ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 59 **2023** **Вып. 2**

УДК 621.391 : 519.218.5

© 2023 г. **Е.А. Жижина, С.А. Пирогов**

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ КОНТАКТОВ С ИНТЕНСИВНОСТЯМИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ

Рассматриваются процессы контактов на локально компактных сепарабельных метрических пространствах с неоднородными по пространству интенсивностями рождения и гибели. Формулируются условия на интенсивности, обеспечивающие существование инвариантных мер этих процессов. Одним из условий является так называемое условие критического режима. Для доказательства существования инвариантных мер использован подход, предложенный в предыдущей работе авторов. Подробно рассматривается маркированная модель контактов с компактным пространством марок (квазивидов), в которой интенсивности как рождения, так и гибели зависят от марок.

Ключевые слова: маркированная модель контактов в непрерывном пространстве, процесс рождения и гибели в непрерывной среде, критический режим, корреляционные функции.

DOI: 10.31857/S0555292323020055, **EDN:** PQGTBP

Посвящается Вадиму Александровичу Малышеву,
выдающемуся математику, ясно видевшему математику в биологии

§ 1. Введение

Процессы контактов широко используются для описания эволюции и предсказания асимптотического поведения в различных моделях популяционной динамики. Учитывая применение процессов контактов при моделировании распространения эпидемических заболеваний или роста популяций, одной из основных задач при рассмотрении этих процессов является вопрос о существовании стационарного режима и доказательство существования инвариантных мер. Процессы контактов на решетке были введены в пионерских работах [1, 2]; см. также монографию [3]. Хотя в большинстве работ процессы контактов рассматривались на решетке, в последние годы все больший интерес вызывает изучение процессов контактов, протекающих в непрерывных пространствах (см., например, [4–6]). Этот класс процессов является частным случаем процессов рождения и гибели с непрерывным временем. Одной из основных особенностей процесса контактов является кластеризация системы, когда частицы группируются в облака высокой плотности, которые расположены на больших расстояниях друг от друга. Следует отметить, что возникновение предельного инвариантного состояния обычно рассматривается в так называемом критическом режиме, т.е. при определенном балансе между рождением и гибелью. Как было показано в [4], для процессов контактов в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, существует континуум инвариантных мер в критическом режиме с постоянными интенсивностями гибели. Явление кластеризации становится более заметным в случае малых размерностей.

В [5] было доказано, что для процессов контактов в $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$, инвариантные меры существуют только в том случае, если ядро рассеяния (интенсивность рождения) имеет тяжелый хвост на бесконечности. В случае легких хвостов парная корреляционная функция неограниченно возрастает при $t \to \infty$, и следовательно, инвариантные меры не существуют. Таким образом, оказывается, что тяжелые хвосты ядер рассеивания, в отличие от легких, делают критический режим более устойчивым.

В [7] доказано существование инвариантных мер в маркированной модели контактов в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, с компактным пространством марок при постоянных интенсивностях гибели. Аналогичная модель с иммиграцией изучена в [8]. Такие модели используются, в частности, для описания эволюции в квазивидовых популяциях с мутациями (см. [9]).

В настоящей статье рассматривается класс процессов контактов на локально компактных сепарабельных метрических пространствах в критическом режиме с интенсивностями рождения и гибели, зависящими от состояния. Эта статья является обобщением нашей предыдущей работы [10], в которой были сформулированы условия, обеспечивающие существование инвариантных мер для процессов контактов на общих пространствах с однородной интенсивностью гибели. При этом инвариантные меры описываются простыми рекуррентными соотношениями между их корреляционными функциями и образуют новый класс точечных случайных полей. В этой статье мы формулируем условия, включая условие критического режима, гарантирующие существование инвариантных мер для общих процессов контактов с неоднородными интенсивностями рождения и гибели, которые зависят от состояния, и доказываем существование семейства инвариантных мер.

Наш подход основан на анализе бесконечной системы иерархических уравнений для корреляционных функций; см. например, [4, 10]. В § 2 представлена модель и сформулированы предположения на нее, в том числе условие критического режима. В § 3 формулируется основной результат. В § 4 содержится доказательство основной теоремы. В § 5 мы применяем общие результаты из §§ 2, 3 к анализу многокомпонентных моделей контактов в непрерывной среде с компактным пространством марок и интенсивностями рождения и гибели, зависящими от состояния.

§ 2. Модель

В этом параграфе мы сформулируем предположения о модели, которые обеспечивают существование инвариантных мер для процессов контактов в общих пространствах.

Пусть $\mathfrak{X}$ – локально компактное сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ – его борелевская σ-алгебра, а через m обозначим локально конечную меру Бореля на $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$, т.е. m конечна на компактных множествах. Обозначим через $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ пространство локально конечных мер Бореля на $\mathcal{B}\mathfrak{X})$, а через $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{X})$ – систему всех компактных множеств из $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$.

Конфигурация $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{X})$ на $\mathfrak{X}$ – это конечное или счетное локально конечное неупорядоченное множество точек в $\mathfrak{X}$, причем некоторые из точек могут быть кратными, т.е. допускаются повторения. Если мера $m \in \mathcal{M}(\mathfrak{X})$ является атомарной, то $\Gamma(\mathfrak{X})$ содержит конфигурации с кратными точками. Так будет на графах, где мера m является считающей. В качестве фазового пространства Γ непрерывной модели контактов в том случае, когда мера m неатомарна (см., например, [4–6]), можно взять множество локально конечных конфигураций в $\mathfrak{X}$ с различными элементами:

$$\Gamma_c = \Gamma_c(\mathfrak{X}) := \bigl\{\gamma \subset \mathfrak{X} \bigm| |\gamma \cap \Lambda| < \infty \text{ для всех } \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{X})\bigr\}, \tag{1}$$

где через $|\cdot|$ обозначается число элементов множества.

Каждой конфигурации $\gamma \in \Gamma$ можно сопоставить целочисленную меру

$$\sum_{x\in\gamma} \delta_x \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}),$$

где δ_x – мера Дирака с единичной массой, а сумма берется с учетом кратности элементов в конфигурации γ. Для любого множества $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{X})$ обозначим через $|\gamma \cap \Lambda|$ значение $\gamma(\Lambda)$ меры γ на Λ.

Модель контактов представляет собой марковский процесс с непрерывным временем на $\Gamma(\mathfrak{X})$, который является частным случаем общего процесса рождения и гибели. В данной статье рассматривается процесс с неоднородными интенсивностями рождения и гибели. Модель задается эвристическим генератором, определенным на соответствующем классе функций $F\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$(LF)(\gamma) = \sum_{x\in\gamma} V(x)\,(F(\gamma \setminus x) - F(\gamma)) + \\ + \int\limits_{\mathfrak{X}} \sum_{x\in\gamma} a(y,x)(F(\gamma \cup y) - F(\gamma))\, m(dy). \tag{2}$$

Обозначения $\gamma\backslash x$ и $\gamma \cup x$ в (2) означают удаление и добавление одной частицы в точке $x \in \mathfrak{X}$. Аналогично, $x \in \gamma$ означает любую частицу из конфигурации γ. Первый член в (2) соответствует гибели частицы в точке x: каждый элемент $x \in \gamma$ конфигурации $\gamma \in \Gamma$ может погибнуть с интенсивностью $V(x)$. Второй член (2) описывает рождение новой частицы в окрестности dy точки y с плотностью интенсивности рождения

$$A(y,\gamma) := \sum_{x\in\gamma} a(y,x).$$

Фактически мы даже не знаем, кто является родителем, поскольку рождение новой частицы в точке y имеет суммарную интенсивность $\sum\limits_{x\in\gamma} a(y,x)$. Функция $a(x,y)$ называется ядром рассеивания.

