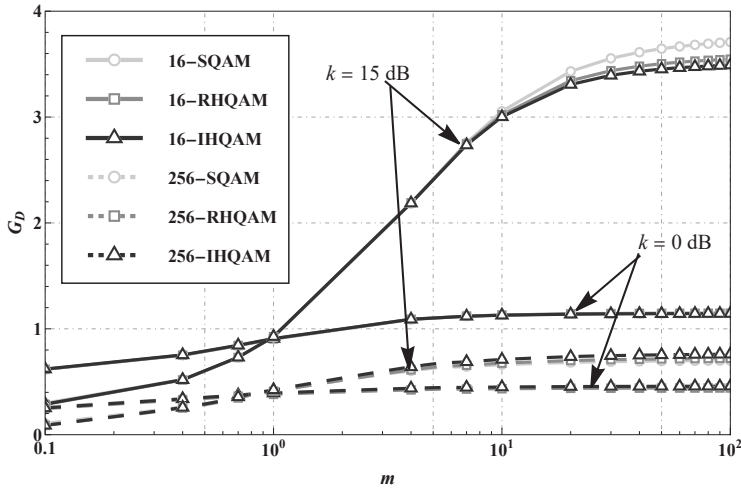


Рис. 3. Зависимость величины ВКМ от m при $\bar{\gamma} = 20$ дБ

$M = 16$ значения ВКМ в области насыщения равны 1,8 и 3,72 при $k = 0$ дБ и 15 дБ соответственно.

Модуляции высокой размерности (пунктирные линии на рис. 3) влияют на ВКМ в зависимости от значения параметров m и k . Когда мощности компонент прямой видимости и многопутевых сопоставимы (т.е. k около 0 дБ), существуют особые условия затенения, соответствующие m , при которых ВКМ достигает максимального значения (0,44). При дальнейшем уменьшении затенения влияние m исчезает, начиная с $m = 10$. В случае сильных компонент прямой видимости (при $k = 15$ дБ или более), ВКМ с ростом m растет на начальном участке очень постепенно, так что еще не достигает насыщения даже при $m = 50$. Таким образом, при такой структуре распространяющегося сигнала (соответствующей большим положительным значениям k), если условия затенения оказываются нестабильными (т.е. m изменяется), невозможно опираться на заранее спрогнозированные достижимые значения ВКМ из-за низкой точности такого прогноза. Кроме того, в этих условиях (практически дважды рэлеевский канал) SQAM дает несколько лучшие (на 0,3) результаты.

§ 4. Заключение

В исследовании изучалось влияние модуляции на ВКМ в условиях fdRLoS-канала. Было обнаружено, что при всех возможных на практике значениях параметров модели наиболее выгодная (в смысле наибольшего ВКМ) форма сигнального созвездия КАМ – это IHQAM. Анализ показывает, что для обеспечения эффективного использования выбранного размера созвездия важно иметь оценки параметров канала (m , k) и, что более важно, мгновенного ОСШ. В идеале и приемник, и передатчик должны иметь возможность адаптивно регулировать размер сигнального созвездия и реализацию модуляции на основе оценок качества работы сеанса связи в режиме реального времени. Полученные прогнозируемые значения ВКМ позволяют оценить чувствительность системы связи, работающей в fdRLoS-канале, к изменениям ОСШ в режиме реального времени.

Было обнаружено, что ВКМ может многократно превышать значения классического (асимптотического) выигрыша от разнесения, и были определены сценарии, при которых это может произойти.

Показано, что максимальная чувствительность системы достигается в условиях слабых замираний (высокие значения m) и сильной компоненты прямой видимости, в то время как в условиях слабой или даже пренебрежимо малой компоненты прямой видимости ВКМ системы связи приближается к асимптотическому значению, указывая на то, что система становится нечувствительна к изменениям условий распространения сигнала в реальном времени. Это говорит о том, что в таких случаях можно опираться на предварительно полученные прогнозы производительности системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Launay F.* NG-RAN and 5G-NR: 5G Radio Access Network and Radio Interface. Hoboken, NJ: ISTE/Wiley, 2021.
2. *Shankar P.M.* Fading and Shadowing in Wireless Systems. Cham, Switzerland: Springer, 2017.
3. *Wang Z., Giannakis G.B.* A Simple and General Parameterization Quantifying Performance in Fading Channels // IEEE Trans. Commun. 2003. V. 51. № 8. P. 1389–1398. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2003.815053>
4. *Narasimhan R.* Finite-SNR Diversity–Multiplexing Tradeoff for Correlated Rayleigh and Rician MIMO Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. № 9. P. 3965–3979. <https://doi.org/10.1109/TIT.2006.880057>
5. *Gvozdev A.S., Artemova T.K.* A Closed Form Analytic Expression for Massive MIMO Finite-SNR Diversity Gain in Case of Correlated Rayleigh Channels // Proc. 2017 Advances in Wireless and Optical Communications (RTUWO'17). Riga, Latvia. Nov. 2–3, 2017. P. 142–146. <https://doi.org/10.1109/RTUWO.2017.8228522>
6. *Gvozdev A.S., Artemova T.K.* Finite-SNR Diversity Gain Analysis of the Fluctuating Line-of-Sight Fading Channel Model // Proc. 2023 Int. Conf. on Engineering Management of Communication and Technology (EMCTECH 2023). Vienna, Austria. Oct. 16–18, 2023. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/EMCTECH58502.2023.10296937>
7. *Gvozdev A., Artemova T., Morkovkin A.* The Impact of Modulation Constellation Type on the Finite Signal-to-Noise Ratio Diversity Gain in the Presence of a Multipath Fading Channel // Probl. Inf. Transm. 2024. V. 60. № 2. P. 90–112. <https://doi.org/10.1134/S0032946024020029>
8. *Fernández S., Bailón-Martínez J.A., Galeote-Cazorla J.E., López-Martínez F.J.* Analytical Characterization of the Operational Diversity Order in Fading Channels. <https://arXiv.org/abs/2405.09336> [cs.IT], 2024.
9. *Durgin G.D., Rappaport T.S., de Wolf D.A.* New Analytical Models and Probability Density Functions for Fading in Wireless Communications // IEEE Trans. Commun. 2002. V. 50. № 6. P. 1005–1015. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2002.1010620>
10. *López-Fernández J., Espinosa P.R., Romero-Jerez J.M., López-Martínez F.J.* A Fluctuating Line-of-Sight Fading Model With Double-Rayleigh Diffuse Scattering // IEEE Trans. Veh. Technol. 2022. V. 71. № 1. P. 1000–1003. <https://doi.org/10.1109/TVT.2021.3131060>
11. *Gvozdev A.S.* Closed-Form and Asymptotic BER Analysis of the Fluctuating Double-Rayleigh with Line-of-Sight Fading Channel // IEEE Wireless Commun. Lett. 2022. V. 11. № 7. P. 1548–1552. <https://doi.org/10.1109/LWC.2022.3179900>
12. *Gvozdev A.S.* Capacity Analysis of the Fluctuating Double-Rayleigh with Line-of-Sight Fading Channel // Phys. Commun. 2022. V. 55. Article 101939. <https://doi.org/10.1016/j.phycom.2022.101939>
13. *Gvozdev A.S., Artemova T.K., Alishchuk A.M., Kazakova M.A.* Closed-Form Hyper-Rayleigh Mode Analysis of the Fluctuating Double-Rayleigh with Line-of-Sight Fading Channel // Inventions. 2023. V. 8. № 4. Article 87 (19 pp.). <https://doi.org/10.3390/inventions8040087>
14. *Singya P.K., Shaik P., Kumar N., Bhatia V., Alouini M.-S.* A Survey on Higher-Order QAM Constellations: Technical Challenges, Recent Advances, and Future Trends // IEEE Open J. Commun. Soc. 2021. V. 2. P. 617–655. <https://doi.org/10.1109/OJCOMS.2021.3067384>

15. Abdelaziz M., Gulliver T.A. Triangular Constellations for Adaptive Modulation // IEEE Trans. Commun. 2017. V. 66. № 2. P. 756–766. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2017.2762671>
16. Matos D., Correia R., Silva H.T.P., Silva H.S., Oliveira A.S.R., Carvalho N.B. On the Performance of Square, Rectangular, Star, and Hexagonal QAM for Backscatter Systems // IEEE Microw. Wirel. Technol. Lett. 2023. V. 33. № 1. P. 102–105. <https://doi.org/10.1109/LMWC.2022.3196587>
17. Gvozдарев A.S., Artemova T.K., Ermakov I., Manahov R., Mozzhukhin S., Veselkov A. Achievable Error Rate Reduction with Hexagonal QAM Constellations Over the Shadowed Fading Channels // Proc. 2024 26th Int. Conf. on Digital Signal Processing and Its Applications (DSPA'24). Moscow, Russia. Mar. 27–29, 2024. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/DSPA60853.2024.10510120>
18. Lu J., Letaief K.B., Chuang J.C.-I., Liou M.L. M-PSK and M-QAM BER Computation Using Signal-Space Concepts // IEEE Trans. Commun. 1999. V. 47. № 2. P. 181–184. <https://doi.org/10.1109/26.752121>
19. Olver F.W. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
20. Hai N.T., Yakubovich S.B. The Double Mellin–Barnes Type Integrals and Their Applications to Convolution Theory. Singapore: World Sci., 1992. <https://doi.org/10.1142/1425>

Гвоздарев Алексей Сергеевич[✉]

Артёмов Татьяна Константиновна

Морковкин Антон Владимирович

Кафедра интеллектуальных информационных
радиофизических систем, Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова, Ярославль

[✉]asg.rus@gmail.com

Поступила в редакцию

05.06.2024

После доработки

14.08.2024

Принята к публикации

30.08.2024

УДК 621.391.8

© 2024 г. В.Г. Бабилов, А.А. Галеев

ДИАГРАММЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ¹

Представлено исследование диаграмм статистической и спектральной сложности, которые играют важную роль в решении задач обнаружения слабых сигналов, их классификации. Сформулированы и доказаны леммы об оценке верхней и нижней границ на диаграммах статистической и спектральной сложности для различных сигнально-шумовых смесей. Полученные теоретические результаты верифицированы численными экспериментами, которые подтвердили эффективность теоретических оценок.

Ключевые слова: информационная энтропия, дискретное преобразование Фурье, спектральный дисбаланс, спектральная сложность.

DOI: 10.31857/S0555292324020037, **EDN:** UEEMFS

§ 1. Введение

Множество прикладных задач физики и техники, биологии и медицины связано с обнаружением слабых сигналов, детектируемых на фоне естественного шума [1–3]. Классические способы решения задачи обнаружения затрагивают в том числе вопросы классификации и используют дополнительную информацию о свойствах сигнала, а сама задача обнаружения требует различных подходов для формирования решения в трех основных случаях: шумы незначительно повреждают структуру искомого детерминированного сигнала, шумы и сигнал сравнимы по энергетике, шум значительно подавляет сигнал [1]. Так, решение задачи оптимальной фильтрации требует знания свойств сигнала: периодичности, полосы частот и др. [4]. Решение задачи различения двух гипотез опирается на лемму Неймана – Пирсона, определяет факт превышения оптимального порога при заданной вероятности ложной тревоги и требует оценки статистических свойств выборочных распределений шума и смеси сигнала и шума [5]. Решение задачи о разладке, т.е. задачи обнаружения спонтанного изменения вероятностных характеристик временного процесса, требует настройки алгоритма на изменение неизвестных статистических характеристик распределений шума и смеси сигнала и шума, так же как в задаче поиска аномалий [6]. Все перечисленные способы демонстрируют качественную и надежную работу при превышении сигнала над шумом, но при малых отношениях сигнал/шум или в тяжелой помеховой обстановке зачастую дают неверный ответ. Дополнительную сложность составляет тот факт, что зачастую требуется иметь возможность указывать наличие детерминированных сигналов как хаотического, так и регулярного происхождения, свойства которых при накоплении сигнала отличаются от свойств шума.

В монографии [7] констатируется, что в непараметрическом случае ни вид функции распределения вероятностей наблюдаемых данных, ни априорные плотности распределения вероятностей не известны. Обычный путь преодоления априорной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

неопределенности состоит в поиске статистик (т.е. некоторых функций исходной выборки), не зависящих от распределения вероятностей помехи в достаточно широких пределах.

Задача обнаружения сигнала традиционно сводится к задаче различения двух гипотез. Одна гипотеза связана с принятием решения о приеме только шума, другая – о приеме смеси полезного сигнала и шума. В качестве функции распределения статистики, отвечающей гипотезе о приеме только шума, можно использовать различные известные спектральные распределения, и на их основе формировать критерий для вторичной обработки. В свою очередь, в качестве функции распределения статистики, отвечающей гипотезе о приеме смеси полезного сигнала и шума, используются упорядоченные спектральные распределения $p = \{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Это подробно излагается в работе [8].

Ранние работы [2, 9], посвященные критерию статистической сложности на основе дивергенции Йенсена – Шеннона, показывали его эффективность при использовании в прикладных задачах по обнаружению хаотических сигналов в шуме. Затем в работах [10, 11] было установлено, что одним из лучших критериев для задачи обнаружения слабого сигнала в белом шуме является статистическая сложность на основе полной вариации меры со знаком:

$$C_{TV}(p) = -\frac{1}{4 \ln N} \left(\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \left| p_i - \frac{1}{N} \right| \right)^2.$$

Дополнительно к уже известным информационным характеристикам следует добавить к исследованию свойств так называемый спектральный дисбаланс D_S , вычисляемый относительно упорядоченного спектра p_i , $i = 1, \dots, N$, одного окна наблюдения, и спектральную сложность C_S [12] на его основе:

$$D_S(p) = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^N \left| p_k + \frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1} \right| \right)^2,$$

$$C_S(p) = -\frac{1}{4 \ln N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \ln p_k \right) \left(\sum_{k=1}^N \left| p_k + \frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1} \right| \right)^2,$$

где K_N – нормировочный множитель, близкий к единице и зависящий от N .

В задачах обнаружения требуется на основе информационных характеристик определить пороги, или, другими словами, значения информационных характеристик, которые свидетельствуют о наличии сигнала в шуме. В свою очередь, классификация сигналов может быть осуществлена на основании набора значений информационных характеристик. При этом необходимо учитывать, что информационные характеристики являются чувствительными к типу шума. Следовательно, до решения задачи классификации сигналов требуется исследовать диапазоны изменения информационных критериев C_{TV} , C_S при приеме разнообразных сигналов и различных сигнально-шумовых смесей [11–13]. Стоит отметить, что при исследовании информационных критериев в настоящей статье анонсируется и используется взаимно-однозначное соответствие между значениями информационных характеристик с одной стороны и дискретностью (под дискретностью понимается количество частот в сигнале) и энергией сигнала (энергетическая доля сигнала в сигнально-шумовой смеси) с другой стороны. Это дает возможность по-новому взглянуть на метод информационных диаграмм.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 вводится понятие определенного вида сигналов, исследуется область значений статистической и спектральной сложностей при примешивании к белому шуму этого типа сигналов различной энергии.

Далее, §3 посвящен анализу отдельных областей диаграмм сложностей для слабых и шумоподобных сигналов, а также анализу области расположения голубого шума. В заключении приводятся основные выводы и направления будущих исследований.

§ 2. Область значений информационных характеристик на диаграммах

Начнем с того, что отметим нечувствительность информационных характеристик, таких как энтропия, дисбаланс и сложность, вычисленных относительно равномерного распределения, к перестановке отсчетов спектра. Поэтому, чтобы определить область значений информационных характеристик, исследуем их свойства для различных упорядоченных спектральных распределений p_i , $i = 1, \dots, N$, одного окна наблюдения.

Проблема 1. Оценить верхнюю и нижнюю границы C_{TV} .

Определение 1. Сигнал, который состоит из d синусоидальных сигналов равной амплитуды, будем называть d -сигналом, а отдельные частоты этого сигнала будем называть дискретами.

Определение 2. Энергетической долей q сигнала будем называть отношение энергии сигнала к сумме энергий сигнала и шума в сигнально-шумовой смеси, и соответственно, $1 - q$ означает энергетическую долю шума.

Отношение сигнал/шум определим как

$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{q}{1 - q} \right).$$

Сигналы при отсутствии шума, когда $q = 1$, будем называть “чистыми”.

Здесь и далее будем предполагать, что частоты d -дискрет ω_d и размер окна T , где окном будем называть временной интервал сигнала, для которого производится дискретное преобразование Фурье (ДПФ), таковы, что выполняется условие $\forall \omega_d : 2\pi\omega_d T = r_d$, где $r_d \in \mathbb{N}$, $r_d < N/2$. Стоит сказать, что в результате такого предположения накладываются существенные ограничения на значения частот ω_d , но на практике это необходимо, чтобы в спектре d -сигнала, полученного посредством ДПФ, присутствовало d частот одинаковой амплитуды.

