МИКРОЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 52, № 4, с. 262–281

МОДЕЛИРОВАНИЕ

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА КВАНТОВЫЙ МАГНЕТОТРАНСПОРТ В ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ

© 2023 г. И. А. Кузнецова[a], О. В. Савенко[a], Д. Н. Романов[a, *]

[a]*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 150003 Россия*

*****E-mail: romanov.yar357@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.03.2023 г.
После доработки 20.04.2023 г.
Принята к публикации 22.04.2023 г.

Получены аналитические выражения для коэффициентов Холла и магнетосопротивления тонкой полупроводниковой пленки. Рассматривается случай слабого магнитного поля и эффекты, связанные с расщеплением энергетического спектра носителей заряда на уровни Ландау, не учитываются. Изоэнергетическая поверхность материала полупроводника является эллипсоид вращения (сфероид). Выполнен переход к предельным случаям вырожденного и невырожденного электронных газов, зеркальных границ. Поведение носителей заряда описывается квантовым уравнением Лиувилля. Влияние поверхностного рассеяния носителей заряда учитывается через граничные условия Соффера. Проведен анализ зависимости коэффициентов Холла и магнетосопротивления от толщины пленки, индукции внешнего магнитного поля, шероховатости поверхности пленки.

Ключевые слова: тонкая пленка, уравнение Лиувилля, модель Соффера, коэффициент Холла, коэффициент магнетосопротивления

DOI: 10.31857/S0544126923700400, **EDN:** UYUDNQ

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно развиваются такие области науки и техники, как микро- и наноэлектроника. Сегодня наблюдается тенденция к миниатюризации элементов интегральных схем. Современные технологии изготовления и выращивания слоистых наноструктур позволяют создавать нанослой толщиной порядка нескольких нанометров (меньше длины волны де Бройля носителей заряда). В таких нанослоях становится ярко выраженным квантовый размерный эффект, а электронный газ необходимо рассматривать как квазидвумерный газ, заключенный в потенциальную яму с бесконечно высокими стенками. При малых толщинах неровность поверхности на атомарном уровне существенно влияет на электрические и гальваномагнитные параметры нанослоя. Для теоретического описания явлений переноса носителей заряда необходимо использовать модели, которые бы учитывали квантование энергетического спектра носителей заряда и поверхностное рассеяние.

Изучение влияния магнитного поля на движение носителей заряда актуально для создания магнитной памяти. В настоящее время имеют востребованность элементы памяти с ультрабыстрым управлением намагниченностью [1]. По коэффициенту Холла можно определить механизм рассеяния [2], величину магнитного поля [3]. При уменьшении толщины пленки коэффициент Холла возрастает, что позволяет точнее определять величину магнитной индукции поля.

Известных работ, посвященных вышеназванной тематике, существует пока ограниченное количество. В последние десятилетия активно развиваются методики, позволяющие определять профиль шероховатости поверхности с высокой точностью (атомно-силовая микроскопия и т.д.). Особый интерес вызывает использование тех моделей граничных условий, в которых фигурирует параметр, характеризующий степень неровности поверхности. В рамках данного проекта предлагается использовать метод, согласно которому поверхностное рассеяние носителей заряда будет учитываться через граничные условия Соффера [4], накладываемые на уравнение Лиувилля. Выбор модели Соффера обусловлен тем, что она получена в результате решения квантовомеханической задачи о взаимодействии электронной волны с поверхностью слоя и в этой модели фигурирует параметр шероховатости поверхности, который можно померить непосредственно в экспериментальных условиях.

Для решения подобных задач необходимо использовать квантовую теорию процессов переноса, заключающуюся в нахождении элементов матрицы плотности решением уравнения Лиувилля. Авторы некоторых работ использовали различные ме-

тоды решения этого уравнения. В работе [5] применен метод функций Грина для решения задачи об электропроводности тонкой металлической пленки. В работах Мейеровича и др., опубликованных в начале 2000-х годов, использовался метод непосредственного расчета вероятности переходов носителей заряда за счет потенциала рассеяния с помощью автокорреляционных функций, описывающих профиль поверхности [6]. В другом источнике [7] производился непосредственный расчет гамильтониана, обусловленного рассеянием носителей заряда. Методы решения задач, использованные авторами, приводят к громоздким математическим расчетам. Теоретические исследования явлений переноса в нанопленках продолжаются в настоящее время.

В настоящей работе для расчета гальваномагнитных параметров тонкой пленки применяется метод, рассмотренный в работах [8, 9], с использованием граничных условий Соффера.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматривается изолированный проводящий нанослой (тонкий слой из полупроводника, расположенный между двумя изолирующими слоями или нанесенный на изолирующую подложку). Толщина слоя равна a. Пленка находится в скрещенных однородных электрических и магнитных полях. Введем декартовую систему координат. Вдоль оси X направлен вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, а вдоль оси Z – вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$. Сила, действующая на электроны (дырки), имеет вид

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_H\right) + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \tag{1}$$

где c – скорость света, e и $\mathbf{v}$ – соответственно, заряд и скорость свободного электрона, $\mathbf{E}_H$ – напряженность электрического поля, обусловленная эффектом Холла.

Электрические поля меняются по гармоническому закону:

$$E = E_{0x}\exp(i\omega t), \tag{2}$$

$$E_H = E_{0y}\exp(i\omega t), \tag{3}$$

где E_{0x} – амплитуда напряженности внешнего электрического поля, E_{0y} – амплитуда холловской напряженности электрического поля, ω – частота внешнего электрического поля.

Изоэнергетическая поверхность ряда полупроводников (кремний, германий) имеет форму эллипсоидов. Для пленки, толщина которой сравнима с длиной волны де Бройля, необходимо учитывать квантование энергии носителей заряда. Изоэнергетическая поверхность с учетом квантовых размерных эффектов будет представлять собой совокупность равностоящих эллипсах, центры которых лежат на оси p_z, а сами эллипсы расположены на эллипсоиде. В этом случае энергия носителей заряда принимает вид:

$$\begin{gathered}\varepsilon_n = \varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{zn};\quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_y^2}{2m_2};\\ \varepsilon_{zn} = \frac{p_{zn}^2}{2m_3},\quad n = 1,2,3,\ldots,N,\end{gathered} \tag{4}$$

где $m_{\parallel}$ и $m_{\perp}$ – соответственно продольная и поперечная эффективные массы носителя заряда. Проекция импульса носителя заряда на ось p_{zn} принимает дискретный ряд значений, а на осях p_x и p_y – непрерывный ряд значений.

Проводящая пленка расположена между двумя диэлектриками, поэтому для электронов (дырок) пленка в первом приближении представляет собой потенциальную яму с бесконечно высокими стенками

$$U = \begin{cases}0, & 0 \le z \le a,\\ \infty, & z < 0,\ z > a.\end{cases}$$

В этом случае проекция квазиимпульса на ось Z (p_{zn}) принимает следующие значения

$$p_{zn} = \frac{hn}{2a};\quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{5}$$

где h – постоянная Планка.

Коэффициенты Холла и магнетосопротивления можно найти с помощью уравнения фон Неймана (квантового уравнения Лиувилля):

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right], \tag{6}$$

где $\hat{\rho}$ – оператор матрицы плотности, $\hat{H}$ – оператор Гамильтона, $\hbar$ – постоянная Дирака, а скобки обозначают коммутатор.

Из уравнения Лиувилля (6) в работах [8, 9] было получено кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{2\pi}{\hbar}N_{imp}\sum_{n'}\left|V_{0n'}\right|^2\left(f_n - f_{n-n'}\right)\delta\left(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-n'}\right), \tag{7}$$

где f_n – это функция распределения носителей заряда на n-ом энергетическом уровне, $\mathbf{v}$ – это скорость электронов (дырок) в плоскости пленки, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор электрона (дырки) в произвольной точке пленки, $\mathbf{F}$ – сила, действующая на носители заряда (1), N_{imp} – концентрация примесей, $V_{0n'}$ – матричный элемент рассеяния при переходе из n'-ого уровня на n-ый уровень, δ – дельта-функция.

Для учета поверхностного рассеяния будем использовать модель Соффера [4]:

$$\begin{cases} f_n^+(0,v_x,v_y) = q_{1n}(g_1,\vartheta_n) f_n^-(0,v_x,v_y), \\ f_n^-(a,v_x,v_y) = q_{2n}(g_2,\vartheta_n) f_n^+(a,v_x,v_y), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} q_{1n}(g_1,\vartheta_n) = \exp\left(-\left[4\pi g_1 \cos\vartheta_n\right]^2\right), \\ q_{2n}(g_2,\vartheta_n) = \exp\left(-\left[4\pi g_2 \cos\vartheta_n\right]^2\right), \end{cases} \quad (9)$$

$$g_1 = \frac{g_{s1}}{\lambda_{BV}}, \quad g_2 = \frac{g_{s2}}{\lambda_{BV}}, \quad (10)$$

где g_1 и g_2 – параметры шероховатости для нижней и вахней поверхности пленки; f_n^+ и f_n^- – неравновесные функции распределения электронов (дырок) соответственно с положительной и отрицательной проекциями скорости на ось Z ($n = 1,2,3\ldots$); ϑ_n – угол между импульсом носителя заряда и осью p_z; g_{s1} и g_{s2} – соответственно среднеквадратичная высота поверхностного рельефа для нижней и верхней границы пленки; λ_{BV} – длина волны де Бройля электрона (дырки). В отличие от модели Фукса, в которой коэффициенты зеркальности q_{1n} и q_{2n} выбираются постоянными феноменологическим образом, в модели Соффера вероятность зеркального отражения зависит от угла падения носителя заряда на эту поверхности и от шероховатости этой поверхности.

Плотность тока $\mathbf{j}$ определяется следующим образом

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{a}\sum_n \iint \mathbf{v} f_n \frac{dp_x dp_y}{h^2}. \quad (11)$$

Приборы могут показывать только усредненные по толщине пленки величины (9)

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{a}\int_0^a \mathbf{j} dz. \quad (12)$$

Продольная составляющая электропроводности выражается через дифференциальный закон Ома:

$$\langle j_{x0} \rangle = \sigma_{\|} E_{0x}, \quad \sigma_{\|} = \sigma_{xx} - \sigma_{yx}\sigma_{xy}/\sigma_{yy}. \quad (13)$$

Коэффициент Холла R_H и коэффициент поперечного магнетосопротивления $\varkappa_\perp$ будут иметь вид:

$$R_H = \frac{E_{0y}}{\langle j_{x0} \rangle H} = -\frac{\sigma_{yx}}{\left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yx}\sigma_{xy}\right)H}, \quad \varkappa_\perp = \frac{\sigma_{0\|} - \sigma_{\|}}{\sigma_{0\|} H^2}, \quad (14)$$

где $\sigma_{0\|} = \sigma_{\|}(B = 0)$.

3. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХОЛЛА И МАГНЕТОСОПРОТИВЛЕНИЯ

Используя тот же метод решения, что и в работе [8, 9], запишем окончательные результаты. Для этого введем безразмерные параметры:

$$m_0 = \sqrt[3]{m_\perp^2 m_\|}, \quad k_{m\perp} = m_\perp/m_0, \quad k_{m\|} = m_\|/m_0, \quad (15)$$

где $k_{m\perp}$ и $k_{m\|}$ – безразмерные поперечная и продольная эффективные массы носителей заряда, которые связаны соотношением $k_{m\perp}^2 k_{m\|} = 1$,

$$\lambda_B = h/p_{1V}, \quad p_{1V} = m_0 v_{0V}, \\ \Lambda = v_0\tau = v_{0V}\tau_V, \quad x_\lambda = \Lambda/\lambda_B, \quad (16)$$

где Λ – длина свободного пробега электронов (дырок) в объемном проводнике без учета влияния границ пленки, которая при учете квантовых размерных эффектов не меняется, τ и τ_V – объемное время релаксации в присутствии и отсутствии квантового размерного эффекта соответственно, v_0 и v_{0V} – характеристическая скорость носителей заряда в присутствии и отсутствии квантового размерного эффекта соответственно [9],

$$x_B = a/\lambda_B, \quad x_0 = a/\Lambda, \\ y_0 = \omega\tau_V, \quad u_\| = \varepsilon_\|/(k_Б T), \quad (17)$$

где x_0 – безразмерная толщина пленки, y_0 – безразмерная частота внешнего электрического поля, $k_Б$ – постоянная Больцмана, T – температура,

$$u_1 = h^2/\left(8m_0 a^2 k_Б T\right), \quad u_\mu = \mu/(k_Б T), \\ u_0 = m_0 v_0^2/(2k_Б T), \quad (18)$$

где μ – химический потенциал,

$$u_{0V} = m_0 v_{0V}^2/(2k_Б T), \quad k = \sqrt{u_0/u_{0V}}, \quad (19)$$

$$\tau_\beta = \sin(\beta/k_{m\perp})/(\beta/k_{m\perp}), \quad (20)$$

$$z_0 = x_0(k - iy_0), \quad \beta = \tau_V e H/(m_0 c), \quad (21)$$

где β – безразмерная напряженность внешнего магнитного поля,

$$\Omega_{1n} = \frac{2x_0x_\lambda z_0}{nk_{m\perp}^2},\quad \Omega_{2n} = \frac{2x_\lambda x_0^2\beta}{nk_{m\perp}^3}, \tag{22}$$

$$u_{0V} = \frac{5}{6}\left(\frac{2}{k_{m\perp}} + k_{m\perp}^2\right)\frac{F_{3/2}(u_\mu)}{F_{1/2}(u_\mu)}, \tag{23}$$

$$F_j(x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)}\int_0^\infty \frac{t^j dt}{1+e^{t-x}},\quad \Gamma(j+1) = \int_0^\infty t^j e^{-t}dt, \tag{24}$$

где $F_j(x)$ – интеграл Ферми–Дирака с индексом j, $\Gamma(j+1)$ – гамма-функция,

$$u_0 = \frac{5}{3P_1}\left(\frac{P_3}{k_{m\perp}} + k_{m\perp}^2 P_2\right), \tag{25}$$

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\exp\left(u_\mu - \frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\right)\right), \tag{26}$$

$$P_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\ln\left(1+\exp\left(u_\mu - \frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\right)\right), \tag{27}$$

$$P_3 = \sum_{n=1}^{\infty}F_1\left(u_\mu - \frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\right). \tag{28}$$

Косинус угла cosθ в коэффициентах зеркальностей q_{1n} и q_{2n} (5) определяется через отношение скоростей:

$$\cos\vartheta_n = \frac{v_{zn}}{v} = \frac{\dfrac{nk_{m\perp}\sqrt{u_{0V}}}{2x_0x_\lambda}}{\sqrt{\dfrac{u_\perp}{k_{m\perp}^3} + \left(\dfrac{nk_{m\perp}\sqrt{u_{0V}}}{2x_0x_\lambda}\right)^2}}, \tag{29}$$

где $u_\perp = \varepsilon_\perp/(k_Б T)$.

Выражения для удельной электропроводности $\sigma_\parallel$, коэффициентов Холла R_H и магнетосопротивления $\varkappa_\perp$ (14) выглядят следующим образом:

$$\sigma_\parallel = \sigma_0\Sigma(x_0, y_0, x_\lambda, k_{m\perp}, \beta, g_1, g_2),\quad \sigma_0 = n_{cV}e^2\tau_V/m_0, \tag{30}$$

$$\sigma_{0\parallel} = \sigma_0\Sigma_0(x_0, y_0, x_\lambda, k_{m\perp}, g_1, g_2),\quad \sigma_0 = n_{cV}e^2\tau_V/m_0, \tag{31}$$

$$R_H = R_{H0}A_H(x_0, y_0, x_\lambda, k_{m\perp}, \beta, g_1, g_2),\quad R_{H0} = 1/(n_{cV}ec), \tag{32}$$

$$\varkappa_\perp = \varkappa_{\perp0}D_\perp(x_0, y_0, x_\lambda, k_{m\perp}, \beta, g_1, g_2),\quad \varkappa_{\perp0} = (\sigma_0R_{H0})^2, \tag{33}$$

$$\Sigma = \frac{P_1\sqrt{u_{0V}}\tau_\beta}{F_{1/2}(u_\mu)x_\lambda\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\frac{\left(z_0 - \dfrac{a_q}{4P_1x_0x_\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{x_0\beta}{k_{m\perp}} - \dfrac{b_q}{2P_1x_0x_\lambda}\right)^2}{z_0\left(z_0^2 + \dfrac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}\right) + \dfrac{1}{4P_1x_0x_\lambda}\left(a_q\left(\dfrac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2} - z_0^2\right) - 4z_0b_q\dfrac{x_0\beta}{k_{m\perp}}\right)}, \tag{34}$$

$$\Sigma_0 = \frac{P_1\sqrt{u_{0V}}}{F_{1/2}(u_\mu)x_\lambda\sqrt{\pi}z_0}\left(1 - \frac{a_{0q}}{4P_1x_0x_\lambda z_0}\right), \tag{35}$$

$$A_H = \frac{F_{1/2}(u_\mu)x_\lambda\sqrt{\pi}}{\beta P_1\sqrt{u_{0V}}\tau_\beta}\times$$
$$\times\frac{\dfrac{x_0\beta}{k_{m\perp}}\left(z_0^2 + \dfrac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}\right) + \dfrac{k_{m\perp}}{2P_1x_0x_\lambda}\left(b_q\left(z_0^2 - \dfrac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}\right) - z_0a_q\dfrac{x_0\beta}{k_{m\perp}}\right)}{\left(z_0 - \dfrac{a_q}{4P_1x_0x_\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{x_0\beta}{k_{m\perp}} - \dfrac{b_q}{2P_1x_0x_\lambda}\right)^2}, \tag{36}$$

$$D_{\perp} = \frac{\Sigma_0 - \Sigma}{\Sigma_0 \beta^2}, \tag{37}$$

$$a_q = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial u_{\perp}} \right) u_{\perp} A_1 (\Omega_{1n}, \Omega_{2n})\, du_{\perp}, \tag{38}$$

$$a_{0q} = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial u_{\perp}} \right) u_{\perp} A_0 (\Omega_{1n0})\, du_{\perp}, \tag{39}$$

$$b_q = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial u_{\perp}} \right) u_{\perp} A_2 (\Omega_{1n}, \Omega_{2n})\, du_{\perp}, \tag{40}$$

$$A_0 (\Omega_{1n0}) = \\ = \frac{(1 - \exp(-\Omega_{1n0}))(2 - q_1 - q_2 + (q_1 + q_2 - 2q_1 q_2)\exp(-\Omega_{1n0}))}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega_{1n0})}, \tag{41}$$

$$A_1 (\Omega_{1n}, \Omega_{2n}) = \{(2 - q_1 - q_2) + q_1 q_2 (q_1 + q_2 - 2q_1 q_2)\exp(-4\Omega_{1n}) - \\ - 2(1 - q_1)(1 - q_2)\exp(-\Omega_{1n})(1 - q_1 q_2 \exp(-2\Omega_{1n}))\cos\Omega_{2n} - \\ - [q_1 + q_2 - q_1 q_2 (q_1 + q_2)]\exp(-2\Omega_{1n})\cos(2\Omega_{2n})\} \Big/ \big(1 + q_1^2 q_2^2 \exp(-4\Omega_{1n}) - \\ - 2q_1 q_2 \exp(-2\Omega_{1n})\cos(2\Omega_{2n}), \tag{42}$$

$$A_2 (\Omega_{1n}, \Omega_{2n}) = \{(1 - q_1)(1 - q_2)\exp(-\Omega_{1n})(1 + q_1 q_2 \exp(-2\Omega_{1n})) + \\ + [q_1 + q_2 + q_1 q_2 (q_1 + q_2 - 4)]\exp(-2\Omega_{1n})\cos(\Omega_{2n})\}\sin(\Omega_{2n}) \big/ (1 + \\ + q_1^2 q_2^2 \exp(-4\Omega_{1n}) - 2q_1 q_2 \exp(-2\Omega_{1n})\cos(2\Omega_{2n}). \tag{43}$$

Здесь σ_0 – статическая электропроводность, Σ и Σ_0 – безразмерная удельная электропроводность в присутствии и отсутствии магнитного поля соответственно, R_{H0} – коэффициент Холла в случае толстой пленки $(a \gg \Lambda,\ a \gg \lambda_{BV})$, A_H – безразмерный коэффициент Холла, $D_{\perp}$ – безразмерный коэффициент магнетосопротивления.

4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

1. Случай вырожденного электронного газа $(\exp(u_{\mu}) \gg 1)$.

