ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 60 **2024** **Вып. 1**

УДК 621.391 : 517.938 : 330.4

© 2024 г. **М.Л. Бланк, М.О. Поляков**

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СПРАВЕДЛИВОГО ДЕЛЕНИЯ

Предлагается новый и сравнительно элементарный подход для решения задачи справедливого деления непрерывного ресурса (измеримого пространства, пирога и т.п.) между несколькими участниками, критерии выбора которых описываются зарядами (мерами со знаком). Постановка задачи с зарядами рассматривается впервые. Задача сводится к анализу свойств траекторий специально построенной динамической системы, действующей на пространстве конечных измеримых разбиений. Доказана экспоненциально быстрая сходимость к предельному решению как для случая мер, так и для случая зарядов.

Ключевые слова: справедливое деление, математическая экономика, многокритериальная оптимизация, счетно-аддитивные меры/заряды, динамические системы.

DOI: 10.31857/S0555292324010066, **EDN:** KJGZYI

§ 1. Введение

Проблемы, связанные с “оптимальным” делением ресурсов при заданной системе ограничений, являются одними из самых базовых задач математической экономики. Принципиальная их сложность определяется большим количеством (как правило) конфликтующих критериев “оптимальности” деления. Простейшим примером здесь является вопрос о делении сильно неоднородного пирога (клада, квартиры и т.п.) между несколькими участниками, оценки которых получаемых ими частей могут принципиально отличаться между собой.

Таким образом, задача справедливого деления относится к классу задач многокритериальной оптимизации, однако эта задача имеет несколько важных особенностей. Главная из них состоит в том, что вместо поиска “оптимального” (в том или ином смысле) решения (которое может и не существовать) предлагается поиск допустимого решения. Последняя постановка в большинстве случаев оказывается значительно проще. В некотором смысле этот подход является далеким обобщением поиска базовой точки (одной из вершин симплекса) в классической задаче линейного программирования.

Задача справедливого деления в простейшем случае формулируется следующим образом. Пусть нам нужно поделить пирог на r человек так, чтобы каждый считал, что его не обделили. При этом пирог сильно неоднороден, а у каждого из участников имеются собственные критерии сравнения различных кусков пирога. Например, кому-то больше нравится кусок с клубникой, а кто-то замечает, что левая сторона пирога слегка подгорела, и т.п. Возникает вопрос, всегда ли можно это сделать? Несмотря на кажущуюся “школьность”, эта задача оказывается очень сложной, и в различных постановках ей посвящено огромное количество публикаций (обзоры известных результатов можно найти, например, в [1–4]).

Первые строгие математические результаты для случая, когда критерии участников определяются неатомарными счетно-аддитивными мерами, были получены в 1961 г. Дубинсом и Спаньером [5], которые, опираясь на результаты Ляпунова [6] и Халмоша [7] о свойстве выпуклости для векторных мер, доказали, что для любого набора критериев участников дележа (представляемых неатомарными мерами) пирог можно разрезать "честно". В 1980 году У. Стромквист [8] доказал, что это можно сделать ровно за $r-1$ разрезов. Однако это доказательство (как, впрочем, и результат [5]) не конструктивно, и явный алгоритм подобного деления известен только при $r<4$. Существенно позже, в 1999 году, Ф.Е. Су [9] разработал принципиально другой комбинаторно-топологический подход для решения этой задачи, основанный на итерационном экспоненциально быстро сходящемся алгоритме.

Поскольку нас будет интересовать подход к задаче справедливого деления с точки зрения абстрактной теории меры, то мы не рассматриваем многочисленные важные и интересные геометрические аспекты этой задачи, такие как представление ресурса как подмножества евклидова пространства, возможности разбиения гиперплоскостями или ограничение разбиений только на связные множества. Читатель может найти ссылки на соответствующие результаты в указанных выше обзорах.

До недавнего времени считалось, что конечного алгоритма решения задачи справедливого деления (при некоторых "естественных" технических предположениях[1]) не существует (см., например, [10]). Однако в 2016 году Х. Азиз и С. Маккензи [11] предложили конечный алгоритм. Этот алгоритм технически весьма сложен, а оценка $r^{r^{r^{r^{r}}}}$ необходимого для конструкции решения числа шагов астрономически велика даже при небольшом числе участников.

В реальной жизни критерии участников, естественно, могут оказаться гораздо более сложными и не сводящимися к классическим мерам. Полного исследования функционалов, допускающих решение задачи справедливого деления, на сегодняшний день нет. Единственное продвижение здесь относится к ситуации, когда выбираются не "лучшие", а худшие части. Формально в терминах мер это означает, что соответствующий критерий равен некоторой мере со знаком минус. Версия конечного алгоритма Азиза – Маккензи для этого случая предложена в [12]. Как ни странно, комбинация этих вариантов – ситуация, когда критерии описываются зарядами (мерами со знаком), – в математической литературе не исследована[2]. Возможное объяснение состоит в том, что авторам не удалось согласовать в одном алгоритме противоречия, возникающие в подходах с положительными и отрицательными мерами.

В настоящей статье предлагается достаточно простой экспоненциально быстро сходящийся алгоритм решения задачи справедливого деления для случая, когда критерии участников описываются неатомарными счетно-аддитивными зарядами.

В силу неатомарности рассматриваемых функционалов различные части измеримого пространства в целом (одновременно для всех участников) выглядят однородными. Поэтому, на первый взгляд, наше решение выглядит несколько парадоксально. Его идея состоит в последовательном выделении дизъюнктных частей пространства, на каждой из которых удается предъявить точное решение. Суммарная мера остатка оказывается экспоненциально малой (относительно номера шага процесса деления), что гарантирует экспоненциально быструю сходимость процесса.

Статья организована следующим образом. В § 2 приводится формальная математическая постановка задачи, после чего приводятся факты, на которых основан приведенный алгоритм, а также демонстрируются основные идеи его построения на случаях с малым количеством участников. В последних двух параграфах описы-

[1] Ресурс представлен единичным отрезком, а элементы разбиения являются интервалами.

[2] Как указал нам рецензент, частный пример для трех участников рассматривался в работе [13].

вается алгоритм построения сильного решения для мер и его обобщение на случай зарядов.

§ 2. Постановка задачи. Сильное и слабое решения

Пусть (M, Σ) – измеримое пространство, т.е. пара, состоящая из множества M и σ-алгебры его измеримых подмножеств Σ. Зафиксируем натуральное число r, набор $\{\mu_i\}_{i=1}^r$ функционалов $\mu_i \colon \Sigma \to \mathbb{R}$ и измеримое разбиение $\mathcal{F} := \{F_i\}_{i=1}^r$ множества M.

Определение 1. В задаче о справедливом делении назовем разбиение $\mathcal{F}$

- *слабым* решением, если

$$\mu_i(F_i) \geqslant \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(F_j)$$

для любого i;

- *сильным* решением, если

$$\mu_i(F_i) \geqslant \mu_i(F_j)$$

для любых i, j.

Слабое решение задачи соответствует случаю, когда i-й участник относительно функционала μ_i получил в среднем не меньше, чем остальные. Сильное решение соответствует случаю, когда каждый считает, что остальные участники получили не больше, чем он сам.