Введем два понятия: *диаграмма статистической сложности* и *диаграмма спектральной сложности*. Эти диаграммы строятся следующим образом: информационная энтропия отмечается по оси абсцисс, статистическая (спектральная) сложность – по оси ординат. В тексте данной статьи диаграмма статистической сложности обозначается через (S, C_{TV}) , и соответственно, диаграмма спектральной сложности – через (S, C_S) . При этом явную зависимость от распределения p будем опускать.

Предложение 1. Множество значений статистической сложности $C_{TV}^{(\max)}$ как функции информационной энтропии S для “чистых” d -сигналов является верхней границей множества значений на диаграмме статистической сложности (S, C_{TV}) для всех возможных сигнально-шумовых смесей.

Это предложение доказано в следующей лемме [11, лемма 4]:

Лемма 1. Максимум статистической сложности достигается на семействе распределений

$$\begin{cases} p_i = \frac{1 - p_{\max}}{K}, & \forall i = 1, \dots, K, \\ p_i = \frac{p_{\max}}{N - K}, & \forall i = K + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

где K , $p_{\max}$ – константы при фиксированном N .

Лемма 2 (о верхней и нижней границах C_{TV}). Верхняя граница статистической сложности $C_{TV}^{(\max)}$ d -сигнала определяется следующим соотношением:

$$C_{TV}^{(\max)} = S \cdot (1 - N^{S-1})^2. \quad (2)$$

Нижняя граница статистической сложности $C_{TV}^{(\min)}$ как функции от информационной энтропии S ,

$$S = -\frac{\ln(q^q(1-q)^{1-q}(N-1)^{q-1})}{\ln N}, \quad (3)$$

определяется следующим образом:

$$C_{TV}^{(\min)} = S \left(q - \frac{1}{N} \right)^2, \quad (4)$$

где q – энергия d -сигнала (состоящего из одной дискреты) в нормированном энергетическом спектре сигнально-шумовой смеси.

Доказательство представлено в работе [8]. ▲

Замечание 1. Как следствие оценки верхней границы получаем, что максимум функции $C_{TV}^{(\max)} \approx 0,567$ достигается при значении энтропии $S \approx 0,681$ и значении $d = 180$ ($N = 2048$). Оценка максимума верхней границы в случае $N = 2048$ совпадает с результатом в [11].

Замечание 2. Что касается нижней границы, то максимум функции $C_{TV}^{(\min)} \approx 0,186$ достигается при значении энтропии $S \approx 0,386$ и $q \approx 0,695$ ($N = 2048$).

Замечание 3. Выражение (3) для энтропии хорошо аппроксимируется полиномом второй степени. Для $N = 2048$ получаем следующее выражение ($R^2 = 0,999$):

$$S = 1 - 0,618 \cdot q - 0,382 \cdot q^2.$$

Замечание 4. Следующий полином с высокой точностью аппроксимирует зависимость минимальной границы $C_{TV}^{(\min)}$ от энтропии S ($R^2 = 0,9999$, $N = 2048$):

$$C_{TV} = 0,7345 \cdot S^4 - 0,607 \cdot S^3 - 1,079 \cdot S^2 + 0,9514 \cdot S.$$

На рис. 1 представлена графическая иллюстрация оценок верхней и нижней границы статистической сложности на диаграмме (S, C_{TV}) в зависимости от размера ряда N энергетического спектра сигнально-шумовой смеси.

Теперь перейдем к исследованию критерия C_S .

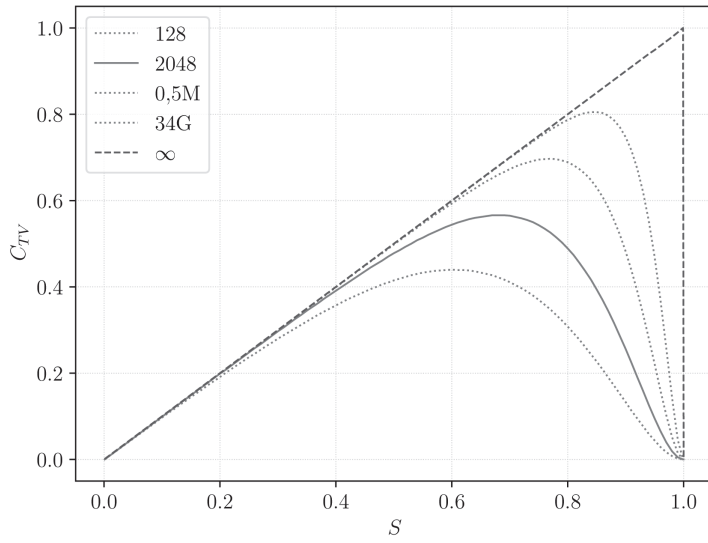
Проблема 2. Оценить верхнюю и нижнюю границы C_S .

Лемма 3 (о верхней и нижней границах C_S). Верхняя граница спектральной сложности $C_S^{(\max)}$ как функции от информационной энтропии S определяется следующим соотношением ($N = 2048$):

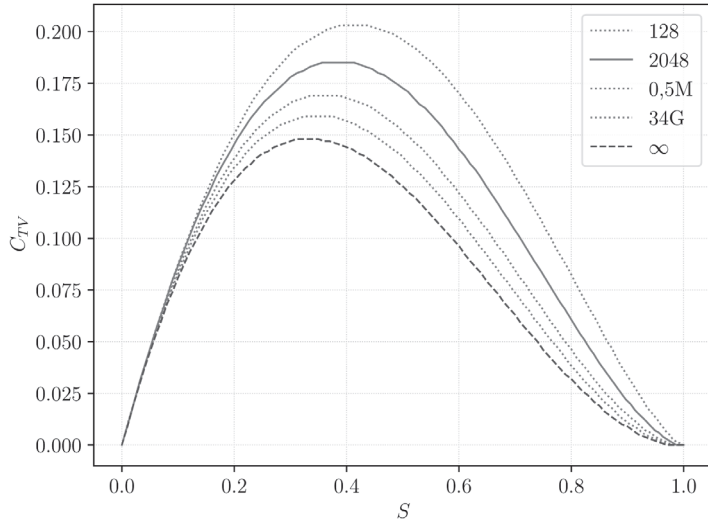
$$C_s^{(\max)} = 11,244 \cdot S^5 - 21,323 \cdot S^4 + 11,714 \cdot S^3 - 2,687 \cdot S^2 + 1,1868 \cdot S, \\ R^2 = 0,999.$$

Нижняя граница спектральной сложности $C_S^{(\min)}$ определяется следующей параметрической зависимостью:

$$S = S_0 \cdot (1 - q) - \frac{\ln(q^q(1-q)^{1-q})}{\ln N}. \quad (5)$$



(a) $C_{TV}^{(\max)}$



(б) $C_{TV}^{(\min)}$

Рис. 1. Зависимость верхней и нижней границы статистической сложности на диаграмме в зависимости от размера ряда N

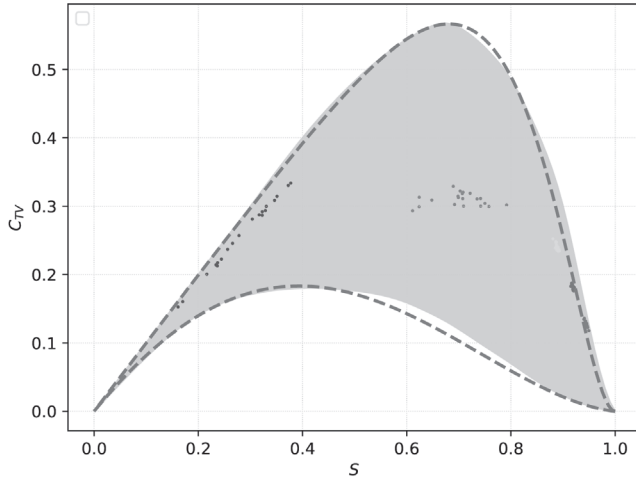
$$\text{где } S_0 \approx 0,9446 \left(S_0 \approx 1 + \frac{\gamma - 1}{\ln N}, N = 2048 \right),$$

$$D_S = \left(q + \frac{1+q}{2N \cdot K_N} (\ln(N+1) + 1) \right)^2,$$

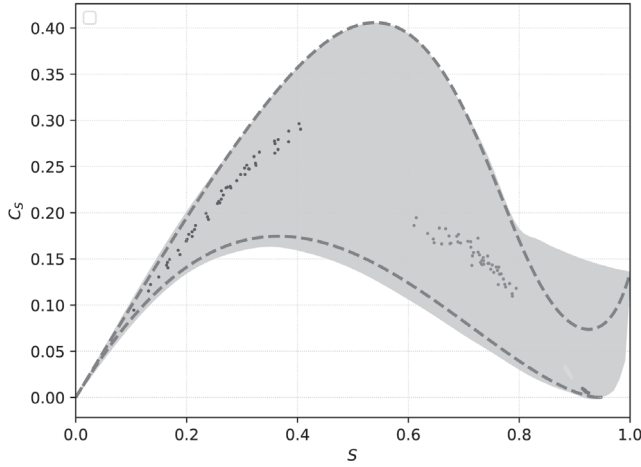
$$\text{где } K_N \approx 0,99818 \text{ (при } N = 2048),$$

$$C_S = S \cdot D_S.$$

Доказательство представлено в работе [8]. ▲



(a) Диаграмма (S, C_{TV})



(б) Диаграмма (S, C_S)

Рис. 2. Границы областей на диаграммах информационной сложности (пунктирная линия – иллюстрация леммы 2 и леммы 3, закрашенная область – численный эксперимент, перечисление слева направо: области коричневого, розового, фиолетового, голубого и белого шумов обозначены точками, $N = 2048$)

Таким образом, аналитически доказано и проиллюстрировано на рис. 2, что множество чистых d -сигналов дает оценку верхней границы области возможных значений на информационных диаграммах, а множество вариантов сигнально-шумовой смеси одиночной дискретности и δ -функции дает оценку нижней границы возможных значений на диаграмме статистической сложности, и наконец, множество вариантов сигнально-шумовой смеси одиночной дискретности и белого шума дает оценку нижней границы возможных значений на диаграмме спектральной сложности.

§ 3. Слабые сигналы, шумоподобные сигналы и характерные шумы

Рассмотрим область слабых сигналов и шумоподобных сигналов на диаграмме статистической сложности. Оказывается, что даже “чистые” шумоподобные сигна-

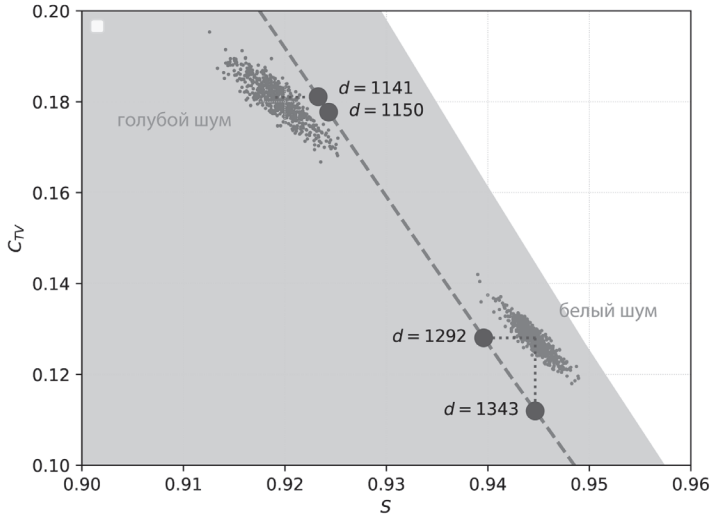


Рис. 3. Относительное расположение линии d -сигналов, белого и голубого шумов на диаграмме статистической сложности

лы (при больших значениях d) могут быть слабо различимы от белого или голубого шума на диаграмме (S, C_{TV}) (см. рис. 3). Далее сформулируем и докажем ряд лемм, связанных с расположением шумоподобных сигналов на информационных диаграммах, подробнее разберем случай, когда размер ряда $N = 2048$.

В целях решения задач обнаружения и классификации очень важно иметь представление о том, как ведет себя энтропия и статистическая сложность слабых и шумоподобных сигналов в окрестности белого шума. Известно [12], что для оценки математического ожидания информационной энтропии белого шума можно воспользоваться следующим выражением: $S_0 = 1 + \frac{\gamma - 1}{\ln N}$, а оценку математического ожидания статистической сложности белого шума соответственно можно получить так: $C_{TV} = \frac{S_0}{e^2}$ (эти оценки справедливы для больших N).

Замечание 5. Если информационная энтропия “чистого” шумоподобного сигнала равна математическому ожиданию энтропии белого шума, то выражение N^{S-1} не зависит от размера ряда N ($N^{S-1} = e^{\gamma-1} \approx 0,655734\dots$).

Действительно, обозначим $\nu = e^{\gamma-1} \approx 0,655734\dots$, где γ – константа Эйлера – Маскерони ($\gamma^2 \approx \frac{1}{3}$). Тогда (согласно [12]) в окрестности белого шума имеем

$$N^{S-1} = N^{1+\frac{\gamma-1}{\ln N}-1} = (N^{\frac{1}{\ln N}})^{\gamma-1} = \exp(\gamma-1) = \nu.$$

Рассмотрим смесь слабого d -сигнала и белого шума. Понятно, что положение такой смеси на диаграмме статистической сложности (S, C_{TV}) будет близким к области белого шума, но при этом имеет значение, в каком направлении от области белого шума находится точка, обозначающая положение рассматриваемой смеси на этой диаграмме. Множество возможных таких направлений образует некоторый угол на диаграмме статистической сложности вблизи области белого шума, и для решения задачи классификации слабых сигналов важна величина этого угла, конкретнее, разница максимального и минимального углов (рассматриваются углы между направлением до положения смеси d -сигнала и белого шума от положения белого шума и осью абсцисс) для d -сигналов на диаграмме (S, C_{TV}) , когда количество дискрет d

меняется от 1 до 1024 (или $N/2$) в области слабых сигналов (при $N = 2048$). Установим зависимость угла для $d = 1$ от N (минимальный угол) и зависимость угла для сигналов с большим количеством дискрет от N (максимальный угол).

Замечание 6 (оценка угла касательной для верхней границы). Тангенс угла наклона касательной к “чистому” d -сигналу на диаграмме статистической сложности (S, C_{TV}) в окрестности белого шума (а именно, когда $S_0 = 1 + \frac{\gamma-1}{\ln N}$) равен

$$\left. \frac{\delta C_{TV}^{(\max)}}{\delta S} \right|_{S_0, N} = (1 - \nu)^2 - 2\nu(1 - \nu) \ln(\nu N).$$

Замечание 7. Тангенс угла наклона касательной к “чистому” d -сигналу на диаграмме статистической сложности (S, C_{TV}) в окрестности белого шума при удвоении N меняется на величину $-2\nu(1 - \nu) \ln 2 \approx -0,31295 \dots$

Действительно, тангенс угла наклона касательной к “чистому” d -сигналу оценим по производной функции $C_{TV}^{(\max)}$ по S в окрестности точки $S_0 = 1 + \frac{\gamma-1}{\ln N}$.

Согласно лемме 2 и формуле (2) имеем

$$\left. \frac{\delta C_{TV}^{(\max)}}{\delta S} \right|_{S_0, N} = (1 - N^{S-1})(1 - (1 + 2S \ln N)N^{S-1}) = (1 - \nu)^2 - 2\nu(1 - \nu) \ln(\nu N).$$

Для $N = 2048$ получим следующее значение:

$$\left. \frac{\delta C_{TV}^{(\max)}}{\delta S} \right|_{S_0, N=2048} \approx -3,14,$$

что соответствует $72,3^\circ$.

Если сравнить тангенсы углов наклона касательной для $2N$ и N , то получим

$$\left. \frac{\delta C_{TV}^{(\max)}}{\delta S} \right|_{S_0, 2N} - \left. \frac{\delta C_{TV}^{(\max)}}{\delta S} \right|_{S_0, N} = -2\nu(1 - \nu) \ln 2 = -0,31295 \dots$$

Лемма 4 (окрестность белого шума для d -сигналов). Если информационная энтропия равна математическому ожиданию энтропии белого шума, то для “чистых” d -сигналов (много дискрет) значение дисбаланса $D_{TV} = (1 - \nu)^2$ не зависит от размера ряда энергетического спектра N .