Одна из целей этой статьи – сформулировать условия на интенсивности в (2), гарантирующие существование инвариантных мер соответствующих процессов контактов. Решающим условием существования стационарного режима в процессе контактов, как и в других процессах рождения и гибели, является так называемое условие критического режима. Это условие описывает “стохастическое равновесие между рождением и гибелью”.

В случае $V(x) \equiv 1$, т.е. когда интенсивность гибели постоянна, условие критического режима имеет вид

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} a(x,y)\Psi(y)\, m(dy) = \Psi(x) \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{X}, \tag{3}$$

где $\Psi(x)$ – строго положительная ограниченная измеримая функция. Модели с условием критического режима в виде (3) изучались и ранее – см., например, [4, 10]. В [4] рассматривалась контактная модель в непрерывной среде с

$$\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d, \quad a(x,y) = \alpha(x-y), \quad V(x) \equiv 1,$$

и для этой модели $\Psi(x) \equiv 1$. Более общий случай, когда $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d \times S$ для компактного метрического пространства S (пространства видов), был изучен в [10]. В этом случае условие (3) выполняется для функции $\Psi(x) = q(s)$, зависящей только от марки $s \in S$. Аналогичная маркированная непрерывная модель контактов с непостоянной функцией $V(s)$, $s \in S$, будет рассмотрена далее в § 5.

В случае, когда $V(x)\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{R}_+$ – положительная ограниченная функция, условие *критического режима* становится следующим: существует строго положительно ограниченная измеримая функция $\Psi(x)$, $\Psi(x) \geqslant p_0 > 0$, такая что

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} a(x,y)\Psi(y)\, m(dy) = V(x)\Psi(x) \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{X}. \tag{4}$$

Это условие представляет собой уравнение баланса. Оно означает, что если частицы изначально распределены с плотностью $\Psi(x)$, то эта плотность сохраняется в динамике, т.е. $\Psi(x)$ – плотность стационарного распределения частиц. Обсудим новый вид (4) условия критического режима. В предположении, что условие критического режима (4) выполняется для исходного генератора (2) (т.е. для $a(x,y)$ и $m(dy)$), можно определить новую меру $\bar{\mathfrak{m}}$ и новую интенсивность рождения $b(x,y)$

$$\bar{\mathfrak{m}}(dy) = \Psi(y)\, m(dy), \quad b(x,y) = \frac{a(x,y)}{\Psi(x)}, \tag{5}$$

так что условие (4) примет вид

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} b(x,y)\, \bar{\mathfrak{m}}(dy) = V(x) \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{X}. \tag{6}$$

Тогда генератор (2) принимает вид

$$(LF)(\gamma) = \sum_{x\in\gamma} V(x)\,(F(\gamma\setminus x) - F(\gamma)) + \\ + \int\limits_{\mathfrak{X}} \sum_{x\in\gamma} b(y,x)(F(\gamma\cup y) - F(\gamma))\, \bar{\mathfrak{m}}(dy). \tag{7}$$

Следует отметить, что из формул (5) вытекает, что вторые слагаемые в правых частях уравнений (2) и (7) одинаковы.

В этой статье мы всегда будем предполагать, что условие критического режима (4) выполнено. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать генератор L, заданный формулой (7), где b и V удовлетворяют условию (6).

Теперь мы готовы сформулировать условия на интенсивности рождения и гибели генератора (7). Будем предполагать, что интенсивности рождения $b(y,x)$ и гибели $V(x)$ процесса контактов удовлетворяют следующим условиям:

1. Условие *измеримости*: $b\colon \mathfrak{X}\times\mathfrak{X} \to [0,\infty)$ – неотрицательная ограниченная измеримая функция, а $V\colon \mathfrak{X} \to (0,\infty)$ – строго положительная ограниченная измеримая функция
$$0 < V_{\min} = \inf_{\mathfrak{X}} V(x) \leqslant V(x) \leqslant \sup_{\mathfrak{X}} V(x) = V_{\max} < \infty; \tag{8}$$
2. Условие *регулярности*: существует константа $C > 0$, такая что
$$\sup_{x\in\mathfrak{X}} \int\limits_{\mathfrak{X}} b(y,x)\, \bar{\mathfrak{m}}(dy) < C; \tag{9}$$
3. Условие *критического режима*:
$$\int\limits_{\mathfrak{X}} b(x,y)\, \bar{\mathfrak{m}}(dy) = V(x) \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{X}; \tag{10}$$

4. Условие *транзиентности.* Рассмотрим скачкообразный марковский процесс с непрерывным временем, который задается генератором

$$\mathcal{L}f(x) = \int\limits_{\mathfrak{X}} b(x,y)(f(y)-f(x))\,\bar{\mathfrak{m}}(dy). \tag{11}$$

Будем предполагать, что для двух независимых экземпляров $X(t)$ и $Y(t)$ этого процесса, стартующих с $X(0)=x$ и $Y(0)=y$, выполнено следующее условие:

$$\sup_{x,y} \int\limits_0^\infty \mathbf{E}_{x,y}\, b(X(t),Y(t))\,dt < H \tag{12}$$

для некоторой константы $H>0$. Более того, будем предполагать, что интеграл в (12) сходится равномерно по x и y.

Непрерывный по времени скачкообразный марковский процесс с генератором (11) можно описать следующим образом: $V(x)$ – интенсивность скачка в состоянии x, а переходное распределение скачков задается следующим образом:

$$\frac{b(x,y)\,\bar{\mathfrak{m}}(dy)}{V(x)} = \frac{a(x,y)\Psi(y)\,m(dy)}{\Psi(x)V(x)}. \tag{13}$$

Отметим, что формула (13) описывает распределение предков в модели контактов с генератором (2) (или (7)).

П р е д л о ж е н и е 1. *Неравенство* (12) *вместе с равномерной сходимостью интеграла следует из оценки*

$$\int\limits_0^\infty \sup_{x,y} \mathbf{E}_x\, b(X(t),y)\,dt < H. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $p(x,dy,t)$ переходную функцию скачкообразного марковского процесса с генератором (11) в момент времени t. Тогда

$$\begin{aligned}
&\sup_{x,y} \int\limits_0^\infty \mathbf{E}_{x,y}\, b(X(t),Y(t))\,dt = \sup_{x,y} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathfrak{X}} \int\limits_{\mathfrak{X}} b(x',y')\,p(x,dx',t)\,p(y,dy',t)\,dt \leqslant \\
&\leqslant \sup_y \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathfrak{X}} \left(\sup_x \int\limits_{\mathfrak{X}} b(x',y')\,p(x,dx',t) \right) p(y,dy',t)\,dt = \\
&= \sup_y \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathfrak{X}} \Big(\sup_x \mathbf{E}_x\, b(X(t),y') \Big)\, p(y,dy',t)\,dt \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_0^\infty \sup_y \int\limits_{\mathfrak{X}} \Big(\sup_{y'} \sup_x \mathbf{E}_x\, b(X(t),y') \Big)\, p(y,dy',t)\,dt = \int\limits_0^\infty \sup_{x,y'} \mathbf{E}_x\, b(X(t),y')\,dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, из условия (14) следует равномерная сходимость в (12). ▲

§ 3. Эволюция корреляционных функций. Основные результаты

Обозначим через $\mathcal{M}_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ множество всех вероятностных мер μ, имеющих конечные локальные моменты всех порядков, т.е.

$$\int_{\Gamma} |\gamma \cap \Lambda|^n \, \mu(d\gamma) < \infty$$

для всех $\Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathfrak{X})$ и $n \in N$.

