ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2024, том 60, № 4, с. 87–101

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Новые аспекты развития однопродуктовой динамической модели Канторовича замещения производственных фондов

© 2024 г. Л.А. Бекларян, С.В. Борисова, А.С. Акопов, Н.К. Хачатрян

Л.А. Бекларян,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: beklar@cemi.rssi.ru

С.В. Борисова,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: boriss@cemi.rssi.ru

А.С. Акопов,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: akopovas@umail.ru

Н.К. Хачатрян,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: nerses-khachatryan@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.10.2023

Аннотация. В условиях развития научно-технического прогресса и роста фондовооруженности важной прикладной задачей является моделирование и оптимизация сроков функционирования производственных фондов. Развитие технологий и автоматизация производства ведут к сокращению занятых в производстве трудовых ресурсов. В статье для однопродуктовой динамической модели замещения производственных фондов, учитывающей инерционные свойства вводимых фондов, исследован случай сокращения объема трудовых ресурсов при условии роста выпуска и капиталовложений. Получено решение, которое позволяет определить оптимальную стратегию вывода устаревших фондов и ввода новых, более совершенных, в случае убывания трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимизации используется принцип дифференциальной оптимизации. Дана теорема эквивалентности траектории, удовлетворяющей принципу дифференциальной оптимизации, полученному решению. Представлена система функционально-дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять переменные модели как в условиях неубывания, так и сокращения трудовых ресурсов. Для исследования такой системы использованы численные методы. Рассмотрены варианты развития системы при различных предположениях относительно изменения общего объема трудовых ресурсов. Представлены результаты численной реализации модели.

Ключевые слова: однопродуктовая динамическая модель, производственные фонды, научно-технический прогресс, обновление фондов, срок службы основных фондов, дифференциальная оптимизация.

Классификация JEL: C02; C69; L52; O21.

УДК: 338.32; 338.984; 517.977.1.

Для цитирования: **Бекларян Л.А., Борисова С.В., Акопов А.С., Хачатрян Н.К.** (2024). Новые аспекты развития однопродуктовой динамической модели Канторовича замещения производственных фондов // *Экономика и математические методы*. Т. 60. № 4. С. 87–101. DOI: 10.31857/S0424738824040086

ВВЕДЕНИЕ

С научно-техническим прогрессом связано появление новой важной характеристики производства — сопоставимость времени жизни основных фондов и трудовых ресурсов. Долгое время срок службы фондов определялся лишь с точки зрения их физического износа, и этот срок значительно превышал время службы единицы трудовых ресурсов, однако в связи с развитием научно-технического прогресса срок службы фондов в большей степени стал зависеть от их морального износа. Появление новых, более совершенных технологий многократно сокращает срок службы фондов. Поэтому если в первом случае происходит замена старого оборудования на новое с теми же качественными характеристиками, то во втором — полная реконструкция фондов — наименее эффективные выводятся из производства (и в дальнейшем не используются), а высвобождающиеся трудовые ресурсы направляются на новые создаваемые фонды. В этом случае важной задачей является моделирование и оптимизация сроков службы основных производственных фондов. Вместе с тем при моделировании политики обновления фондов необходимо учитывать и сроки освоения новых фондов.

Существуют различные подходы к оцениванию сроков службы основных фондов. В частности, в теории надежности рассматриваются задачи установления назначенного срока службы технических устройств (см., например, (Смоляк, 2022а, 2022б; Jiang, Makis, Jardine, 2001; Horenbeek, Pintelon, Muchiri, 2010; Werbińska-Wojciechowska, 2019)).

Еще один подход к оценке сроков службы основных фондов реализуют модели с производственными фондами, дифференцированными по моментам создания (Vintage Capital Models, VCMs). Такие модели описываются нелинейными интегральными уравнениями с неизвестными в пределах интегрирования. Эти модели лежали в основе теории роста в 1960-е и получили новое развитие в 1990-е годы (Boucekkine, de La Croix, Licandro, 2011; Hartman, Tan 2014; Yatsenko, Hritonenko, 2005).

Такой же подход применен авторами данной работы для определения оптимальных сроков ввода новых, более совершенных фондов и вывода устаревших с использованием (в качестве критерия оптимальности) принципа дифференциальной оптимизации, предложенного Л.В. Канторовичем (Канторович, Горьков, 1959; Канторович, Жиянов, 1973).

В данной статье для модели, разработанной ранее при условии неубывания трудовых ресурсов (Бекларян, Борисова, 2002), получены решения и в случае их убывания, представлены результаты численной реализации решения и намечены этапы дальнейшей работы.

МОДЕЛЬ КАНТОРОВИЧА

В работе (Канторович, Жиянов, Хованский, 1978) описана однопродуктовая динамическая модель экономики, для исследования которой был применен принцип дифференциальной оптимизации, согласно которому «политика вывода морально устаревших фондов является оптимальной, если она обеспечивает в каждый момент времени максимальный темп роста национального дохода».

Рассматривается система, в которой производится один продукт с двумя главными производственными факторами — производственные фонды, дифференцированные по моментам их создания, и трудовые ресурсы, измеряемые числом трудовых единиц. Предполагается, что система обладает высокими темпами обновления технологий.

Эффективность производства в каждый момент времени t определяется производственной функцией $U(x, y, \tau)$, выражающей объем чистого продукта, создаваемого трудом y (в единицу времени) при использовании производственных фондов объема x (созданных в момент τ $(\tau \le t)$). Предполагается, что функция U монотонно возрастает по τ, что отражает увеличение эффективности более новых фондов под действием технического прогресса. Кроме того, функция U является линейно-однородной и выпуклой по первым двум аргументам.