Данный случай соответствует высокой концентрации, малой эффективной массе и низкой температуре газа свободных носителей заряда (электронов, дырок). Функция распределения Ферми–Дирака примет ступенчатый вид.

$$k_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{k_{m\perp}} + k_{m\perp}^2 \right), \quad N_0 = \frac{2x_0 x_{\lambda}}{k_{m\perp}\sqrt{k_0}}, \tag{44}$$

$$P_{11} = \sum_{n=1}^{\mathrm{int}(N_0)} \left(1 - \frac{n^2}{N_0^2} \right), \quad P_{21} = \sum_{n=1}^{\mathrm{int}(N_0)} \frac{n^2}{N_0^2} \left(1 - \frac{n^2}{N_0^2} \right), \tag{45}$$

$$P_{31} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\mathrm{int}(N_0)} \left(1 - \frac{n^2}{N_0^2} \right)^2, \tag{46}$$

$$\Sigma = \frac{3P_{11}\tau_{\beta}\sqrt{k_0}}{4x_{\lambda}} \times \\ \times \frac{\left(z_0 - \dfrac{a_{q1}}{4P_{11}x_0 x_{\lambda}} \right)^2 + \left(\dfrac{x_0 \beta}{k_{m\perp}} - \dfrac{b_{q1}}{2P_{11}x_0 x_{\lambda}} \right)^2}{z_0 \left(z_0^2 + \dfrac{x_0^2 \beta^2}{k_{m\perp}^2} \right) + \dfrac{1}{4P_{11}x_0 x_{\lambda}} \left(a_{q1} \left(\dfrac{x_0^2 \beta^2}{k_{m\perp}^2} - z_0^2 \right) - 4z_0 b_{q1} \dfrac{x_0 \beta}{k_{m\perp}} \right)}, \tag{47}$$

$$\Sigma_0 = \frac{3P_{11}\sqrt{k_0}}{4x_{\lambda}z_0} \left(1 - \frac{a_{0q1}}{4P_{11}x_0 x_{\lambda} z_0} \right), \tag{48}$$

$$A_H = \frac{4x_\lambda}{3\beta P_{11}\tau_\beta\sqrt{k_0}}\times$$
$$\times\frac{\frac{x_0\beta}{k_{m\perp}}\left(z_0^2+\frac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}\right)+\frac{k_{m\perp}}{2P_{11}x_0x_\lambda}\left(b_{q1}\left(z_0^2-\frac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}\right)-z_0a_{q1}\frac{x_0\beta}{k_{m\perp}}\right)}{\left(z_0-\frac{a_{q1}}{4P_{11}x_0x_\lambda}\right)^2+\left(\frac{x_0\beta}{k_{m\perp}}-\frac{b_{q1}}{2P_{11}x_0x_\lambda}\right)^2}, \quad (49)$$

$$a_{q1} = \sum_{n=1}^{\mathrm{int}(N_0)} n\left(1-\frac{n^2}{N_0^2}\right)A_1(\Omega_{1n},\Omega_{2n}), \quad (50)$$

$$a_{0q1} = \sum_{n=1}^{\mathrm{int}(N_0)} n\left(1-\frac{n^2}{N_0^2}\right)A_0(\Omega_{1n0}), \quad (51)$$

$$b_{q1} = \sum_{n=1}^{\mathrm{int}(N_0)} n\left(1-\frac{n^2}{N_0^2}\right)A_2(\Omega_{1n},\Omega_{2n}). \quad (52)$$

2. Случай невырожденного электронного газа $(\exp(-u_\mu)\gg 1)$.

Данный случай соответствует низкой концентрации, высокой эффективной массе и высокой температуре газа свободных носителей заряда (электронов, дырок). Функция распределения Ферми–Дирака примет вид классического распределения Максвелла–Больцмана.

$$u_{0V} = \frac{5}{6}\left(\frac{2}{k_{m\perp}}+k_{m\perp}^2\right), \quad P_{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\right) \quad (53)$$

$$P_{22} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\exp\left(-\frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\right)\Big/P_{12}, \quad (54)$$

$$\Sigma = \frac{P_{12}\tau_\beta\sqrt{u_{0V}}}{x_\lambda\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\frac{\left(z_0-\frac{a_{q2}}{4P_{12}x_0x_\lambda}\right)^2+\left(\frac{x_0\beta}{k_{m\perp}}-\frac{b_{q2}}{2P_{12}x_0x_\lambda}\right)^2}{z_0\left(z_0^2+\frac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}\right)+\frac{1}{4P_{12}x_0x_\lambda}\left(a_{q2}\left(\frac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}-z_H^2\right)-4z_0b_{q2}\frac{x_0\beta}{k_{m\perp}}\right)}, \quad (55)$$

$$\Sigma_0 = \frac{P_{12}\sqrt{u_{0V}}}{x_\lambda\sqrt{\pi}z_0}\left(1-\frac{a_{0q2}}{4P_{12}x_0x_\lambda z_0}\right), \quad (56)$$

$$A_H = \frac{x_\lambda\sqrt{\pi}}{\beta P_{12}\tau_\beta\sqrt{u_{0V}}}\times$$
$$\times\frac{\frac{x_0\beta}{k_{m\perp}}\left(z_0^2+\frac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}\right)+\frac{k_{m\perp}}{2P_{12}x_0x_\lambda}\left(b_{q2}\left(z_0^2-\frac{x_0^2\beta^2}{k_{m\perp}^2}\right)-z_Ha_{q2}\frac{x_0\beta}{k_{m\perp}}\right)}{\left(z_0-\frac{a_{q2}}{4P_{12}x_0x_\lambda}\right)^2+\left(\frac{x_0\beta}{k_{m\perp}}-\frac{b_{q2}}{2P_{12}x_0x_\lambda}\right)^2}, \quad (57)$$

$$a_{q2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\exp\left(-\frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\right)\int_0^\infty u_\perp e^{-u_\perp}A_1(\Omega_{1n},\Omega_{2n})\,du_\perp, \quad (58)$$

$$a_{0q2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\exp\left(-\frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\right)\int_0^\infty u_\perp e^{-u_\perp}A_0(\Omega_{1n0})\,du_\perp, \quad (59)$$

$$b_{q2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\exp\left(-\frac{u_{0V}k_{m\perp}^2n^2}{4x_0^2x_\lambda^2}\right)\int_0^\infty u_\perp e^{-u_\perp}A_2(\Omega_{1n},\Omega_{2n})\,du_\perp. \quad (60)$$

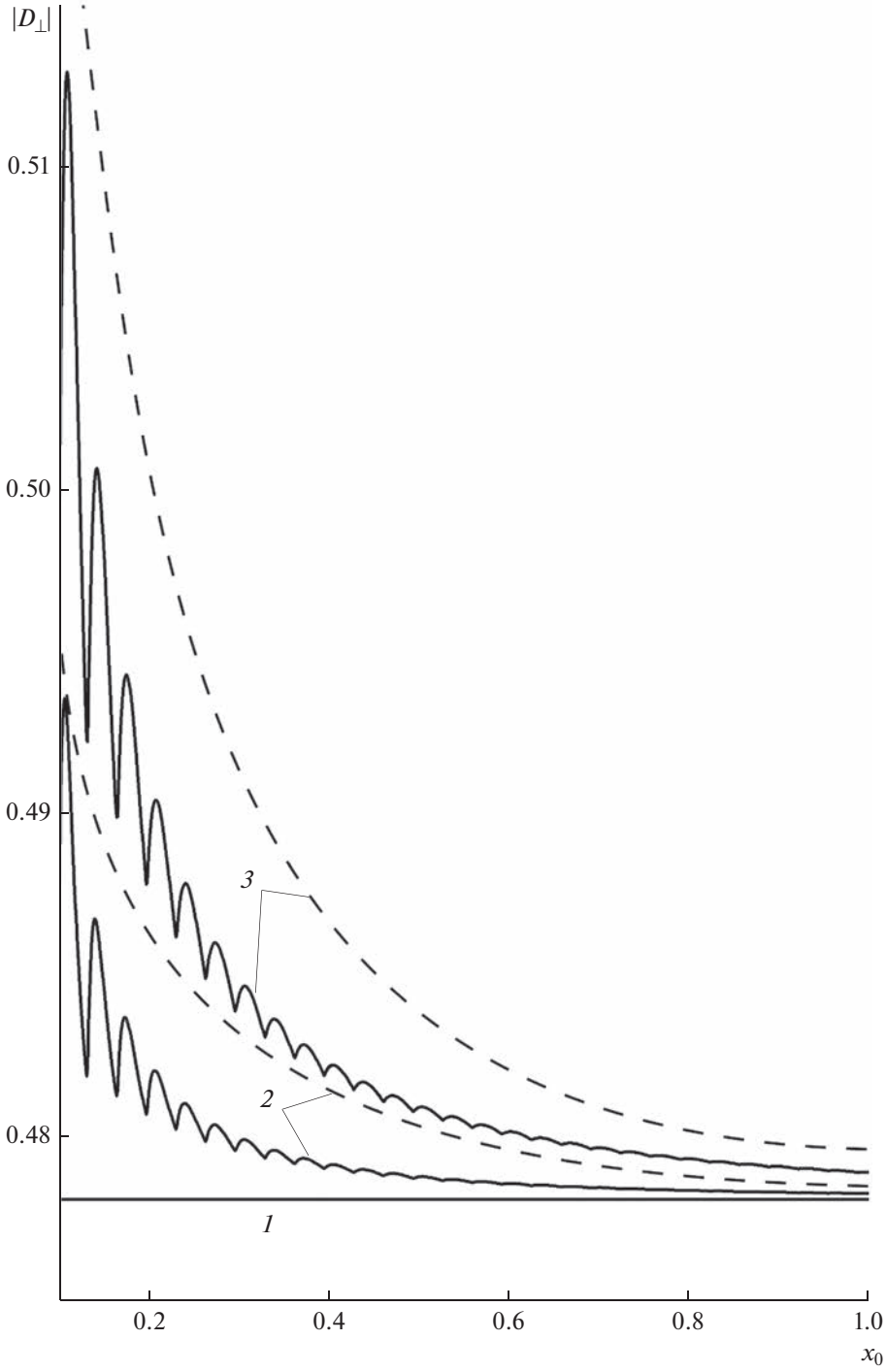

Рис. 1. Зависимость $|D_\perp|$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от безразмерной толщины пленки x_0 при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривые *1*, *2*, *3* построены при $g_1 = g_2 = 0$; $g_1 = 0.01$, $g_2 = 0.02$; $g_1 = 0.03$, $g_2 = 0.04$ соответственно.

3. Случай зеркальных границ пленки $(g_1 = g_2 = 0)$.