Отметим, что в литературе по экономике слабое решение часто называют термином “proportional”, а сильное решение – термином “envy-free”. В математическом контексте наша терминология (впервые предложенная М. Бланком в [14]) представляется более удобной и адекватной. Идейно эта терминология восходит к классическим понятиям слабых и сильных решений в теории дифференциальных уравнений.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{M}$ – класс функционалов, для которого задача о справедливом делении имеет решение. Тогда для любого r и любого $\mu \in \mathcal{M}$ существует такое разбиение M на r измеримых подмножеств $\{F_i\}_{i=1}^r$, что $\mu(F_i) = \mu(F_j)\ \forall i, j$.*

Доказательство. Для существования любого из вышеперечисленных решений задачи о справедливом делении необходимым требованием является наличие соответствующего решения для случая, когда все функционалы μ_i совпадают и равны μ. В этом случае условия слабого и сильного решения выглядят следующим образом:

- $\mu(F_i) \geqslant \frac{1}{r} \sum\limits_{j=1}^{r} \mu(F_j)\ \forall i$;
- $\mu(F_i) \geqslant \mu(F_j)\ \forall i, j$.

Из каждого из этих условий следует, что $\mu(F_i) = \mu(F_j)$ для любых i, j. Таким образом, найдется измеримое разбиение множества M на r частей F_i, равных относительно функционала μ. ▲

Важным вопросом является достаточность этого условия при разных типах постановки задачи. Полный ответ на этот вопрос остается открытым, но следующая теорема дает наиболее полное на сегодняшний день его решение.

Теорема 1. *Для любых неатомарных счетно-аддитивных зарядов $\{\psi_i\}_{i=1}^r$ имеется явный конструктивный алгоритм построения сильного решения задачи о справедливом делении.*

Доказательством этого результата является предлагаемая ниже элементарная конструкция построения сильного решения для случая неатомарных счетно-аддитивных зарядов.

§ 3. Технические средства

Основным утверждением, которое мы будем использовать при построении решения для зарядов, является разложение Хана – Жордана заряда ψ на множестве M, согласно которому имеется такое измеримое разбиение $M = A^+ \cup A^-$, что:

- $\psi(a) \geqslant 0$ для любого множества $a \subset A^+$;
- $\psi(b) \leqslant 0$ для любого множества $b \subset A^-$.

Иначе говоря, $\psi = \mu^+ - \mu^-$, где $\mu^\pm$ – счетно-аддитивные меры, являющиеся ограничениями заряда ψ на множества $A^\pm$ соответственно.

Определение 2. Заряд ψ назовем *неатомарным*, если соответствующие ему меры μ^+ и μ^- являются неатомарными.

Также в дальнейшем нам понадобится следующее важное утверждение, доказанное А.А. Ляпуновым для случая векторных мер (см. [6, 7]).

Теорема 2. *Для любой счетно-аддитивной неатомарной меры μ на (M, Σ) множество значений меры μ на σ-алгебре Σ выпукло.*

Следствие 1. *Для любой счетно-аддитивной неатомарной меры μ на (M, Σ), любого измеримого множества $A \subset M$ и любого числа $\delta \in [0, \mu(A)]$ найдется измеримое подмножество $B \subseteq A$ с $\mu(B) = \delta$.*

Последнее утверждение (на которое иногда ссылаются как на теорему В. Серпинского, 1922 г.) говорит о существовании множества любой заданной меры. В рамках рассматриваемого подхода мы предполагаем, что такое подмножество может быть предъявлено явно.

§ 4. Сильное решение для случая $r \in \{2, 3\}$ мер

Определение 3. Для разбиения $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^r$ будем говорить, что множество A *сопоставляется* j-му участнику, если $F_j = A$.

Начнем с построения сильного решения задачи для неатомарных счетно-аддитивных мер в простейшей ситуации двух участников процесса деления, $r = 2$ (алгоритм “Cut and choose”).

По следствию 1 в M имеется подмножество A_1 половинной μ_1-меры. Тогда при $A_2 := M \setminus A_1$ выполняется

$$\mu_1(A_2) = \mu_1(M \setminus A_1) = \mu_1(M) - \frac{1}{2}\mu_1(M) = \frac{1}{2}\mu_1(M).$$

Получаем разбиение M на две части, равные по мере μ_1. Тогда, если второму участнику сопоставить большую (либо равную) относительно меры μ_2 часть (обозначенную через A_2), а оставшуюся часть (обозначенную через A_1) сопоставить первому, то получим сильное решение нашей задачи. Действительно,

$$\mu_1(A_1) = \mu_1(A_2) \implies \mu_1(A_1) \geqslant \mu_1(A_2),$$
$$\mu_2(A_2) \geqslant \mu_2(A_1).$$

На первый взгляд кажется, что эта схема последовательного “деления пополам” легко продолжается и на большее число участников, скажем, $r = 3$. Точнее, первый участник делит M на r равных с его точки зрения частей, а остальные участники

упорядочивают это разбиение каждый в соответствии со своей мерой. Далее, все "спорные" элементы разбиения делятся между парами претендующих на них участников. Фактически к этому алгоритму сводится целый ряд публикаций, популяризирующих задачу справедливого деления. Алгоритм деления конечен и предельно прост, однако его детальный анализ показывает, что в результате будет получено только слабое решение, поскольку может оказаться, что участник, не участвующий в каком то из "делений пополам", получит долю строго меньшую, чем один из других участников (см., например, [10]).

В дальнейшем нам понадобится следующее техническое утверждение[3].

Лемма 2. *Пусть μ – счетно-аддитивный функционал, $M = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} H_i$, и на каждом множестве H_i есть сильное решение $\mathcal{F}_i = \{F_{j,i}\}_{j=1}^{n}$. Тогда разбиение $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j=1}^{n}$ является сильным решением на M, где $F_j = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_{j,i}$.*

Доказательство. Во-первых, $\mathcal{F}$ действительно является разбиением M:

$$\bigsqcup_{j=1}^{n} F_j = \bigsqcup_{j=1}^{n} \bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_{j,i} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{n} F_{j,i} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} H_i = M.$$

Во-вторых, так как $\mu_j(F_{j,i}) \geqslant \mu_j(F_{k,i})\ \forall i, j, k$, то

$$\mu_j(F_j) = \mu_j\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_{j,i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_j(F_{j,i}) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu_j(F_{k,i}) = \mu_j\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_{k,i}\right) = \mu_j(F_k).$$

Значит, $\mathcal{F}$ является сильным решением. ▲

Используя этот результат, разберем построение сильного решения для случая $r = 3$.

Аналогично случаю $r = 2$ разделим сначала M на $r = 3$ равных по мере μ_1 части A_1, A_2 и A_3. Для этого по следствию 1 мы можем выбрать в M такое подмножество A_1, что $\mu_1(A_1) = \frac{1}{3}\mu_1(M)$, а так как

$$\mu_1(M \setminus A_1) = \mu_1(M) - \frac{1}{3}\mu_1(M) = \frac{2}{3}\mu_1(M),$$

то найдется такое $A_2 \subset M \setminus A_1$, что $\mu_1(A_2) = \frac{1}{3}\mu_1(M)$.