Функция $\chi(t)$ задает интенсивность ввода капиталовложений, идущих на увеличение фондов и замену выбывающих из производства фондов, т.е. объем фондов, введенных в производство во временном интервале $[t,\ t+dt]$, равен $\chi(t)dt$. Функция $\chi(t)$ предполагается либо экзогенно заданной, либо составляет постоянную часть производимого в каждый момент времени t чистого продукта.

Количество трудовых ресурсов, занятых на создаваемых фондах, определяется интенсивностью их ввода $\varphi(t)$, т.е. предполагается, что трудовые ресурсы, введенные во временном интервале $[t,\ t+dt]$, равны $\varphi(t)dt$ единицам. Функция $\varphi(t)$ является эндогенной. Общее количество трудовых ресурсов $T(t)$ в момент времени t задано.

В модели предполагается, что технический прогресс и рост фондовооруженности приводят к необходимости замены устаревших фондов. В результате наименее эффективные фонды непрерывно выводятся из производства и в дальнейшем не используются. Наиболее старые фонды (имеющие самый ранний период создания среди фондов, занятых в процессе производства на момент времени t) будут выводиться в первую очередь. Политика вывода из производства устаревших фондов характеризуется функцией $m(t)$, определяющей момент создания фондов, выводимых из производства в момент времени t $(m(t) < t)$. Функцию $m(t)$ необходимо найти.

Количество чистого продукта $P(t)$, производимого на фондах, участвующих в производстве в момент времени t, определяется формулой

$$P(t) = \int_{m(t)}^{t} U(\chi(\tau),\ \varphi(\tau), \tau)\, d\tau.$$

При этом переменные модели подчинены балансовым уравнениям:

– уравнение баланса трудовых ресурсов — $\int_{m(t)}^{t} \varphi(\tau) d\tau = T(t)$;

– уравнение баланса по фондам (в случае когда капиталовложения есть часть национального дохода) — $\chi(t) = \vartheta \int_{m(t)}^{t} U(\chi(\tau),\ \varphi(\tau), \tau) d\tau, \quad 0 < \vartheta < 1$;

– переменные модели должны удовлетворять уравнению дифференциальной оптимизации, отражающему принятый в модели критерий оптимизации —

$$\partial U(\chi(t), \varphi(t), t) / \partial\varphi = U(\chi(m(t)), \varphi(m(t)), t) / \varphi(m(t)).$$

В (Канторович, Жиянов, Хованский, 1978) получено явное решение для случая экзогенно заданной функции капиталовложений, производственной функции в виде функции Кобба–Дугласа и при неизменных во времени трудовых ресурсах, отмечена также устойчивость функции $m(t)$ относительно начальных данных. Исследовано асимптотическое поведение решений модели при различном виде экзогенно задаваемых функций, характеризующих научно-технический прогресс и интенсивность ввода капиталовложений:

1) в случае степенного роста функция $m(t)$ при $t \to +\infty$ асимптотически приближается к линейной функции $m(t) \approx at + b, a < 1$;

2) в случае экспоненциального роста при $t \to +\infty$ функция $m(t)$ асимптотически приближается к функции с постоянным запаздыванием $m(t) \approx t - A, A > 0$; при этом функция $\varphi(t)$ выходит на периодический режим с периодом, равным A.

Для случая экспоненциального роста трудовых ресурсов также найдено явное решение, причем функция $m(t)$ является линейной функцией с постоянным запаздыванием.

РАЗВИТИЕ МОДЕЛИ КАНТОРОВИЧА

В модели Канторовича предполагается, что фонды вводятся в производство мгновенно, т.е. период ввода фондов на проектную мощность не учитывается. Заметим, что в работе (Канторович, Жиянов, 1973) была рассмотрена возможность учета периода создания новых фондов, т.е. время их строительства и освоения, однако считалось, что этот период является постоянным.

Будем предполагать, что фонды, создаваемые в каждый момент времени, начинают отдачу не сразу, так как требуется определенное время на их внедрение в производство и освоение. Политика ввода в производство новых фондов характеризуется функцией $\alpha(t)$, определяющей момент начала внедрения фондов, которые начнут давать отдачу с момента времени t. Функцию $\alpha(t)$ необходимо найти. Из содержательного смысла функций $m(t)$ и $\alpha(t)$ следует, что они должны удовлетворять условиям $m(t) \le \alpha(t) \le t$, $\alpha'(t) \ge 0$. Кроме того, при выводе старых фондов введем технологические ограничения, которые выражаются в скорости замещения устаревших фондов во времени, т.е. существует константа M ($M \gg 1$) такая, что $0 \le m'(t) \le M$.

Таким образом, в каждый момент времени существует два типа основных фондов: действующие фонды и осваиваемые фонды. В связи с этим появляется необходимость разделения объема трудовых ресурсов на активные (занятые на действующих фондах в момент времени t) и пассивные (задействованные на осваиваемых фондах в момент времени t) трудовые ресурсы. $T_a(t)$ — активные трудовые ресурсы, т.е. задействованные в производстве в момент времени t, а $T_p(t)$ — пассивные трудовые ресурсы, т.е. задействованы на вводимых фондах в момент времени t. Предполагается, что оба вида трудовых ресурсов не убывают.

Будем предполагать, что функция $\chi(t)$ задается экзогенно и является абсолютно непрерывной, монотонно возрастающей с производной непрерывной справа.

Тогда модель будет иметь следующий вид.