Вместе с конфигурационным пространством Γ определим пространство Γ_0 конечных конфигураций, и пусть

$$\Gamma_{0,\Lambda}^{(n)} = \{\eta \subset \Lambda : \ |\eta| = n\}$$

– множество n-точечных конфигураций в множестве $\Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathfrak{X})$. Если мера $\mu \in \in \mathcal{M}_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ локально абсолютно непрерывна относительно меры Лебега – Пуассона

$$\lambda_{z,\bar{\mathfrak{m}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \bar{\mathfrak{m}}^{\otimes n},$$

т.е.

$$\lambda_{z,\bar{\mathfrak{m}}}\bigl(\Gamma_{0,\Lambda}^{(n)}\bigr) = \frac{z^n(\bar{\mathfrak{m}}(\Lambda))^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\bar{\mathfrak{m}}(\Lambda) = \int_{\Lambda} \bar{\mathfrak{m}}(dx),$$

то имеется соответствующая система корреляционных функций, т.е. плотностей корреляционной меры относительно меры Лебега – Пуассона. Эта терминология возникла в статистической механике (см., например, [11, гл. 4]). Обозначим через $\mathcal{M}_{\mathrm{corr}}(\Gamma)$ подкласс класса $\mathcal{M}_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, состоящий из вероятностных мер на Γ, для которых существуют корреляционные функции.

Уравнение эволюции для системы n-точечных корреляционных функций, соответствующих модели контактов в $\mathfrak{X}$, имеет следующий рекуррентный вид (см., например, [4, 10]):

$$\frac{\partial k_t^{(n)}}{\partial t} = \widehat{L}_n^* k_t^{(n)} + f_t^{(n)}, \quad n \geqslant 1, \qquad k_t^{(0)} \equiv 1, \tag{15}$$

где

$$\widehat{L}_n^* k_t^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = -\left(\sum_{i=1}^{n} V(x_i)\right) k_t^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathfrak{X}} b(x_i, y) k_t^{(n)}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \, \bar{\mathfrak{m}}(dy). \tag{16}$$

Здесь $f_t^{(n)}$ – функции на $\mathfrak{X}^n$, заданные при $n \geqslant 2$ равенствами

$$f_t^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_t^{(n-1)}(x_1, \ldots, \check{x}_i, \ldots, x_n) \sum_{j \neq i} b(x_i, x_j), \tag{17}$$

а $f_t^{(1)} \equiv 0$. Обозначение $\check{x}_i$ означает, что эта координата исключается.

Пусть $\mathbb{X}_n = \mathbb{B}(\mathfrak{X}^n)$ – банахово пространство всех измеримых вещественнозначных ограниченных функций на $\mathfrak{X}^n$ с sup-нормой. Рассмотрим оператор $\widehat{L}_n^*$ как оператор на банаховом пространстве $\mathbb{X}_n$ для произвольного $n \geqslant 1$. Тогда он является ограниченным линейным оператором в $\mathbb{X}_n$, и из рассуждений, основанных на формуле Дюамеля, следует, что

$$k_t^{(n)} = e^{t\widehat{L}_n^*} k_0^{(n)} + \int_0^t e^{(t-s)\widehat{L}_n^*} f_s^{(n)}\, ds, \tag{18}$$

где $f_s^{(n)}$ выражается через $k_s^{(n-1)}$ по формуле (17). Таким образом, решение задачи Коши (15) в $\mathbb{X}_n$ с произвольными начальными данными $k_0^{(n)} \in \mathbb{X}_n$ существует и единственно при условии, что $f_t^{(n)}$ рекуррентно строится через решение той же задачи Коши (15) для $n-1$.

Целью данной статьи является доказательство существования семейства инвариантных мер для процесса контактов в критическом режиме, порождаемых операторами вида (7). Эти меры описываются в терминах соответствующих корреляционных функций $\{k^{(n)}\}_{n\geqslant 0}$, которые являются решениями следующей системы:

$$\widehat{L}_n^* k^{(n)} + f^{(n)} = 0, \quad n \geqslant 1, \qquad k^{(0)} \equiv 1, \tag{19}$$

где $\widehat{L}_n^*$ и $f^{(n)}$ определены в (16) и (17). В дальнейшем будем говорить, что функция $k\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ решает систему (19) в банаховых пространствах $(\mathbb{X}_n)_{n\geqslant 1}$, если соответствующие $k^{(n)} \in \mathbb{X}_n$, $n \geqslant 1$, образуют решение системы (19).

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Предположим, что интенсивности рождения $b(y,x)$ и гибели $V(x)$ процесса контактов удовлетворяют условиям измеримости, регулярности* (9), *критического режима* (10) *и транзиентности* (12). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Для любой положительной константы $\varrho > 0$ существует вероятностная мера $\mu^\varrho \in \mathcal{M}_{\mathrm{corr}}(\Gamma)$ на Γ, такая что ее корреляционная функция $k_\varrho\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}_+$ дает решение системы* (19) *в банаховых пространствах $(\mathbb{X}_n)_{n\geqslant 1}$, а соответствующая система $\{k_\varrho^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условию $k_\varrho^{(1)} \equiv \varrho$. Более того, для всех $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathfrak{X}^n$ справедливы следующие оценки:*

$$k_\varrho^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \leqslant DH^n (n!)^2, \quad \text{где} \quad D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varrho/H)^n}{(n!)^2}, \tag{20}$$

где H – та же константа, что и в (12).

(ii) *Пусть $\{k_{\varrho,t}^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ – решение задачи Коши* (15) *с начальными условиями*

$$k_0 = \{k_0^{(n)}\},$$

соответствующими пуассоновской мере π_ϱ с интенсивностью ϱ:

$$k_0^{(0)} = 1, \quad k_0^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \varrho^n, \quad n \geqslant 1. \tag{21}$$

Тогда

$$\big\| k_{\varrho,t}^{(n)} - k_\varrho^{(n)} \big\|_{\mathbb{X}_n} \to 0, \quad t \to \infty, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{22}$$

Основная стратегия доказательства следует той же схеме, что и в работе [10]. Однако в настоящей статье нам потребуется адаптировать некоторые шаги предыдущего доказательства для процессов контактов с неоднородными интенсивностями.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Для первой корреляционной функции $k^{(1)}$ из (16) и (19) получаем следующее уравнение:

$$-V(x)k^{(1)}(x) + \int\limits_{\mathfrak{X}} b(x,y)k^{(1)}(y)\,\bar{\mathfrak{m}}(dy) = 0, \tag{23}$$

которое можно записать с использованием условия критического режима (10) как

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} b(x,y)\big(k^{(1)}(y) - k^{(1)}(x)\big)\,\bar{\mathfrak{m}}(dy) = 0. \tag{24}$$

Очевидно, что функция $k^{(1)}(x) \equiv \varrho$ является элементом пространства $\mathbb{X}_1$ и что она дает решение задачи (24) (а также (23)). Заметим, что ϱ можно интерпретировать как пространственную плотность частиц.