Полагая $A_3 := M \setminus (A_1 \cup A_2)$, получаем

$$\mu_1(A_3) = \mu_1(M \setminus (A_1 \cup A_2)) = \mu_1(M \setminus A_1) - \mu_1(A_2) =$$
$$= \frac{2}{3}\mu_1(M) - \frac{1}{3}\mu_1(M) = \frac{1}{3}\mu_1(M).$$

Упорядочим эти множества относительно второй меры. Без ограничения общности положим $\mu_2(A_1) \geqslant \mu_2(A_2) \geqslant \mu_2(A_3)$. Так как $\mu_2(A_1) \geqslant \mu_2(A_2)$, то найдется такое $A' \subset A_1$, что $\mu_2(A') = \mu_2(A_2)$. Поэтому

$$\mu_1(A') \leqslant \mu_1(A_1) = \mu_1(A_2) = \mu_1(A_3).$$

Мы хотим разделить множества A', A_2 и A_3 между участниками. Сопоставим третьему участнику наибольшее относительно его меры из этих множеств. Если

[3] Здесь и далее $\bigsqcup$ обозначает объединение непересекающихся множеств.

это A', то тогда, сопоставив первому A_3, а второму A_2, получим сильное решение на $M' := A' \cup A_2 \cup A_3$. Действительно,

$$\mu_1(A') \leqslant \mu_1(A_2) = \mu_1(A_3),$$
$$\mu_2(A') = \mu_2(A_2) \geqslant \mu_2(A_3).$$

Если $\mu_3(A_2)$ – наибольшее, то эти неравенства доказывают, что если сопоставить первому участнику A_3, а второму A', то полученное разбиение окажется сильным решением.

Наконец, если $\mu_3(A_3)$ – наибольшее, то для получения сильного решения надо сопоставить A_2 первому участнику, а A' – второму.

Далее, будем искать сильное решение на оставшейся части $M_1 = M \setminus M'$. Так как $M' = A' \cup A_2 \cup A_3$, то $M_1 \subset A_1$, а значит,

$$\mu_1(M_1) \leqslant \mu_1(A_1) = \frac{1}{3}\mu_1(M).$$

Заметим, что нумерация мер была абсолютно произвольной, а значит, наш алгоритм позволяет за один шаг уменьшить любую из мер $\{\mu_i\}$ оставшейся части более чем в 3 раза. Получается, что любая из этих мер остатка экспоненциально убывает. Поэтому в пределе мы получим разбиение M на счетное число частей, на которых есть сильное решение, а в остатке получится множество M_∞, нулевое по каждой мере (каждое разбиение M_∞ – сильное решение). Значит, по лемме 2 мы получаем сильное решение на M.

О п р е д е л е н и е 4. Последовательность множеств $\{A_n\}$ назовем *сходящейся*, если верхний предел последовательности

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

совпадает с нижним

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Строгое описание построения последовательности множеств, сходящейся к сильному решению, будет дано при описании алгоритма построения решения для общего случая $r \geqslant 3$ участников.

Приведенный выше элементарный алгоритм построения сильного решения для случая $r = 3$ не удается обобщить для большего числа участников. В первую очередь дело в том, что в процессе перераспределения частей A_i между собой может возникать зацикливание. Поэтому, оставляя в силе индукционную схему процесса деления, мы предлагаем иную, несколько более сложную конструкцию (см. следующий параграф).

Также стоит заметить, что даже если мы умеем решать задачу для мер, остается еще важная ситуация, когда функционалы являются зарядами. Обсудим возможные подходы к решению этой задачи. Начнем с ситуации, когда рассматриваемые заряды строго отрицательны, т.е. взятые с обратным знаком $\{-\mu_i\}$ являются счетно-аддитивными мерами.

На первый взгляд кажется, что если эти меры являются вероятностными[4], то рассматриваемая постановка сводится к предыдущей заменой $\{\mu_i\}$ на набор поло-

[4] Мера μ на (M, Σ) называется вероятностной, если $\mu(M) = 1$.

жительных функционалов $\{1-\mu_i\}$. Однако функционалы $1-\mu_i$ не аддитивны, что означает, что они не являются мерами.

Действительно, если бы функционал $\varphi = 1-\mu$ был бы аддитивен, то

$$\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B) = (1-\mu(A)) + (1-\mu(B)) = 2 - \mu(A) - \mu(B),$$
$$\varphi(A \sqcup B) = 1 - \mu(A \sqcup B) = 1 - \mu(A) - \mu(B).$$

Приходим к противоречию:

$$2 - \mu(A) - \mu(B) = 1 - \mu(A) - \mu(B).$$

Поэтому даже для случая строго отрицательных зарядов необходима специальная конструкция процесса построения сильного решения, которая будет описана в § 6.

§ 5. Построение сильного решения для случая $r > 3$ мер

Частным случаем теоремы 1 является ситуация, когда функционалы $\{\mu_i\}_{i=1}^r$ являются мерами. Ниже мы сформулируем и докажем это утверждение.

Теорема 3. *Для любых неатомарных счетно-аддитивных мер $\{\mu_i\}_{i=1}^r$ имеется явный конструктивный алгоритм построения сильного решения задачи о справедливом делении.*

Определение 5. Для дизъюнктного[5] набора множеств $\{A_i\}_{i=1}^r$ *предпочтением k-го участника*[6] назовем такой индекс j, что $\mu_k(A_j) \geqslant \mu_k(A_i)$ для любого i.

Лемма 3. *Для заданного набора мер $\{\mu_i\}_{i=1}^r$ и любого индекса k из произвольного измеримого множества $S \subset \Sigma$ можно выделить его подмножество $H \subset S$ "большой" меры*

$$\mu_k(H) \geqslant \frac{1}{2^{r-1}}\mu_k(S),$$

на котором существует сильное решение задачи о справедливом делении.

Доказательство. Для удобства перенумеруем меры $\{\mu_i\}$ так, чтобы мера μ_k имела индекс 1.

На первом шаге разделим S на 2^{r-1} частей $A_1^1, \ldots, A_{2^{r-1}}^1$ равных по мере μ_1. Для этого мы последовательно будем рассматривать в S подмножества A_i^1. Во-первых, по следствию 1 существует такое множество A_1^1, что

$$\mu_1(A_1^1) = \frac{1}{2^{r-1}}\mu_1(S).$$

Далее, на t-м шаге в $S \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{t-1} A_i^1$ найдется такое подмножество A_i^1, что

$$\mu_1(A_t^1) = \frac{1}{2^{r-1}}\mu_1(S),$$

так как

$$\mu_1\left(S \setminus \bigcup_{i=1}^{t} A_i^1\right) = \frac{2^{r-1}-t}{2^{r-1}}\mu_1(S).$$

[5] Множества $\{A_i\}$ называются дизъюнктными, если они попарно не пересекаются.

[6] Как нам указал рецензент, похожая конструкция предпочтений была описана в работе [15], где было проанализировано несколько примеров для 3 и 4 участников.