Национальный доход в каждый момент времени t вычисляется по формуле

$$P(t) = \int_{m(t)}^{\alpha(t)} U(\chi(\tau),\ \varphi(\tau), \tau) d\tau, \tag{1}$$

баланс активных трудовых ресурсов —

$$\int_{m(t)}^{\alpha(t)} \varphi(\tau) d\tau = T_a(t), \tag{2}$$

баланс пассивных трудовых ресурсов —

$$\int_{\alpha(t)}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau = T_p(t). \tag{3}$$

Ограничения на скорость процедуры замещения устаревших фондов и ввода новых

$$0 \le m'(t) \le M, \quad \alpha'(t) \ge 0. \tag{4}$$

Введем вектор-функцию $\gamma(\bullet) = \{m(\bullet), \alpha(\bullet), \varphi(\bullet)\}$, где $m(t)$, $\alpha(t)$ — абсолютно непрерывные на $[t_0, +\infty)$ функции с непрерывной справа производной; $\varphi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ — функция ограниченной вариации, непрерывная справа. Вектор-функцию $\gamma(\bullet)$ будем называть *траекторией*.

Политика выбора оптимальной траектории основывается на принципе дифференциальной оптимизации, а именно стратегия выбора переменных модели должна быть такова, чтобы в каждый момент времени обеспечить максимальный темп роста национального дохода.

Траектория $\gamma(t)$ в точке $t \in [t_0, +\infty)$ удовлетворяет принципу дифференциальной оптимизации, если $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$ функционал $P'_\gamma(t)$ относительно $\alpha'(t)$, $m'(t)$, $\varphi(t)$ принимает максимальное значение

$$U(\chi(\alpha(t)), \varphi(\alpha(t)), \alpha(t))\alpha'(t) - U(\chi(m(t)), \varphi(m(t)), m(t))m'(t) \to \max_{\alpha'(t), m'(t), \varphi(t)} \tag{5}$$

вдоль траектории $\gamma(t) = \{m(t), \alpha(t), \varphi(t)\}$, удовлетворяющей ограничениям:

$$\varphi(\alpha(t))\alpha'(t) - \varphi(m(t))m'(t) = T'_a(t), \tag{6}$$

$$\varphi(t) - \varphi(\alpha(t))\alpha'(t) = T'_p(t), \tag{7}$$

$$0 \le m'(t) \le M, \quad \alpha'(t) \ge 0, \tag{8}$$

при заданном начальном состоянии: t_0, $m_0 = m(t_0)$, $\alpha_0 = \alpha(t_0)$, $m_0 \le \alpha_0 \le t_0$, $m_0 < t_0$; $\varphi_0(t)$, $t \in [m_0, t_0)$.

Для производственной функции Кобба–Дугласа в работе (Бекларян, Борисова, 2002) получено решение экстремальной задачи (5)–(8) в виде системы функционально-дифференциальных уравнений, доказаны существование и единственность решения такой системы, описаны все режимы поведения экономической системы и условия перехода с одного режима на другой.

В (Бекларян, Борисова, Хачатрян, 2012) представлены результаты численной реализации решений, полученных в (Бекларян, Борисова, 2002). Рассматривались различные варианты развития системы при экзогенно заданных уровнях научно-технического прогресса и интенсивности капиталовложений в зависимости от сценарно-задаваемого распределения трудовых ресурсов на активные и пассивные и исследовалась устойчивость системы относительно начальных значений. Численные эксперименты (проводились на условных данных в предположении экспоненциального роста экзогенно задаваемых функций) показали, что политика вывода устаревших фондов и ввода новых определяется распределением трудовых ресурсов, при этом:

1) при больших t для сроков службы и освоения фондов имеют место трендовые траектории линейного вида с постоянным запаздыванием, вдоль которых происходит чередование интервалов освоения новых, более совершенных фондов и активного выведения старых фондов (переход с одного режима на другой в этом случае определяется соотношением капиталовооруженностей трудовых ресурсов на осваиваемых фондах и на задействованных в производстве трудовых ресурсах);

2) при увеличении доли активных трудовых ресурсов продолжительность периодов освоения и активного выведения устаревших фондов уменьшается;

3) увеличение доли активных трудовых ресурсов ведет к уменьшению как сроков службы фондов, так и срока освоения новых фондов, при этом срок эксплуатации фондов увеличивается.

В работе (Бекларян, Борисова, Хачатрян, 2012) модель исследовалась и с применением интегрального принципа оптимизации — стратегия выбора переменных модели должна быть такова, чтобы обеспечить максимальный национальный доход за плановый период времени. Кроме того, рассматривалась возможность распределения трудовых ресурсов на активные и пассивные внутри системы в зависимости от параметра, характеризующего вклад в доход осваиваемых фондов.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ В СЛУЧАЕ СОКРАЩЕНИЯ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

В модели (1)–(4) предполагалось, что функция, определяющая объем трудовых ресурсов в каждый момент времени t, является неубывающей. Однако в современных реалиях это условие не всегда выполняется. В частности, в связи с интенсивным развитием научно-технического прогресса в сфере автоматизации производства в обрабатывающей промышленности в последние годы наблюдается монотонное сокращение занятости на фоне растущего выпуска и роста капиталовложений (см., например, (Колесникова, Маслова, Околелых, 2022; Кондратьев, 2023; Смирных, Емелина, 2021)).

В работе (Бекларян, Борисова, 2002) решение экстремальной задачи (5)–(8) получено для случая, когда трудовые ресурсы (активные и пассивные) не убывают. При этом условии доказано, что функция $\varphi(t)$, определяющая интенсивность ввода трудовых ресурсов, является неотрицательной.

Рассмотрим случай, когда трудовые ресурсы убывают во времени. Покажем, что теорема эквивалентности (Бекларян, Борисова, 2002, теорема 1) для случая неотрицательности функции $\varphi(t)$ справедлива и в случае, когда $\varphi(t)$ является отрицательной. При этом будем предполагать, что темп роста национального дохода положительный, т.е. $P'_\gamma(t)>0$.