Доказательство напрямую следует из (2) и леммы 2. ▲

Замечание 8. В окрестности белого шума для d -сигнала справедливо следующее:

$$C_{TV}^{(\max)} = (1 - \nu)^2 S \quad (\text{для } N = 2048, C_{TV}^{(\max)} = 0,1185S).$$

Замечание 9. Количество дискрет в “чистом” d -сигнале в окрестности белого шума (а именно, когда $S_0 = 1 + \frac{\gamma-1}{\ln N}$) определяется следующим соотношением:

$$d = N \exp(\gamma - 1) = \nu N \approx 0,656N \quad (\text{для } N = 2048, d = 1343).$$

Замечание 10. В окрестности белого шума значение статистической сложности для d -сигнала равно

$$C_{TV} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{\ln N}\right) (1 - \nu)^2,$$

отклонение от математического ожидания статистической сложности белого шума составляет

$$\Delta C_{TV} = \left(\frac{1}{e^2} - (1 - \nu)^2 \right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\ln N} \right).$$

При этом для $N = 2048$

$$C_{TV}|_{d=1343, N=2048} = 0,11288,$$

а отклонение от статистической сложности белого шума, соответственно,

$$\Delta C_{TV}|_{d=1343, N=2048} = -0,01555$$

(именно при $d = 1343$ в d -сигнале достигается уровень информационной энтропии, равный энтропии белого шума).

Значение статистической сложности, равное математическому ожиданию статистической сложности белого шума, достигается при энтропии

$$S = 1 + \frac{\gamma - 1}{\ln N} + \frac{\frac{1}{\ln N}(e^{-2}(1 - \nu)^{-2} - 1)}{\frac{1}{\ln(\nu N)} - \frac{2\nu}{1 - \nu}}.$$

Для $N = 2048$ получаем, что $S = 0,93965$, $d = 1292$ (именно при таком количестве дискрет в d -сигнале достигается уровень статистической сложности, равный C_{TV} , белого шума), а отклонение от энтропии белого шума

$$\Delta S|_{d=1292, N=2048} = -0,00496,$$

как показано на рис. 3.

Стоит сказать, что линия “чистых” d -сигналов также проходит около “зоны” голубого (морского) шума. Для справки при $N = 2048$, среднее значение энтропии для голубого шума $S = 0,91905$, а значение статистической сложности $C_{TV} = 0,18095$ соответствует d -сигналу при $d = 1141$. Частично “обелив” морской шум, можно “положить” его на d -линию, или, другими словами, существует такая смесь голубого (морского) и белого шумов, которая неотличима от чистого шумоподобного d -сигнала на диаграмме статистической сложности (информационные характеристики S, C_{TV} полностью совпадают). Отметим также, что уровни информационной энтропии и статистической сложности шумоподобного d -сигнала (при значениях $d = N \exp(-\gamma) = 1150$) очень близки к математическим ожиданиям информационной энтропии и статистической сложности для голубого шума (рис. 3).

Далее исследуем значения угла направления положения на диаграмме статистической сложности сигнально-шумовой смеси одиночной дискретности и белого шума по отношению к положению только белого шума. Для слабых сигналов, когда $q \approx 0,015 \dots$ (рассматриваем такие слабые сигналы, которые удастся обнаружить, т.е. при значениях SNR около -18 дБ), получаем оценку для S и D_{TV} (подставляя значения для q в формулу 4).

Для того чтобы найти угол, под которым изменяется положение сигнально-шумовой смеси одиночной дискретности и белого шума относительно положения белого шума на диаграмме статистической сложности, оценим следующие частные производные:

$$\frac{\delta S}{\delta q}, \quad \frac{\delta C_{TV}}{\delta q} = \frac{\delta(S \cdot D_{TV})}{\delta q} = \frac{\delta S}{\delta q} D_{TV} + \frac{\delta D_{TV}}{\delta q} S.$$

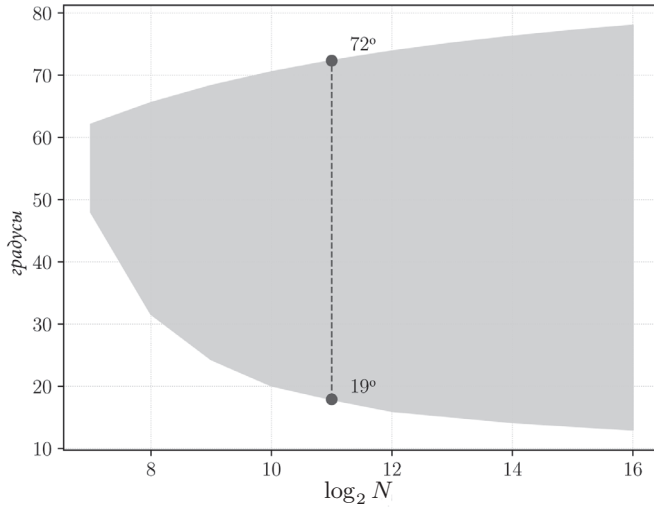


Рис. 4. Углы наклона касательных к $C_{TV}^{(\max)}$ (верхняя граница) и к кривой одиночной дискретности (нижняя граница) в окрестности белого шума в зависимости от $\log_2 N$

Согласно формуле (5) и выражению $S_0 = 1 - \frac{1-\gamma}{\ln N}$ для оценки энтропии белого шума, получаем:

$$\frac{\delta S}{\delta q} = \frac{1 - \gamma - \ln q}{\ln N} - 1.$$

В свою очередь, для статистического дисбаланса согласно [12] справедлива в первом приближении следующая оценка: $D_{TV} = e^{-2}$, в следующем приближении получаем $D_{TV} = e^{-2}(1 + 2(e - 2)q)$.

Тогда тангенс угла наклона касательной к кривой одиночной дискретности в области белого шума равен

$$\frac{\delta C_{TV}/\delta q}{\delta S/\delta q} = \frac{e^{-2} \left(\frac{1-\gamma-\ln q}{\ln N} - 1 + \left(1 - \frac{1-\gamma}{\ln N} \right) (2(e-2)) \right)}{\frac{1-\gamma-\ln q}{\ln N} - 1}. \quad (6)$$

При $N = 2048$, $q = 0,015$ значение тангенса угла наклона касательной приблизительно равно $-0,33$, что составляет примерно -19° .

Итак, для $N = 2048$ получаем оценку угла образованного множеством направлений: $72^\circ - 19^\circ = 53^\circ$. Для сравнения приведем расчеты для $N = 16384$. В этом случае предельные углы для большого количества дискрет и для единичной дискретности равны, соответственно, 76° и 13° . Угол, образованный множеством направлений, при $N = 16384$ равен примерно 63° (см. рис. 4).

§ 4. Заключение

Исследование в статье свойств двух информационных характеристик – статистической (C_{TV}) и спектральной (C_S) сложности – позволили дать теоретические и экспериментальные оценки области значений этих характеристик на диаграммах в зависимости от размера ряда N . Получена оценка угла между максимальной границей области значений статистической сложности C_{TV} (область шумоподобных сигналов) и линейной аппроксимацией области значений смеси одиночной дискретности

и белого шума (в области слабых сигналов). Эта величина, в свою очередь, является качественной оценкой функции C_{TV} для дальнейшей классификации слабых сигналов в условиях белого шума. Анализ диаграмм статистической сложности позволил установить местоположение на них шумов и шумоподобных сигналов.

Полученные результаты позволяют приблизиться к пониманию того, как можно использовать информационные методы в целях решения задач обнаружения и классификации слабых шумоподобных сигналов, наметить пути дальнейших исследований. В дальнейшем планируется детальнее изучить диаграммы статистической и спектральной сложности в целях решения задачи классификации и обнаружения сигналов в условии разного типа шумов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amigó J.M., Rosso O.A.* Ordinal Methods: Concepts, Applications, New Developments, and Challenges—In Memory of Karsten Keller (1961–2022) // *Chaos*. 2023. V. 33. № 8. P. 080401 (12 pp.). <https://doi.org/10.1063/5.0167263>
2. *Rosso O.A., Larrondo H.A., Martin M.T., Plastino A., Fuentes M.A.* Distinguishing Noise from Chaos // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. № 15. P. 154102 (4 pp.). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.154102>
3. *Horie T., Burioka N., Amisaki T., Shimizu E.* Sample Entropy in Electrocardiogram During Atrial Fibrillation // *Yonago Acta Med.* 2018. V. 61. № 1. P. 49–57. <https://doi.org/10.33160/yam.2018.03.007>
4. *Allen R.L., Mills D.W.* Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure. Piscataway, N.J.: IEEE Press, 2004.
5. *Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. М.: МЦНМО, 2020.
6. *Mehrotra K.G., Mohan C.K., Huang H.-M.* Anomaly Detection Principles and Algorithms. Cham: Springer, 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-67526-8>
7. *Богданович В.А., Вострецов А.Г.* Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. М.: Физматлит, 2004.
8. *Babikov V.G., Galyaev A.A.* Information Diagrams and Their Capabilities for Classifying Weak Signals // *Probl. Inf. Transm.* 2024. V. 60. № 2. P. 127–140. <https://doi.org/10.1134/S0032946024020042>
9. *López-Ruiz R.* Shannon Information, LMC Complexity and Renyi Entropies: A Straightforward Approach // *Biophys. Chem.* 2005. V. 115. № 2–3. P. 215–218. <https://doi.org/10.1016/j.bpc.2004.12.035>
10. *Berlin L.M., Galyaev A.A., Lysenko P.V.* Comparison of Information Criteria for Detection of Useful Signals in Noisy Environments // *Sensors*. 2023. V. 23. № 4. Art. 2133 (17 pp.). <https://doi.org/10.3390/s23042133>
11. *Галяев А.А., Лысенко П.В., Берлин Л.М.* Статистическая сложность как критерий задачи обнаружения полезного сигнала // *Автомат. и телемех.* 2023. № 7. С. 121–145. <https://www.mathnet.ru/rus/at16133>
12. *Галяев А.А., Бабиков В.Г., Лысенко П.В., Берлин, Л.М.* Новая спектральная мера сложности и ее возможности по обнаружению сигналов в шуме // *Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр.* 2024. Т. 518 (в печати).
13. *Sason I.* On f -Divergences: Integral Representations, Local Behavior, and Inequalities // *Entropy*. 2018. V. 20. № 5. Art. 383 (32 pp.). <https://doi.org/10.3390/e20050383>

Бабиков Владимир Георгиевич
Галяев Андрей Алексеевич
 Институт проблем управления
 им. В.А. Трапезникова РАН, Москва
 babikov@ipu.ru
 galaev@ipu.ru

Поступила в редакцию
 17.07.2024
 После доработки
 16.09.2024
 Принята к публикации
 18.09.2024

УДК 621.391 : 519.872

© 2024 г. А.Ю. Карамышев, Е.Д. Порай, Е.М. Хоров

**ОЦЕНКА ЕМКОСТИ СИСТЕМЫ СВЕРХНАДЕЖНОЙ СВЯЗИ
С НИЗКИМИ ЗАДЕРЖКАМИ С ПОМОЩЬЮ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ
МНОГОСЕРВЕРНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $G/G/s$ ¹**

Для анализа производительности беспроводных локальных и сотовых сетей, обеспечивающих сверхнадежную связь с низкими задержками, требуются методы быстрой и точной оценки эффективной емкости системы, т.е. того объема трафика, для которого удастся выполнить заданные требования к надежности и времени доставки. Эти методы могут использовать теорию массового обслуживания, например, моделируя систему связи как многосерверную систему массового обслуживания $G/G/s$. Однако существующие методы оценки показателей производительности системы $G/G/s$ обладают либо высокой вычислительной сложностью, либо высокой погрешностью в области малых значений задержки обслуживания, а также малых вероятностей испытать эту задержку. В статье исследуются приближенные методы оценки показателей производительности многосерверных систем $G/G/s$, потенциально применимых для оценки эффективной емкости системы сверхнадежной связи с низкими задержками. Предлагается метод оценки вероятности превысить ограничение на время пребывания в очереди, и численно показана его низкая ошибка. Также приведен асимптотический анализ метода, результаты которого могут быть полезны при реализации алгоритмов планирования радиоресурсов в беспроводных локальных и сотовых сетях.

Ключевые слова: аппроксимация, эффективная емкость, теория массового обслуживания, $G/G/s$, чувствительный к задержкам трафик, сверхнадежная связь с низкими задержками.

DOI: 10.31857/S0555292324020049, **EDN:** GLDKHC

§ 1. Введение

В последние годы активно развиваются приложения, требующие гарантированно высоких скоростей передачи данных, низких задержек и высокой надежности при доставке данных. Например, при использовании облачных приложений виртуальной реальности необходимо быстро и надежно доставлять большие объемы данных, чтобы избежать ухудшения качества восприятия передаваемого видеоизображения [1]. Другим примером являются сценарии индустриальной автоматизации, где для эффективной координации мобильных роботов требуется доставлять команды управления с крайне низкой задержкой почти без потерь [2].

Для обслуживания такого трафика со строгими требованиями к качеству обслуживания (Quality of Service, QoS) в системах сотовой связи пятого поколения (5G) вводится сервис сверхнадежной связи с низкими задержками (URLLC). Аналогично, в дополнениях IEEE 802.11be и IEEE 802.11bn к стандарту Wi-Fi предлагаются

¹ Исследование выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00756, <https://rscf.ru/project/23-19-00756/>

различные методы поддержки приложений реального времени и обеспечения сверх-высокой надежности доставки данных.

Особенностью указанных систем беспроводной связи является то, что за счет использования технологий множественного доступа с ортогональным частотным разделением (OFDMA) и многопользовательских многоантенных передач (MU-MIMO) одновременно в сети могут передаваться данные различных пользователей. Этот эффект еще сильнее увеличивается, когда базовые станции (точки доступа) координируют свои одновременные передачи для снижения взаимной интерференции, что является, например, одним из ключевых направлений развития сетей Wi-Fi 8.

Для эффективного планирования частотно-временных ресурсов, контроля доступа новых потоков в сеть (admission control), планирования сетевой инфраструктуры, разделения радиоресурсов между сервисами и виртуальными операторами требуется с высокой точностью определять объем ресурсов, который окажется достаточным для обслуживания трафика, требующего высокую надежность и низкие задержки (далее – трафика URLLC). Требования к качеству обслуживания такого трафика могут задаваться следующим образом: 99,999% пакетов должны быть доставлены не более чем за 1–10 мс [3, 4].

Для решения описанных задач могут использоваться математические модели, в том числе использующие методы теории массового обслуживания (ТМО) [5–10]. Отметим, что многим современным системам беспроводной связи, использующим частотно-временное разделение радиоресурсов, можно сопоставить многосерверную систему массового обслуживания, как показано в [5].

При этом доля заявок, обслуженная с не превышающей заданное ограничение задержкой, может быть определена в явном виде лишь для некоторых систем массового обслуживания, в то время как для остальных необходимы достаточно объемные вычисления [5]. Как результат, большую ценность имеет разработка аппроксимаций для оценки показателей производительности систем массового обслуживания. Известные из литературы аппроксимации имеют ряд серьезных недостатков при анализе сценариев обеспечения сверхнадежной связи с низкими задержками. Многие аппроксимации для систем массового обслуживания построены для оценки средней задержки и/или высоких значений вероятностей ($\gtrsim 0,1$) превысить ограничение на задержку в очереди, что делает их неприменимыми к анализу систем связи, в которых требуется обеспечить крайне низкие вероятности не выполнить ограничение на задержку.

Ряд авторов [8, 11, 12] строят аппроксимации для марковских систем, не соответствующих реальным системам связи. Наконец, некоторые методы, использующие аппарат ТМО, адаптированы к очень узким сценариям использования и обладают высокой вычислительной сложностью, например, [5], что делает их едва ли применимыми для расчетов в режиме реального времени.

В данной статье разрабатывается и исследуется приближенная формула для оценки эффективной емкости многосерверной системы массового обслуживания в области малых значений задержки обслуживания, а также малых вероятностей испытать эту задержку. В принятых обозначениях ТМО объектом исследования является многосерверная система $G/G/s$, где нотация G обозначает общий (general) вид распределения времени поступления и обслуживания заявок, а параметр $s \gg 1$ задает число обслуживающих устройств (серверов). Под эффективной емкостью здесь и далее понимается максимально достижимый объем трафика, который может быть обслужен в единицу времени при условии выполнения требований к качеству обслуживания.

Основной вклад статьи заключается, во-первых, в том, что в ней для системы $M/M/s$ исследуется точность приближенных методов оценки вероятности испытать задержку большую, чем некоторое малое ограничение по уровню низких вероятно-

стей ($\ll 0,1$), характерных для сценариев обеспечения сверхнадежной связи с низкими задержками. Во-вторых, строится аппроксимация эффективной емкости системы $G/G/s$, а также оценивается и анализируется точность оценки эффективной емкости при помощи этих аппроксимаций.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В § 2 содержится обзор литературы по теме как с технической, так и с математической стороны. В § 3 формулируется объект исследования и ставятся решаемые задачи. Затем в § 4 описываются идеи и процесс построения приближенных формул, а также предлагается их асимптотический анализ. После чего в § 5 осуществляется оценка и анализ точности разработанных аппроксимаций. Наконец, в § 6 представлены основные выводы статьи.