Для гладкой поверхности некоторые вспомогательные величины A_0, A_1, A_2 обращаются в нуль в независимости от толщины пленки. В итоге выражения (34)–(43) преобразуются следующим образом:

$$\Sigma = \frac{P_1\sqrt{u_{0V}}\tau_\beta}{F_{1/2}(u_\mu)x_\lambda z_0\sqrt{\pi}}, \quad A_H = \frac{F_{1/2}(u_\mu)x_\lambda x_0\sqrt{\pi}}{P_1\sqrt{u_{0V}}k_{m\perp}}, \tag{61}$$

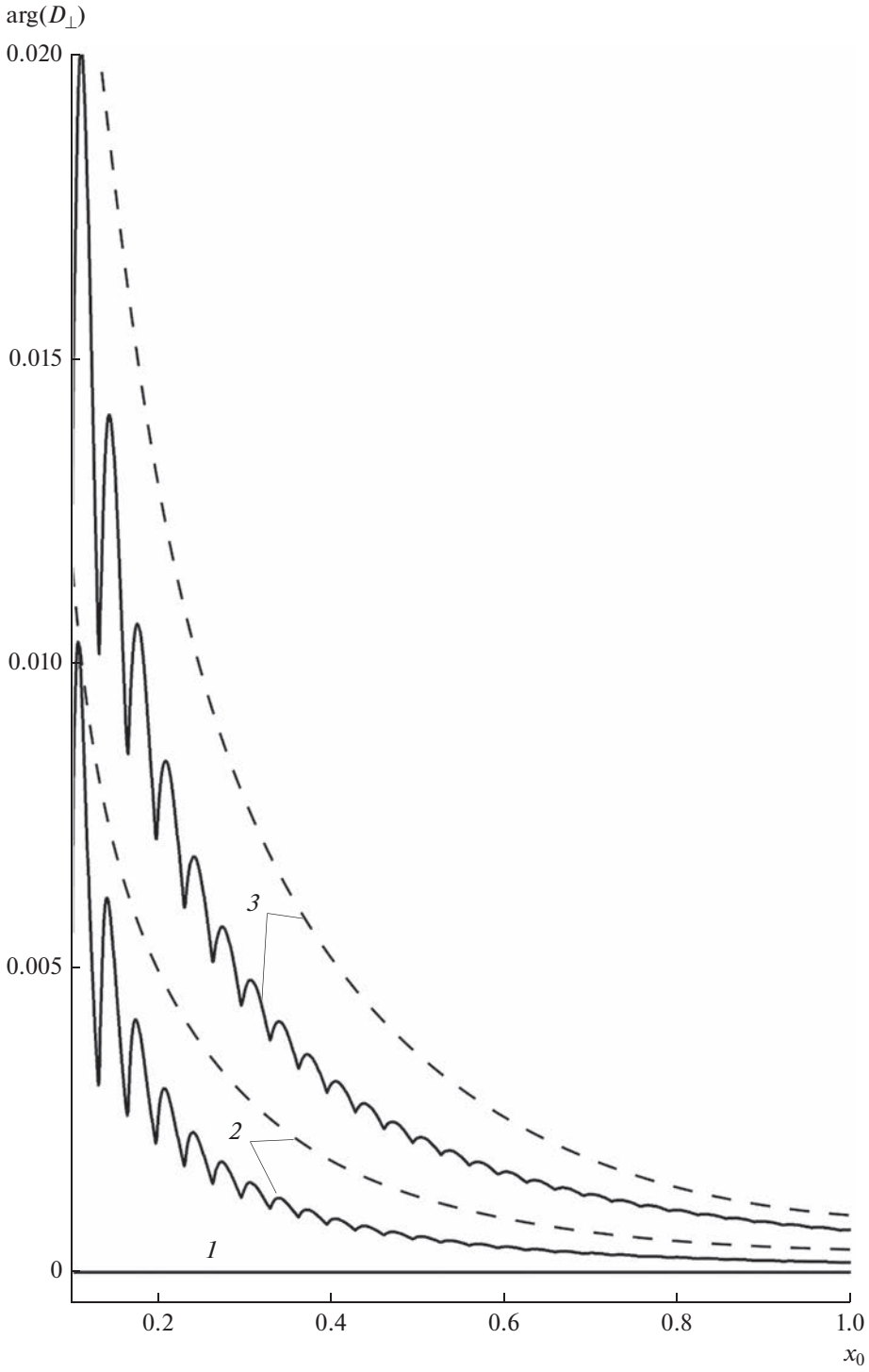

Рис. 2. Зависимость $\arg(D_\perp)$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от безразмерной толщины пленки x_0 при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривые *1*, *2*, *3* построены при $g_1 = g_2 = 0$; $g_1 = 0.01$, $g_2 = 0.02$; $g_1 = 0.03$, $g_2 = 0.04$ соответственно.

$$A_H = \frac{F_{1/2}(u_\mu)\, x_\lambda x_0 \sqrt{\pi}}{P_1 \sqrt{u_{0V}}\, k_{m\perp}}, \quad D_\perp = \frac{1-\tau_\beta}{\beta^2} \approx \frac{1}{6k_{m\perp}^2}. \tag{62}$$

В этом предельном случае коэффициенты Холла и магнетосопротивления не зависят от толщины пленки и от величины магнитного поля.

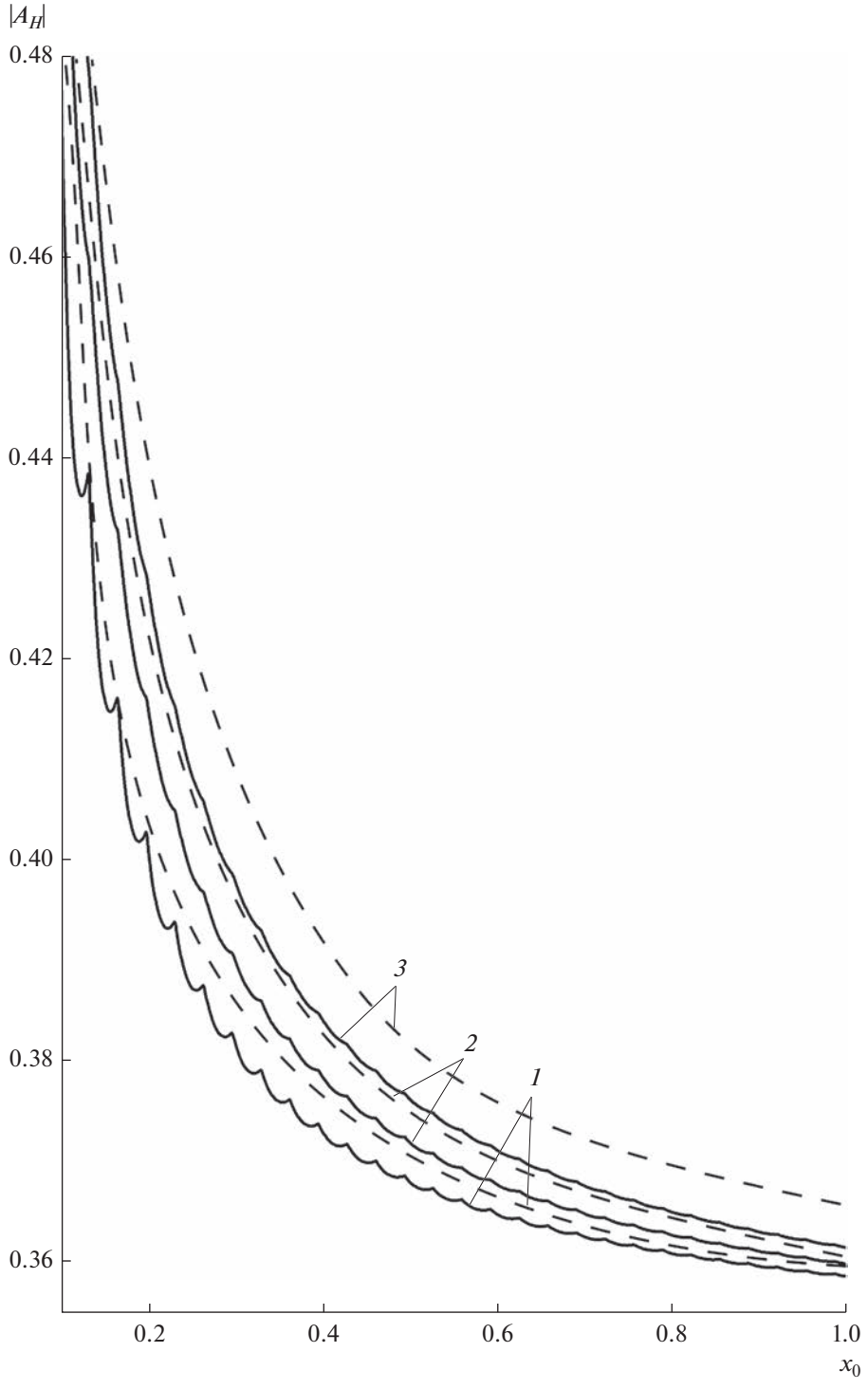

Рис. 3. Зависимость $|A_H|$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от безразмерной толщины пленки x_0 при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривые *1*, *2*, *3* построены при $g_1 = g_2 = 0$; $g_1 = 0.01$, $g_2 = 0.02$; $g_1 = 0.03$, $g_2 = 0.04$ соответственно.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Везде в расчетах будем использовать безразмерную поперечную эффективную массу для кремния Si, равную $k_{m\perp} = 0.59$.

На рис. 1–4 изображены зависимости модуля и аргумента безразмерных коэффициентов магнетосопротивления $D_\perp$ и Холла A_H от безразмерной толщины пленки x_0. С увеличением толщины пленки

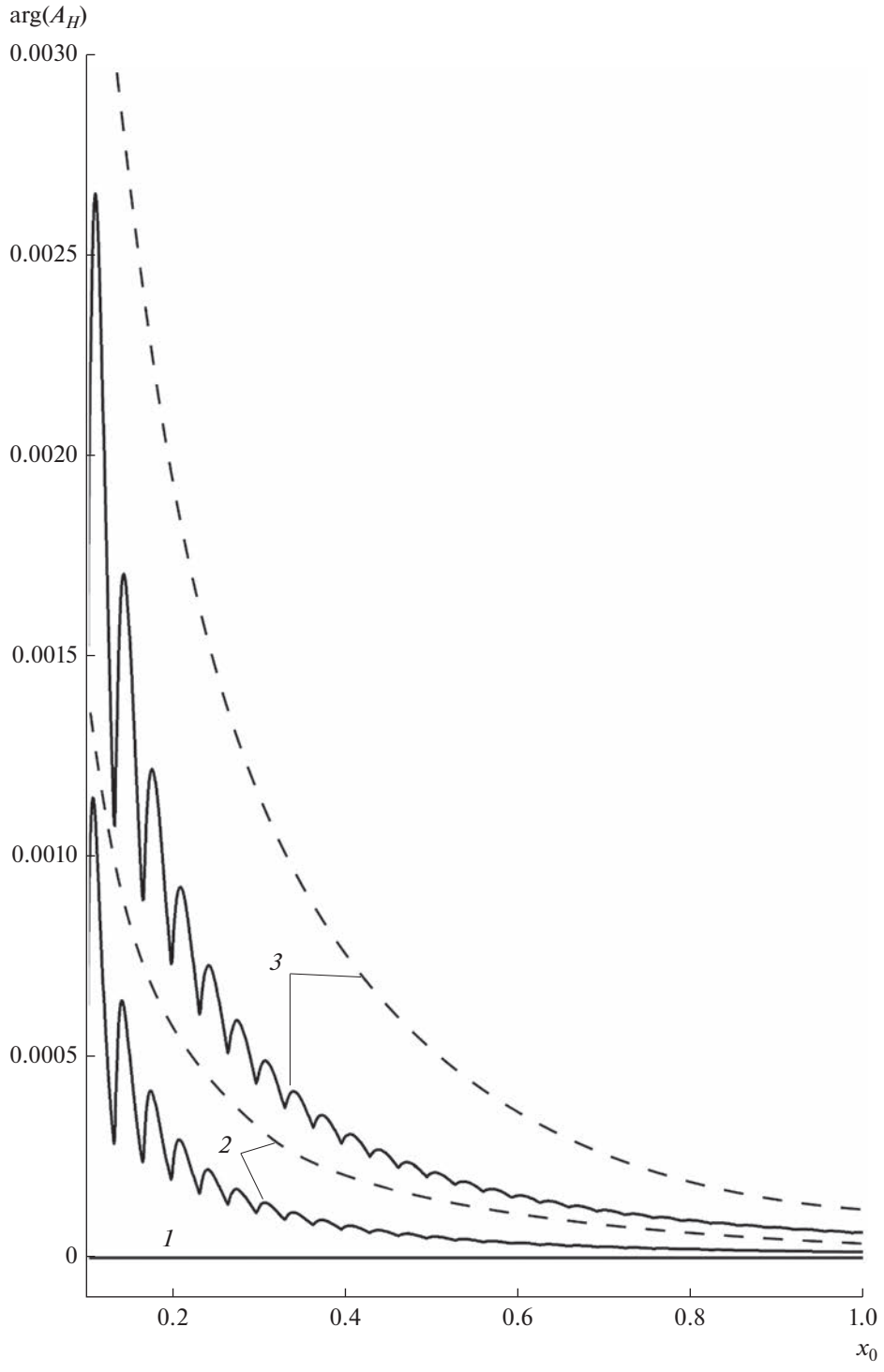

Рис. 4. Зависимость $\arg(A_H)$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от безразмерной толщины пленки x_0 при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривые *1*, *2*, *3* построены при $g_1 = g_2 = 0$; $g_1 = 0.01$, $g_2 = 0.02$; $g_1 = 0.03$, $g_2 = 0.04$ соответственно.