Исследуем при каждом фиксированном $t\in[t_0,+\infty)$ экстремальную задачу:

$$U(\chi(\alpha(t)),\ \varphi(\alpha(t)),\ \alpha(t))u-U(\chi(m(t)),\varphi(m(t)),\ m(t))v\to\max_{u,\,v,\,w}, \tag{9}$$

$$\varphi(\alpha(t))u-\varphi(m(t))v=T'_a(t), \tag{10}$$

$$w=\varphi(\alpha(t))u+T'_p(t)(t), \tag{11}$$

$$0\le v\le M,\ u\ge 0,\ w<0. \tag{12}$$

Покажем, что решение $(v^*,\ u^*,\ w^*)$ экстремальной задачи (9)–(12) существует и равно $u^*=\alpha'(t),\ v^*=m'(t),\ w^*=\varphi(t)$.

Рассмотрим два случая — $\alpha(t)=t$ и $\alpha(t)<t$.

I. Пусть в точке $t\in[t_0,+\infty)$ выполняются условия $\alpha(t)=t$ (новые фонды не требуют времени для освоения) и $\varphi(m(t))<0$. Экстремальная задача (9)–(12) будет иметь вид:

$$U(\chi(\alpha(t)),\ w,\ t)u-U(\chi(m(t)),\varphi(m(t)),\ m(t))v\to\max_{u,\,v,\,w}, \tag{13}$$

$$wu-\varphi(m(t))v=T'_a(t), \tag{14}$$

$$w=wu+T'_p(t), \tag{15}$$

$$0\le v\le M,\ u\ge 0,\ w<0. \tag{16}$$

В этом случае уравнение дифференциальной оптимизации (Бекларян, Борисова, 2002) имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U(\chi(t),w,t)}{\partial w}\left(1-T'_p(t)/w\right)\varphi(m(t))+U(\chi(t),w,t)T'_p(t)w^{-2}\varphi(m(t))-\\-U(m(t),\varphi(m(t)),m(t))=0,\end{gathered} \tag{17}$$

или

$$\frac{\partial U(\chi(t),w,t)}{\partial w}\left(1-\frac{T'_p(t)}{w}\right)+\frac{U(\chi(t),w,t)}{w}\frac{T'_p(t)}{w}=\frac{U(\chi(m(t)),\varphi(m(t)),m(t))}{\varphi(m(t))}. \tag{18}$$

В левой части уравнения (14) стоит сумма предельной эффективности активной части трудовых ресурсов и средней эффективности пассивной части трудовых ресурсов в момент времени t. В правой — средняя эффективность трудовых ресурсов в момент времени $m(t)$ на фондах, которые в момент времени t должны быть выведены из производства. Тут возможны два случая.

А. Пусть $T'_p(t)=0$ в точке $t\in[t_0,+\infty)$ (пассивные трудовые ресурсы не вводятся). В этом случае уравнение (17) запишется так:

$$\frac{\partial U(\chi(t),w,t)}{\partial w}=\frac{U(\chi(m(t)),\varphi(m(t)),m(t))}{\varphi(m(t))}, \tag{19}$$

т.е. предельная производительность в момент времени t должна быть равна средней производительности фондов, созданных в момент времени $m(t)$.

Пусть $U(\chi(t),w,t)=f(t)\chi^\beta(t)\varphi^\delta(t),\ \beta+\delta=1.$ Так как $\varphi(t)<0$, но при этом $U(\chi(t),\varphi(t),t)>0$, положим $\varphi^\delta(t)=|\varphi(t)|^\delta$. Поскольку для решения уравнения (19) должно выполняться условие $w^*=\varphi(t)$, то

$$-\delta f(t)\chi^\beta(t)|\varphi(t)|^{-\beta}=f(m(t))\chi^\beta(m(t))|\varphi(m(t))|^\delta/\varphi(m(t)). \tag{20}$$

Так как $\varphi(t)<0$, $\varphi(m(t))<0$, решением уравнения (20) будет —

$$\varphi(t)=\delta^{1/\beta}\left[f^{1/\beta}(m(t))\chi(m(t))/f^{1/\beta}(t)\chi(t)\right]\varphi(m(t)).$$

Таким образом, вид решения для $\varphi(t)$ совпадает с полученным в работе (Бекларян, Борисова, 2002), но в этом случае $\varphi(t)<0$. Подставляя в (14) данное выражение и учитывая условие $0\le v\le M$ из (16), переменные модели удовлетворяют системе соотношений:

$$m'(t)=\begin{cases}0, & \text{если } \delta^{1/\beta}\dfrac{f^{1/\beta}(m(t))\chi(m(t))}{f^{1/\beta}(t)\chi(t)}-\dfrac{T_a'(t)}{\varphi(m(t))}\le 0,\\ \delta^{1/\beta}\dfrac{f^{1/\beta}(m(t))\chi(m(t))}{f^{1/\beta}(t)\chi(t)}-\dfrac{T_a'(t)}{\varphi(m(t))}, & \text{если } 0<\delta^{1/\beta}\dfrac{f^{1/\beta}(m(t))\chi(m(t))}{f^{1/\beta}(t)\chi(t)}-\dfrac{T_a'(t)}{\varphi(m(t))}<M,\\ M, & \text{если } \delta^{1/\beta}\dfrac{f^{1/\beta}(m(t))\chi(m(t))}{f^{1/\beta}(t)\chi(t)}-\dfrac{T_a'(t)}{\varphi(m(t))}\ge M,\end{cases}$$

$$\alpha'(t)=1,\quad \varphi(t)=\delta^{1/\beta}\left[f^{1/\beta}(m(t))\chi(m(t))/f^{1/\beta}(t)\chi(t)\right]\varphi(m(t)).$$