§ 2. Обзор литературы

2.1. ТМО как инструмент оценки производительности современных систем связи.

На протяжении более чем ста лет ТМО является одним из ключевых инструментов оценки производительности различных систем связи. Не являются исключением и современные системы сотовой связи 5G и беспроводные локальные сети Wi-Fi, несмотря на высокую сложность технологий заложенной в них логики работы и соответствующую громоздкость ее описания в виде формул.

Из-за применения частотно-временного разделения радиоресурсов обслуживание трафика в таких системах связи можно описать с помощью многосерверных систем массового обслуживания. При этом сервером является фундаментальная единица частотно-временных ресурсов – ресурсный блок, число которых может достигать сотен. Так, в работе [11] предлагается использовать системы массового обслуживания $M/M/s$ с конечной очередью для оценки пропускной способности системы 5G при обеспечении сверхнадежной связи с малой задержкой. Работа [7] предлагает оценивать среднюю задержку в системе 5G при помощи приближенной формулы для системы $G/G/s$. Для этого авторы адаптируют выражения для средней задержки в системе $M/M/s$, внося поправки, предложенные в [13]. Кроме того, работы [8, 12] предлагают при анализе систем сверхнадежной связи с низкими задержками пользоваться “правилом квадратного корня”, описанным подробно в п. 4.1 и основанным на асимптотическом поведении системы $M/M/s$.

2.2. Аппроксимации для анализа систем ТМО. Точное описание показателей производительности систем $G/G/s$ при помощи явных математических формул возможно только для некоторых частных случаев распределений, задающих поток поступления и процессы обслуживания заявок, например, для системы $M/M/s$. Как результат, достаточно распространенной является задача построения аппроксимаций для предсказания характеристик произвольных систем массового обслуживания. Эта область активно развивалась на протяжении XX века и продолжает развиваться в настоящее время.

Фокусируясь на построении аппроксимаций для систем $G/G/s$, выделим фундаментальные работы [14–16], благодаря которым рассматриваемый раздел теории массового обслуживания сформировался в его современном виде. В частности, в работе [14] для многосерверной системы $M/M/s$ сформулирована и доказана теорема о существовании предела вероятности испытать задержку пребывания в очереди, отличную от нуля, что позже в своей упрощенной формулировке превратилось в “правило квадратного корня” и вошло во множество учебников по стохастическим процессам и компьютерным наукам [17, гл. 19; 18, § 5.3]. Несмотря на то, что результат работы [14] был выведен для системы $M/M/s$, которая имеет решение в явном виде, эта работа стала основой для построения аппроксимаций более сложных систем.

Нельзя обойти вниманием и классические работы [19–22], многие выкладки и идеи которых стали ключевыми для построения аппроксимаций для систем $G/G/s$.

Наконец, выделим ряд современных работ [23–26], предлагающих доработку и переосмысление фундаментальных результатов. Так, например, работы [23, 24] расширяют область применения выкладок [14] на более широкий класс систем, например, $M/D/s$.

2.3. Открытые вопросы. Сверхнадежная связь с низкими задержками накладывает жесткие требования к качеству обслуживания, а именно: задержка может превышать малое пороговое значение крайне редко, например, с вероятностью 10^{-5} . Анализ событий, которые происходят с такой низкой вероятностью, оказывается чувствительным к изменению параметров системы, в том числе к подмене распределений поступления и обслуживания заявок. Поэтому применение выкладок для системы $M/M/s$ к произвольной системе $G/G/s$, например, как это сделано в работах [8, 11, 12], приводит к высокой ошибке при оценке показателей производительности: задержки, вероятности превысить ограничение на задержку, пропускной способности сети и т.д.

Вопрос построения аппроксимаций непосредственно для систем $G/G/s$ уже рассматривался в работах [16, 27–29], как и вопрос их применения к реальным технологиям связи [7, 13]. Однако все эти работы предлагают аппроксимации для оценки среднего времени пребывания в системе или для оценки вероятности испытать ненулевую задержку пребывания в очереди, а не для оценки вероятности того, что задержка пребывания заявки в очереди превысит заданный порог. Более того, точность оценки предлагаемых формул для низких вероятностей ($\ll 0,1$) испытать задержку также остается неисследованной.

Как результат, предложенные в литературе аппроксимации не позволяют получить достаточно точную оценку показателей производительности в условиях, характерных для сверхнадежной связи с низкими задержками. В частности, открытым является вопрос построения вычислительно простых аппроксимаций для систем $G/G/s$, подходящих для анализа производительности указанных выше систем связи.

§ 3. Объект исследования и постановка задачи

Объектом исследования является система массового обслуживания $G/G/s$, в которой поток поступления заявок задается функцией распределения времени между поступлениями заявок в систему, обозначаемой через $\mathcal{A}$ (arrival), а процесс обслуживания заявок определяется функцией распределения времени обслуживания заявки на сервере, обозначаемой через $\mathcal{S}$ (service). Эти распределения являются распределениями общего вида. Условимся, что времена обслуживания на каждом сервере одинаково распределены и независимы. Для описания системы используются классические для теории массового обслуживания обозначения: интенсивность поступления заявок $\lambda = 1/\mathbf{E}\mathcal{A}$, интенсивность обслуживания каждой заявки $\mu = 1/\mathbf{E}\mathcal{S}$ и коэффициент использования $\rho = \lambda/(\mu s)$. Кроме того, для упрощения формул воспользуемся популярным приемом и положим $\mu = 1$, перенормировав все остальные показатели системы на размерную часть μ .

Хотя параметры рассматриваемой системы и требования к качеству обслуживания трафика мотивированы системами сверхнадежной связи с низкими задержками, оговоримся, что точное описание реальной системы связи, например, системы сотовой связи 5G, требует построения более детальной модели массового обслуживания нежели $G/G/s$: со слотированной политикой обслуживания, конечной очередью и возможностью группового поступления заявок. Учет этих факторов, безусловно,

влияет на показатели производительности, однако выходит за рамки настоящей статьи и является предметом будущих исследований.

Рассмотрим время пребывания заявки в очереди (queueing time) $t_q = t_q(\lambda, s, \mathcal{A}, \mathcal{S})$, т.е. время пребывания заявки в системе за вычетом непосредственного времени обслуживания этой заявки. Нашей целью является построить и исследовать аппроксимации вероятности $\mathbf{P}(t_q > D)$ превысить ограничение D на время t_q . Вычисление данной вероятности является ключевым шагом на пути оценки введенной ранее эффективной емкости системы λ^* , которая математически определяется как

$$\lambda^* = \max\{\lambda \mid \mathbf{P}(t_q(\lambda, s, \mathcal{A}, \mathcal{S}) > D) \leq \varepsilon\}, \quad (1)$$

где D и ε – определяемые требованиями к качеству обслуживания ограничения на задержку и надежность, характерные значения которых – несколько средних времен обслуживания $1/\mu$ (несколько единиц, если $\mu = 1$) и 10^{-5} соответственно.

§ 4. Построение приближенных формул

4.1. Аппроксимации для системы $M/M/s$. Несмотря на то, что система $M/M/s$ является одной из немногих, для подсчета показателей производительности которой существуют точные математические формулы, логичным является начать рассмотрение аппроксимаций именно с этой системы. Такой порядок изложения во многом обусловлен исторической хронологией. Кроме того, экспоненциальные функции распределения времени, задающие процессы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$, являются одним из ключевых предельных предположений при построении более сложных аппроксимаций.

Предполагая процесс математического описания системы $M/M/s$ классическим, подробности которого можно найти, например, в [18, гл. 5], сошлемся лишь на один примечательный результат:

$$\mathbf{P}(t_q > D) = \mathbf{P}(t_q > 0)e^{-(s-\lambda)D}, \quad (2)$$

т.е. вероятность испытать задержку в очереди, большей D , при условии того, что задержка уже случилась, убывает экспоненциально с увеличением D .

Пусть $\Phi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ – функция и плотность стандартного нормального распределения соответственно. Тогда ключевой результат работы [14] формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1 [14]. Пусть $\lambda \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow \infty$, однако $\rho = \lambda/s < 1$, т.е. система стабильна. Для системы $M/M/s$ невырожденный предел (его значение заключено строго между 0 и 1) вероятности

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t_q(\lambda, s) > 0) = \left(1 + \frac{\beta\Phi(\beta)}{\varphi(\beta)}\right)^{-1} \triangleq \mathcal{HW}(\beta) \in (0, 1) \quad (3)$$

существует тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{s}(1 - \rho) \triangleq \beta > 0. \quad (4)$$

Данную теорему, а точнее условие (4), можно интерпретировать как руководство для оценки $\mathbf{P}(t_q > 0) \rightarrow \mathcal{HW}(\beta)$, где $\beta = \beta(\lambda, s) > 0$ – неявная функция, задающая соотношение между λ и s . При этом условие (4) допускает свободу в построении и выборе функции $\beta(\lambda, s)$, хотя и требует выполнения предельного соотношения.

Замечание 1. Если выбрать λ и s согласно формуле $s = \lambda + \beta_1\sqrt{s}$, $\beta_1 > 0$, то

$$\beta_1 = \frac{s - \lambda}{\sqrt{s}} = \sqrt{s}(1 - \lambda/s) = \sqrt{s}(1 - \rho),$$

т.е. условие (4) выполняется по построению. Следовательно, в пределе большого числа серверов и большой нагрузки $\mathbf{P}(t_q > 0) \rightarrow \mathcal{HW}(\beta_1)$.

Замечание 2. Поскольку для определения эффективной емкости (1) интерес представляет $\rho \rightarrow 1$, то условие (4) можно заменить на эквивалентное, домножив выражение $\sqrt{s}(1-\rho)$ на любую функцию от ρ , такую что ее предел равен 1 при $\lambda \rightarrow \infty$, например, $1/\sqrt{\rho}$. В частности, выбор параметров λ и s согласно $s = \lambda + \beta_2\sqrt{\lambda}$ дает

$$\beta_2 = \frac{s - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{s}(1 - \lambda/s)}{\sqrt{\lambda/s}} = \frac{\sqrt{s}(1 - \rho)}{\sqrt{\rho}}.$$

Таким образом, обеспечивается предел $\mathbf{P}(t_q > 0) \rightarrow \mathcal{HW}(\beta_2)$.

Соотношение $s = \lambda + \beta_2\sqrt{\lambda}$ называется “правилом квадратного корня” для выбора числа серверов [17, гл. 19]. В некоторых работах (см., например, [12]) вместо формулы (3) используют более простую:

$$\mathbf{P}(t_q > 0) \rightarrow \mathcal{HW}(\beta_2) \approx 1 - \Phi(\beta_2). \quad (5)$$

Отметим, что эта упрощенная аппроксимация хороша лишь для малой нагрузки. Однако для упрощенной формулы при $\rho \rightarrow 1$ оказывается, что

$$\mathbf{P}(t_q > 0) \rightarrow 1 - \Phi(0) = 1/2,$$

хотя система перестает быть стабильной и должно выполняться $\mathbf{P}(t_q > 0) \rightarrow 1$, что явно демонстрирует ошибку оценки вероятности испытать задержку.

Авторы [24] предлагают альтернативную формулу для $\beta(\lambda, s)$, обеспечивающую совпадение более высоких порядков разложения для $s \rightarrow \infty$, чем β_1 и β_2 :

$$\beta_{JLZ} \triangleq \sqrt{-2s \left(1 - \frac{\lambda}{s} + \log \left(\frac{\lambda}{s} \right) \right)} = \sqrt{-2s(1 - \rho + \log \rho)}.$$

Заметим, что для $\beta_1, \beta_2, \beta_{JLZ}$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \beta_{JLZ}^2 - \beta_1^2 &= 2s \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k} \geq 0, \\ \beta_2^2 - \beta_{JLZ}^2 &= s \sum_{k=3}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{k} \right) (1-\rho)^k \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\beta_1 \leq \beta_{JLZ} \leq \beta_2, \quad \forall \rho \in [0, 1),$$

т.е. β_{JLZ} в некотором смысле является промежуточным вариантом аппроксимации между β_1 и β_2 .

С учетом экспоненциальной зависимости от допустимой задержки D согласно (2) оценку искомой вероятности превзойти ограничение на время пребывания в очереди можно подсчитать как

$$\mathbf{P}(t_q(\lambda, s) > D) \approx \mathcal{HW}(\beta(\lambda, s))e^{-(s-\lambda)D}, \quad \beta(\lambda, s) \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_{JLZ}\}. \quad (6)$$

В заключение этого пункта отметим, что хотя эти формулы так или иначе встречались в литературе, исследование их сходимости в области малых значений задержки обслуживания, а также малых вероятностей испытать эту задержку, не проводилось. Это делается в п. 5.1 данной статьи.

4.2. Построение аппроксимация для системы $G/G/s$. Следуя наблюдению, отраженному в (2), вероятность $\mathbf{P}(t_q > D)$ можно описать в виде произведения двух множителей: первый из которых – оценка вероятности $\mathbf{P}(t_q > 0)$ испытать ненулевую задержку в очереди в принципе, а второй – множитель, отвечающий за скорость уменьшения размера непустой очереди. Так, разделяя построение аппроксимации для системы $G/G/s$ на две части, проанализируем каждую из них в следующих подразделах, после чего приведем итоговую формулу.

Оценка вероятности испытать ненулевую задержку в очереди. Рассмотрим систему $G/G/\infty$ (с бесконечным числом серверов) в предположении, что все серверы функционируют независимо и процесс обслуживания заявок не зависит от потока поступления пакетов.

В работах [15, 22, 30] показано, что если процесс поступления заявок в систему может быть приближен броуновским движением, то в пределе высокой нагрузки стационарное число заявок в системе Q может быть описано нормальным распределением $\mathcal{N}$ со средним λ и дисперсией λz :

$$Q \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda z), \quad (7)$$

где λ – среднее число активных серверов ($\mu = 1$),

$$z \triangleq 1 + (c_A^2 - 1)\eta_S,$$

$$\eta_S \triangleq (\mathbf{E} S)^{-1} \int_0^\infty (1 - F_S(t))^2 dt,$$

$$c_A^2 \triangleq \mathbf{Var} A / (\mathbf{E} A)^2 - \text{квадрат коэффициента вариации распределения } A, \\ F_S(t) - \text{функция распределения } S.$$

Данное утверждение означает, что асимптотическая дисперсия числа заявок в системе равна λz , т.е. отклонение числа заявок в системе Q от среднего значения λ составляет величину порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\lambda z})$ при больших значениях λ . Множитель изменения дисперсии z называется асимптотической “остроконечностью” (peakedness) распределения [15].

Применим предельное соотношение (7) для системы $G/G/s$ ($s \gg 1$) в предположении, что характер зависимости (7) сохранится для большого числа серверов. Обратим внимание, что ненулевая задержка в очереди означает, что число заявок в системе оказалось больше числа доступных серверов, т.е. $\mathbf{P}(t_q > 0) = \mathbf{P}(Q > s)$. Тогда с учетом того, что число заявок в системе $G/G/s$ можно приблизить нормальным законом с дисперсией, измененной на величину асимптотической “остроконечности” z , имеем:

$$\mathbf{P}(t_q > 0) = \mathbf{P}(Q > s) \approx \mathbf{P}(\mathcal{N}(\lambda, \lambda z) > s) = 1 - \Phi((s - \lambda)/\sqrt{\lambda z}) = 1 - \Phi(\beta_2/\sqrt{z}).$$

Сравнивая полученный результат с правой частью соотношения (5) для системы $M/M/s$ и осуществляя обратный переход к исходной формуле в (5), получаем для системы $G/G/s$, что

$$\mathbf{P}(t_q(\lambda, s) > 0) \approx \mathcal{HW}(\beta(\lambda, s)/\sqrt{z}),$$

где $\beta(\lambda, s)$ – функция, удовлетворяющая условию (4), однако теперь применительно к системе $G/G/s$.

Следуя [15], обратим внимание, что ключевой величиной для вычисления введенной поправки z в (7) является величина η_S , которая принимает значения от 0 до 1. При этом 0 соответствует бесконечной дисперсии процесса S , а 1 – случаю, когда

весь вес функции распределения времени обслуживания сосредоточен в одной точке, т.е. в случае вырожденного распределения. Если дисперсия времени обслуживания заявки возрастает, а среднее сохраняется, то η_S уменьшается.