данные коэффициенты уменьшаются как по модулю, так и по аргументу, что связано не только с уменьшением вклада поверхностного рассеяния по сравнению с объемным рассеянием, но и с ростом числа разрешенных энергетических состояний носителей заряда. На графиках присутствуют осцилляции для случая вырожденного электронного газа. Период этих осцилляций равен:

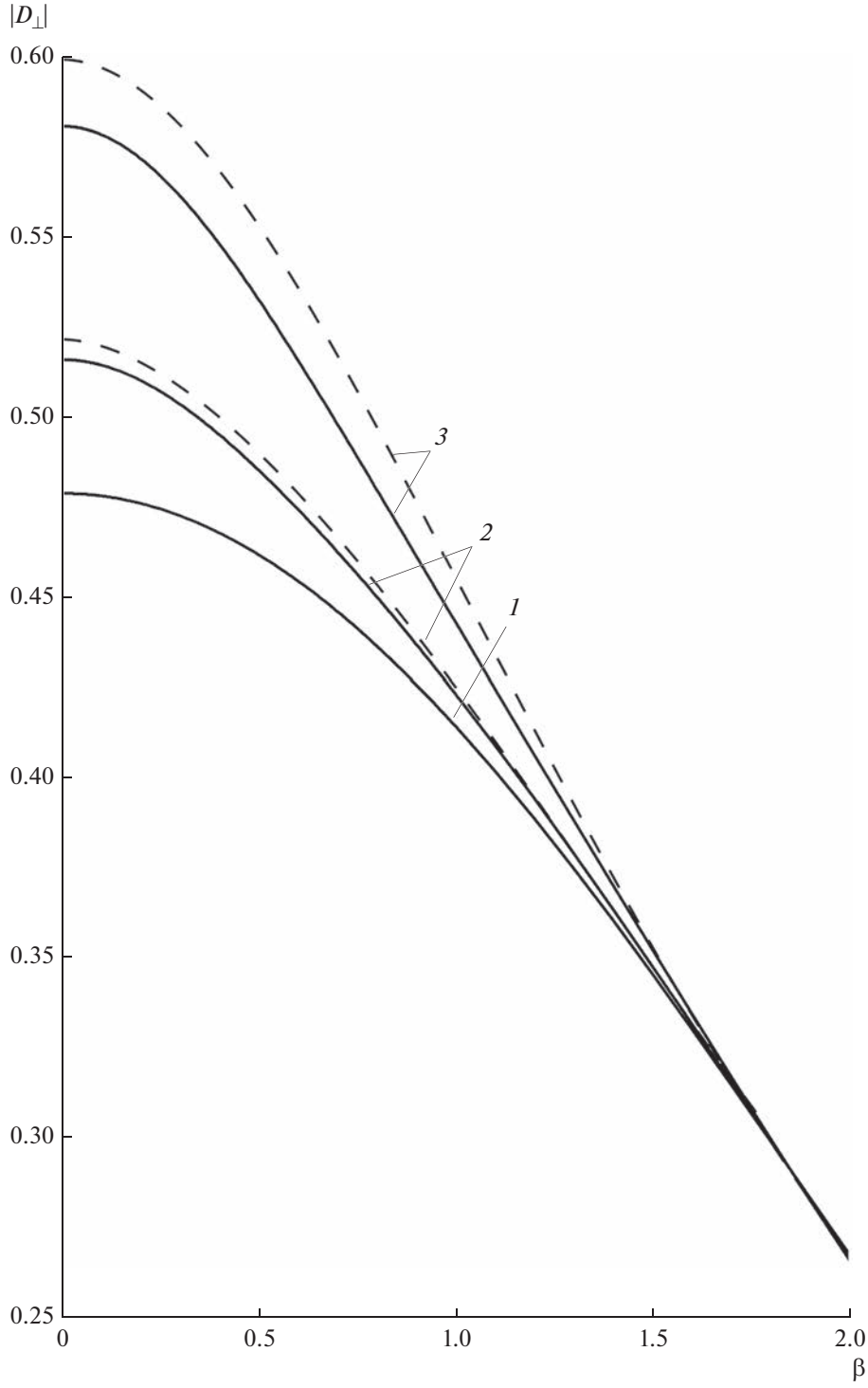

Рис. 5. Зависимость $|D_\perp|$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от безразмерной индукции магнитного поля β при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0.1$. Кривые *1*, *2*, *3* построены при $g_1 = g_2 = 0$; $g_1 = 0.01$, $g_2 = 0.02$; $g_1 = 0.03$, $g_2 = 0.04$ соответственно.

$$\frac{x_B}{N_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_{m\perp}\left(2 + k_{m\perp}^3\right)}{3}}.$$

В случае невырожденного электронного газа осцилляции пропадают из разброса по тепловым скоростям. С уменьшением шероховатости поверхно-

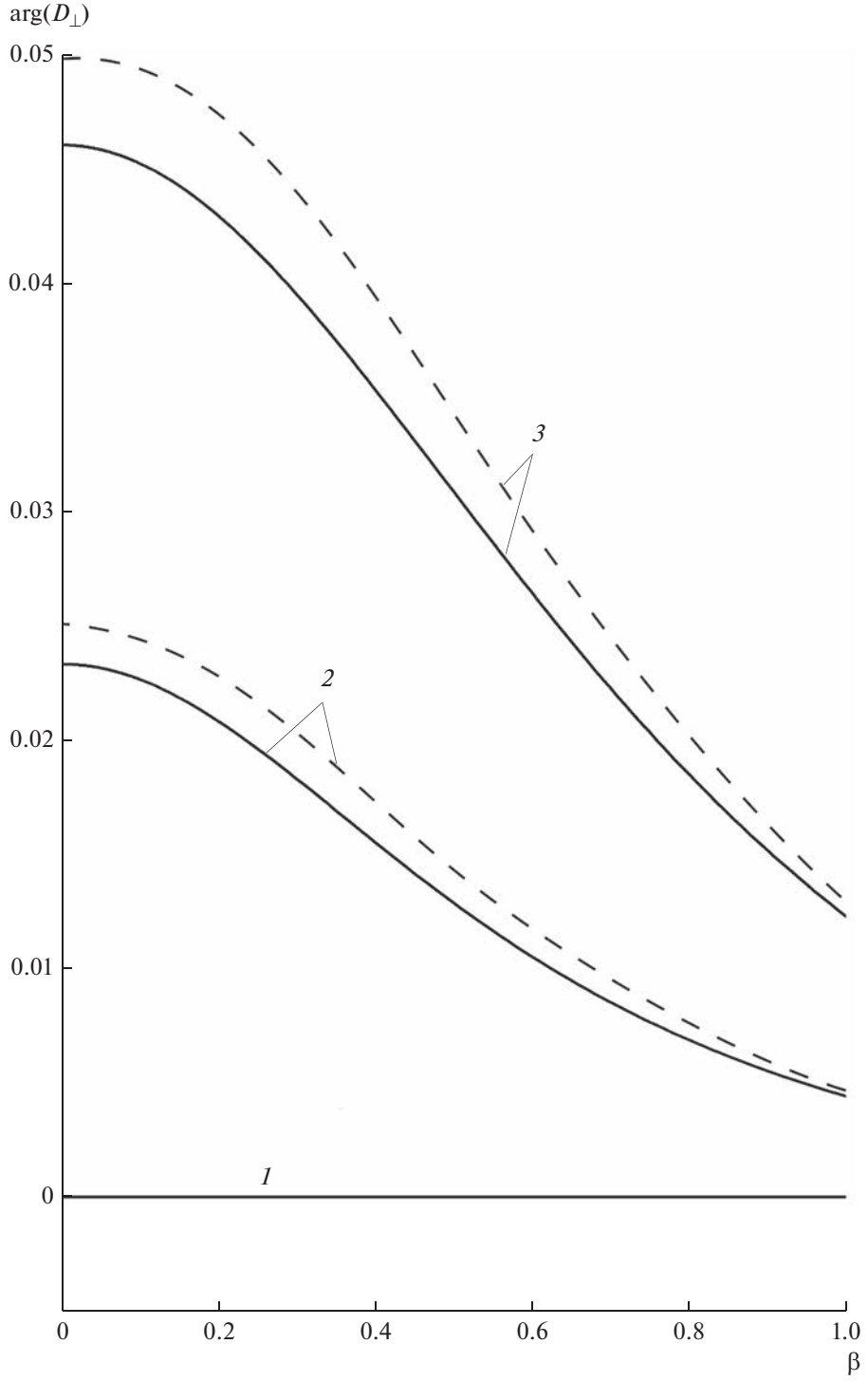

Рис. 6. Зависимость $\arg(D_\perp)$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от безразмерной индукции магнитного поля β при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0.1$. Кривые *1*, *2*, *3* построены при $g_1 = g_2 = 0$; $g_1 = 0.01$, $g_2 = 0.02$; $g_1 = 0.03$, $g_2 = 0.04$ соответственно.

стей пленки относительное расхождение между случаями вырожденным и невырожденным электронным газом снижается. При зеркальном рассеянии коэффициенты не зависят от степени вырождения газа свободных носителей заряда (51), (52).