Б. Пусть $T_p'(t)<0$ в точке $t\in[t_0,+\infty)$, т.е. объем пассивных трудовых ресурсов сокращается, что связано с сокращением общего количества трудовых ресурсов. Для функции $U(\chi(t),\varphi(t),t)=f(t)\chi^{\beta}(t)|\varphi(t)|^{\delta}$ уравнение (13) с учетом, что $w^*=\varphi(t)$, можно записать в виде

$$-f(t)\chi^{\beta}(t)|\varphi(t)|^{-\beta}\left(\delta-\beta\frac{T_p'(t)}{|\varphi(t)|}\right)=\frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))|\varphi(m(t))|^{\delta}}{\varphi(m(t))}. \tag{21}$$

А так как $T_p'(t)<0$ и $\varphi(m(t))<0$, уравнение (17) можно переписать

$$f(t)\chi^{\beta}(t)|\varphi(t)|^{-\beta}\left(\delta+\beta\frac{|T_p'(t)|}{|\varphi(t)|}\right)=f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))|\varphi(m(t))|^{-\beta}. \tag{22}$$

В (Бекларян, Борисова, 2002) доказано, что уравнение (18) однозначно разрешимо относительно $|\varphi(t,m(t))|$ и решение является положительным. Обозначим такое решение $\varphi_{max}(t)$, тогда $w^*=-\varphi_{max}(t)$. Таким образом, и в этом случае экстремальная задача (9)–(12) имеет решение, причем $\varphi(t)<0$.

Подставляя выражение для $\varphi_{max}(t)$ в выражения (14) и (15) вместо w, и, учитывая условие $0\le v\le M$ из (16), получаем, что переменные модели удовлетворяют системе соотношений:

$$m'(t)=\begin{cases}0, & \text{если } \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\le 0,\\ \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}, & \text{если } 0<\dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}<M,\\ M, & \text{если } \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\ge M;\end{cases}$$

$$\alpha'(t)=\begin{cases}1-\dfrac{T_p'(t)}{T_a'(t)+T_p(t)}, & \text{если } \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\le 0,\\ 1+\dfrac{T_p'(t)}{\varphi_{max}(t)}, & \text{если } 0<\dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}<M,\\ 1-\dfrac{T_p'(t)}{\varphi(m(t))M+T_a'(t)+T_p'(t)}, & \text{если } \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\ge M;\end{cases}$$

$$\varphi(t)=\begin{cases} T_a'(t)+T_p'(t), & \text{если } \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\le 0,\\ -\varphi_{max}(t), & \text{если } 0<\dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}<M,\\ \varphi(m(t))M+T_a'(t)+T_p'(t), & \text{если } \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\dfrac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\ge M.\end{cases}$$

II. Пусть в точке $t\in[t_0,+\infty)$ выполняются условия $\alpha(t)<t$, $\varphi(m(t))<0$ и $\varphi(\alpha(t)<0$. Выражая из (10) u через v и подставляя полученное выражение для u в (9), получаем максимизируемый функционал в виде линейной функции от v:

$$P_\gamma'(t)=\left(U(\chi(\alpha(t)),\ \varphi(\alpha(t)),\ \alpha(t))\frac{\varphi(m(t))}{\varphi(\alpha(t))}-U(\chi(m(t)),\ \varphi(m(t)),m(t))\right)v+ \\ +U(\chi(\alpha(t)),\ \varphi(\alpha(t)),\ \alpha(t))T_a'(t)/\varphi(\alpha(t))\to\max_v. \tag{23}$$

Поскольку для v должно выполняться условие $0\le v\le M$, то $P_\gamma'(t)$ принимает максимальное значение на левом или правом конце отрезка $[0,M]$ — в зависимости от знака выражения $U(\chi(\alpha(t)),\varphi(\alpha(t)),\alpha(t))\varphi(m(t))/\varphi(\alpha(t))-U(\chi(m(t)),\varphi(m(t)),m(t))$.

Рассмотрим возможные варианты.

А. Пусть

$$U(\chi(\alpha(t)),\ \varphi(\alpha(t)),\ \alpha(t))\varphi(m(t))/\varphi(\alpha(t))-U(\chi(m(t)),\ \varphi(m(t)),\ m(t))<0, \tag{24}$$

или

$$\frac{U(\chi(\alpha(t)),\ \varphi(\alpha(t)),\ \alpha(t))\varphi(m(t))}{|\varphi(\alpha(t))|}<\frac{U(\chi(m(t)),\ \varphi(m(t)),\ m(t))}{|\varphi(m(t))|}.$$

Левая часть неравенства — производительность труда на фондах, освоение которых началось в момент времени $\alpha(t)$, и они начнут давать отдачу с момента времени t, а правая часть — производительность труда выводимых из производства фондов в момент времени t. В этом случае решение о выводе устаревших фондов является нецелесообразным.