Заметим, что вклад распределения времени обслуживания S в (7) зависит от знака $(c_A^2 - 1)$. Более того, система формально невосприимчива к виду распределения времени обслуживания S , если число поступающих в систему пакетов в единицу времени подчиняется пуассоновскому распределению ($c_A^2 = 1$), т.е. в случае системы $M/G/s$.

Оценка условной вероятности превысить допустимую задержку. Для описания нормированного числа заявок в системе $\hat{Q} = (Q - s)/\sqrt{s}$ известен предел высокой нагрузки для системы $G/G/s$ в условиях, аналогичных указанным в теореме 1 [14, 15]. В частности, в этих работах утверждается, что при условии $\hat{Q} > 0$ (т.е. при $Q > s$) дальнейшее изменение $\hat{Q}$ приближается броуновским движением с дискретным временем со средним (параметром сноса) $-\mu\beta$ и дисперсией (параметром диффузии) $\mu(c_A^2 + c_S^2)$. Для такого процесса справедливо, что

$$\mathbf{P}(\hat{Q} > x \mid \hat{Q} > 0) \approx e^{-\mu\beta x / (\mu(c_A^2 + c_S^2))} = e^{-x\beta/v}, \quad (8)$$

где $v \triangleq (c_A^2 + c_S^2)/2$ – коэффициент масштабирования броуновского движения.

В этом случае превышение числа заявок в системе над числом серверов $Q - s = x\sqrt{s}$, причем в среднем потребуется время D ($\mu = 1$), чтобы принять в обработку все накопившиеся на текущий момент заявки, т.е. $x(D) \approx D\sqrt{s}$.

Тогда из (8) получаем:

$$\mathbf{P}(t_q > D \mid t_q > 0) \triangleq \mathbf{P}(\hat{Q} > x(D) \mid \hat{Q} > 0) \approx e^{-x(D)\beta/v} \approx e^{-D\sqrt{s}\beta/v}. \quad (9)$$

Оговоримся, что область применимости предложенной аппроксимации ограничена [15, 16]. В частности, ожидается, что в случае чрезмерно больших значений дисперсий и/или большого дисбаланса между c_A^2 и c_S^2 , что усложняет переход к стационарному распределению, потребуются дополнительные улучшения аппроксимации, например, введение функции балансировки влияния между процессами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$. Поправка v мотивирована лишь первым порядком разложения характеристик системы по степеням $(1 - \rho)$, в то время как учет коэффициентов более высокого порядка потенциально мог бы существенно улучшить точность аппроксимации, однако вычисление этих коэффициентов для произвольной системы $G/G/s$ является достаточно сложной и все еще открытой задачей.

Замечание 3. Для системы $M/M/s$ имеем $c_A = c_S = 1 \Rightarrow v = 1$. В результате для $\beta = \beta_1(\lambda, s)$ формула (9) упрощается до уже известного соотношения (2).

Замечание 4. Поправка приближения для систем $G/G/s$ (9) согласуется с известными аппроксимациями для среднего времени ожидания в очереди для системы $G/G/1$, например, в [19].

Замечание 5. Соотношение (9) имеет ряд распространенных аналогов, например, экспоненциальную функцию затухания (exponential decay rate) в теории стохастических сетевых исчислений (stochastic network calculus) [31].

Итоговая аппроксимация для системы $G/G/s$. Объединяя проделанные выше результаты, получаем следующий метод оценки вероятности того, что задержка в очереди превысит пороговую $\mathbf{P}(t_q(\lambda, s, \mathcal{A}, \mathcal{S}) > D)$:

$$\mathbf{P}(t_q(\lambda, s, \mathcal{A}, \mathcal{S}) > D) \approx \mathcal{HW}(\beta(\lambda, s)/\sqrt{z}) e^{-D\sqrt{s}\beta(\lambda, s)/v}, \quad (10)$$

$$\mathcal{HW}(\xi) = \left(1 + \frac{\xi\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}\right)^{-1},$$

$$\beta(\lambda, s) \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_{JLZ}\} = \left\{ \frac{s-\lambda}{\sqrt{s}}, \frac{s-\lambda}{\sqrt{\lambda}}, \sqrt{-2s \left(1 - \frac{\lambda}{s} + \log\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right)} \right\},$$

$$z = 1 + (c_{\mathcal{A}}^2 - 1)\eta_{\mathcal{S}},$$

$$\eta_{\mathcal{S}} = (\mathbf{E} \mathcal{S})^{-1} \int_0^{\infty} (1 - F_{\mathcal{S}}(t))^2 dt,$$

$$v = \frac{1}{2} (c_{\mathcal{A}}^2 + c_{\mathcal{S}}^2),$$

$$c_{\mathcal{A}}^2 = \frac{\text{Var } \mathcal{A}}{(\mathbf{E} \mathcal{A})^2}, \quad c_{\mathcal{S}}^2 = \frac{\text{Var } \mathcal{S}}{(\mathbf{E} \mathcal{S})^2}.$$

Чтобы очертить область применимости полученной аппроксимации, явно выделим потенциальные проблемы данной формулы, которые вытекают из нарушений предположений, так или иначе использовавшихся при построении:

- нарушение предположения $s \rightarrow \infty$ ($s \gg 1$);
- нарушение предположения $\lambda \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow 1$);
- сильное различие между процессами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$ в терминах $c_{\mathcal{A}}^2$ и $c_{\mathcal{S}}^2$, т.е. $|c_{\mathcal{A}}^2 - c_{\mathcal{S}}^2| \gg 0$;
- чрезмерно большие значения коэффициентов вариации $c_{\mathcal{A}}^2$ и/или $c_{\mathcal{S}}^2$ [16];
- невозможность выполнения условий вывода z : малое число серверов и зависимые функции распределения времени обслуживания заявки на этих серверах.

Валидация приведенной аппроксимации в сценариях, характерных для сверхнадежной связи с малой задержкой, приведена в п. 5.2.

Заметим, что предложенная аппроксимация допускает свободу в выборе $\beta(\lambda, s)$; в § 5 даются рекомендации по выбору $\beta(\lambda, s)$ из числа сформулированных с целью повышения точности аппроксимации оценки эффективной емкости системы.

4.3. Асимптотический анализ построенной аппроксимации. Исследуем полученную приближенную формулу (10) применительно к вычислению эффективной емкости системы (1). Рассмотрим “резерв емкости” $\Delta \triangleq s - \lambda^*$, т.е. разницу между числом серверов и эффективной емкостью системы, при которой обеспечивается выполнение требований к качеству обслуживания, заданные параметрами D и ε .

Исследуем формулу (10) в следующих предельных предположениях:

- число серверов велико, т.е. $s \gg 1$;
- имеет место предел высокой нагрузки, т.е. $\Delta/s \rightarrow 0$, что эквивалентно $\rho \rightarrow 1$;
- величина допустимой задержки в очереди D мала, но $D > 0$.

Для предельного случая (4), т.е. $\mathbf{P}(t_q(\lambda^*, s) > D) = \varepsilon$, из (10) получим:

$$\log \varepsilon = \log \mathcal{HW}(\beta/\sqrt{z}) - \frac{D}{v} \sqrt{s} \beta. \quad (11)$$

Разложим каждую из функций составной формулы (11), пользуясь предположениями о большом числе серверов и высокой нагрузке, а также применяя разложения для функции $\Phi(\xi)$ и плотности $\varphi(\xi)$ стандартного нормального распределения:

$$\begin{aligned} \log \mathcal{HW}(\xi) &= -\log \left(1 + \frac{\xi \Phi(\xi)}{\varphi(\xi)} \right) = \\ &= -\log \left(1 + \frac{\xi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \left(\xi + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right) \right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\log \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \xi e^{\xi^2/2} + \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4) \right) = \\
&= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \xi - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \quad \xi \rightarrow 0; \\
&\xi = \beta/\sqrt{z} = \frac{\Delta}{\sqrt{sz}} (1 + \mathcal{O}(\Delta/s)), \quad \Delta/\sqrt{s} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

причем разложение для ξ справедливо для любой из функций $\beta \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_{JLZ}\}$.

Возвращаясь к исходному соотношению (11) и удерживая члены разложения вплоть до $\mathcal{O}(\Delta/\sqrt{s})$, имеем асимптотическую формулу:

$$-\log \varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{2sz}} \Delta + \frac{D}{v} \Delta + \mathcal{O}(\Delta/s).$$

Из этой формулы можно выразить

$$\Delta \approx \frac{-\log \varepsilon}{\sqrt{\frac{\pi}{2sz}} + \frac{D}{v}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\log \varepsilon \cdot \frac{v}{D}.$$

Заметим, что по построению $\Delta = s - \lambda^* \leq s$ (так как $\lambda^* \geq 0$), что может нарушаться в асимптотической формуле в случае экстремально малых D и/или малой нагрузки ρ . В качестве грубой поправки на это ограничение, перепишем искомое соотношение для Δ в виде

$$\Delta \approx \min \left\{ s, -\log \varepsilon \left(\frac{D}{v} + \sqrt{\frac{\pi}{2sz}} \right)^{-1} \right\} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\log \varepsilon \cdot \frac{v}{D}, \quad D > 0. \quad (12)$$

Альтернативным способом улучшения формулы в области малых s является разложение до более высоких порядков $\Delta/\sqrt{s}$, что может быть выполнено аналогично представленной процедуре, но уже потребует явного выбора вида функции β .

Полученное асимптотическое соотношение $\Delta = -\log \varepsilon \cdot v/D$ не зависит ни от s , ни от λ^* , что фактически означает, что любые зависимости эффективной емкости λ^* от s для $D > 0$ имеют линейную асимптоту при $s \gg 1$, параллельную прямой $\lambda^* = s$ и смещенную относительно этой прямой на величину Δ , зависящую только от требований к качеству обслуживания (параметров ε и D), а также от коэффициентов $c_{\mathcal{A}}^2$ и $c_{\mathcal{S}}^2$, которые определяются лишь первыми двумя моментами соответствующих распределений. В свою очередь это открывает возможность оценки требуемого числа обслуживающих устройств в зависимости от запрашиваемых значений $\{\lambda^*, D, \varepsilon\}$ при помощи линейной функции, простота вычисления которой является ключом к построению алгоритмов управления передачей данных, упомянутых в §1 и работающих в режиме реального времени.

Отдельно отметим, что существование линейной асимптоты эффективной емкости наблюдается и для других систем [5], более сложных, чем $G/G/s$, факт чего обсуждается при анализе численных результатов в §5.

§5. Численные результаты

Построенные в §4 аппроксимации валидируются с использованием дискретно-событийной платформы имитационного моделирования ns-3 [32]. Для этого в этой платформе реализован сетевой сценарий точка-точка со множеством каналов, полностью соответствующий математическому описанию системы $G/G/s$.

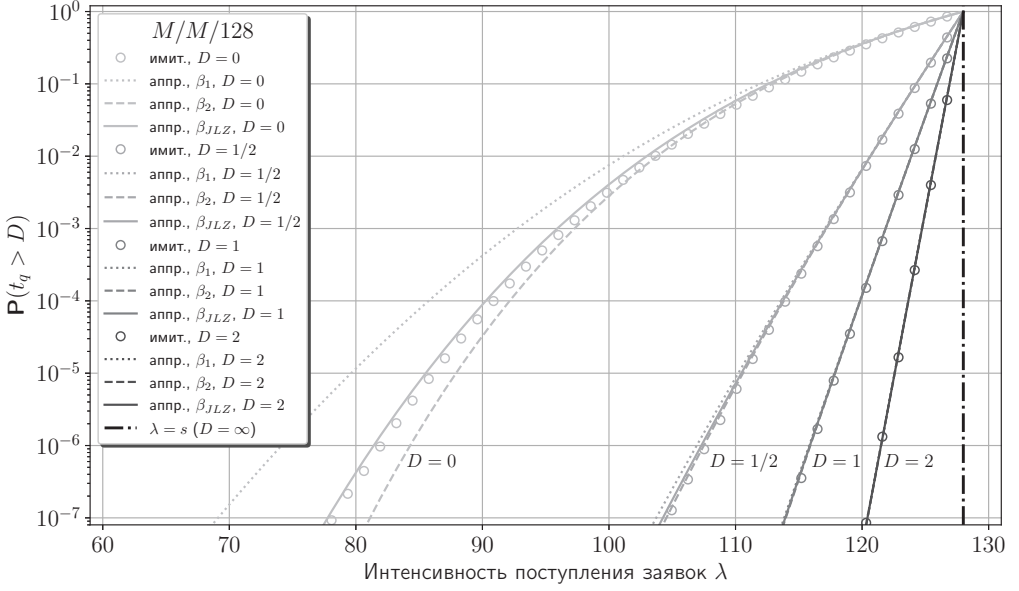


Рис. 1. Валидация приближенных формул (6) для системы $M/M/128$

5.1. Аппроксимации для системы $M/M/s$. На рис. 1 представлено сравнение рассмотренных в статье аппроксимаций (6) для системы $M/M/s$ с $s = 128$ серверами для различных ограничений на задержку в очереди D .

Данные, полученные при помощи имитационной модели, обозначаются в легенде как “имит.”, в то время как аппроксимации, отвечающие различным функциям $\beta(\lambda, s)$, имеют обозначение “аппр., β ”.

Результаты показывают сходимость всех трех вариантов выбора функции $\beta(\lambda, s)$ в области $\rho \rightarrow 1$, что согласуется с предельными соотношениями, в которых эти аппроксимации были построены. При этом в области умеренной нагрузки вариант β_{JLZ} показывает наилучшие результаты, с высокой точностью совпадая с имитационными результатами, что происходит благодаря более точному асимптотическому представлению пуассоновского распределения [24]. С ростом допустимой задержки D разница между аппроксимациями фактически исчезает за счет того, что система оказывается в области $\rho \rightarrow 1$.

В итоге, если система $M/M/s$ требует построения аппроксимации, рекомендуется использовать формулу (6) с вариантом

$$\beta_{JLZ} = \sqrt{-2s \left(1 - \frac{\lambda}{s} + \log \left(\frac{\lambda}{s}\right)\right)},$$

обеспечивающим малую ошибку приближения.

5.2. Аппроксимации для системы $G/G/s$. Чтобы исследовать точность аппроксимаций (10), рассмотрим системы $G/G/s$ с различными функциями распределения, задающими процессы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$ и представленными в табл. 1. Распределения имеют одинаковые средние значения $1/\lambda$ или $1/\mu = 1$ соответственно.

Поскольку система $D/D/s$ не является стохастической, она исключена из рассмотрения.

Таблица 1

Параметры тестовых распределений

Обозначение	Распределение	c^2	η
M	Экспоненциальное	1	1/2
U	Равномерное, $\max = 5 \cdot \min$	4/27	7/9
W	Вейбулл, модуль=1/2	5	1/4
D	Вырожденное	0	1

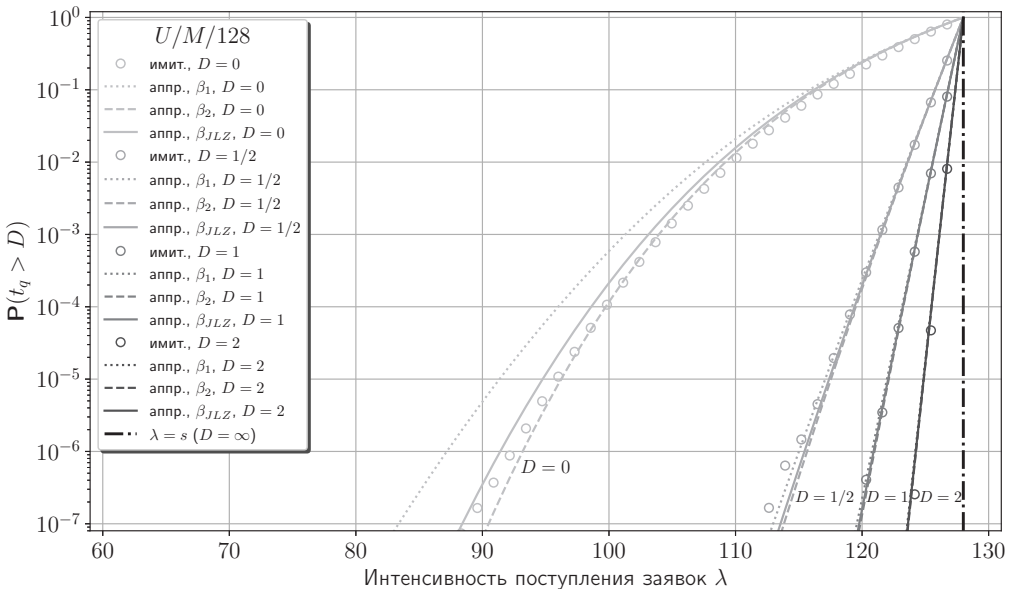
На рис. 2, 3 представлены примеры сравнения аппроксимаций для систем $U/M/s$ и $W/D/s$ при $s = 128$. Обратим внимание на то, что теперь β_2 показывает результаты, наиболее близкие к результатам имитационной модели, в особенности для $D > 0$. Это происходит из-за того, что неточности при аппроксимациях $\mathbf{P}(t_q > 0)$ и $\mathbf{P}(t_q > D \mid t_q > 0)$ для β_2 компенсируют друг друга, в то время как для других функций β ошибка аппроксимации обеих частей оценки вносит вклад одного знака, что увеличивает общую ошибку оценки искомой вероятности. Как результат, рекомендуется использовать аппроксимацию (10) в совокупности с $\beta_2 = (s - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ для систем $G/G/s$, обособляя случай системы $M/M/s$, для которого предпочтительным остается вариант формулы (6) с β_{JLZ} .