Заметим, что за $2^{r-1}-1$ шагов мы получим искомое разбиение, так как если

$$A_{2^{r-1}} = S \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{r-1}-1} A_i^1,$$

то

$$\mu_1\left(S \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{r-1}-1} A_i^1\right) = \frac{2^{r-1}-(2^{r-1}-1)}{2^{r-1}}\mu_1(S) = \frac{1}{2^{r-1}}\mu_1(S).$$

Обозначим полученные на t-м шаге множества через $A_1^t, \ldots, A_{2^{r-1}}^t$. Каждый наш следующий шаг (на котором мы будем выделять некоторые предпочтения участников) будет состоять в изменении текущего набора множеств. Пусть K_i^t – набор выделенных предпочтений i-го участника на t-м шаге. На первом шаге $K_1^1 = \{1, \ldots, 2^{r-1}\}$ (все A_i^1 являются его предпочтениями), а остальные K_i^1 оставим пустыми.

Далее на t-м шаге мы делаем следующее.

Упорядочим все множества $A_1^{t-1}, \ldots, A_{2^{r-1}}^{t-1}$ по мере μ_t и рассмотрим 2^{r-t} наибольших среди них:

$$\mu_1\big(A_{k_1}^{t-1}\big) \geqslant \mu_1\big(A_{k_2}^{t-1}\big) \geqslant \ldots \geqslant \mu_1\big(A_{k_{2^{r-t}}}^{t-1}\big).$$

Тогда в каждом множестве $A_{k_i}^{t-1}$ найдется подмножество

$$A'_{k_i} \subset A_{k_i}^{t-1} : \ \mu_t\big(A'_{k_i}\big) = \mu_t\big(A_{k_{2^{r-t}}}^{t-1}\big).$$

Новый набор A_i^t – это набор A_i^{t-1}, в котором элементы $A_{k_i}^{t-1}$ заменены на A'_{k_i}. Набор новых выделенных предпочтений K_i^t таков, что $K_t^t = \{k_1, \ldots, k_{2^{r-t}}\}$, а $K_i^t = K_i^{t-1} \setminus K_t^t$ при $i \neq t$ (в частности, $K_i^t = \varnothing$ при $i > t$).

Проверим индукцией по t, что на каждом шаге выполняются следующие свойства:

1. Множества K_i^t дизъюнктные;
2. $|K_j^t| \geqslant 2^{r-t}$ при $j \leqslant t$;
3. Для любого j и $k \in K_j^t$ верно, что A_k^t – предпочтение j-го участника.

Проверим базу индукции:

1. $K_1^1 = \{1, \ldots, 2^{r-1}\}$, а остальные K_i^1 пустые, что означает, что они дизъюнктны;
2. Для $j = 1$ имеем $|K_j^1| = |K_1^1| = 2^{r-1}$;
3. При $j = 1$ для любого k верно, что A_k^1 – предпочтение 1-го участника по построению. При $j \neq 1$ имеем $K_j^1 = \varnothing$.

Доказательство шага индукции:

1. При $j > t$ множества K_j^t пустые, а значит, с ними никто пересекаться не может. При $s, k < t$ множества $K_s^t = K_s^{t-1} \setminus K_t^t$ и $K_k^t = K_k^{t-1} \setminus K_t^t$ не пересекаются, так как K_s^{t-1} и K_k^{t-1} не пересекались по предположению индукции. Для $j = t$ и $s < t$ множества K_t^t и $K_s^t = K_s^{t-1} \setminus K_t^t$ не пересекаются. Это означает, что K_i^t не пересекаются.
2. $|K_t^t| \geqslant 2^{r-t}$, так как $|K_t^t| = 2^{r-t}$, а для $j \leqslant t-1$

$$|K_j^t| = |K_j^{t-1} \setminus K_t^t| \geqslant |K_j^{t-1}| - |K_t^t| \geqslant 2^{r-(t-1)} - 2^{r-t} = 2^{r-t}$$

(по предположению индукции $|K_j^{t-1}| \geqslant 2^{r-(t-1)}$ при $j \leqslant t-1$).

3. Для любого $j \leqslant t-1$ имеем $K_j^t = K_j^{t-1} \setminus K_t^t$. По предположению индукции A_i^{t-1} с индексами, лежащими в K_j^{t-1}, были предпочтениями j-го участника. Далее, t-й шаг состоит в изменении множеств с индексами, лежащими в K_t^t, каждое из них заменяется на некоторое подмножество, а значит, его мера μ_j уменьшается. Получается, что множества с индексами из $K_j^t = K_j^{t-1} \setminus K_t^t$ остались предпочтениями j-го участника. Для $k \in K_t^t$ имеем $\mu_t(A_k^t) = \mu_t(A_{k_{2^{r-1}}}^{t-1})$, а значит, так как $\mu_t(A_{k_{2^{r-1}}}^{t-1})$ по построению – наибольшее из значений $\mu_t(A_i^t)$, то A_k^t – предпочтение j-го участника.

В итоге на r-м шаге $|K_i^r| \geqslant 2^{r-r} = 1$ для любого i, и следовательно, у каждого участника будет ровно по одному предпочтению, которые не совпадают между собой из-за дизъюнктности $\{K_i^r\}$. Сопоставим i-му участнику его предпочтение F_i.

При этом первому сопоставлено такое множество F_1, что

$$\mu_1(F_1) = \frac{1}{2^{r-1}}\mu_1(S),$$

так как по построению мы убираем из выделенных предпочтений первого участника те, что мы изменили.

Это означает, что множество $H = \bigsqcup_{i=1}^{r} F_i$ является искомым, так как

$$\mu_1(H) \geqslant \mu_1(F_1) = \frac{1}{2^{r-1}}\mu_1(S),$$

а также $\mu_i(F_i) \geqslant \mu_i(F_j)$ для любых i и j, так как F_i – предпочтение i-го участника. ▲

Определение 6. Полученное в лемме 3 множество H будем называть *μ_k-удовлетворяющим подмножеством S*.

Построим новую последовательность множеств $\{H_i\}$ по следующим правилам:

- H_1 – μ_1-удовлетворяющее подмножество $M = M_0$;
- Если $k \bmod r \neq 0$, то $t = k \bmod r$, в противном случае $t = r$;
- H_k – μ_t-удовлетворяющее подмножество $M \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} H_i$;
- $M_s = M \setminus \bigcup_{i=1}^{sr} H_i$.