При условии (24) функционал (23) достигает максимума при $v=0$. Тогда оптимальная траектория $\gamma(t)=\{m(t),\alpha(t),\varphi(t)\}$ для функции $U(\chi(t),\varphi(t),t)=f(t)\chi^\beta(t)|\varphi(t)|^\delta$ удовлетворяет системе соотношений:

$$\frac{f(\alpha(t))\chi^\beta(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^\beta}<\frac{f(m(t))\chi^\beta(m(t))}{|\varphi(m(t))|^\beta},\ m'(t)=0,\ \alpha'(t)=\frac{T_a'(t)}{\varphi(\alpha(t))},\ \varphi(t)=T_a'(t)+T_p'(t).$$

Б. В случае

$$U(\chi(\alpha(t)),\ \varphi(\alpha(t)),\ \alpha(t))\varphi(m(t))\varphi(\alpha(t))^{-1}-U(\chi(m(t)),\ \varphi(m(t)),\ m(t))\ge 0 \tag{25}$$

неравенство можно переписать в виде

$$\frac{U(\chi(\alpha(t)),\ \varphi(\alpha(t)),\ \alpha(t))\varphi(m(t))}{|\varphi(\alpha(t))|}\ge\frac{U(\chi(m(t)),\ \varphi(m(t)),\ m(t))}{|\varphi(m(t))|}.$$

То есть производительность труда на фондах, освоение которых началось в момент времени $\alpha(t)$, и их отдача с момента времени t, — не меньше, чем производительность труда выводимых из производства фондов в момент времени t. В этом случае устаревшие фонды необходимо выводить из производства максимально быстро.

При условии (25) функционал (23) достигает максимума при $v=M$ (если в (25) имеет место равенство, то функционал достигает максимума при любом $v\in[0,M]$ и принимается решение выводить фонды максимально быстро). Тогда оптимальная траектория $\gamma(t)=\{m(t),\alpha(t),\varphi(t)\}$ для функции $U(\chi(t),\varphi(t),t)=f(t)\chi^\beta(t)|\varphi(t)|^\delta$, удовлетворяет системе соотношений:

$$\frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}} \geq \frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}},$$

$$m'(t) = M,\ \alpha'(t) = \frac{\varphi(m(t))M}{\varphi(\alpha(t))} + \frac{T_a'(t)}{\varphi(\alpha(t))},\ \varphi(t) = \varphi(m(t))M + T_a'(t) + T_p'(t).$$

Таким образом, когда объем трудовых ресурсов сокращается, задача (9)–(12) имеет решение, причем функция $\varphi(t) < 0$.

Итак, переменные $m(t), \alpha(t), \varphi(t)$ в каждый момент времени $t \in [t_0, +\infty)$, должны удовлетворять системе уравнений

$$\{m'(t), \alpha'(t), \varphi(t)\}: \tag{26}$$

– $m'(t)$:

$$m'(t) = 0,\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0,$$

$$m'(t) = \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))},\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\quad 0 < \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} < M,$$

$$m'(t) = M,\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M,$$

$$m'(t) = 0,\ \text{если}\ \alpha(t) < t,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}} < \frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}},$$

$$m'(t) = M,\ \text{если}\ \alpha(t) < t,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}} \geq \frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}};$$

– $\alpha'(t)$:

$$\alpha'(t) = 1 - \frac{T_p'(t)}{T_a'(t) + T_p'(t)},\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0,$$

$$\alpha'(t) = 1 + \frac{T_p(t)}{\varphi_{max}(t)},\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\ 0 < \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a(t) + T_p(t)}{\varphi(m(t))} < M,$$

$$\alpha'(t) = 1 - \frac{T_p'(t)}{\varphi(m(t))M + T_a'(t) + T_p'(t)},\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M,$$

$$\alpha'(t) = \frac{T_a'(t)}{\varphi(\alpha(t))},\ \text{если}\ \alpha(t) < t,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}} < \frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}},$$

$$\alpha'(t) = \frac{\varphi(m(t))M}{\varphi(\alpha(t))} + \frac{T_a'(t)}{\varphi(\alpha(t))},\ \text{если}\ \alpha(t) < t,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}} \geq \frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}};$$

– $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = T_a'(t) + T_p'(t),\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0,$$

$$\varphi(t) = -\varphi_{max}(t),\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\ 0 < \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} < M,$$

$$\varphi(t) = \varphi(m(t))M + T_a'(t) + T_p'(t),\ \text{если}\ \alpha(t) = t,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M,$$

$$\varphi(t) = T_a'(t) + T_p'(t),\ \text{если}\ \alpha(t) < t,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}} < \frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}},$$

$$\varphi(t)=\varphi(m(t))M+T_a'(t)+T_p'(t),\ \text{если}\ \alpha(t)<t,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}}\geq\frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}},$$

где $\varphi_{max}(t)$ — решение уравнения

$$f(t)\chi^{\beta}(t)|\varphi(t)|^{-\beta}\left(\delta+\beta\frac{|T_p'(t)|}{|\varphi(t)|}\right)=f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))|\varphi(m(t))|^{-\beta}. \tag{27}$$

Из пунктов I и II следует, что оптимальная траектория $\gamma(\bullet)$ есть решение системы уравнений (26) и траектория, являющаяся решением данной системы, удовлетворяет принципу дифференциальной оптимизации. Таким образом, в случае сокращения общего объема трудовых ресурсов и неубывания выпуска и капиталовложений в основные фонды справедлива следующая теорема эквивалентности.