Поскольку одной из целей построения аппроксимаций (10) является оценка эффективной емкости системы, рассмотрим ошибку оценки λ^* для

$$\mathbf{P}(t_q > D) \leq \varepsilon = 10^{-5}.$$

Значения эффективной емкости λ^* , полученные при помощи имитационного моделирования и предложенной аппроксимации для различных значений D , представлены в табл. 2. Кроме того, в табл. 2 подсчитана относительная ошибка такого предсказания.

Отметим, что для рассмотренных распределений и параметров системы погрешность оценки не превышает 5,5%. Ошибка оценки эффективной емкости для $D \geq 1$

Рис. 2. Валидация приближенных формул (10) для системы $U/M/128$

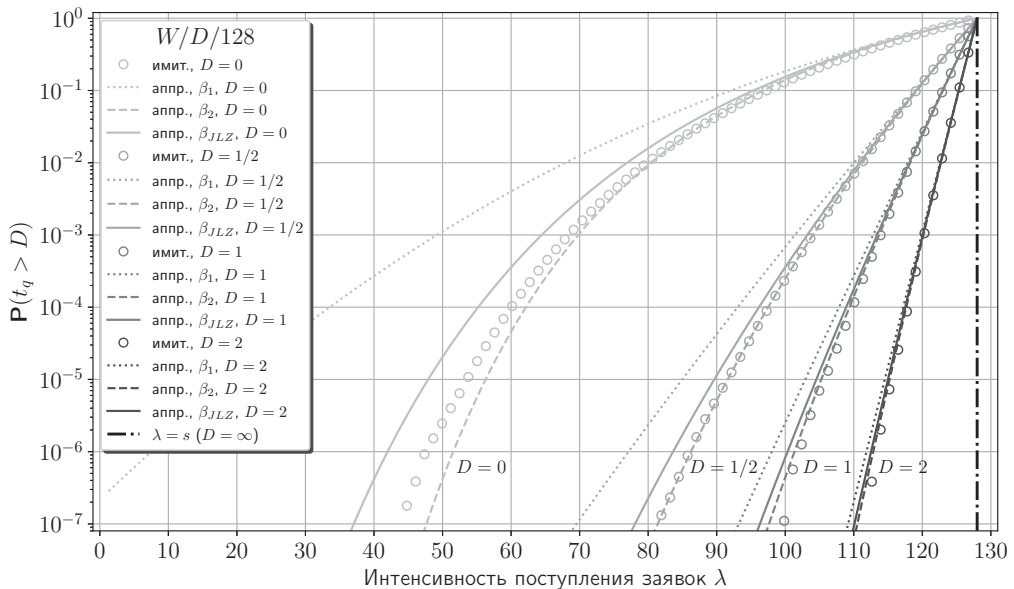


Рис. 3. Валидация приближенных формул (10) для системы $W/D/128$

вовсе не превышает 2%, что является остаточным эффектом конечной гранулярности сетки имитационного моделирования.

5.3. Асимптотическое поведение зависимостей эффективной емкости системы.

Наконец, убедившись в том, что построенные аппроксимации (10) могут быть использованы для оценки эффективной емкости λ^* с приемлемой ошибкой, обратимся к проверке асимптотических выкладок, сделанных в п. 4.3.

Рассмотрим систему $W/D/s$ и исследуем поведение кривых $\lambda^* = f(s | D)$ для $\varepsilon = 10^{-5}$. Обратим внимание, что аппроксимации для системы $W/D/s$ обладают одной из наибольших ошибок оценки эффективной емкости согласно табл. 2. Это происходит из-за крайне большой дисперсии входного потока: рассматриваемое распределение Вейбулла с модулем $1/2$ является классическим распределением “с тяжелыми хвостами” и высокой плотностью вероятности в нуле; а также из-за сильного дисбаланса между процессами поступления и обслуживания заявок, в частности, $|c_A^2 - c_S^2| = 5$, что является максимальным значением для рассматриваемых комбинаций распределений из табл. 1. Все это дает основание считать выводы, валидные для системы $W/D/s$, скорее пессимистичными относительно других систем $G/G/s$. Иными словами, закономерности, прошедшие проверку для системы $W/D/s$, можно считать справедливыми для крайне широкого класса систем $G/G/s$.

Кроме того, система $W/D/s$ идейно близка к опорному реальному объекту – системе сверхнадежной связи с малой задержкой, работающей по технологии 5G или Wi-Fi 7 с расписанием. Во-первых, для такого сценария характерно входное распределение времени между поступлениями заявок с высокой плотностью вероятности в нуле и “с тяжелыми хвостами” из-за преобладания низкоскоростных и надежных сигнально-кодowych конструкций, доставка пакетов на которых требует большого числа ресурсных блоков. Данные свойства также присущи распределению Вейбулла с модулем $1/2$. Во-вторых, в этом сценарии имеет слотированный характер работы системы, из-за чего возникает вырожденное распределение времени обслуживания заявки ресурсными блоками.

Валидация аппроксимации для оценки эффективной емкости системы $G/G/s$
 $\lambda^* = \max\{\lambda \mid \mathbf{P}(t_q(\lambda) > D) \leq \varepsilon = 10^{-5}\}$

Система	D	имит.	аппр., β_2	ошибка	Система	D	имит.	аппр., β_2	ошибка
$M/U/128$	0	86,3	87,9	1,9%	$W/M/128$	0	63,8	67,2	5,3%
	1/2	116,7	117,0	0,3%		1/2	90,8	91,0	0,2%
	1	122,1	121,9	-0,2%		1	103,0	103,1	0,1%
	2	124,9	124,8	-0,1%		2	113,1	113,3	0,2%
$M/W/128$	0	86,0	87,9	2,2%	$W/U/128$	0	57,4	60,5	5,4%
	1/2	101,0	99,3	-1,7%		1/2	92,2	91,9	-0,3%
	1	108,2	106,7	-1,4%		1	105,3	105,0	-0,3%
	2	115,0	114,4	-0,5%		2	115,6	114,9	-0,6%
$M/D/128$	0	86,2	87,9	2,0%	$W/W/128$	0	72,0	75,4	4,7%
	1/2	118,1	118,2	0,1%		1/2	89,8	87,7	-2,3%
	1	122,7	122,6	-0,1%		1	98,3	96,6	-1,7%
	2	125,2	125,2	0,0%		2	107,7	107,0	-0,6%
$U/M/128$	0	95,8	96,2	0,4%	$W/D/128$	0	53,5	56,2	5,0%
	1/2	117,1	117,5	0,3%		1/2	91,6	91,6	0,0%
	1	122,1	122,1	0,0%		1	105,6	105,2	-0,4%
	2	125,0	124,8	-0,2%		2	115,5	115,2	-0,3%
$U/U/128$	0	103,1	102,8	-0,3%	$D/M/128$	0	98,0	98,0	0,0%
	1/2	124,8	124,8	0,0%		1/2	118,6	118,7	0,1%
	1	126,4	126,3	-0,1%		1	122,9	122,8	-0,1%
	2	127,2	127,1	-0,1%		2	125,3	125,2	-0,1%
$U/W/128$	0	90,6	91,6	1,1%	$D/U/128$	0	108,3	107,1	-1,1%
	1/2	104,1	102,5	-1,5%		1/2	126,3	126,3	0,0%
	1	110,3	109,3	-0,9%		1	127,2	127,1	-0,1%
	2	116,2	116,2	0,0%		2	127,6	127,5	-0,1%
$U/D/128$	0	110,6	110,6	0,0%	$D/W/128$	0	91,5	92,4	1,0%
	1/2	126,4	126,3	-0,1%		1/2	104,9	103,1	-1,7%
	1	127,2	127,1	-0,1%		1	110,9	109,7	-1,1%
	2	127,5	127,5	0,0%		2	116,5	116,5	0,0%

На рис. 4 представлены зависимости эффективной емкости системы λ^* ($\varepsilon = 10^{-5}$) от числа обслуживавших устройств s для различных значений D . В частности, сравниваются кривые, полученные при помощи имитационного моделирования, с аппроксимациями, посчитанными по формуле (10) с β_2 . Кроме того, для демонстрации асимптотического характера построенных зависимостей рис. 4 содержит асимптоты (12) для $D > 0$ и $\rho = \lambda^*/s > 1/2$, обозначенные “асимпт.” в легенде.

Рис. 4 показывает, что предложенные аппроксимации обладают умеренной ошибкой для различных значений числа серверов s , в особенности для $D \geq 1$. Также результаты демонстрируют, что зависимости $\lambda^* = f(s \mid D)$ для $D > 0$ действительно имеют линейную асимптоту, параллельную прямой пропорциональности, как и предсказывалось в п. 4.3. Смещение данных асимптот неплохо предсказывается формулой (12) в случае $D > 1$ и большого числа серверов s . При этом, как правило, ограничение на допустимое время задержки в очереди составляет от единиц до нескольких десятков времен обслуживания [33], т.е. практические запросы быстрой оценки эффективной емкости системы оперируют с $D > 1$.

Наконец, отметим, что выведенный линейный эффект справедлив для гораздо более широкого класса систем, нежели $G/G/s$. Так, например, в работе [5] сделаны аналогичные наблюдения для детализированной модели 5G системы. Это дает надежду на то, что разработанные аппроксимации и их асимптотики окажутся крайне полезны для реализации различных легковесных алгоритмов планирования в широком классе реально существующих систем связи.

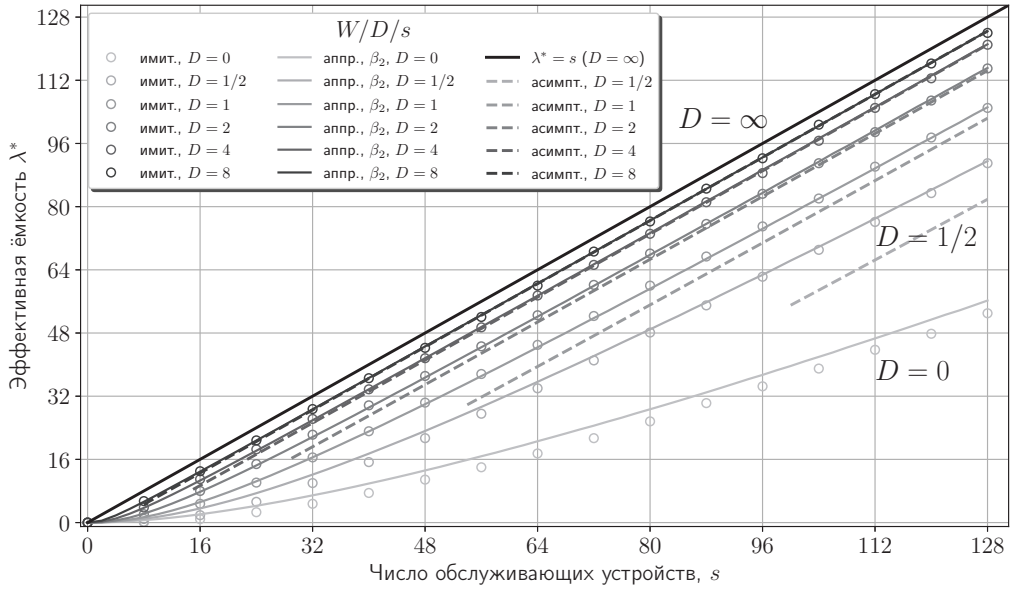


Рис. 4. Асимптотический характер зависимости эффективной емкости λ^* от числа обслуживающих устройств s на примере системы $W/D/s$, $\varepsilon = 10^{-5}$

§ 6. Заключение

В данной статье производится разработка и исследование аппроксимаций для оценки эффективной емкости многосерверных систем $G/G/s$ с акцентом на применимости этих аппроксимаций в условиях сценариев со строгими требованиями к качеству обслуживания трафика.

В частности, описан процесс построения универсальной приближенной формулы для оценки вероятности превысить ограничения на время пребывания в очереди для произвольной системы $G/G/s$. Аппроксимации этой вероятности являются ключевым шагом при оценке эффективной емкости системы, т.е. объема трафика, который можно обслужить, удовлетворив требования к качеству обслуживания, заданные в виде ограничений на задержку и надежность доставки данных. Приводится оценка точности построенной аппроксимации для широкого класса систем $G/G/s$ в области малых значений задержки обслуживания, а также малых вероятностей испытать эту задержку. На основании полученных численных результатов сделан вывод, что предложенные приближенные формулы показывают высокую точность при оценке вероятности превысить заданное ограничение на задержку, а также при оценке эффективной емкости системы.

В качестве результата, готового к использованию, рекомендуется формула (6) с β_{JLZ} для системы $M/M/s$ и формула (10) с β_2 для систем $G/G/s$, за исключением $M/M/s$.

Наконец, читателю предлагается асимптотический анализ разработанной приближенной формулы оценки емкости системы, причем отмечается, что сделанные наблюдения справедливы для систем гораздо шире классических $G/G/s$. Последнее позволяет надеяться, что асимптотические выкладки могут быть применены к крайне широкому классу реальных объектов и сценариев, а значит, полученные результаты будут полезны для реализаций алгоритмов управления передачей данных, работающих в режиме реального времени.

Отметим, что для адаптации предложенных результатов к более широкому классу сценариев может понадобиться усовершенствование разработанных формул для систем с конечной очередью, расширение на возможность группового поступления заявок в очередь, слотированного обслуживания, добавление учета взаимного влияния серверов (из-за взаимной интерференции между пространственными потоками MU-MIMO и одновременной передачей несколькими точками доступа) и т.д., что является предметом будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Korneev E., Liubogoshchev M., Bankov D., Khorov E.* How to Model Cloud VR: An Empirical Study of Features That Matter // *IEEE Open J. Commun. Soc.* 2024. V. 5. P. 4155–4170. <http://doi.org/10.1109/OJCOMS.2024.3409472>
2. *Karamyshev A., Liubogoshchev M., Lyakhov A., Khorov E.* Enabling Industrial Internet of Things with Wi-Fi 6: An Automated Factory Case Study // *IEEE Trans. Ind. Inform.* Early access paper, August 2024. P. 1–11. <http://doi.org/10.1109/TII.2024.3431086>
3. Study on Scenarios and Requirements for Next Generation Access Technologies (3GPP Tech. Rep. TR 38.913; version 18.0.0. Release 18). May 2024.
4. *Shashin A., Belogaev A., Krasilov A., Khorov E.* Adaptive Parameters Selection for Uplink Grant-Free URLLC Transmission in 5G Systems // *Comput. Netw.* 2023. V. 222. P. 109527. <http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.comnet.2022.109527>
5. *Karamyshev A., Khorov E., Krasilov A., Akyildiz I.F.* Fast and Accurate Analytical Tools to Estimate Network Capacity for URLLC in 5G Systems // *Comput. Netw.* 2020. V. 178. P. 107331. <http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.comnet.2020.107331>
6. *Adamuz-Hinojosa O., Sciancalepore V., Ameigeiras P., Lopez-Soler J.M., Costa-Pérez X.* A Stochastic Network Calculus (SNC)-Based Model for Planning B5G uRLLC RAN Slices // *IEEE Trans. Wireless Commun.* 2023. V. 22. № 2. P. 1250–1265. <https://doi.org/10.1109/TWC.2022.3203937>
7. *Chinchilla-Romero L., Prados-Garzon J., Ameigeiras P., Muñoz P., Lopez-Soler J.M.* 5G Infrastructure Network Slicing: E2E Mean Delay Model and Effectiveness Assessment to Reduce Downtimes in Industry 4.0 // *Sensors.* 2022. V. 22. № 1. P. 229 (29 pp.). <http://doi.org/10.3390/s22010229>
8. *Yang P., Xi X., Quek T.Q.S., Chen J., Xianbin C., Dapeng W.* Network Slicing for URLLC // *Ultra-Reliable and Low-Latency Communications (URLLC) Theory and Practice: Advances in 5G and Beyond.* Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2023. Ch. 7. P. 215–239. <https://doi.org/10.1002/9781119818366.ch7>
9. *Zhbankova E., Khakimov A., Markova E., Gaidamaka Yu.* The Age of Information in Wireless Cellular Systems: Gaps, Open Problems, and Research Challenges // *Sensors.* 2023. V. 23. № 19. P. 8238 (28 pp.). <http://doi.org/10.3390/s23198238>
10. *Markova E., Manaeva V.E., Zhbankova E., Moltchanov D., Balabanov P., Koucheryavy Ye., Gaidamaka Yu.* Performance-Utilization Trade-Offs for State Update Services in 5G NR Systems // *IEEE Access.* 2024. V. 12. P. 129789–129803. <http://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3442825>
11. *Chinchilla-Romero L., Prados-Garzon J., Muñoz P., Ameigeiras P., Lopez-Soler J.M.* URLLC Achieved Data Rate through Exploiting Multi-Connectivity in Industrial Private 5G Networks with Multi-WAT RANs // *Proc. 2023 IEEE Wireless Communications and Networking Conf. (WCNC).* Glasgow, United Kingdom. Mar. 26–29, 2023. P. 1–6. <http://doi.org/10.1109/WCNC55385.2023.10119085>
12. *Anand A., de Veciana G.* Resource Allocation and HARQ Optimization for URLLC Traffic in 5G Wireless Networks // *IEEE J. Select. Areas Commun.* 2018. V. 36. № 11. P. 2411–2421. <http://doi.org/10.1109/JSAC.2018.2874122>
13. *Whitt W.* The Queueing Network Analyzer // *Bell Syst. Tech. J.* 1983. V. 62. № 9. P. 2779–2815. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1983.tb03204.x>
14. *Halfin S., Whitt W.* Heavy-Traffic Limits for Queues with Many Exponential Servers // *Oper. Res.* 1981. V. 29. № 3. P. 567–588. <https://doi.org/10.1287/opre.29.3.567>