В доказательстве первого утверждения теоремы 1 применим индукцию по $n \in \mathbb{N}$. Если для любого $n > 1$ удастся решить уравнение (19) и выразить $k^{(n)}$ через $f^{(n)}$, то, зная, как $f^{(n)}$ выражается через $k^{(n-1)}$ (см. (17)), мы рекуррентным образом получим решение $\{k^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ полной системы (19).

Лемма 1. *Оператор $e^{t\widehat{L}_n^*}$, где $\widehat{L}_n^*$ определено в* (16), *является положительным, т.е. отображает неотрицательные функции в неотрицательные.*

Доказательство. Оператор

$$A^i k^{(n)}(x_1,\dots,x_n) := \int\limits_{\mathfrak{X}} b(x_i,y)k^{(n)}(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)\,\bar{\mathfrak{m}}(dy)$$

положителен и ограничен на $\mathbb{X}_n$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^i k^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \int\limits_{\mathfrak{X}} b(x_i,y)k^{(n)}(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)\,\bar{\mathfrak{m}}(dy) - \\ - V(x_i)k^{(n)}(x_1,\dots,x_n).\end{aligned} \tag{25}$$

Применяя формулу Троттера для суммы $A+B$ двух ограниченных операторов

$$e^{t(A+B)} = \lim_{n\to\infty}\Big(e^{\frac{tA}{n}}e^{\frac{tB}{n}}\Big)^n,$$

заключаем, что

$$e^{t\mathcal{L}^i}f = \lim_{n\to\infty}\Big(e^{t\frac{A^i}{n}}e^{-t\frac{V}{n}}\Big)^n f \geqslant e^{-tV_{\max}}e^{tA^i}f \geqslant 0 \tag{26}$$

для любой неотрицательной функции f. Здесь V – оператор умножения на положительную ограниченную функцию V, а константа $V_{\max}$ определена в (8).

Из представления (16) получаем

$$e^{t\widehat{L}_n^*} = \bigotimes_{i=1}^n e^{t\mathcal{L}^i}.$$

Отсюда с учетом того, что

$$\bigotimes_{i=1}^{n} e^{-tV_{\max}} e^{tA^i}$$

является положительным оператором, получаем требуемое утверждение. ▲

Пусть $k^{(1)}$ – произвольная положительная константа. Далее мы построим решение системы (19), удовлетворяющее оценке (20). Как следует из (17), функция $f^{(n)}$ является суммой функций вида

$$f_{i,j}(x_1, \ldots, x_n) = k^{(n-1)}(x_1, \ldots, \check{x}_i, \ldots, x_n) b(x_i, x_j), \quad i \neq j. \tag{27}$$

Предположим по индукции, что

$$k^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant K_{n-1} \quad \text{для всех } (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathfrak{X}^{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$

где $K_n = DC^n (n!)^2$, а D и C – некоторые константы. Тогда

$$f_{i,j}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant K_{n-1} b(x_i, x_j), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{X}^n. \tag{28}$$

Используя положительность оператора $e^{t\widehat{L}_n^*}$ и неравенство (28), получаем

$$\big(e^{t\widehat{L}_n^*} f_{i,j}\big)(x_1, \ldots, x_n) \leqslant K_{n-1} \big(e^{t\widehat{L}_n^*} b(\cdot_i, \cdot_j)\big)(x_1, \ldots, x_n). \tag{29}$$

С учетом условия критического режима (10) заключаем, что

$$e^{t\mathcal{L}^i} \mathbb{1} = \mathbb{1}, \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

где $\mathcal{L}$ дается формулой (25), а $\mathbb{1}(x) \equiv 1$. Таким образом,

$$\big(e^{t\widehat{L}_n^*} b(\cdot_i, \cdot_j)\big)(x_1, \ldots, x_n) = \big(e^{t(\mathcal{L}^i + \mathcal{L}^j)} b(\cdot_i, \cdot_j)\big)(x_1, \ldots, x_n). \tag{30}$$

Отметим, что последняя функция зависит только от переменных x_i и x_j.

Заметим, что функция $e^{t\widehat{L}_n^*} f_{i,j}$ интегрируема относительно t на $\mathbb{R}_+$. Действительно, из соотношений (27), (29), условия (12) и тождества

$$e^{t\widehat{L}_n^*} b(x, y) = \mathbf{E}_{x,y}\, b(X(t), Y(t)) \tag{31}$$

следует, что

$$v_{i,j}^{(n)} = \int_0^\infty e^{t\widehat{L}_n^*} f_{i,j}\, dt \leqslant K_{n-1} H, \tag{32}$$

где H – та же константа, что и в (12).

Начиная с этого момента доказательство основного результата полностью повторяет рассуждения из доказательства теоремы 3.1 работы [10]. Однако для удобства читателя мы изложим здесь все последующие шаги. Обозначим

$$v^{(n)} = \sum_{i \neq j} v_{i,j}^{(n)} = \int_0^\infty e^{t\widehat{L}_n^*} f^{(n)}\, dt, \quad f^{(n)} = \sum_{i \neq j} f_{i,j}, \tag{33}$$

где $f_{i,j}$ заданы равенством (27). Теперь докажем, что функция $v^{(n)}$ является решением системы (19) в $\mathbb{X}_n$. Из (32) и процедуры индукции легко видеть, что $v^{(n)} \in \mathbb{X}_n$.

Поскольку $e^{t\widehat{L}_n^*}$ – сильно непрерывная полугруппа, имеем

$$e^{t\widehat{L}_n^*} f^{(n)} - f^{(n)} = \widehat{L}_n^* \int\limits_0^t e^{s\widehat{L}_n^*} f^{(n)}\, ds. \tag{34}$$

Перепишем (34) в виде

$$e^{t\widehat{L}_n^*} f^{(n)} = f^{(n)} + \widehat{L}_n^* \int\limits_0^t e^{s\widehat{L}_n^*} f^{(n)}\, ds. \tag{35}$$

Теперь, используя условие (12), неравенство (28), лемму 1 и тот факт, что $\widehat{L}_n^*$ – ограниченный оператор, заключаем, что правая часть выражения (35) имеет равномерный по $x_1, \ldots, x_n$ предел при $t \to \infty$, и следовательно, левая часть (35), т.е. $e^{t\widehat{L}_n^*} f^{(n)}$, также сходится в $\mathbb{X}_n$. Более того, предел является неотрицательной функцией в $\mathbb{X}_n$. Однако если эта функция где-то строго положительна, то получим противоречие с условием (12), так как в этом случае интеграл по t будет неограниченным. Таким образом, получаем, что в $\mathbb{X}_n$ имеет место следующий предел:

$$e^{t\widehat{L}_n^*} f^{(n)} \to 0, \quad t \to \infty. \tag{36}$$

Переход к пределу в (34) при $t \to \infty$ вместе с (36) показывает, что функцию $v^{(n)}$, определенную в (33), можно взять в качестве решения $k^{(n)}$ системы (19) в $\mathbb{X}_n$.