Определим также усредненную меру

$$\mu(A) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_i(A).$$

Иначе говоря, мы по очереди для каждой меры выделяем множества, которые не меньше $1/2^{r-1}$ очередной меры остатка $M \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} H_i$. Действительно,

$$\mu_t(H_k) \geqslant 2^{-(r-1)}\mu_t\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} H_i\right).$$

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\mu(M_s) \leqslant \frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}}\mu(M_{s-1}).$$

Доказательство. Для любого j имеем

$$\mu_j\left(\bigcup_{i=(s-1)r+1}^{sr} H_i\right) = \mu_j\big(H_{(s-1)r+j}\big) + \mu_j\left(\bigcup_{i=(s-1)r+1}^{sr} H_i \setminus H_{(s-1)r+j}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-(r-1)}\mu_j\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{(s-1)r+j-1} H_i\right) + \mu_j\left(\bigcup_{i=(s-1)r+1}^{sr} H_i \setminus H_{(s-1)r+j}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-(r-1)}\left(\mu_j\left(M_{s-1} \setminus \bigcup_{i=(s-1)r+1}^{(s-1)r+j-1} H_i\right) + \mu_j\left(\bigcup_{i=(s-1)r+1}^{sr} H_i \setminus H_{(s-1)r+j}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-(r-1)}\mu_j\left(\left(M_{s-1} \setminus \bigcup_{i=(s-1)r+1}^{(s-1)r+j-1} H_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=(s-1)r+1}^{sr} H_i \setminus H_{(s-1)r+j}\right)\right) =$$

$$= 2^{-(r-1)}\mu_j\left(M_{s-1} \cup \left(\bigcup_{i=(s-1)r+j+1}^{sr} H_i\right)\right) \geqslant 2^{-(r-1)}\mu_j(M_{s-1}).$$

Следовательно,

$$\mu_j(M_s) = \mu_j\left(M_{s-1} \setminus \bigcup_{i=(s-1)r+1}^{sr} H_i\right) = \mu_j(M_{s-1}) - \mu_j\left(\bigcup_{i=(s-1)r+1}^{sr} H_i\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}}\mu_j(M_{s-1}).$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j(M_s) \leqslant \frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}} \sum_{j=1}^{r} \mu_j(M_{s-1}).$$

Окончательно получаем

$$\mu(M_s) \leqslant \frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}}\mu(M_{s-1}). \quad \blacktriangle$$

Следствие 2. *Справедливо неравенство*

$$\mu(M_s) \leqslant \left(\frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}}\right)^s \mu(M).$$

Следствие 3. *Пусть*

$$M_\infty = M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i,$$

тогда $\mu_j(M_\infty) = 0$ *для любого* j.

Доказательство. Устремим в следствии 2 параметр s к бесконечности. Поскольку

$$\frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}} < 1,$$

то $\mu(M_\infty) \leqslant 0$, а из неотрицательности меры μ следует, что $\mu(M_\infty) = 0$. Так как

$$\mu(M_\infty) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(M_\infty),$$

то получаем требуемое утверждение. ▲

Таким образом, мы представили M в следующем виде: $M = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} H_i$, где на каждом H_i имеется сильное решение $\mathcal{F}_i = \{F_{j,i}\}_{j=1}^{n}$. (На M_∞ есть сильное решение, при котором первой мере сопоставлено M_∞, а остальным – пустое множество, поэтому будем считать, что $M_\infty = H_0$.) Это означает, что по лемме 2 существует сильное решение на M.

Для каждой меры μ_j рассмотрим последовательность множеств

$$N_{j,k} = \bigsqcup_{i=0}^{kr} F_{j,i}.$$

Лемма 5. *Последовательность множеств $N_{j,k}$ сходится по k, причем предел последовательности $N_{j,k}$ равен*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N_{j,k} =: N_j^\infty.$$

Доказательство. Так как $N_{j,k} \subset N_{j,k+1}$, то

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} N_{j,k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{j,k} = N_j^\infty.$$

Это означает, что верхний предел $N_{j,k}$ удовлетворяет соотношению

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} N_{j,k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_j^\infty = N_j^\infty.$$

С другой стороны,

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} N_{j,k} = N_{j,n}.$$

Следовательно, нижний предел

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} N_{j,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{j,n} = N_j^\infty,$$

что и требовалось доказать. ▲

Лемма 6. $\{N_j^\infty\}_{j=1}^{r}$ – *сильное решение на M.*

Доказательство. Поскольку множества $F_{j,i}$ не пересекаются при разных j, то $N_j^\infty \cap N_l^\infty = \varnothing$ при $j \neq l$.

С другой стороны,

$$\bigcup_{j=1}^{r} N_j^\infty = \bigcup_{j=1}^{r} \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{j,k} = \bigcup_{j=1}^{r} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=0}^{kr} F_{j,i} = \bigcup_{j=1}^{r} \bigcup_{i=0}^{\infty} F_{j,i} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i = M.$$

Поэтому $M = \bigsqcup_{j=1}^{r} N_j^{\infty}$.

Так как по лемме 2 выполняется

$$N_j^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{j,k},$$

то $\mu_j(N_j^{\infty}) \geqslant \mu_j(N_l^{\infty})$ при всех j, l, что завершает доказательство. ▲

§ 6. Построение сильного решения для зарядов

Перейдем к случаю неатомарных счетно-аддитивных зарядов $\{\psi_i\}_{i=1}^r$.

Для каждого заряда ψ_i рассмотрим соответствующие ему множества A_i^+ и A_i^- из разложения Хана – Жордана. Тогда пересечения наборов множеств $\{A_i^+, A_i^-\}$ разбивают все множество M на 2^r частей, ограничение ψ_i на каждой из которых является либо мерой, либо минус мерой.

Поэтому по лемме 2 нам достаточно научиться решать задачу на каждой из этих 2^r частей. Согласно предыдущему параграфу задача уже решена для тех частей, где все ограничения на нее зарядов положительны.

Обозначим полученные части через $X_1, \ldots, X_{2^r}$ и рассмотрим одну из этих частей, которую мы для простоты обозначим через X.

Определение 7. Обозначим через I^+ (I^-) множество индексов i, для которых ограничение заряда ψ_i на X является мерой (минус мерой).

Возможны два случая: $I^+ \neq \varnothing$ и $I^+ = \varnothing$. Рассмотрим сначала первый из них.

Лемма 7. *Если $I^+ \neq \varnothing$, то на X есть сильное решение.*

Доказательство. По теореме 3 на множестве X существует сильное решение $\mathcal{F}^+ := \{F_i\}_{i\in I^+}$ для мер $\{\psi_i\}_{i\in I^+}$. Дополним набор $\mathcal{F}^+$ до набора $\mathcal{F} := \{F_i\}_{i=1}^r$ множествами $F_i = \varnothing$ для $i \in I^-$.

Тогда для $i \in I^-$ и любого j выполнено

$$\psi_i(F_i) = \psi_i(\varnothing) = 0 \geqslant \psi_i(F_j),$$

так как на рассматриваемом множестве i-я мера со знаком отрицательна.

Если $i \in I^+$ и $j \in I^+$, то $\psi_i(F_i) \geqslant \psi_i(F_j)$, так как $\mathcal{F}^+$ – сильное решение для положительных мер. Если же $i \in I^+$ и $j \in I^-$, то

$$\psi_i(F_i) \geqslant 0 = \psi_i(\varnothing) = \psi_i(F_j). \quad ▲$$

Осталось построить сильное решение на множестве, ограничение любого рассматриваемого заряда на которое является минус мерой. Для этого надо заметить, что задача поиска сильного решения для минус мер равносильна поиску следующего разбиения.

Определение 8. В задаче о справедливом делении с набором мер $\{\mu_i\}_{i=1}^r$ разбиение $\mathcal{F}$ назовем *джентльменским* решением, если

$$\mu_i(F_i) \leqslant \mu_i(F_j)$$

для любых i, j.