15. Whitt W. Stochastic-Process Limits: An Introduction to Stochastic-Process Limits and Their Application to Queues. New York: Springer, 2002. <https://doi.org/10.1007/b97479>
16. Whitt W. A Diffusion Approximation for the $G/GI/n/m$ Queue // Oper. Res. 2004. V. 52. № 6. P. 922–941. <https://doi.org/10.1287/opre.1040.0136>
17. Harchol-Balter M. Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
18. Tijms H.C. A First Course in Stochastic Models. New York: Wiley, 2003.
19. Kingman J.F.C. The Single Server Queue in Heavy Traffic // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1961. V. 57. № 4. P. 902–904. <http://doi.org/10.1017/S0305004100036094>
20. Köllerström J. Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers. II // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. № 2. P. 393–401. <https://doi.org/10.2307/3212906>
21. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
22. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.
23. Janssen A.J.E.M., van Leeuwen J.S.H., Zwart B. Corrected Asymptotics for a Multi-Server Queue in the Halfin-Whitt Regime // Queueing Syst. 2008. V. 58. P. 261–301. <http://doi.org/10.1007/s11134-008-9070-0>
24. Janssen A.J.E.M., van Leeuwen J.S.H., Zwart B. Gaussian Expansions and Bounds for the Poisson Distribution Applied to the Erlang B Formula // Adv. in Appl. Probab. 2008. V. 40. № 1. P. 122–143. <http://doi.org/10.1239/aap/1208358889>
25. Puhalskii A.A., Reed J.E. On Many-Server Queues in Heavy Traffic // Ann. Appl. Probab. 2010. V. 20. № 1. P. 129–195. <https://doi.org/10.1214/09-AAP604>
26. van Leeuwen J.S.H., Mathijsen B.W.J., Zwart B. Economies-of-Scale in Many-Server Queueing Systems: Tutorial and Partial Review of the QED Halfin-Whitt Heavy-Traffic Regime // SIAM Rev. 2019. V. 61. № 3. P. 403–440. <http://doi.org/10.1137/17M1133944>
27. Seelen L.P., Tijms H.C. Approximations for the Conditional Waiting Times in the $GI/G/c$ Queue // Oper. Res. Lett. 1984. V. 3. № 4. P. 183–190. [https://doi.org/10.1016/0167-6377\(84\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0167-6377(84)90024-5)
28. Kimura T. A Two-Moment Approximation for the Mean Waiting Time in the $GI/G/s$ Queue // Manag. Sci. 1986. V. 32. № 6. P. 751–763. <https://doi.org/10.1287/mnsc.32.6.751>
29. Whitt W. Approximations for the $GI/G/m$ Queue // Prod. Oper. Manag. 1993. V. 2. № 2. P. 114–161. <https://doi.org/10.1111/j.1937-5956.1993.tb00094.x>
30. Боровков А.А. О предельных законах для процессов обслуживания в многоканальных системах // Сиб. матем. журн. 1967. Т. 8. № 5. С. 983–1004. <https://www.mathnet.ru/rus/smj5444>
31. Bouillard A. Stochastic Network Calculus with Localized Application of Martingales. <http://arxiv.org/abs/2211.05657> [cs.PF], 2024.
32. Network Simulator 3 (ns-3). <https://www.nsnam.org/>. Доступ: 01.08.2024.
33. Jiang X., Luvisotto M., Pang Z., Fischione C. Reliable Minimum Cycle Time of 5G NR Based on Data-Driven Channel Characterization // IEEE Trans. Ind. Inform. 2021. V. 17. № 11. P. 7401–7411. <http://doi.org/10.1109/TII.2021.3052922>

Карамышев Антон Юрьевич
 Порай Екатерина Дмитриевна
 Хоров Евгений Михайлович

Институт проблем передачи информации
 им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет), Москва
karamyshev@wireless.iitp.ru
porai@wireless.iitp.ru
horov@wireless.iitp.ru

Поступила в редакцию
 15.08.2024
 После доработки
 25.09.2024
 Принята к публикации
 27.09.2024

УДК 519.21 : 519.72 : 512.75 : 519.1

© 2024 г. М.Л. Бланк

О ЗАСЕДАНИЯХ ДОБРУШИНСКОГО СЕМИНАРА В 2024 Г. (ЧАСТЬ 1)

Добрушинский семинар посвящен основным направлениям, которые развиваются в Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН: стохастической и детерминированной динамики больших систем, теории информации и теории кодирования, алгебраической геометрии и теории чисел, комбинаторным и вероятностным аспектам теории представлений. Представлена общая информация о семинаре, а также подробная информация о заседаниях семинара, прошедших с начала 2024 г.

Ключевые слова: Добрушинский семинар, математика, динамика больших систем, теория информации, теория кодирования, алгебраическая геометрия, теория чисел.

DOI: 10.31857/S0555292324020050, **EDN:** JGBKRF

Общие сведения о семинаре

Семинар ранее проходил в ИППИ РАН, а начиная с сентября проходит в рамках Высшей школы современной математики (ВШМ) МФТИ, по вторникам с 16:15 до 18:00, МФТИ, радиотехнический корпус, РТ113.

Руководитель семинара и заведующий Добрушинской лабораторией профессор Михаил Львович Бланк.

Семинар посвящен основным направлениям, которые развиваются в Добрушинской математической лаборатории:

- стохастическая и детерминированная динамика больших систем;
- теория информации и кодирования;
- алгебраическая геометрия и теория чисел;
- комбинаторные и вероятностные аспекты теории представлений.

На семинаре с докладами выступают как сотрудники лаборатории, так и приглашенные докладчики.

Семинар открыт для достаточно широкого круга математических вопросов в соответствии с научными интересами участников семинара. Желая выступить на семинаре, пожалуйста, обращайтесь к М.Л. Бланку (mlblank@gmail.com).

Сайты: <http://iitp.ru/ru/userpages/74/285.htm>, https://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventID=17&confid=167

Заседание 16 января 2024 г. (онлайн)

Тема семинара: Параболические уравнения и диффузионные процессы с вырождением: краевые задачи, метастабильность и гомогенизация.

Докладчик: Л.Б. Коралов, Университет Мэриленда, США.

Аннотация: В вероятностных терминах мы описываем метастабильное поведение для процессов со случайными возмущениями, имеющих инвариантные точки или поверхности. В терминах уравнений с частными производными задачи касаются асимптотического поведения решений параболических уравнений, коэффициенты которых вырождаются на границе области. Оператор можно регуляризовать, добавляя малый диффузионный член. В этом случае возникают эффекты метастабильности: асимптотика решений при стремлении размера возмущения к нулю зависит от масштаба времени. Рассматриваются начально-краевые задачи с граничными условиями Дирихле и Неймана. Также рассматривается периодическая гомогенизация для операторов с вырождением. Доклад основан на совместной работе с М. Фрейдлиным.

Заседание 6 февраля 2024 г.

Тема семинара: О распределенных методах решения вариационных неравенств.

Докладчик: А.Н. Безносиков, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: В докладе будут рассмотрены распределенные методы решения задач оптимизации, а именно, вариационных неравенств, которые интересны как сами по себе, так и тем, что они включают в себя и классические задачи минимизации, и задачи поиска седловой точки (минимакс). В распределенной постановке целевой оператор вариационного неравенства делится на части, к каждой из которых имеет доступ только свой локальный вычислитель. Будет изучен случай, когда локальные операторы в некотором смысле “похожи”. За счет этого удастся добиться значительного улучшения оценок сходимости с точки зрения коммуникационной сложности. Мы оценим также нижние оценки сложности и убедимся в оптимальности предлагаемых методов. В оставшееся время обсудим как можно “пробить” нижние оценки и сконструировать еще более быстрый метод. В частности, мы введем возможность сжатия передаваемой информации и получим верхние и нижние оценки в этой постановке.

Заседание 13 февраля 2024 г.

Тема семинара: Разбиения плоскости, пьедесталы, библиотеки Цетлина, тасующие разбиения, леворегулярные идемпотентные полугруппы и чудо целочисленных собственных чисел.

Докладчик: С.Б. Шлосман, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва.

Аннотация: Речь пойдет о классе матриц с полиномиальными элементами, имеющих полиномиальные собственные значения. Это совместная работа с Ричардом Кеньоном, Максимом Концевичем, Олегом Огиевецким, Космином Похоатой и Уиллом Савином.

Заседание 20 февраля 2024 г.

Тема семинара: Стохастические системы частиц и модели Маккина–Власова: теория и приложения.

Докладчик: Жан-Франсуа Жабир, Высшая школа экономики, г. Москва.

Аннотация: Модели Маккина–Власова задают класс стохастических эволюционных уравнений, возникающих из вероятностной интерпретации нелинейных физических и биологических систем и из асимптотики больших популяций систем частиц в условиях взаимодействия типа среднего поля. Теоретический и практический интерес к моделям Маккина–Власова, первоначально появившимся в шестидесятых

годах, значительно возрос за последние пятнадцать лет в связи с расширением связей между этими моделями и экономической и социальной динамикой популяций, задачами теории игр и управления, а также моделированием эффективных методов машинного обучения. Этот доклад будет посвящен изложению основ моделей Макакина – Власова с теоретической и практической точек зрения, а также обсуждению последних тенденций, связанных с этими моделями.

Заседание 5 марта 2024 г.

Тема семинара: Усреднение нелокальных параболических уравнений сверточного типа в периодических средах со случайными по времени характеристиками.

Докладчик: А.Л. Пятницкий, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва.

Аннотация: В докладе будет рассказано об усреднении параболической задачи для нелокального уравнения сверточного типа с коэффициентами, имеющими периодическую микроструктуру, причем характеристиками этой микроструктуры служат случайные стационарные процессы. Будет показано, что усреднение справедливо в движущихся координатах. В случае, когда коэффициенты обладают хорошими свойствами перемешивания, предельная динамика описывается стохастическим уравнением с частными производными.

Заседание 12 марта 2024 г.

Тема семинара: Случайны ли квадратичные вычеты и простые числа?

Докладчик: М.Л. Бланк, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва.

Аннотация: Апелляции к случайности в различных теоретико-числовых конструкциях регулярно встречаются в современных научных публикациях. Достаточно упомянуть такие известные имена, как В.И. Арнольд, М.Кац и Т. Тао. К сожалению, все это сводится к различным, хотя зачастую весьма нетривиальным и изящным эвристикам. Я опишу новый аналитический подход к решению этого вопроса. В качестве приложения, будет дан ожидаемый положительный ответ на вопрос о случайности квадратичных вычетов и неожиданный отрицательный ответ в случае простых чисел. Технически предлагаемый подход основан на принципиально новой конструкции энтропии динамической системы, занимающей промежуточное положение между классической метрической энтропией Колмогорова – Синая и топологической энтропией. Все необходимые определения будут даны в ходе доклада.

Заседание 19 марта 2024 г.

Тема семинара: Случайные возмущения интегрируемых систем с приложениями к зашумленным цепочкам осцилляторов.

Докладчик: С.Б. Куксин, Математический центр мирового уровня “Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук” (МЦМУ МИАН); Институт математики Жюссье – Париж Рив Гош, Париж, Франция; Российский университет дружбы народов, г. Москва

Аннотация: Я буду обсуждать стохастические ε -возмущения интегрируемых гамильтоновых систем в $\mathbb{R}^{2n}$. Будет показано, что, во-первых, на интервалах времени порядка $1/\varepsilon$ действия решений возмущенных уравнений близки к действиям решений специально построенных эффективных стохастических уравнений, не зависящих от ε . Во-вторых, если эффективное уравнение является перемешивающим, то аппроксимация действий решений возмущенного уравнений, обеспечиваемая этим

уравнением, равномерна по времени. Все налагаемые ограничения допускают простые достаточные условия. Будут обсуждены приложения полученных результатов к изучению поведения стохастически возмущенных цепочек нелинейных осцилляторов.

Заседание 9 апреля 2024 г.

Тема семинара: О слабой сходимости квазибезгранично делимых распределений.

Докладчик: А.А. Хартов, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва.

Аннотация: Рассматривается новый класс так называемых квазибесконечно делимых законов, являющийся богатым естественным расширением известного класса бесконечно делимых законов с помощью представлений Леви – Хинчина. Нас интересуют критерии слабой сходимости внутри этого класса. При достаточно естественных предположениях мы формулируем утверждения, связывающие слабую сходимость квазибесконечно делимых функций распределения с одним специальным типом сходимости их спектральных функций Леви – Хинчина. Эта последняя сходимость не эквивалентна слабой сходимости. Таким образом, мы дополняем известные результаты Линднера, Пана и Сато (2018) в этой области.

Заседание 14 мая 2024 г.

Тема семинара: Информационная геометрия и фазовый переход синхронизации в модели Курамото.

Докладчик: А. Александров, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва.

Аннотация: Модель Курамото является простейшей моделью, описывающей явление синхронизации. Мы обсуждаем переход синхронизации в модели, заданной на полном графе, и показываем, что этот переход может быть описан в терминах так называемой информационной геометрии. Это описание позволяет связать между собой известные результаты, полученные для непрерывного предела модели и результаты, связанные с наличием интегралов движения в модели с конечным числом степеней свободы.

Заседание 28 мая 2024 г.

Тема семинара: Распределение расстояний и границы оптимальных сферических конфигураций.

Докладчик: О.Р. Мусин, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва.

Аннотация: В этом докладе будет представлено новое расширение известных верхних границ полуопределенного и линейного программирования для сферических кодов и рассмотрена версия этой границы для дистанционных графов. Будет показано, что этот метод может работать эффективно. В частности, было получено более короткое решение проблемы контактных чисел в размерности 4. Я рассмотрю некоторые подходы к решению двух старых открытых проблем в размерности 4: единственности оптимальной контактной конфигурации и гипотезе о плотнейшей сферической упаковке. В недавнем (29 апреля 2024) препринте де Лаата, Лейенхорста и де Муинк Кейзера было заявлено о решении проблемы единственности. Мы также обсудим их подход.

Заседание 11 июня 2024 г.

Тема семинара: Совместный спектральный радиус, разложения Фибоначчи и запрещенные слова.

Докладчик: А.А. Владимиров, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва.

Аннотация: Будет дан обзор теории обобщенного (совместного) спектрального радиуса для наборов действительных или комплексных квадратных матриц и обсуждены недавние приложения этой теории в теоретико-числовых задачах. Я также расскажу свой результат о невозможности достижения строгого максимума спектрального радиуса на некоторых произведениях пары (2×2) -матриц.

Заседание 17 сентября 2024 г.

Тема семинара: Наследование свойства отслеживания в динамических полугруппах.