Теорема эквивалентности. Пусть заданы начальные данные m_0, α_0, t_0, $m_0<\alpha_0\leq t_0$, краевая непрерывная функция $\varphi_0(t)<0$, $t\in[m_0,t_0)$ и траектория $\gamma(\bullet)=\{m(\bullet),\alpha(\bullet),\varphi(\bullet)\}$, где $m(t)$, $\alpha(t)$ — абсолютно непрерывные на $[t_0,+\infty)$ функции с непрерывной справа производной, удовлетворяющие условиям $m(t)\leq\alpha(t)\leq t$, $m(t)<t$ и начальным значениям $m(t_0)=m_0$, $\alpha(t_0)=\alpha_0$, $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная справа функция такая, что $\varphi(t)\equiv\varphi_0(t)$, $t\in[m_0,t_0)$. Тогда для любого $t\in[t_0,+\infty)$ траектория $\gamma(t)$ удовлетворяет принципу дифференциальной оптимизации тогда и только тогда, когда в точке t справедлива система уравнений (26).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ

Учитывая полученное выше решение и результаты работы (Бекларян, Борисова, 2002), мы можем выписать систему уравнений, позволяющую определять переменные $m(t),\alpha(t),\varphi(t)$ в каждый момент времени $t\in[t_0,+\infty)$ как в условиях роста, так и сокращения трудовых ресурсов:

$$\{m'(t),\alpha'(t),\varphi(t)\}: \tag{28}$$

– $m'(t)$:

$$m'(t)=0,\ \text{если}\ \alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ T_a'(t)<0,\ T_p'(t)<0,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\leq 0;$$

$$m'(t)=\frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))};\ \text{если}$$

$$\alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ T_a'(t)<0,\ T_p'(t)<0,\ 0<\frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a(t)+T_p(t)}{\varphi(m(t))}<M;$$

$$m'(t)=M,\ \text{если}\ \alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ T_a(t)<0,\ T_p'(t)<0,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a(t)+T_p(t)}{\varphi(m(t))}\geq M;$$

$$m'(t)=0,\ \text{если}\ \alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ T_a(t)\geq 0,\ T_p(t)\geq 0,\ \frac{\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a(t)+T_p(t)}{\varphi(m(t))}\leq 0,$$

$$m'(t)=\frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))},\ \text{если}$$

$$\alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ T_a'(t)\geq 0,\ T_p'(t)\geq 0,\ 0<\frac{\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}<M;$$

$$m'(t)=M,\ \text{если}\ \alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))\neq 0, T_a'(t)\geq 0,\ T_p'(t)\geq 0,\ \frac{\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\geq M;$$

$$m'(t)=0,\ \text{если}\ \alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))=0,$$

$$m'(t)=0,\ \text{если}\ \alpha(t)<t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ \varphi(\alpha(t))\neq 0,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}}<\frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}},$$

$$m'(t)=M,\ \text{если}\ \alpha(t)<t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ \varphi(\alpha(t))\neq 0,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}}\geq\frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}};$$

$m'(t) = 0$, если $\alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) = 0$;

– $\alpha'(t)$:

$\alpha'(t) = 1 - T_p'(t) / \left(T_a'(t) + T_p'(t)\right)$, если

$$\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ T_a'(t) < 0,\ T_p'(t) < 0,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0,$$

$\alpha'(t) = 1 + T_p'(t) / \varphi_{max}(t)$, если

$$\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ T_a'(t) < 0,\ T_p'(t) < 0,\ 0 < \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} < M;$$

$\alpha'(t) = 1 - T_p'(t) / \left(\varphi(m(t))M + T_a'(t) + T_p'(t)\right)$; если

$$\alpha(t) = t, \varphi(m(t)) \neq 0, T_a'(t) < 0, T_p'(t) < 0,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M;$$

$\alpha'(t) = 1 - T_a'(t) / \left(T_a'(t) + T_p'(t)\right)$, если

$$\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ T_a'(t) \geq 0,\ T_p'(t) \geq 0,\ \frac{\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0,$$

$\alpha'(t) = 1 - T_p'(t) / \varphi_{max}(t)$, если

$$\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, T_a'(t) \geq 0, T_p'(t) \geq 0,\ 0 < \frac{\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} < M,$$

$\alpha'(t) = 1 - \dfrac{T_p'(t)}{\varphi(m(t))M + T_a'(t) + T_p'(t)}$, если

$$\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ T_a'(t) \geq 0,\ T_p'(t) \geq 0,\ \frac{\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M,$$

$\alpha'(t) = T_a'(t) / \left(T_a'(t) + T_p(t)\right)$, если $\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) = 0,\ T_a'(t) + T_p'(t) \neq 0$;

$\alpha'(t) = 1$, если $\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) = 0,\ T_a'(t) + T_p'(t) = 0$,

$\alpha'(t) = T_a'(t) / \varphi(\alpha(t))$, если

$$\alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ \varphi(\alpha(t)) \neq 0,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^\beta(\alpha(t))}{\left|\varphi(\alpha(t))\right|^\beta} < \frac{f(m(t))\chi^\beta(m(t))}{\left|\varphi(m(t))\right|^\beta};$$

$\alpha'(t) = \dfrac{\varphi(m(t))M}{\varphi(\alpha(t))} + \dfrac{T_a'(t)}{\varphi(\alpha(t))}$, если

$$\alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ \varphi(\alpha(t)) \neq 0,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^\beta(\alpha(t))}{\left|\varphi(\alpha(t))\right|^\beta} \geq \frac{f(m(t))\chi^\beta(m(t))}{\left|\varphi(m(t))\right|^\beta};$$

$\alpha'(t) = T_a'(t) / \varphi(\alpha(t))$, если $\alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) = 0,\ \varphi(\alpha(t)) \neq 0$;

$\alpha'(t) = 1$, если $\alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) = 0,\ \varphi(\alpha(t)) = 0$;

– $\varphi(t)$:

$\varphi(t) = T_a'(t) + T_p'(t)$, если $\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ T_a'(t) < 0,\ T_p'(t) < 0,\ \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0$;

$\varphi(t) = -\varphi_{max}(t)$, если $\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ T_a'(t) < 0,\ T_p'(t) < 0,\ 0 < \dfrac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} < M$;

$\varphi(t) = \varphi(m(t))M + T_a'(t) + T_p'(t)$, если

$$\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ T_a'(t) < 0,\ T_p'(t) < 0,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M;$$