Отметим, что поскольку выполнен переход к минус мере, то знак неравенства изменен на противоположный по сравнению с определением 1.

В литературе по экономике эту постановку часто называют “chore division”. Нетрудно понять, что с точки зрения решения задачи о справедливом делении с набором строго отрицательных зарядов $\{\psi_i = -\mu_i\}_{i=1}^r$ эти две постановки эквивалентны.

Аналогично лемме 2 доказывается следующий ее вариант.

Лемма 8. *Пусть μ – счетно-аддитивный функционал, $M = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i$ и на каждом множестве H_i есть джентльменское решение $\mathcal{F}_i = \{F_{j,i}\}_{j=1}^{n}$. Тогда разбиение $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j=1}^{n}$, где $F_j = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} F_{j,i}$, является сильным решением на M.*

Доказательство. Так как $\mu_j(F_{j,i}) \leqslant \mu_j(F_{k,i})$ для любых i, j, k, то

$$\mu_j(F_j) = \mu_j\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_{j,i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_j(F_{j,i}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu_j(F_{k,i}) = \mu_j\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_{k,i}\right) = \mu_j(F_k). \quad \blacktriangle$$

Пусть множество $S \in \Sigma$ удовлетворяет условию $\prod\limits_{i=1}^{r} \mu_i(S) \neq 0$.

Лемма 9. *Найдутся множества $R^1, \ldots, R^r$, $\bigsqcup\limits_i R^i \subset S$, и такая перенумерация мер $\mu_{l_1}, \ldots, \mu_{l_r}$, что для любого k выполнено*

$$\mu_{l_k}(R^k) = \frac{1}{r}\mu_{l_k}(S),$$

а для $j > k$ выполнено

$$\mu_{l_j}(R^k) \leqslant \frac{1}{r}\mu_{l_k}(S).$$

Доказательство. Будем последовательно строить этот набор множеств. На первом шаге мы рассмотрим такое $R_1^1 \subset S$, что

$$\mu_1(R_1^1) = \frac{1}{r}\mu_1(S).$$

Далее, если на t-м шаге

$$\mu_t(R_{t-1}^1) > \frac{1}{r}\mu_t(S),$$

то R_t^1 – такое подмножество R_{t-1}^1, что $\mu_t(R_t^1) = \frac{1}{r}\mu_t(S)$, а в противном случае $R_t^1 = R_{t-1}^1$.

В конце r-го шага мы получим множество $R^1 = R_r^1$. Через l_1 обозначим тот номер шага, после которого мы больше не изменяли R_i^1. Тогда по построению μ_{l_1} и R^1 удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu_{l_1}(R^1) = \frac{1}{r}\mu_{l_1}(S), \quad \mu_j(R^1) \leqslant \frac{1}{r}\mu_j(S), \quad j \neq l_1.$$

Теперь на k-м шаге аналогичным образом будем из множества $S \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{k-1} R^i$ для всех мер, кроме $\mu_{l_1}, \ldots, \mu_{l_{k-1}}$, выделять R^k и меру μ_{l_k}, такую что

$$\mu_{l_k}(R^k) = \frac{1}{r}\mu_{l_k}(S)$$

и

$$\mu_j(R^k) \leqslant \frac{1}{r}\mu_j(S) \quad \text{для всех } j \notin \{l_1, \ldots, l_k\}.$$

Нам надо лишь проверить, что мы можем сделать первое действие k-го шага, т.е. по какой-то мере μ_j для $j \notin \{l_1, \ldots, l_{k-1}\}$ мера остатка не меньше $\frac{1}{r}\mu_j(S)$.

По построению

$$\mu_j(R^i) \leqslant \frac{1}{r}\mu_j(S)$$

для любого $j \notin \{l_1, \ldots, l_{k-1}\}$. Следовательно,

$$\mu_j\left(S \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k-1} R^i\right) = \mu_j(S) - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_j(R^i) \geqslant \mu_j(S)\left(1 - \frac{k-1}{r}\right).$$

Поэтому для $k \leqslant r$ мы можем сделать этот шаг, и в результате получим искомое упорядочение мер μ_{l_i} и множества R^i. ▲

Определение 9. В случае джентльменского решения для дизъюнктного набора множеств $\{A_i\}_{i=1}^r$ *предпочтением k-го участника* назовем такой индекс j, что

$$\mu_k(A_j) \leqslant \mu_k(A_i) \quad \forall i.$$

Лемма 10. *Для заданного набора мер $\{\mu_i\}_{i=1}^r$ из любого множества $S \subset M$ можно выделить такое подмножество H, что если $\{\mu_{l_i}\}_{i=1}^r$ – упорядочение мер для S из леммы* 9, *то*

$$\mu_{l_1}(H) \geqslant \frac{1}{2^{r-1}}\mu_{l_1}(S)$$

и на H имеется джентльменское решение.

Доказательство. Для простоты записи будем нумеровать меры μ_i, а не μ_{l_i}, запомнив, что нумерация не произвольная, так как она зависит от множества, которое мы делим.

Сначала разделим R^1 на 2^{r-1} частей, равных по мере μ_1. Обозначим полученные элементы разбиения на t-м шаге через $A_1^t, \ldots, A_{2^{r-1}}^t$, а выделенные предпочтения i-го участника на t-м шаге – множествами K_i^t. На первом шаге положим $K_1^1 := \{1, \ldots, 2^{r-1}\}$ (все A_i^1 являются его предпочтениями), а остальные K_i^1 оставим пустыми.

Далее на t-м шаге мы делаем следующее.

Упорядочим все множества $A_1^{t-1}, \ldots, A_{2^{r-1}}^{t-1}$ по мере μ_t и рассмотрим любые 2^{r-t} наименьших среди них:

$$\mu_1\big(A_{k_1}^{t-1}\big) \leqslant \mu_1\big(A_{k_2}^{t-1}\big) \leqslant \ldots \leqslant \mu_1\big(A_{k_{2^{r-t}}}^{t-1}\big).$$

Мы хотим отделить от R^t такой набор множеств $C_1^{t-1}, \ldots, C_{2^{r-t}}^{t-1}$, что $\forall i$

$$\mu_t\big(C_i^{t-1}\big) = \mu_t\big(A_{k_{2^{r-t}}}^{t-1}\big) - \mu_t\big(A_{k_i}^{t-1}\big).$$

Тогда новый набор A_i^t является "отредактированным" набором A_i^{t-1}, в котором элементы $A_{k_i}^{t-1}$ заменены на $A_{k_i}^{t-1} \sqcup C_i^{t-1}$. Набор новых выделенных предпочтений K_i^t таков, что $K_t^t = \{k_1, \ldots, k_{2^{r+1-t}}\}$, а для $i \neq t$ имеем $K_i^t = K_i^{t-1} \setminus K_t^t$ (в частности, $K_i^t = \varnothing$ для $i > t$).