Поскольку функция $f^{(n)}$ является суммой функций $f_{i,j}$, $i \neq j$, то из (32) следует, что $v^{(n)}$ ограничена величиной $n^2 K_{n-1} H$. Таким образом, получаем рекуррентное неравенство

$$K_n \leqslant n^2 K_{n-1} H, \tag{37}$$

и отсюда по индукции получаем, что

$$K_n \leqslant H^n (n!)^2 k^{(1)}. \tag{38}$$

Таким образом, для этого решения $k^{(n)} = v^{(n)}$ справедлива оценка

$$v^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant H^n (n!)^2 k^{(1)}. \tag{39}$$

Разумеется, любое семейство функций вида

$$k^{(1)} \equiv \varrho, \qquad k^{(n)} = \int\limits_0^\infty e^{t\widehat{L}_n^*} f^{(n)}\, dt + A_n, \quad n \geqslant 2,$$

с произвольной константой A_n также является решением системы (19). Здесь $f^{(n)}$ задается, как и выше, равенством (27). Полагая $A_n = \varrho^n$, получаем, что

$$k_\varrho^{(1)} \equiv \varrho, \qquad k_\varrho^{(n)} = \int\limits_0^\infty e^{t\widehat{L}_n^*} f^{(n)}\, dt + \varrho^n, \quad n \geqslant 2, \tag{40}$$

является искомым решением стационарной задачи (19) в банаховых пространствах $(\mathbb{X}_n)_{n\geqslant 1}$. Чтобы подчеркнуть зависимость функции $f^{(n)}$ от ϱ, будем для $f^{(n)}$ использовать обозначение $f_\varrho^{(n)}$. Для решений $\left\{k_\varrho^{(n)}\right\}_{n\geqslant 1}$ из (40) вместо (37) имеем рекуррентное соотношение

$$K_n \leqslant n^2 K_{n-1} H + \varrho^n. \tag{41}$$

Полагая

$$L_n = \frac{K_n}{H^n (n!)^2},$$

из (41) получаем

$$L_n \leqslant L_{n-1} + \frac{\varrho^n}{H^n (n!)^2} \leqslant D \quad \forall n = 1, 2, \ldots, \qquad L_0 = 0.$$

Отсюда

$$K_n \leqslant D H^n (n!)^2, \quad \text{где} \quad D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varrho/H)^n}{(n!)^2}. \tag{42}$$

Чтобы убедиться в том, что построенная система $\{k_\varrho^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ является системой корреляционных функций, т.е. соответствует вероятностной мере μ^ϱ на конфигурационном пространстве Γ, далее мы докажем, что $\{k_\varrho^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ можно построить как предел при $t \to \infty$ системы корреляционных функций $\{k_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$, связанных с решением задачи Коши (15) с начальными условиями (21).

Напомним, что для решения задачи Коши (15) имеется представление (18). С другой стороны, выше мы доказали существование решения $\{k_\varrho^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ стационарной задачи

$$\widehat{L}_n^* k_\varrho^{(n)} = -f_\varrho^{(n)}, \tag{43}$$

где

$$f_\varrho^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j:\, i\neq j} k_\varrho^{(n-1)}(x_1, \ldots, \check{x}_i, \ldots, x_n) b(x_i, x_j).$$

Это решение задается формулой (40), и из (43) вытекает следующее соотношение:

$$\big(e^{t\widehat{L}_n^*} - 1\big) k_\varrho^{(n)} = -\int_0^t \frac{d}{ds} e^{(t-s)\widehat{L}_n^*} k_\varrho^{(n)}\, ds = -\int_0^t e^{(t-s)\widehat{L}_n^*} f_\varrho^{(n)}\, ds. \tag{44}$$

Поэтому из (18) и (44) получаем

$$k_t^{(n)} - k_\varrho^{(n)} = e^{t\widehat{L}_n^*}\big(k_0^{(n)} - k_\varrho^{(n)}\big) + \int_0^t e^{(t-s)\widehat{L}_n^*}\big(f_s^{(n)} - f_\varrho^{(n)}\big)\, ds. \tag{45}$$

Докажем теперь, что оба члена в правой части (45) при $t \to \infty$ сходятся к 0 в норме пространства $\mathbb{X}_n$.

Из (40) получаем

$$e^{t\widehat{L}_n^*}\big(k_0^{(n)} - k_\varrho^{(n)}\big) = -e^{t\widehat{L}_n^*} v^{(n)}, \tag{46}$$

где согласно (33) имеем

$$v^{(n)} = \int\limits_0^\infty e^{s\widehat{L}_n^*} f_\varrho^{(n)}\, ds.$$

Следовательно, первый член в правой части (45) можно преобразовать с помощью (46) и (33) следующим образом:

$$e^{t\widehat{L}_n^*} v^{(n)} = \int\limits_0^\infty e^{(t+s)\widehat{L}_n^*} f_\varrho^{(n)}\, ds = \int\limits_t^\infty e^{r\widehat{L}_n^*} f_\varrho^{(n)}\, dr.$$

В силу структуры (27) функции $f_\varrho^{(n)}$ и равномерной сходимости интеграла в (12) заключаем, что

$$\left\| e^{t\widehat{L}_n^*} v^{(n)} \right\|_{\mathbb{X}_n} \to 0, \quad t \to \infty. \tag{47}$$

Второй член в правой части (45) также стремится к 0, что можно доказать тем же способом, что и в предыдущих наших работах (см., например, [7]).

Таким образом, мы доказали (22), что завершает доказательство второй части теоремы 1.

Теперь вернемся к первой части теоремы 1. Заключительный шаг доказательства состоит в том, чтобы показать, что система корреляционных функций $\left\{k_\varrho^{(n)}\right\}_{n\geqslant 1}$ соответствует некоторой вероятностной мере μ^ϱ на конфигурационном пространстве Γ. Для этого выше мы построили $k_\varrho^{(n)}$ как предел при $t \to \infty$ решения $k_t^{(n)}$ задачи Коши (15) с начальными условиями (21):

$$k_\varrho^{(n)} = \lim_{t\to\infty} k_t^{(n)}. \tag{48}$$

Далее можно показать, что решение $k_t^{(n)}$ задачи Коши удовлетворяет условию положительности по Ленарду и условию роста момента (см. [12, 13]). Подробное доказательство этого факта можно найти в [5]. Наконец, из этих условий следует, что для любого $\varrho > 0$ существует единственная вероятностная мера $\mu^\varrho \in \mathcal{M}_{\mathrm{corr}}(\Gamma)$, корреляционные функции которой имеют вид $\left\{k_\varrho^{(n)}\right\}_{n\geqslant 1}$. Это завершает доказательство теоремы 1.

§ 5. Маркированная непрерывная модель контактов в критическом режиме

В этом параграфе рассматривается модель контактов в непрерывном пространстве, в которой каждый элемент конфигурации характеризуется как своим расположением в пространстве, так и своей маркой. Аналогичная модель с постоянной интенсивностью гибели $V(x) \equiv 1$ изучалась в [7, 8], причем в первой работе рассматривался критический режим, а во второй – субкритический.