На рис. 5 и 6 построены зависимости модуля и аргумента безразмерного коэффициента магнетосопротивления $D_\perp$ от безразмерной индукции магнитного поля β. В скрещенном электрическом и магнитном поле траектория электро-

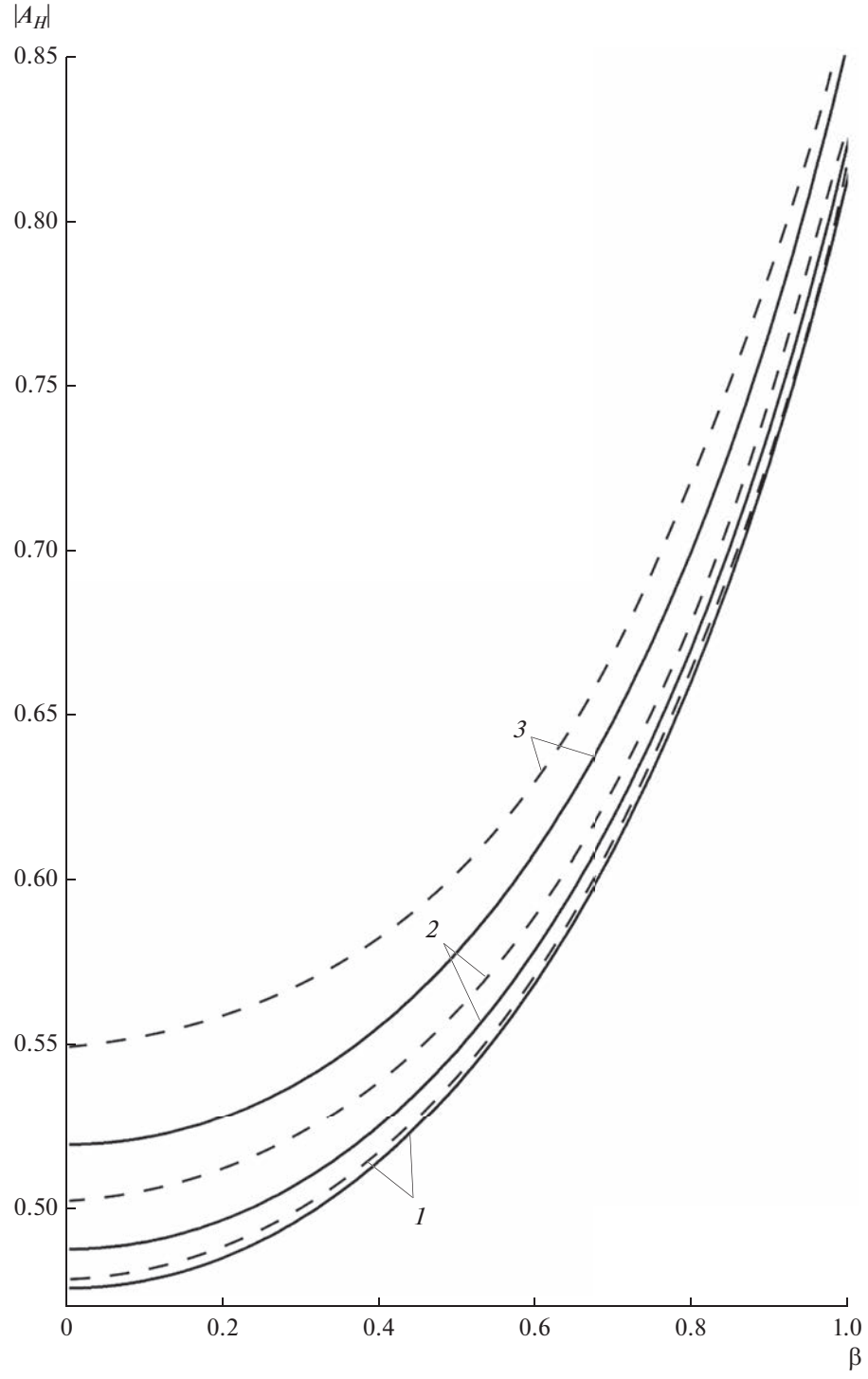

Рис. 7. Зависимость $|A_H|$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от безразмерной индукции магнитного поля β при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0.1$. Кривые *1*, *2*, *3* построены при $g_1 = g_2 = 0$; $g_1 = 0.01$, $g_2 = 0.02$; $g_1 = 0.03$, $g_2 = 0.04$ соответственно.

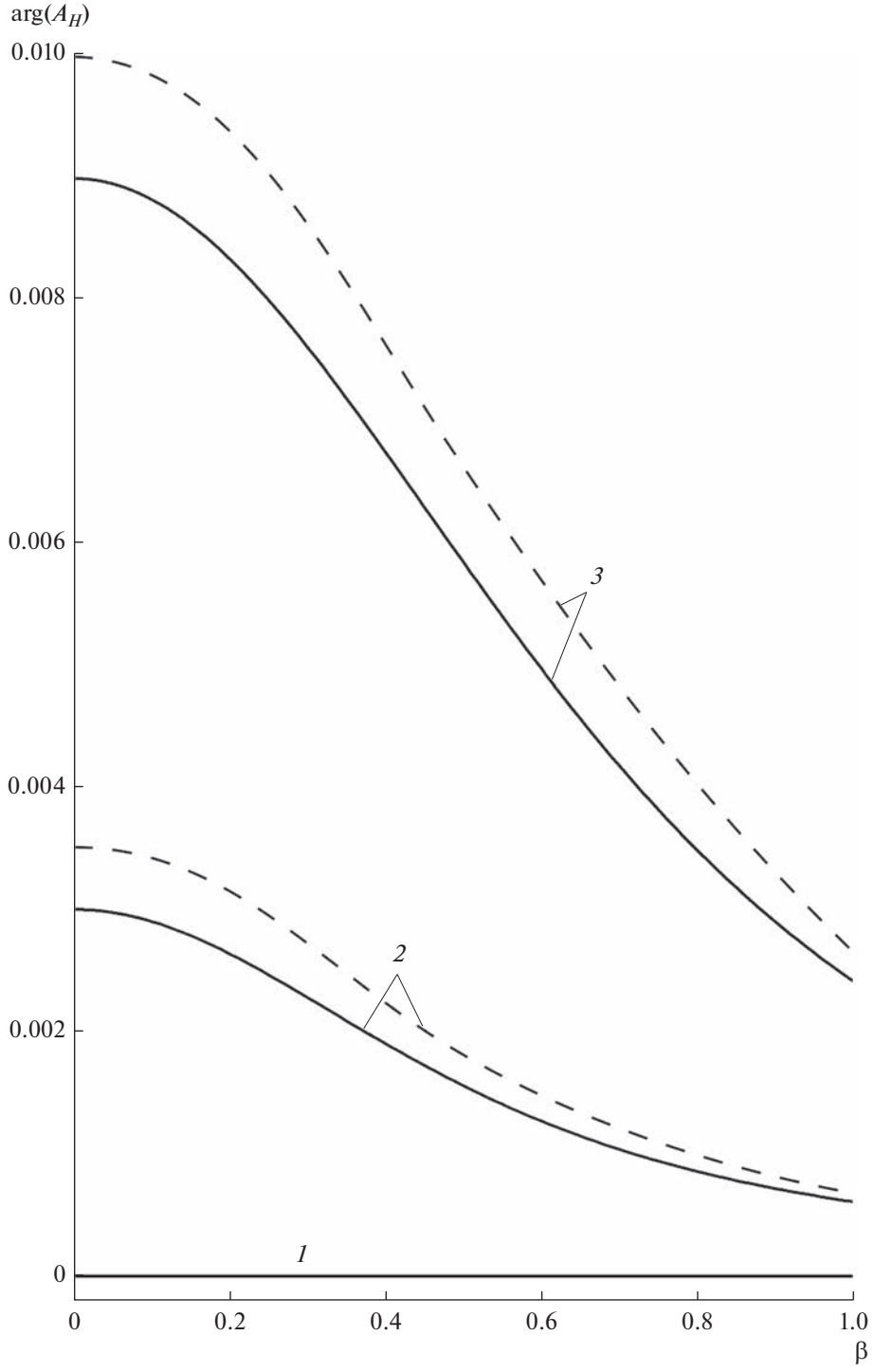

Рис. 8. Зависимость $\arg(A_H)$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от безразмерной индукции магнитного поля β при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0.1$. Кривые *1*, *2*, *3* построены при $g_1 = g_2 = 0$; $g_1 = 0.01$, $g_2 = 0.02$; $g_1 = 0.03$, $g_2 = 0.04$ соответственно.

нов в общем случае является трохоида. В случае сильного магнитного поля траектория носителей заряда вырождается в прямую, то есть случай сильного магнитного поля аналогичен случаю отсутствия данного магнитного поля, следовательно, с ростом магнитного поля магнетосопротивление уменьшается как по модулю, так и по аргументу.

На рис. 7 и 8 представлены зависимости модуля и аргумента безразмерного коэффициента Холла

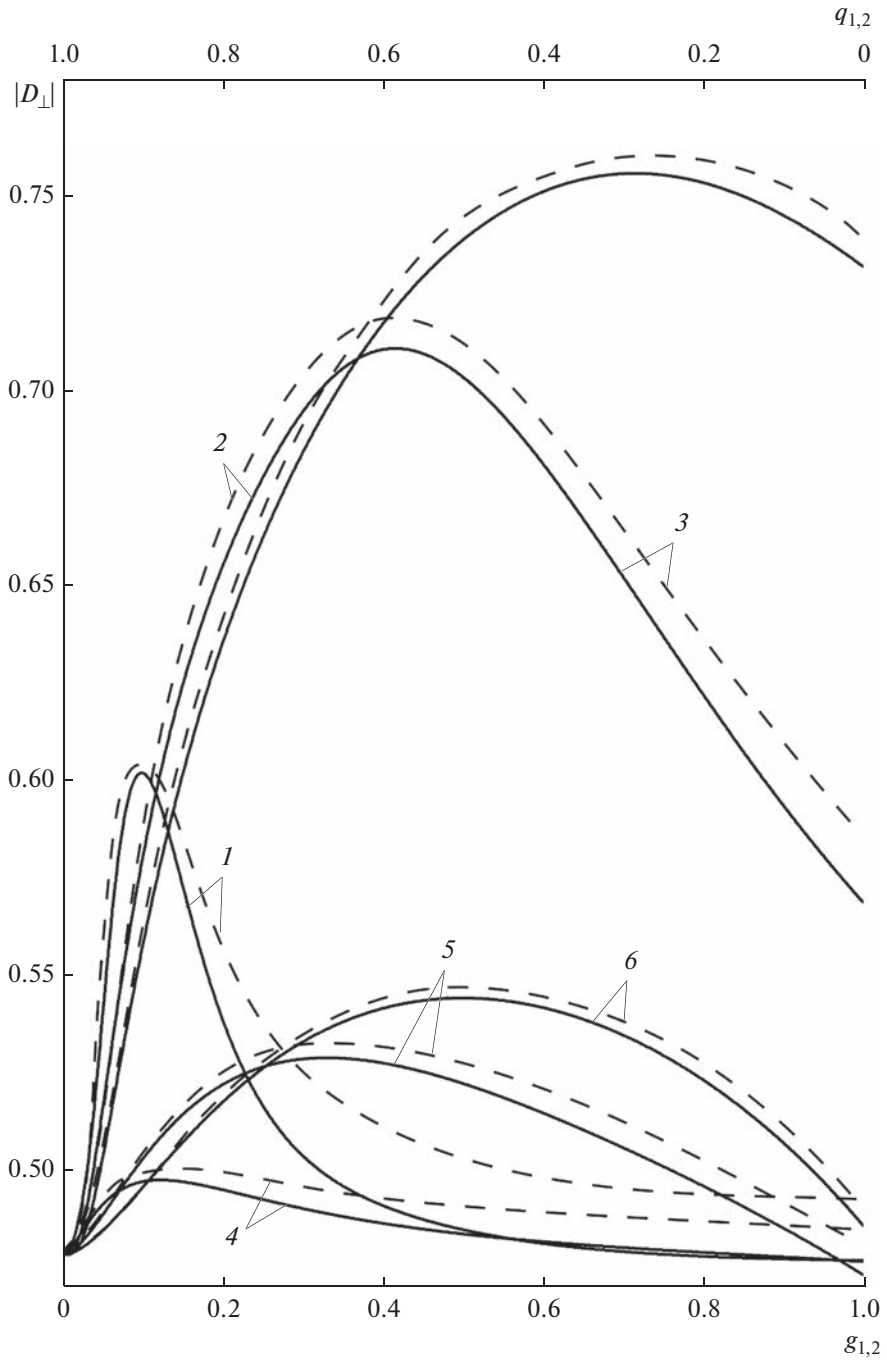

Рис. 9. Зависимость $|D_\perp|$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от параметров шероховатости поверхностей. $g_{1,2} = g_1 = g_2$ (кривые *1–3*) и от коэффициентов зеркальностей поверхностей $q_{1,2} = q_1 = q_2$ (кривые *4–6*) при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривые *1* и *4*, *2* и *5*, *3* и *6* построены при $x_0 = 0.1; 0.2; 0.3$ соответственно.