Заметим, что мы можем сделать этот шаг, если

$$\sum_{i=1}^{2^{r-t}} \mu_t(C_i^{t-1}) \leqslant \mu_t(R^t).$$

Далее, имеем

$$\sum_{i=1}^{2^{r-t}} \mu_t\big(C_i^{t-1}\big) = \sum_{i=1}^{2^{r-t}} \Big(\mu_t\big(A_{k_{2r-t}}^{t-1}\big) - \mu_t\big(A_{k_i}^{t-1}\big)\Big) \leqslant 2^{r-t}\mu_t\big(A_{k_{2r-t}}^{t-1}\big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{r-t}}{2^{r-1}-2^{r-t}} \sum_{i=2^{r-t}+1}^{2^{r-1}} \mu_t\big(A_{k_i}^{t-1}\big).$$

Так как все множества A_i^{t-1} содержатся в объединении $R^1, \ldots, R^{t-1}$, то

$$\mu_t\left(\bigsqcup_{i=1}^{2^{r-1}} A_i^{t-1}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{t-1} \mu_t(R^j) \leqslant \frac{t-1}{r}\mu_t(S).$$

Последнее неравенство следует из построения R^i.

Таким образом,

$$\sum_{i=2^{r-t}+1}^{2^{r-1}} \mu_t\big(A_{k_i}^{t-1}\big) \leqslant \mu_t\left(\bigsqcup_{i=1}^{2^{r-1}} A_i^{t-1}\right) \leqslant \frac{t-1}{r}\mu_t(S).$$

Поскольку $\dfrac{t-1}{2^{t-1}-1} \leqslant 1$ при $t \geqslant 2$, то

$$\frac{2^{r-t}}{2^{r-1}-2^{r-t}} \sum_{i=2^{r-t}+1}^{2^{r-1}} \mu_t\big(A_{k_i}^{t-1}\big) \leqslant \frac{2^{r-t}}{2^{r-1}-2^{r-t}} \frac{t-1}{r}\mu_t(S) =$$

$$= \frac{t-1}{(2^{t-1}-1)r}\mu_t(S) \leqslant \frac{1}{r}\mu_t(S) = \mu_t(R^t).$$

Аналогично предыдущей рассмотренной ситуации индукцией по t доказываются следующие утверждения:

1. Множества K_i^t дизъюнктивны;
2. $|K_j^t| \geqslant 2^{r-t}$ при $j \leqslant t$;

а для доказательства пункта 3 нам понадобится следующее рассуждение:

3. Для любого j и $k \in K_j^t$ верно, что A_k^t – предпочтение j-й меры. Необходимо лишь отметить, что изменение частей происходит путем их объединения, а значит, части ни по какой мере не уменьшаются, а потому не могут стать предпочтениями, если они ими не были исходно. Кроме того, по построению множество K_t^t состоит только из предпочтений t-й меры.

На r-м шаге у каждого участника будет хотя бы $2^{r-r} = 1$ предпочтений, не совпадающих между собой. Сопоставим каждому участнику свое предпочтение F_i. Заметим, что при этом первому участнику сопоставлено такое множество F_1, что $\mu_1(F_1) = 1/2^{r-1}\mu_1(R^1)$, так как по построению мы убираем из выделенных предпочтений первого участника те, что мы изменили.

Также надо заметить, что $\mu_1(F_1) \leqslant \mu_1(F_j)$ для любого j, так как исходные множества A_i^1 только увеличивались. Поэтому

$$\mu_1(H) = \mu_1\left(\bigsqcup_{j=1}^{r} F_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \mu_1(F_j) \geqslant \sum_{j=1}^{r} \mu_1(F_1) = r\mu_1(F_1) = r\frac{1}{2^{r-1}}\mu_1(R^1) =$$

$$= r\frac{1}{2^{r-1}}\frac{1}{r}\mu_1(S) = 2^{-(r-1)}\mu_1(S).$$

Таким образом, разбиение $H = \bigsqcup\limits_{i=1}^{r} F_i$ удовлетворяет всем требуемым условиям. ▲

Теорема 4. *Для неатомарных счетно-аддитивных мер $\{\mu_i\}_{i=1}^r$ найдется джентльменское деление.*

Доказательство. Докажем индукцией по количеству участников, что существует джентльменское деление M.

Проверим базу индукции $r = 1$. Для одного участника существует единственное разбиение с $F_1 = M$, и оно, очевидно, джентльменское.

Проверим шаг индукции.

Определение 10. Множество H, полученное в лемме 10, назовем *μ_{l_1}-удовлетворяющим подмножеством S.*

Определим по индукции последовательность множеств H_i:

- H_1 – μ_{h_1}-удовлетворяющее подмножество $M = M_0$;
- H_k – μ_{h_k}-удовлетворяющее подмножество $M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} H_i$;
- $M_\infty = M \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i$.

Все индексы $h_1, h_2, \ldots$ принадлежат конечному множеству $\{1, \ldots, r\}$. Это значит, что один из них повторяется бесконечно много раз, обозначим его через ℓ.

Лемма 11. *Пусть $k_1 < k_2 < \ldots$ – набор всех индексов i, при которых $h_i = \ell$. Тогда*

$$\mu_\ell\left(M \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k_{i+1}} H_i\right) \leqslant \left(\frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}}\right)^{i+1} \mu_\ell(M).$$

Доказательство. Имеем

$$\mu_\ell\left(\bigsqcup_{i=k_i+1}^{k_{i+1}} H_i\right) = \mu_\ell(H_{k_{i+1}}) + \mu_\ell\left(\bigcup_{i=k_i+1}^{k_{i+1}} H_i \setminus H_{k_{i+1}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-(r-1)}\mu_\ell\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k_{i+1}-1} H_i\right) + \mu_\ell\left(\bigcup_{i=k_i+1}^{k_{i+1}} H_i \setminus H_{k_{i+1}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-(r-1)}\left(\mu_\ell\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k_{i+1}-1} H_i\right) + \mu_\ell\left(\bigcup_{i=k_i+1}^{k_{i+1}} H_i \setminus H_{k_{i+1}}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-(r-1)}\mu_\ell\left(M \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k_i} H_i\right).$$

Следовательно,

$$\mu_\ell\left(M \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k_{i+1}} H_i\right) \leqslant \frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}}\mu_\ell\left(M \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k_i} H_i\right).$$

Окончательно получаем

$$\mu_\ell\left(M \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k_{i+1}} H_i\right) \leqslant \left(\frac{2^{r-1}-1}{2^{r-1}}\right)^{i+1} \mu_\ell(M). \quad ▲$$

Следствие 4. *Переходя к пределу в лемме* 11 *по числу рассматриваемых индексов* i, *получаем* $\mu_\ell(M_\infty) = 0$.

По предположению индукции для мер с индексами $i \in \{1, 2 \dots r\} \setminus \ell$ имеется джентльменское решение $\mathcal{F}^* = \{F_i\}$ на M_∞. Тогда при $F_\ell = \varnothing$ разбиение

$$\mathcal{F} := \{F_i\}_{i=1}^r$$

на M_∞ является джентльменским решением для всех r мер.