Конфигурация $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{X})$ – это конечное или локально конечное счетное неупорядоченное множество точек в $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d \times S$, а S – компактное метрическое пространство (пространство марок). Мера m берется в виде

$$m = l \otimes \nu,$$

где $l(dy) = dy$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^d$, а $\nu(ds)$ – конечная мера Бореля на S. Для точек $x \in \mathfrak{X}$ будем использовать обозначение

$$x = (\xi, s), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad s \in S.$$

Рассмотрим интенсивность рождения $a(x, x')$ следующего вида:

$$a(x, x') = \alpha(\xi - \xi')Q(s, s'),$$

где $\alpha(\cdot) \geqslant 0$ – ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \alpha(u)\, du = 1, \tag{49}$$

а $Q\colon S \times S \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная (и поэтому ограниченная) строго положительная функция. Для интенсивности гибели полагаем, что $V(\xi, s) = v(s)$, т.е. $V(x)$ зависит только от марки, и $v\colon S \to \mathbb{R}_+$ также является непрерывной строго положительной функцией. Поэтому из теоремы Крейна–Рутмана следует, что существуют положительное число $r > 0$ и строго положительная непрерывная функция $q(s)$ на S, такие что

$$\int\limits_S \frac{Q(s, s')}{v(s)} q(s')\, \nu(ds') = rq(s) \tag{50}$$

при $0 < q_{\min} \leqslant q(s) \leqslant q_{\max} < \infty$. Если предположить, что $\Psi(x)$ зависит только от $s \in S$, то условие критического режима (4) эквивалентно утверждению о том, что компактный положительный оператор $\widetilde{Q}$ с ядром $\dfrac{Q(s, s')}{v(s)}$ имеет максимальное положительное собственное значение $r = 1$, т.е. равенство (50) выполняется при $r = 1$:

$$\int\limits_S \frac{Q(s, s')}{v(s)} q(s')\, \nu(ds') = q(s), \tag{51}$$

и $\Psi(x) = q(s)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $d \geqslant 3$, и пусть интенсивности рождения имеют вид*

$$a(x, x') = \alpha(\xi - \xi')Q(s, s'), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad s \in S,$$

где $\alpha(\cdot) \geqslant 0$ – ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условию (49), а $Q\colon S \times S \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная строго положительная функция. Предположим, что $V(\xi, s) = v(s)$, где $v\colon S \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная строго положительная функция:

$$0 < V_{\min} \leqslant v(s) \leqslant V_{\max} < \infty.$$

Пусть выполнено условие критического режима (51) при $\int\limits_S q(s)\, \nu(ds) = 1$, и $\Psi(x) = q(s)$. Тогда выполнены все условия теоремы 1, и следовательно, для любого $\varrho > 0$ существует инвариантная мера μ^ϱ, корреляционные функции которой (относительно меры Лебега–Пуассона с интенсивностью $m(dy)$) удовлетворяют следующим оценкам:

$$k_\varrho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leqslant DH^n (n!)^2 \prod_{i=1}^n q(s_i) \quad \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{X}^n, \tag{52}$$

где D определено в (20), а H – та же константа, что и в (12).

Более того, корреляционные функции $k_\varrho^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, инвариантной меры μ^ϱ для любого $\varrho > 0$ можно построить как предел корреляционных функций задачи Коши с соответствующими начальными условиями. Действительно, для любых $n = 1, 2, \ldots$ решение $k^{(n)}(t)$ задачи Коши (15) *с начальными условиями*

$$k_0^{(0)} = 1, \quad k_0^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \varrho^n \prod_{i=1}^{n} q(s_i)$$

сходится к решению системы (19) *стационарных* (*не зависящих от времени*) *уравнений при* $t \to \infty$:

$$\left\| k^{(n)}(t) - k_\varrho^{(n)} \right\|_{\mathbb{X}_n} \to 0, \quad t \to \infty. \tag{53}$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим новую меру

$$\bar{\mathfrak{m}}(dy) = \Psi(y)\, m(dy)$$

и новую интенсивность рождения

$$b(x, y) = \frac{a(x, y)}{\Psi(x)},$$

задаваемые формулами (5) с $\Psi(\xi, s) = q(s)$, и теперь требуется проверить, что выполнены все условия теоремы 1 для b и $\bar{\mathfrak{m}}(dy)$.

Условия измеримости и регулярности справедливы в силу ограниченности функции Ψ. Далее, если у нас будет хорошая оценка сверху на $\mathbf{E}_x\, b(X(t), y)$, то из (14) будет вытекать условие транзиентности (12). Следующая лемма гарантирует равномерную сходимость интеграла в (14) при $d \geqslant 3$.

Лемма 2. *Для всех $t > 0$ имеет место следующая равномерная верхняя оценка*:

$$\mathbf{E}_x\, b(X(t), y) \leqslant \min\left\{ \|b\|_\infty, \frac{C}{t^{d/2}} \right\}, \tag{54}$$

где C – некоторая положительная константа.

Доказательство. Рассмотрим скачкообразный марковский процесс на $\mathfrak{X}$ с генератором

$$\mathcal{L}f(x) = \int\limits_{\mathfrak{X}} b(x, y)(f(y) - f(x))\, \bar{\mathfrak{m}}(dy),$$

где $b(x, y)$ и $\bar{\mathfrak{m}}(dy)$ определены в (5). Генератор L можно переписать в виде

$$\mathcal{L}f(x) = V(x) \int\limits_{\mathfrak{X}} \frac{b(x, y)}{V(x)}(f(y) - f(x))\, \bar{\mathfrak{m}}(dy). \tag{55}$$

Используя условие критического режима (51) для $\Psi(\xi, s) = q(s)$, получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} \frac{b(x, y)}{V(x)}\, \bar{\mathfrak{m}}(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{S} \frac{\alpha(\xi - \xi')Q(s, s')q(s')}{v(s)q(s)}\, d\xi'\, \nu(ds') = 1.$$

Следовательно, скачкообразный марковский процесс $X(t)$ с генератором (55) можно описать следующим образом: начиная с состояния $X(0) = (\xi, s)$ процесс делает скачки с интенсивностью $v(s)$, а распределение нового положения $X(t)$ имеет плотность

$$\frac{\alpha(\xi-\xi')Q(s,s')q(s')}{v(s)q(s)}$$

относительно меры $l\otimes\nu$. Таким образом, координаты ξ' и s' условно независимы при начальном условии $X(0)=(\xi,s)$, и можно записать $X(t)=(\xi(t),s(t))$.

Обозначим

$$\Theta(s,s')=\frac{Q(s,s')q(s')}{v(s)q(s)}.$$

Тогда из условия критического режима (51) получаем

$$\int\limits_S \Theta(s,s')\,\nu(ds')=1. \tag{56}$$

Вторая компонента $s(t)$ процесса $X(t)$ является скачкообразным марковским процессом в S с непрерывным временем и с генератором

$$\mathcal{L}_S\varphi(s)=v(s)\int\limits_S \Theta(s,s')(\varphi(s')-\varphi(s))\,\nu(ds'). \tag{57}$$

Первая компонента $\xi(t)$ из $X(t)$ не является марковским процессом с непрерывным временем (когда $v(s)\not\equiv 1$). Рассмотрим последовательность $\xi(0),\xi(1),\dots,$ где $\xi(n)\in\mathbb{R}^d$ – первая координата $X(t)$ после n-го скачка. Тогда $\xi(n)$ представляет собой случайное блуждание в $\mathbb{R}^d$, т.е. сумму независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением скачков, равным $\alpha(u)$. Однако случайные интервалы времени между скачками не являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами.