A_H от безразмерной индукции магнитного поля β. С ростом магнитного поля модуль коэффициента Холла возрастает, так как растет напряжение Холла, а аргумент (разность фаз между напряженностью Холла и плотности тока) снижается.

На рис. 9–12 построены зависимости модуля и аргумента безразмерных коэффициентов магнетосопротивления $D_\perp$ и Холла A_H от параметров шероховатости поверхностей $g_{1,2} = g_1 = g_2$ для модели Соффера и от коэффициентов зеркальностей по-

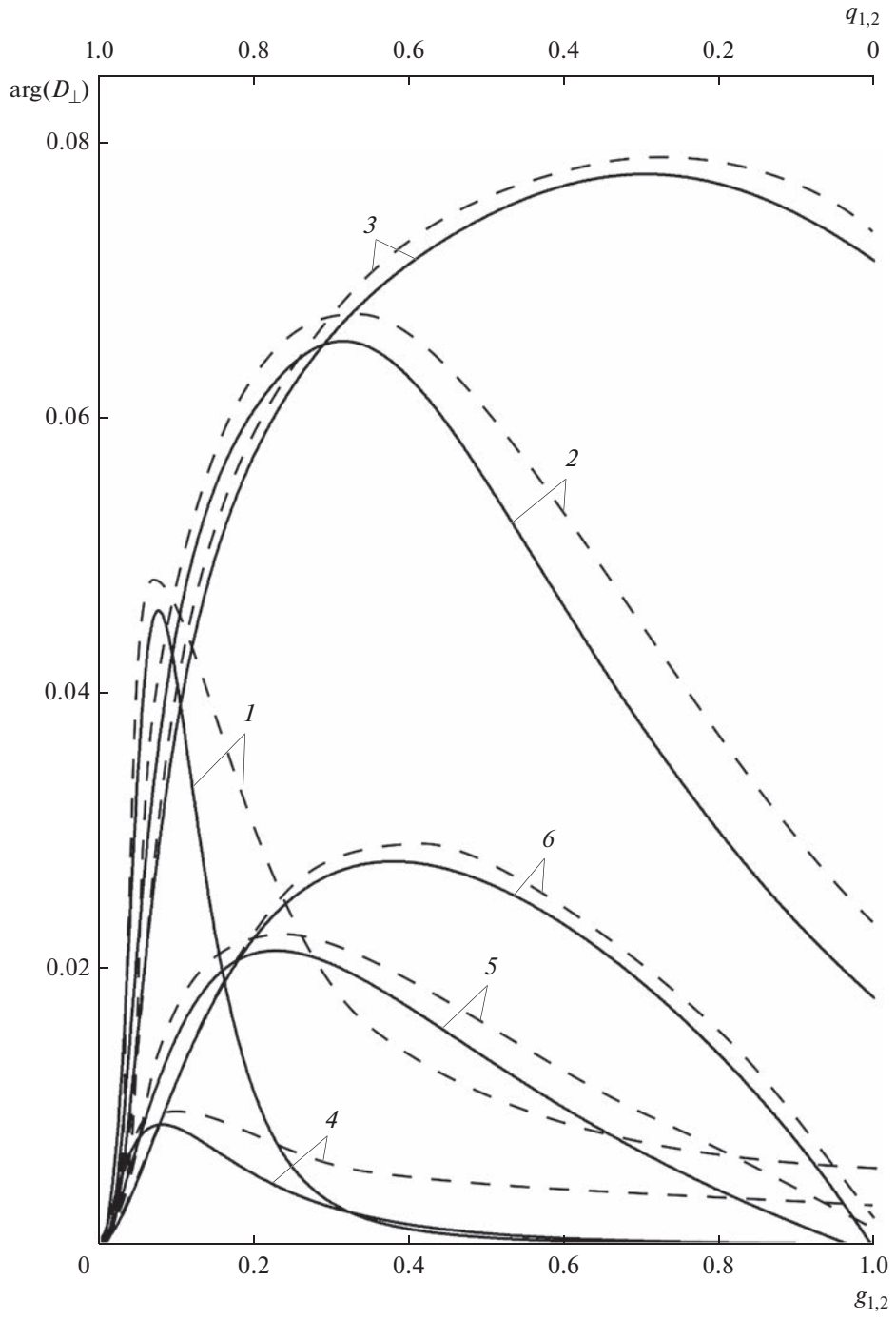

Рис. 10. Зависимость $\arg(D_\perp)$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от параметров шероховатости поверхностей $g_{1,2} = g_1 = g_2$ (кривые *1–3*) и от коэффициентов зеркальностей поверхностей $q_{1,2} = q_1 = q_2$ (кривые *4–6*) при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривые *1* и *4*, *2* и *5*, *3* и *6* построены при $x_0 = 0.1; 0.2; 0.3$ соответственно.

верхностей $q_{1,2} = q_1 = q_2$ и для модели Фукса. Максимум у всех зависимостей объясняется траекторией носителей заряда: электрон рассеивается, когда его продольная скорость максимальна. При полном зеркальном отражении $(g_1 = g_2 = 0,\ q_1 = q_2 = 1)$ значения совпадают. Наибольшее различие между расчетами наблюдается в диапазоне значений параметров шероховатости $g = 0.2–0.4$ $(q = 0.6–0.8)$.

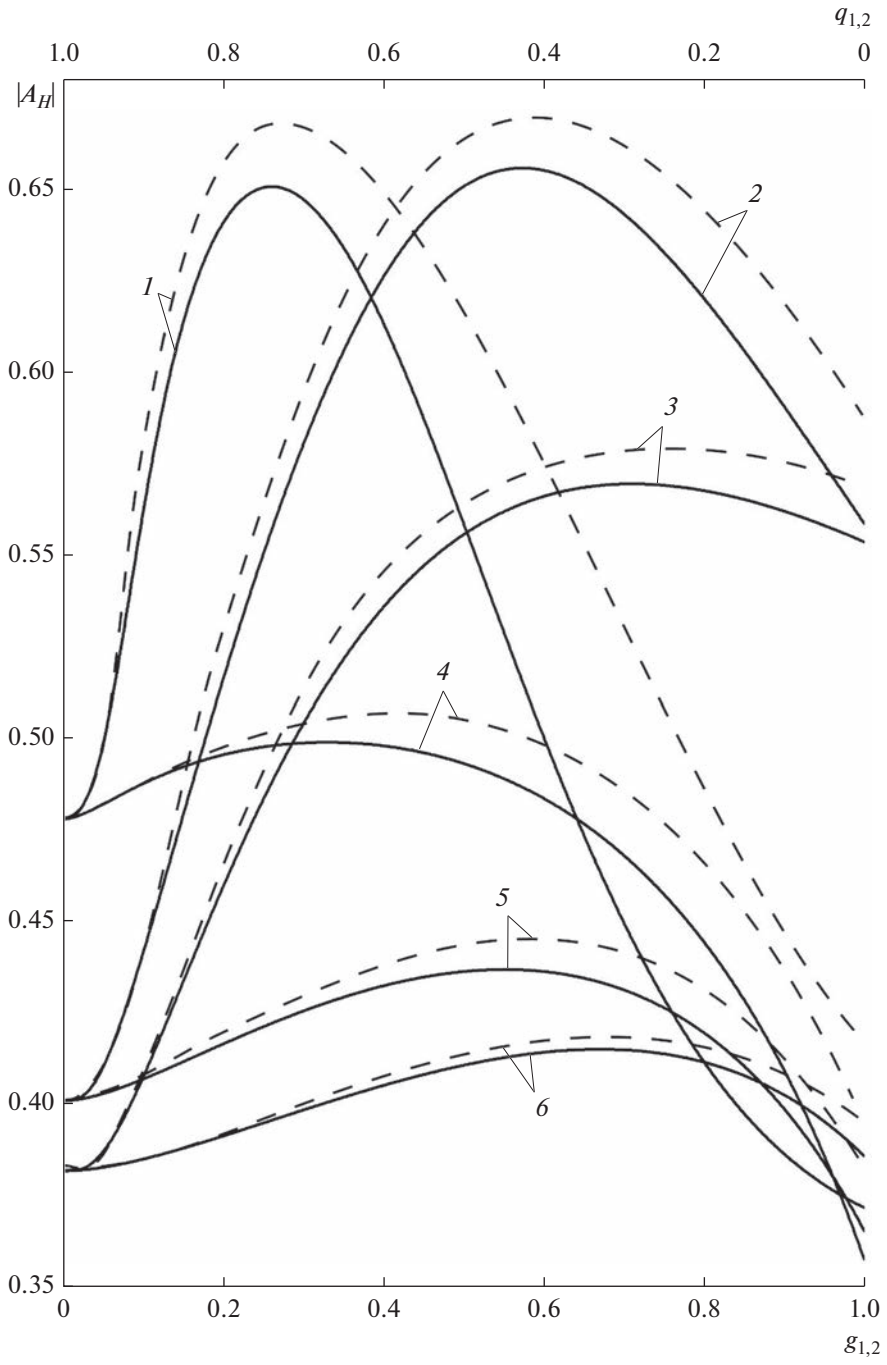

Рис. 11. Зависимость $|A_H|$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от параметров шероховатости поверхностей $g_{1,2} = g_1 = g_2$ (кривые *1–3*) и от коэффициентов зеркальностей поверхностей $q_{1,2} = q_1 = q_2$ (кривые *4–6*) при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривые *1* и *4*, *2* и *5*, *3* и *6* построены при $x_0 = 0.1; 0.2; 0.3$ соответственно.