Действительно, так как $\mathcal{F}^*$ – джентльменское решение для мер с индексами $i \in \{1, 2 \dots r\} \setminus \ell$, то нам надо проверить только неравенства, содержащие условия, связанные с ℓ-м участником:

$$\mu_i(F_i) \geqslant 0 = \mu_i(\varnothing) = \mu_i(F_\ell),$$
$$\mu_\ell(F_\ell) = \mu_\ell(\varnothing) = 0 = \mu_\ell(M_\infty) \geqslant \mu_\ell(F_i).$$

Получаем

$$M = M_\infty \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} H_i \right),$$

причем на каждом элементе разбиения имеется джентльменское решение. Это означает, что по лемме 8 существует искомое разбиение. ▲

По настоятельной просьбе анонимного рецензента привести простой понятный пример в малой размерности для двух участников мы разберем эту простейшую ситуацию детально. Заметим, во-первых, что ни размерность, ни геометрия в рассматриваемой постановке никакого значения не имеют, а во-вторых, для двух участников сильное решение для зарядов можно получить методом “Cut and choose”. Тем не менее, возможно, существенно более сложная конструкция при формальной реализации алгоритма, описанного в § 6, для $r = 2$ поможет для понимания общей ситуации при $r > 2$.

По заданным зарядам ψ_1, ψ_2 построим два разбиения пространства

$$M = M_1^+ \sqcup M_1^- = M_2^+ \sqcup M_2^-,$$

соответствующие положительным и отрицательным частям зарядов ψ_1, ψ_2. Положим

$$M^{++} := M_1^+ \cap M_2^+, \quad M^{+-} := M_1^+ \cap M_2^-,$$
$$M^{-+} := M_1^- \cap M_2^+, \quad M^{--} := M_1^- \cap M_2^-.$$

Заметим, что

$$\{M^{++}, M^{+-}, M^{-+}, M^{--}\}$$

– это вновь разбиение M. Согласно построению сильного решения для зарядов части M^{++} и M^{--} делятся между участниками “пополам”, часть M^{+-} целиком отдается первому участнику, а часть M^{-+} целиком отдается второму.

На этом процесс построения сильного решения для двух участников заканчивается, поскольку необходимость в итерационной схеме возникает только при $r > 2$.

§ 7. Заключение

В настоящей статье предложен простой экспоненциально быстро сходящийся алгоритм построения сильного решения задачи справедливого деления для случая индивидуальных критериев, описываемых неатомарными зарядами. Как уже было

отмечено в § 1, имеются публикации [11, 12], в которых описываются конечные алгоритмы решения этой задачи для случаев строго положительных и строго отрицательных мер соответственно (пусть и с астрономической оценкой числа необходимых операций). К сожалению, эти публикации написаны с не вполне математическим уровнем строгости (приводимые в них доказательства скорее являются подробными описаниями блок-схемы программы), а сами алгоритмы настолько сложны, что проверка адекватности их работы представляется затруднительной. По-видимому, здесь необходимо что-то вроде доказательств с использованием компьютера (computer-assisted proof). Во всяком случае, проверить их "вручную" даже для небольшого числа участников нам не удалось. Тем не менее, если эти алгоритмы действительно работают, то их сочетание с описанной в § 6 схемой разбиения пространства на носители положительных и отрицательных частей зарядов и работой с их комбинациями приводит к конечному алгоритму построения сильного решения.

Отметим, что несмотря на кажущуюся похожесть рассматриваемой задачи справедливого деления с более известной постановкой многокритериальной оптимизации по Парето они принципиально различны. Под оптимальностью по Парето понимается такое состояние системы, при котором ни один ее показатель не может быть улучшен без ухудшения какого-либо другого показателя. Нетрудно понять, что любое оптимальное по Парето состояние оказывается сильным решением задачи справедливого деления, однако последняя постановка является значительно более гибкой и позволяет исследовать более широкий класс систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brams S.J., Jones M.A., Klamler C.* Better Ways to Cut a Cake // Notices Amer. Math. Soc. 2006. V. 53. № 11. P. 1314–1321.
2. *Moulin H.* Fair Division and Collective Welfare. Cambridge: MIT Press, 2003.
3. *Brams S.J.* Mathematics and Democracy: Designing Better Voting and Fair Division Procedures. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2008.
4. *Barbanel J.B., Brams S.J., Stromquist W.* Cutting a Pie Is Not a Piece of Cake // Amer. Math. Monthly. 2009. V. 116. № 6. P. 496–514. https://doi.org/10.1080/00029890.2009.11920966
5. *Dubins L.E., Spanier E.H.* How to Cut a Cake Fairly // Amer. Math. Monthly. 1961. V. 68. № 1. Part 1. P. 1–17. https://doi.org/10.1080/00029890.1961.11989615
6. *Ляпунов А.А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. № 6. С. 465–478. https://www.mathnet.ru/rus/im3907
7. *Halmos P.R.* The Range of a Vector Measure // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. № 4. P. 416–421. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1948-09020-6
8. *Stromquist W.* How to Cut a Cake Fairly // Amer. Math. Monthly. 1980. V. 87. № 8. P. 640–644. https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995109
9. *Su F.E.* Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division // Amer. Math. Monthly. 1999. V. 106. № 10. P. 930–942. https://doi.org/10.2307/2589747
10. *Stromquist W.* Envy-free Cake Divisions Cannot Be Found by Finite Protocols // Electron. J. Combin. 2008. V. 15. № 1. Research Paper R11 (10 pp.). https://doi.org/10.37236/735
11. *Aziz H., Mackenzie S.* A Discrete and Bounded Envy-free Cake Cutting Protocol for Any Number of Agents // Proc. 2016 IEEE 57th Annu. Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS'2016). New Brunswick, NJ, USA. Oct. 9–11, 2016. Los Alamitos, CA: IEEE Comp. Soc., 2016. P. 416–427. https://doi.org/10.1109/FOCS.2016.52
12. *Dehghani S., Farhadi A., HajiAghayi M.T., Yami H.* Envy-free Chore Division for an Arbitrary Number of Agents // Proc. 29th Annu. ACM–SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'2018). New Orleans, LA, USA. Jan. 7–10, 2018. Philadelphia, PA: SIAM, 2018. P. 2564–2583. https://doi.org/10.1137/1.9781611975031.164
13. *Segal-Halevi E.* Fairly Dividing a Cake after Some Parts Were Burnt in the Oven. https://arxiv.org/abs/1704.00726v5 [math.CO], 2018.

14. *Бланк М.Л.* Как делить неделимое // Докл. Акад. наук. 2016. Т. 471. № 6. С. 635–639. https://doi.org/10.7868/S0869565216360044
15. *Segal-Halevi E., Hassidim A., Aumann Y.* Waste Makes Haste: Bounded Time Algorithms for Envy-free Cake Cutting with Free Disposal // ACM Trans. Algorithms. 2016. V. 13. № 1. Art. 12 (32 pp.). https://doi.org/10.1145/2988232

Бланк Михаил Львович
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва
Высшая школа современной математики МФТИ, Москва
blank@iitp.ru
Поляков Максим Олегович
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва
pmaxol73@gmail.com

Поступила в редакцию
18.01.2024
После доработки
23.05.2024
Принята к публикации
23.05.2024