Применяя представление (5) для $b(X(t),y)$ и выбирая $x=(\xi_0,s_0)$, $y=(\xi_1,s_1)$, имеем

$$\mathbf{E}_x\, b(X(t),y)=\mathbf{E}_{(\xi_0,s_0)}\,\frac{\alpha(\xi(t)-\xi_1)Q(s(t),s_1)}{q(s(t))}\leqslant \varkappa\,\mathbf{E}_{\xi_0}\,\alpha(\xi(t)-\xi_1), \tag{58}$$

где

$$\varkappa=\frac{\max Q(s,s')}{q_{\min}}.$$

Используя для распределения процесса $\xi(t)$ разложение на сингулярную и регулярную части, получаем

$$\mathbf{E}_{\xi_0}\,\alpha(\xi(t)-\xi_1)=e^{-v(s_0)t}\alpha(\xi_0-\xi_1)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}P(t,\xi,\xi_0)\alpha(\xi-\xi_1)\,d\xi, \tag{59}$$

где $P(t,\xi,\xi_0)$ – регулярная часть распределения процесса $\xi(t)$:

$$P(t,\xi,\xi_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{*n}(\xi-\xi_0)p_n(t). \tag{60}$$

Здесь α^{*n} – n-кратная свертка функции α, а

$$p_n(t)=\Pr(n_X(t)=n)$$

– вероятность того, что процесс $X(t)$ имеет n скачков до момента времени t. Следует отметить, что

$$\Pr(n_X(t) = n) = \Pr(n_s(t) = n),$$

где $n_s(t)$ – число скачков процесса $s(t)$ на интервале времени $[0,t]$. В дальнейшем (см. (64)) будем обозначать через $P_{v(\cdot)}$ меру на пространстве целочисленных траекторий, соответствующих процессу $n_s(t)$.

Оценим α^{*n} и $p_n(t)$ по отдельности.

Лемма 3. *Предположим, что*

$$\alpha(\xi) \geqslant 0, \quad \alpha(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{и} \quad \int \alpha(\xi)\, d\xi = 1.$$

Тогда справедлива следующая оценка сверху:

$$\alpha^{*n}(\xi) \leqslant \frac{K}{n^{d/2}}. \tag{61}$$

Доказательство. Рассматривая $\alpha(\cdot)$ как распределение случайной величины, получаем, что соответствующая характеристическая функция $\varphi(k)$ обладает следующими свойствами:

$$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C_0(\mathbb{R}^d), \qquad \varphi(0) = 1, \qquad |\varphi(k)| < 1, \quad k \neq 0,$$

где $C_0(\mathbb{R}^d)$ – пространство непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности: $|\varphi(k)| \to 0$ при $|k| \to \infty$. Из утверждения [14, лемма 1.5] следует, что существуют $\delta > 0$ и $\gamma > 0$, такие что

$$|\varphi(k)| \leqslant e^{-\gamma k^2} \quad \text{для всех } |k| \leqslant \delta. \tag{62}$$

Более того, из свойств функции φ вытекает, что

$$|\varphi(k)| \leqslant C, \quad \text{где} \quad 0 < C < 1, \quad \text{для всех } |k| > \delta. \tag{63}$$

Так как $\varphi^n(k)$ является характеристической функцией $\alpha^{*n}(\xi)$, то применяя обратное преобразование Фурье вместе с (62) и (63), получаем следующую равномерную верхнюю оценку:

$$\alpha^{*n}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-iku} \varphi^n(k)\, dk \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\int\limits_{|k| \leqslant \delta} |\varphi(k)|^n\, dk + \int\limits_{|k| > \delta} |\varphi(k)|^n\, dk \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\gamma k^2 n}\, dk + \frac{1}{(2\pi)^d} C^{n-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\varphi(k)|^2\, dk \leqslant \frac{\widehat{C}}{n^{d/2}} + \frac{C^{n-2}}{(2\pi)^d} \|\varphi\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{K}{n^{d/2}}.$$

Здесь $\widehat{C}$ и K – некоторые константы, а $0 < C < 1$ – та же константа, что и в (63). Таким образом, оценка (61) доказана. ▲

Обозначим через $F_{\alpha_j}(t)$, $j = 1, 2$, функции распределения случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с параметрами $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ соответственно, т.е.

$$F_{\alpha_j}(t) = 1 - e^{-\alpha_j t}, \quad t \geqslant 0.$$

Если $\alpha_2 > \alpha_1$, то

$$F_{\alpha_2}(t) > F_{\alpha_1}(t), \quad \forall t > 0.$$

Будем обозначать через

$$P_{v(s(\tau))}(n(t) \leqslant k) = P_{v(\cdot)}(n(t) \leqslant k)$$

пуассоновский процесс с интенсивностью $v(s(\tau))$, зависящей от скачкообразного марковского процесса $s(\tau)$ с генератором (57). Очевидно, что

$$\Pr(n_X(t) \leqslant k) = P_{v(\cdot)}(n(t) \leqslant k). \tag{64}$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $0 < \lambda_0 \leqslant v(s) \leqslant \lambda_1 < \infty$, *тогда*

$$P_{v(\cdot)}(n(t) \leqslant k) \leqslant P_{\lambda_0}(n(t) \leqslant k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{65}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (65) равносильно следующему:

$$P_{v(\cdot)}(n(t) \geqslant k) \geqslant P_{\lambda_0}(n(t) \geqslant k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

Из условия предложения следует, что $F_{v(\cdot)}(t) \geqslant F_{\lambda_0}(t)$, $\forall t \geqslant 0$. Напомним, что свертка функций распределения определяется следующим образом:

$$(F_1 * F_2)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(t-x)\, F_2(dx).$$

Тогда, используя тот факт, что $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$, получаем, что для любых s_i, s_j

$$(F_{v(s_i)} * F_{v(s_j)})(t) \geqslant (F_{\lambda_0} * F_{v(s_j)})(t) = (F_{v(s_j)} * F_{\lambda_0})(t) \geqslant (F_{\lambda_0} * F_{\lambda_0})(t).$$

С учетом (56) для любых $v_1 = v(s_1)$ и $s_1 = s(0)$ получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &P_{v(\cdot)}(n(t) \geqslant k) = \\ &= \int\limits_{S^{k-1}} \Theta(s_1, s_2) \ldots \Theta(s_{k-1}, s_k)(F_{v_1} * F_{v_2} * \ldots * F_{v_k})(t)\, \nu(ds_2) \ldots \nu(ds_k) \geqslant \\ &\geqslant F_{\lambda_0}^{*k}(t) = P_{\lambda_0}(n(t) \geqslant k), \end{aligned}$$

где $v_j = v(s_j) \geqslant \lambda_0$ $\forall j = 1, \ldots, k$. Здесь мы использовали тот факт, что для заданных состояний $s_1, \ldots, s_k$ процесса $s(t)$ интервалы $t_1, \ldots, t_k$ времени ожидания соответствующего перехода условно независимы и имеют экспоненциальные распределения с параметрами $v(s_1), \ldots, v(s_k)$ соответственно.

Таким образом, неравенства (66) и (65) доказаны. ▲

Теперь воспользуемся неравенствами (61) и (65) для получения верхней оценки для регулярной части $P(t)\xi, \xi_0)$ распределения $\xi(t)$.