На рис. 13 построены зависимости теоретических и экспериментальных данных для пленки висмута [10]. Висмут чистоты 99.999% осаждали методом электронно-лучевого испарения в вакууме 10^{-6} Па. Образец помещен во магнитное поле величиной 1T. Метод определения проводимости пленки Bi был показан в статье [9]. Небольшое расхождение экспериментальных и теоретических результатов возможно связано с поликристаллической структурой пленки.

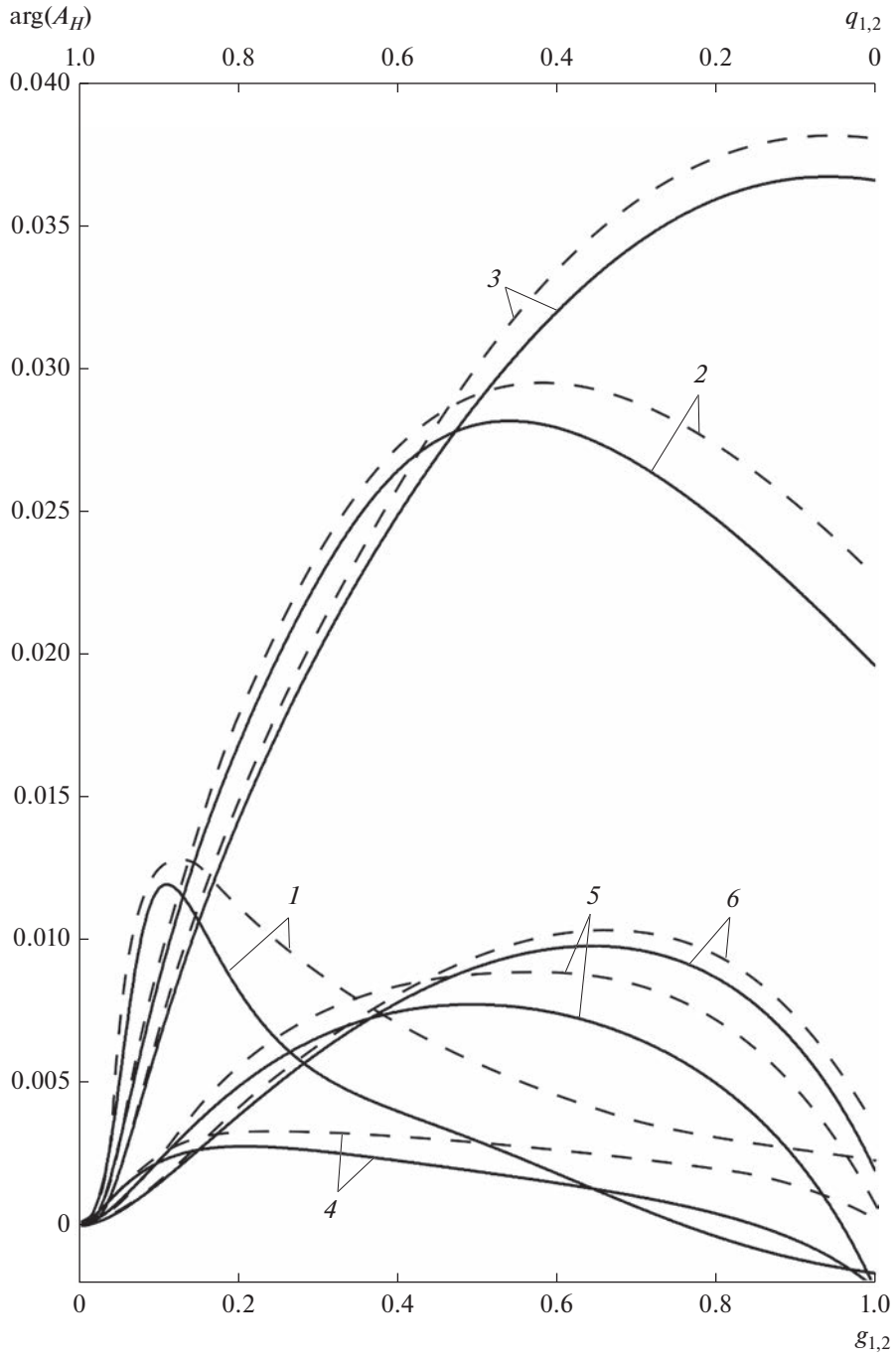

Рис. 12. Зависимость $\arg(A_H)$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (пунктирные линии) от параметров шероховатости поверхностей $g_{1,2} = g_1 = g_2$ (кривые *1–3*) и от коэффициентов зеркальностей поверхностей $q_{1,2} = q_1 = q_2$ (кривые *4–6*) при $k_{m1} = 0.59$, $y_0 = 0.1$, $x_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривые *1* и *4*, *2* и *5*, *3* и *6* построены при $x_0 = 0.1; 0.2; 0.3$ соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассчитаны коэффициенты Холла и магнетосопротивления нанослоя в поперечном магнитном поле с учетом модели Софера и квантования энергии носителей заряда. Обнаружены осцилляции в зависимости коэффициентов Холла и магнетосопротивления от толщины пленки в случае вырожденного электронного газа. По периоду этих осцилляций мож-

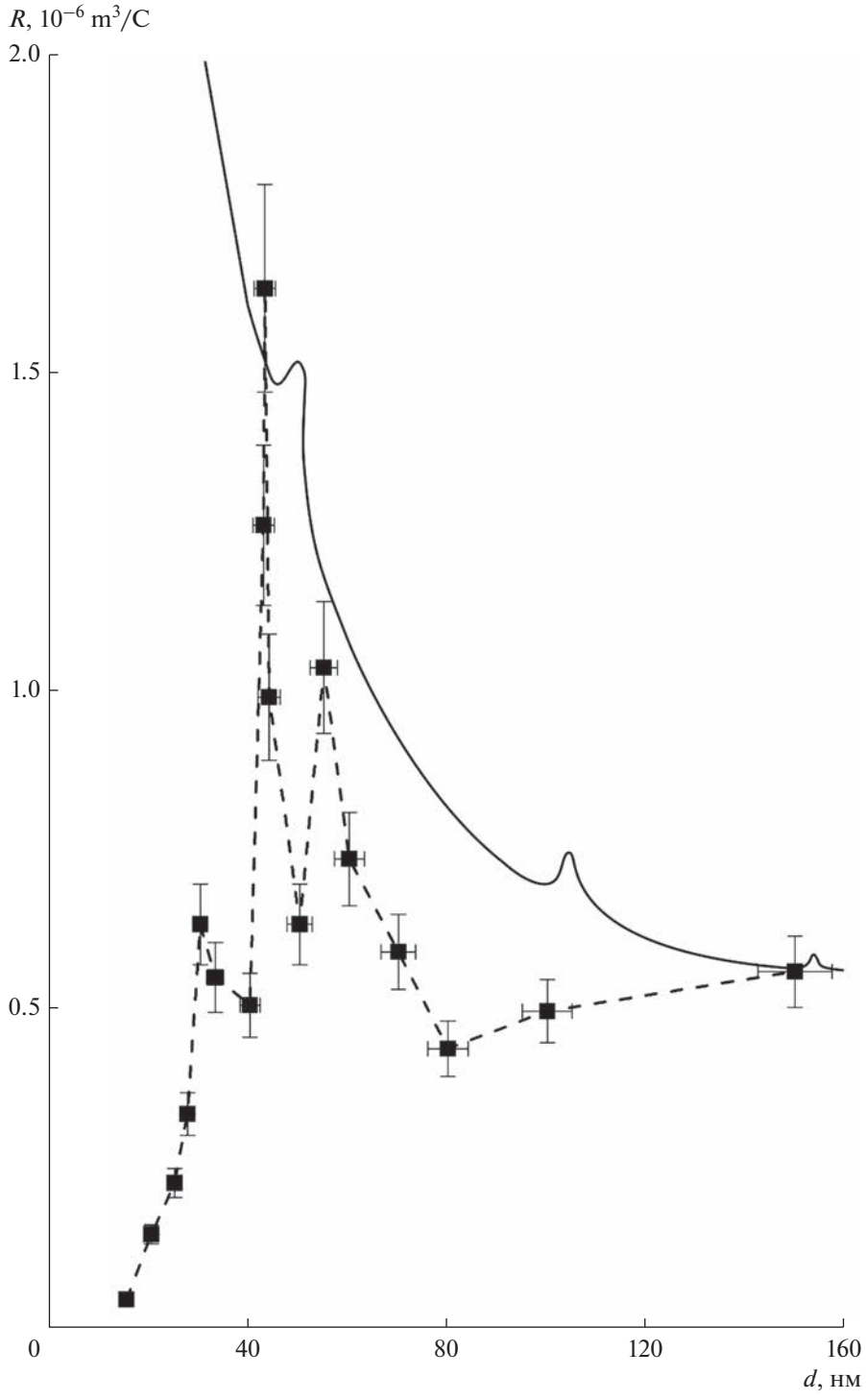

Рис. 13. Зависимость коэффициента Холла тонкой пленки висмута от толщины. Точками обозначены экспериментальные данные [10], а сплошной кривой – теоретический расчет. Расчет выполнен при следующих параметрах: $\lambda = 400$ нм, $\lambda_B = 27$ нм, $k_{m\perp} = 0.17$, $g_{s1} = g_{s2} = 1.6$ нм.

но определить толщину пленки, эффективную массу. В случае зеркальных границ отсутствует зависимость гальваномагнитных коэффициентов от магнитного поля, так как не учитывалась зависимость времени релаксации от энергии. Для модели Соффера получаются большие значения коэффициентов Холла и магнетосопротивления, чем для модели Фукса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Звездин А.К., Давыдова М.Д., Звездин К.А.* // УФН. 2018. Т. 188. С. 1238.
2. *Блинов М.И., Черненко В.А., Прудников В.Н., Асегуинолаза И.Р., Барандиаран Ж.М., Ладеранта Э., Ховайло В.В., Грановский А.Б.* // ЖЭТФ. 2021. Т. 159. С. 546.
3. *Семенчинский С.Г.* Измерительная техника. 2021. Т. 1. С. 9.
4. *Soffer S.B.* // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. P. 1710.
5. *Ünal B.* // AIP Advances. 2012. V. 2. P. 042145.
6. *Chatterjee S., Meyerovich A.E.* // Physical review. 2010. V. 81. P. 245409.
7. *Bihun R.I., Stasyuk Z.V., Balitskii O.A.* // Physica B: Condens. Matter. 2016. V. 487. P. 73.
8. *Kuznetsova I.A., Savenko O.V., Romanov D.N.* // JPCS. 2021. V. 2056. P. 012018.
9. *Kuznetsova I.A., Savenko O.V., Romanov D.N.* // Phys. Lett. A. 2022. V. 427. P. 127933.
10. *Демидов Е.В., Грабов В.М., Комаров В.А., Крушельницкий А.Н., Суслов А.В., Суслов М.В.* // ФТП. 2019. Т. 63. С. 736.