Докладчик: М.Л. Бланк, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.; Высшая школа экономики, г. Москва

Аннотация: Проблема отслеживания псевдо-траекторий (траекторий системы под действием слабых возмущений) связана с классическими результатами Д.В. Аносова о робастности равномерно гиперболических систем. Основная трудность здесь состоит в анализе бесконечно многих (по времени) возмущений системы. Я расскажу о новом подходе к концепции отслеживания, позволяющем преодолеть эту трудность и драматически расширить применимость теории отслеживания, в частности, к динамическим полугруппам и более общим типам возмущений (например, гауссовым). Все необходимые математические сведения будут обсуждены по ходу дела, при этом мы постараемся пройти весь путь от элементарных постановок до еще нерешенных задач.

Заседание 24 сентября 2024 г.

Тема семинара: Какая часть корней системы случайных полиномов вещественна?

Докладчик: Б.Я. Казарновский, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Какова вероятность вещественности корня многочлена степени n с вещественными коэффициентами? Ответ М. Каца (1942): асимптотически $2/\pi \log(n)/n$. Многочлен Лорана, вещественный на единичной окружности, назовем вещественным, как и его корни на этой окружности. Оказывается, что вероятность вещественности корня многочлена Лорана растущей степени стремится не к нулю, а к $1/\sqrt{3}$. Т.е. предел $> 1/2$! Верно, что феномен асимптотической конечности доли вещественных корней сохраняется для систем многочленов Лорана многих переменных, а также для многочленов на произвольной компактной группе Ли. В частности, корни многочленов на группе матриц сваливаются на унитарную подгруппу. В случае многочленов Лорана от n переменных, соответствующая компактная группа есть n -мерный тор. Асимптотика доли вещественных корней вычисляется через смешанные объемы некоторых выпуклых компактных множеств, определяющих рост системы полиномов. Формулировки теорем элементарны и будут приведены полностью. Будет также приведено “объяснение” доказательств. Они основаны на применении двух результатов о числе корней систем уравнений. Это версии теоремы БКК (Бернштейна – Кушниренко – Хованского) о числе корней полиномиальной системы уравнений для соответственно гладких функций и для полиномов на комплексной линейной группе.

Заседание 1 октября 2024 г.

Тема семинара: Обобщенный спектральный радиус – откуда взялся и зачем нужен.

Докладчик: В.С. Козякин, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, Московская обл.

Аннотация: Одним из наиболее распространенных способов решения векторного линейного уравнения $x = Ax + f$ является метод простых итераций, суть которого в нахождении решения путем последовательных приближений $x(n+1) = Ax(n) + f$. Распространен также другой способ решения исходного уравнения – так называемый метод Гаусса–Зейделя, который может быть представлен как поочередное вычисление итераций либо по формуле $x(n+1) = Bx(n) + f$, либо по формуле $x(n+1) = Cx(n) + f$, где B и C – специальным образом сконструированные по A более простые матрицы “построчного пересчета”. Возникает вопрос, что случится, если в методе Гаусса–Зейделя матрицы B и C начнут применяться не поочередно, а в произвольном порядке? Этот вопрос далеко не искусственный, и имеется множество примеров “реальных” задач, приводящих к нему, – распараллеливание вычислений, системы управления с асинхронным обменом данными, поведение систем коллективного поведения, проблема гладкости вейвлетов, теория арбитражных операций валютного рынка и т.д. Переход от итерационных процедур с одной матрицей к процедурам с несколькими матрицами, применяемыми в произвольном порядке, мгновенно делает практически бесполезной всю технику классической линейной алгебры и переводит задачу из алгоритмически и вычислительно простой в разряд “супертрудных”, основные методы решения которой в настоящее время ассоциируются с так называемой теорией обобщенного или совместного спектрального радиуса наборов матриц. В докладе будут представлены начальные постановки и определения соответствующей теории, будет дано объяснение алгебраической неразрешимости и NP-сложности вычисления обобщенного спектрального радиуса, будет сформулирована “неконструктивная” теорема о так называемых “нормах Барабанова”, до сих пор вопреки своей неконструктивности являющаяся одним из немногих работающих инструментов данной теории.

Бланк Михаил Львович

Высшая школа современной математики МФТИ, Москва

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Москва

mlblank@gmail.com

УДК 621.39

© 2024 г. В.А. Логинов

**О ЗАСЕДАНИЯХ МОСКОВСКОГО ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОГО
СЕМИНАРА В 2024 Г. (ЧАСТЬ 1)**

Московский телекоммуникационный семинар организован научными группами ИППИ РАН, МФТИ и ВШЭ. Он посвящен научным аспектам связи и дает исследователям возможность представить и обсудить новые идеи и инновационные подходы в области телекоммуникационных технологий и тесно связанных с ними областей. Представлена общая информация о семинаре, а также подробная информация о заседаниях семинара, прошедших с начала 2024 года. Информацию о ближайших семинарах и форму подачи заявки на выступление можно найти на сайте семинара <https://wireless.iitp.ru/seminar/>.

Ключевые слова: Московский телекоммуникационный семинар, телекоммуникации.

DOI: 10.31857/S0555292324020062, **EDN:** AOAAOC

Общие сведения о семинаре

Московский телекоммуникационный семинар организован научными группами Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Московского физико-технического института и Высшей школы экономики. Он посвящен научным аспектам связи и дает исследователям возможность представить и обсудить новые идеи и инновационные подходы в области телекоммуникационных технологий и тесно связанных с ними областей.

На семинар приглашаются ведущие исследователи, желающие поделиться своими недавними результатами в области передовых технологий и систем связи, которые продолжают менять мир и предоставляют всем пользователям доступ к беспрецедентному спектру высокоскоростных, безотказных глобальных телекоммуникационных услуг. Подать заявку на выступление можно на сайте семинара <https://wireless.iitp.ru/seminar/>. Также приглашаются студенты и молодые ученые, желающие расширить и углубить свои познания в области новейших технологий передачи информации и улучшить свои профессиональные связи.

Основным языком является английский. Избранные доклады, связанные с кандидатскими и докторскими диссертациями, обсуждаются на русском языке. По умолчанию выступления записываются и публикуются через три месяца после мероприятия.

Семинар проходит очно в ИППИ РАН. Принять участие можно также в режиме видеоконференции.

Председатель семинара: Евгений Михайлович Хоров, д.т.н.

Ученый секретарь семинара: Вячеслав Аркадьевич Логинов, к.т.н.

Заседание 19 января 2024 г.

Тема семинара: О защите трафика реального времени с помощью интервалов тишины в сетях Wi-Fi 7.

Докладчик: Илья Левицкий, ИППИ РАН.

Аннотация: Приложения реального времени, такие как игры, дистанционное управление, приложения виртуальной реальности и другие, постепенно входят в нашу повседневную жизнь. Их ключевым требованием является низкая задержка, которую сложно обеспечить в беспроводных локальных сетях. В грядущей технологии Wi-Fi 7 специально для решения проблемы обеспечения низкой задержки предложен механизм Restricted Target Wake Time (R-TWT). Однако сети Wi-Fi 7 будут неоднородными: там будут сосуществовать как новые, так и существующие устройства. Для защиты механизма R-TWT от передач этих устройств решено использовать существующий механизм интервалов тишины. Вопрос в том, действительно ли существующие устройства поддерживают этот механизм в достаточной мере, чтобы подчиняться правилам, наделенным на обслуживание трафика реального времени. В этом семинаре будет рассказано о том, как проверялась требуемая поддержка. В ходе беседы приоткроются масштаб и серьезность проблемы и будут обсуждаться возможные решения.

Информация о докладчике: Илья Левицкий окончил Московский физико-технический институт в 2020 г. В настоящее время он является научным сотрудником лаборатории беспроводных сетей ИППИ РАН и работает над кандидатской диссертацией. Он создал первый в мире физический прототип Wi-Fi устройства, использующего неортогональный множественный доступ (NOMA). Илья Левицкий также является участником с правом голоса рабочей группы IEEE 802.11, которая разрабатывает стандарты, лежащие в основе технологии Wi-Fi. Он является соавтором десятка статей и патентных заявок. Его профессиональные интересы включают технологию Wi-Fi, системы NOMA, программно-определяемые прототипы радиосвязи и инновации с сетях Wi-Fi 7 и Wi-Fi 8, в частности, многоканальные передачи.

Ключевые слова: приложения реального времени, Wi-Fi 7, 802.11be, WLAN, эксперименты.

Заседание 16 февраля 2024 г.

Тема семинара: Протоколы для чувствительных ко времени Ad-hoc приложений.

Докладчик: Димитриос Зорбас, Назарбаев Университет, Казахстан.

Аннотация: Протоколы для чувствительных ко времени Ad-hoc приложений играют ключевую роль в обеспечении бесперебойной связи в динамичных IoT сценариях. Используя такие технологии, как LoRa, эти протоколы обеспечивают быструю передачу данных, необходимых для работы в условиях строгих ограничений по времени доставки пакетов. Энергоэффективность остается одной из главных проблем, что заставляет разрабатывать упрощенные протоколы, оптимизированные для устройств с ограниченными ресурсами. Интеграция алгоритмов машинного обучения повышает адаптивность протоколов, позволяя проводить предиктивную аналитику для упреждающего принятия решений для чувствительных ко времени Ad-hoc приложений. Благодаря синергии этих элементов создаются надежные протоколы, обеспечивающие надежную и своевременную доставку данных в динамичных ad-hoc сценариях, что способствует эффективному развертыванию IoT.

Информация о докладчике: Димитриос Зорбас является доцентом Назарбаев Университета в Казахстане. Он получил степень PhD в области компьютерных наук в Университете Пирея в Греции. Работал в качестве постдокторанта в INRIA Lille – Nord Europe и в Университете Ла-Рошель во Франции. После получения стипендии Марии Кюри он также работал в Национальном институте Тиндалла – Универси-

тетском колледже Корка в Ирландии. Автор более 50 рецензируемых публикаций в области беспроводных коммуникаций и распределенных вычислений. Он работал в нескольких национальных проектах, а также проектах FP7 и H2020.

Ключевые слова: чувствительные ко времени приложения, IoT, Ad-hoc.

Заседание 1 марта 2024 г.

Тема семинара: Взгляд Международного союза электросвязи на шестое поколение мобильной связи.

Докладчик: Артем Красилов, НИУ ВШЭ, ИППИ РАН, МФТИ.

Аннотация: В ноябре 2023 г. Международный союз электросвязи (МСЭ) опубликовал документ, в котором изложил свое видение на будущие системы мобильной связи шестого поколения (6G). На семинаре будут подробно рассмотрены потенциальные сценарии использования и технические требования, сформулированные в данном документе к сетям 6G, а также будет проведено сравнение с соответствующими требованиями к сетям 5G. Будет проведен обзор новых технологий физического, канального и сетевого уровней, которые планируется использовать для построения сетей 6G. Также будут рассмотрены текущие планы по созданию и стандартизации технологии 6G со стороны МСЭ и консорциума 3GPP.

Информация о докладчике: Артем Красилов получил степень кандидата технических наук в области связи в Московском физико-техническом институте (МФТИ) в 2013 г. В настоящее время он является старшим научным сотрудником Института проблем передачи информации РАН (ИППИ РАН) и Высшей школы экономики (ВШЭ). Также он является старшим преподавателем МФТИ. Он принимал участие в различных национальных и международных исследовательских проектах, поддерживаемых как академическими фондами (программа FP7, Российский научный фонд), так и промышленными партнерами. Проведенные им исследования были отмечены государственными наградами и премиями от промышленных партнеров. Его научные интересы связаны с беспроводными сетями нового поколения, 5G, 6G, Wi-Fi, обеспечением качества обслуживания QoE/QoS в беспроводных сетях, разработкой инструментов для аналитического и имитационного моделирования сетей связи. Он является соавтором более 40 научных работ.

Ключевые слова: 6G, ITU, 3GPP.

Заседание 5 апреля 2024 г.

Тема семинара: Разработка алгоритмов на основе статистических данных для реализации пространственной обработки сигналов в приемнике с большим числом антенн.

Докладчик: Роман Бычков, Сколтех.

Аннотация: На приемнике базовой станции обработка сигналов абонентов в пространстве лучей позволяет значительно снизить вычислительную сложность за счет уменьшения размерности обрабатываемых сигналов. При этом не происходит значительного снижения точности детектирования благодаря разреженности сигнала в пространстве лучей. К сожалению, выбор лучей может быть не оптимален из-за ограниченных вычислительных ресурсов, влияния шума, устаревания канала, а также несовпадения выбранных направлений прихода сигнала и фактического подпространства сигнала. Эти проблемы предлагается решать путем учета априорного распределения сигналов абонентов в пространстве, а также выбора пространства лучей на основе обучаемых структур низкой вычислительной сложности.

Информация о докладчике: Бычков Роман Алексеевич окончил Московский физико-технический институт (МФТИ) в 2020 г. В настоящее время он работает над

кандидатской диссертации в Центре технологий искусственного интеллекта Сколковского института науки и технологий (Сколтех). Его научные интересы включают машинное обучение, цифровую обработку сигналов и беспроводные технологии.

Ключевые слова: 5G, ММО, машинное обучение.

Заседание 7 июня 2024 г.

Тема семинара: Разработка и исследование методов повышения энергоэффективности и помехоустойчивости систем мобильной широкополосной связи пятого поколения.

Докладчик: Григорий Ермолаев, ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Аннотация: Согласно требованиям Международного Союза Электросвязи, системы связи пятого поколения (5G) должны удовлетворять более высоким требованиям к пропускной способности, времени задержки передачи данных и стабильности подключения к сети, что незамедлительно повлекло за собой увеличение сложности как самих пользовательских устройств и базовых станций, так и алгоритмов цифровой обработки, используемых для приема и передачи данных. Другим ключевым изменением в системах связи 5G является переход на более высокие частотные диапазоны, где доступно использование более широких полос частот. Данные изменения привели к существенному увеличению энергии, потребляемой мобильным устройством пользователя, а также повлияли на скорость затухания сигнала при его распространении от мобильного устройства к базовой станции и наоборот, что влияет на помехоустойчивость всей системы в целом. На семинаре будут описаны модели и сценарии, используемые для моделирования систем связи 5G на системном и физическом уровнях, а также представлены методы повышения энергоэффективности и помехоустойчивости, разработанные для систем связи 5G.

Информация о докладчике: Григорий Ермолаев окончил Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского в 2018 г. С 2018 по 2022 г. он проходил обучение в аспирантуре радиофизического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского. С 2015 года активно участвовал в стандартизации систем связи 5G NR в консорциуме 3GPP. Научными интересами являются: канальное помехоустойчивое кодирование, энергосбережение пользовательского оборудования, расширение покрытия систем беспроводной мобильной связи.

Ключевые слова: 5G, энергоэффективность, помехоустойчивость.

Заседание 6 сентября 2024 г.

Тема семинара: Модели систем Интернета вещей со случайным доступом и зависимыми источниками.

Докладчик: Анна Борисовская, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения.

Аннотация: Одним из популярных видов систем Интернета вещей являются системы мониторинга. В настоящее время они используются во многих сферах нашей жизни: в здравоохранении, в промышленности, в экологии и др. Однако существующие системы мониторинга не всегда в полной мере справляются со своей задачей. Качество работы таких систем можно улучшить, если учитывать зависимость данных от разных устройств. В рамках доклада будут представлены модели систем Интернета вещей со случайным доступом и зависимыми источниками, позволяющие исследовать влияние учета зависимости данных от разных устройств на показатели качества работы таких систем.

Информация о докладчике: Борисовская Анна Владимировна – старший преподаватель кафедры инфокоммуникационных технологий и систем связи Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения (ГУАП). В 2012 году окончила ГУАП по специальности “Комплексная защита объектов информатизации”. В 2022 году окончила аспирантуру ГУАП. Является автором более 10 научных публикаций. Область научных интересов – системы связи, случайный множественный доступ.

Ключевые слова: Интернет вещей, случайный доступ, зависимые источники.

Логинов Вячеслав Аркадьевич

Институт проблем передачи информации

им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва

`loginov@wireless.iitp.ru`

Р е д к о л л е г и я :

Главный редактор Е.М. ХОРОВ

**А.М. БАРГ, Л.А. БАССАЛЫГО, В.А. ЗИНОВЬЕВ, В.В. ЗЯБЛОВ,
И.А. ИБРАГИМОВ, Н.А. КУЗНЕЦОВ (зам. главного редактора),
Д.Ю. НОГИН (ответственный секретарь), В.М. ТИХОМИРОВ,
Ю.Н. ТЮРИН, Б.С. ЦЫБАКОВ**

Зав. редакцией *С.В. ЗОЛОТАЙКИНА*

Адрес редакции: 127051, Москва, Б. Каретный пер., 19, стр. 1, тел. (495) 650-47-39

Оригинал-макет подготовил *Д.Ю. Ногин*

**Москва
ФГБУ Издательство «Наука»**