Л е м м а 4. *Для* $P(t, \xi, \xi_0)$ *при всех* $t > 0$ *справедлива следующая оценка*:

$$P(t, \xi, \xi_0) \leqslant \min\left\{M, \frac{\widetilde{K}}{t^{d/2}}\right\}. \tag{67}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы вывести верхнюю оценку на $P(t, \xi, \xi_0)$, разобьем сумму в (60) на две части:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{*n}(\xi) p_n(t) = \sum_{n=1}^{[\frac{1}{2}\lambda_0 t]} \alpha^{*n}(\xi) p_n(t) + \sum_{n=[\frac{1}{2}\lambda_0 t]+1}^{\infty} \alpha^{*n}(\xi) p_n(t), \tag{68}$$

где $\lambda_0 > 0$ – то же, что и в предложении 2, и оценим каждую из сумм в правой части (68) по отдельности. Из ограниченности функции $\alpha(\cdot)$ и условия нормировки (49) следует, что

$$M = \sup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \xi\in\mathbb{R}^d}} \alpha^{*k}(\xi) = \|\alpha\|_\infty \tag{69}$$

и

$$\sup_\xi \alpha^{*(n+k)}(\xi) \leqslant \sup_\xi \alpha^{*n}(\xi), \quad \forall k = 1, 2, \ldots \tag{70}$$

Применяя (65) и формулу Стирлинга, для первой суммы в (68) получаем

$$\sum_{n=1}^{[\frac{1}{2}\lambda_0 t]} \alpha^{*n}(\xi) p_n(t) \leqslant M \sum_{n=1}^{[\frac{1}{2}\lambda_0 t]} p_n(t) \leqslant M \Pr\Big(n_X(t) \leqslant \Big[\frac{1}{2}\lambda_0 t\Big]\Big) \leqslant$$
$$\leqslant M P_{\lambda_0}\Big(n(t) \leqslant \Big[\frac{1}{2}\lambda_0 t\Big]\Big) = M \sum_{n=0}^{[\frac{1}{2}\lambda_0 t]} \frac{(\lambda_0 t)^n}{n!} e^{-\lambda_0 t} \leqslant \big(\widetilde{M} t + M\big) e^{-B\lambda_0 t} \tag{71}$$

для положительного

$$B = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

и

$$\widetilde{M} = \frac{1}{2} M \lambda_0.$$

Для оценки второй суммы в (68) применим (61) и (70), а также неравенство

$$\sum_{n=[\frac{1}{2}\lambda_0 t]+1}^{\infty} p_n(t) < 1.$$

Тогда

$$\sum_{n=[\frac{1}{2}\lambda_0 t]+1}^{\infty} \alpha^{*n}(\xi) p_n(t) \leqslant \sup_{n > [\frac{1}{2}\lambda_0 t]} \sup_\xi \alpha^{*n}(\xi) \leqslant \frac{K}{\Big(1 + \Big[\frac{\lambda_0 t}{2}\Big]\Big)^{d/2}}. \tag{72}$$

Наконец, из (71) и (72) получаем утверждение (67) леммы 4. ▲

Объединяя (58), (59) и (67), получаем неравенство (54). Итак, лемма 2, а вместе с ней и теорема 2, полностью доказаны. ▲

§ 6. Дополнение

В нашу модель контактов помимо рождения и гибели можно включить скачки. Аналогичная модель в $\mathbb{R}^d$ рассматривалась ранее в [5]. А именно, рассмотрим следующий эвристический генератор $L + L_J$, где L задается формулой (2), а

$$L_J F(\gamma) = \int_{\mathfrak{X}} \sum_{x\in\gamma} J(y, x)\big(F((\gamma \setminus x) \cup y) - F(\gamma)\big)\, m(dy). \tag{73}$$

Предположим, что общая интенсивность скачков $\int J(y,x)\, m(dy)$ равномерно ограничена по x:

$$\sup_x \int\limits_{\mathfrak{X}} J(y,x)\, m(dy) < C. \tag{74}$$

Тогда модифицированное условие критического режима принимает вид

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} (a(x,y) + J(x,y))\Psi(y)\, m(dy) = \left(V(x) + \int\limits_{\mathfrak{X}} J(y,x)\, m(dy) \right) \Psi(x). \tag{75}$$

Это снова означает, что если первоначальная плотность частиц равна $\Psi(x)$, то эта плотность сохраняется.

Выберем $b(x,y)$ и $\bar{\mathfrak{m}}(dy)$ таким же образом, как определялось в (5). Тогда генератор $\mathcal{L}_J$ скачкообразного процесса имеет вид

$$\mathcal{L}_J f(x) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \left(b(x,y) + \frac{J(x,y)}{\Psi(x)} \right) (f(y) - f(x))\, \bar{\mathfrak{m}}(dy), \tag{76}$$

а условие транзиентности (12) теперь можно записать следующим образом:

$$\sup_{x,y} \int\limits_0^\infty \mathbf{E}_{x,y}\, b\big(\widetilde{X}(t), \widetilde{Y}(t)\big)\, dt < H, \tag{77}$$

где $\widetilde{X}(t)$ и $\widetilde{Y}(t)$ – два независимых экземпляра марковского процесса с генератором $\mathcal{L}_J$, заданным формулой (76).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Harris T.E.* Contact Interactions on a Lattice // Ann. Probab. 1974. V. 2. № 6. P. 969–988. https://doi.org/10.1214/aop/1176996493
2. *Holley R., Liggett T.M.* The Survival of Contact Processes // Ann. Probab. 1978. V. 6. № 2. P. 198–206. https://doi.org/10.1214/aop/1176995567
3. *Liggett T.M.* Interacting Particle Systems. New York: Springer-Verlag, 1985.
4. *Kondratiev Yu., Kutoviy O., Pirogov S.* Correlation Functions and Invariant Measures in Continuous Contact Model // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2008. V. 11. № 2. P. 231–258. https://doi.org/10.1142/S0219025708003038
5. *Kondratiev Yu.G., Kutoviy O.V., Pirogov S.A., Zhizhina E.* Invariant Measures for Spatial Contact Model in Small Dimensions // Markov Process. Related Fields. 2021. V. 27. № 3. P. 413–438. https://math-mprf.org/journal/articles/id1616
6. *Kondratiev Yu., Skorokhod A.* On Contact Processes in Continuum // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2006. V. 9. № 2. P. 187–198. https://doi.org/10.1142/S0219025706002305
7. *Kondratiev Yu., Pirogov S., Zhizhina E.* A Quasispecies Continuous Contact Model in a Critical Regime // J. Stat. Phys. 2016. V. 163. № 2. P. 357–373. https://doi.org/10.1007/s10955-016-1480-5
8. *Pirogov S., Zhizhina E.*, A Quasispecies Continuous Contact Model in a Subcritical Regime // Moscow Math. J. 2019. V. 19. № 1. P. 121–132. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2019-19-1-121-132
9. *Nowak M.* What Is a Quasispecies? // Trends Ecol. Evol. 1992. V. 7. № 4. P. 118–121. https://doi.org/10.1016/0169-5347(92)90145-2

10. *Pirogov S., Zhizhina E.* Contact Processes on General Spaces. Models on Graphs and on Manifolds // Electron. J. Probab. 2022. V. 27. Article no. 41 (14 pp.). `doi.org/10.1214/22-EJP765`
11. *Ruelle D.* Statistical Mechanics: Rigorous Results. New York: Benjamin, 1969.
12. *Lenard A.* Correlation Functions and the Uniqueness of the State in Classical Statistical Mechanics // Commun. Math. Phys. 1973. V. 30. № 1. P. 35–44. `https://doi.org/10.1007/BF01646686`
13. *Lenard A.* States of Classical Statistical Mechanical Systems of Infinitely Many Particles. II. Characterization of Correlation Measures // Arch. Rational Mech. Anal. 1975. V. 59. № 3. P. 241–256. `https://doi.org/10.1007/BF00251602`
14. *Petrov V.V.* Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables. Oxford: Clarendon; New York: Oxford Univ. Press, 1995.

Жижина Елена Анатольевна
Пирогов Сергей Анатольевич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва
`ejj@iitp.ru`
`s.a.pirogov@bk.ru`

Поступила в редакцию
26.06.2023
После доработки
26.06.2023
Принята к публикации
20.10.2023