$\varphi(t) = T_a'(t) + T_p'(t)$, если

$$\alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, T_a'(t) \geq 0,\ T_p'(t) \geq 0,\ \frac{\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t) + T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0;$$

$$\varphi(t)=\varphi_{max}(t), \text{ если } \alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ T_a'(t)\geq 0,\ T_p'(t)\geq 0,\ 0<\frac{\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}<M;$$

$$\varphi(t)=\varphi(m(t))M+T_a'(t)+T_p'(t), \text{ если}$$
$$\alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))\neq 0, T_a'(t)\geq 0,\ T_p'(t)\geq 0,\ \frac{-\varphi_{max}(t)}{\varphi(m(t))}-\frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}\geq M;$$

$$\varphi(t)=T_a'(t)+T_p'(t), \text{ если } \alpha(t)=t,\ \varphi(m(t))=0;$$

$$\varphi(t)=T_a'(t)+T_p'(t), \text{ если } \alpha(t)<t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ \varphi(\alpha(t))\neq 0,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}}<\frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}};$$

$$\varphi(t)=\varphi(m(t))M+T_a'(t)+T_p'(t); \text{ если}$$
$$\alpha(t)<t,\ \varphi(m(t))\neq 0,\ \varphi(\alpha(t))\neq 0,\ \frac{f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))}{|\varphi(\alpha(t))|^{\beta}}\geq\frac{f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))}{|\varphi(m(t))|^{\beta}},$$

$$\varphi(t)=T_a'(t)+T_p'(t), \text{ если } \alpha(t)<t,\ \varphi(m(t))=0,$$

где $\varphi_{max}(t)$ — решение уравнения

$$f(t)\chi^{\beta}(t)\varphi_{max}^{-\beta}(t)\left(\delta+\beta\left|T_p'(t)\right|/\varphi_{max}(t)\right)=f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))\left|\varphi(m(t))\right|^{-\beta}. \tag{29}$$

Система (28) позволяет определить оптимальную стратегию вывода устаревших фондов и ввода новых, когда критерием оптимальности является принцип дифференциальной оптимизации, а именно — максимизация темпа роста национального дохода в каждый момент времени. Как отмечалось в (Бекларян, Борисова, Хачатрян, 2012), такая система является сложной для аналитического исследования, поэтому для ее решения использовались численные методы.

Предполагается, что объем трудовых ресурсов $T(t)$ в каждый момент времени t разделяется на активные и пассивные следующим образом: $T_p(t)=\kappa T(t)$, $T_a(t)=(1-\kappa)T(t)$, где $0\leq\kappa\leq 1$. Будем рассматривать два случая: 1) трудовые ресурсы убывают до некоторого постоянного уровня; 2) после некоторого периода падения трудовых ресурсов наблюдается их рост. Функция капиталовложений имеет степенной рост, а функция, характеризующая технический прогресс, $f(t)=\mathrm{e}^{At+B}$. Начальная функция $\varphi_0(t)$ задается на промежутке [0, 10) и $\varphi_0(t)=T'(t)$.

1. Если объем трудовых ресурсов падает до некоторого постоянного уровня, будем предполагать, что функция $T(t)=c_1+c_2\,\mathrm{e}^{c_3 t}$, где $c_3<0$ и $T_p'(t)\neq 0$. Графики функций $m(t),\alpha(t),\varphi(t)$ — численное решение системы (28) — представлены на рис. 1–2.

Из графика на рис. 1 видно, что происходит чередование интервалов освоения новых, более совершенных фондов ($m'(t)=0$) и активного выведения устаревших фондов ($m'(t)=M$). Причем

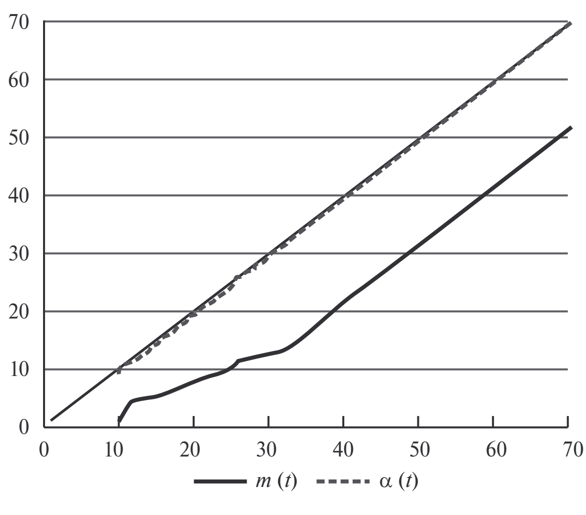

Рис. 1. Графики функций $m(t)$, $\alpha(t)$ в случае убывания трудовых ресурсов до постоянного уровня

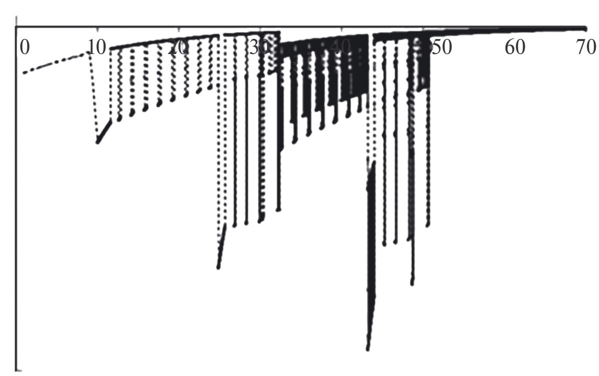

Рис. 2. График функции $\varphi(t)$ в случае убывания трудовых ресурсов до постоянного уровня

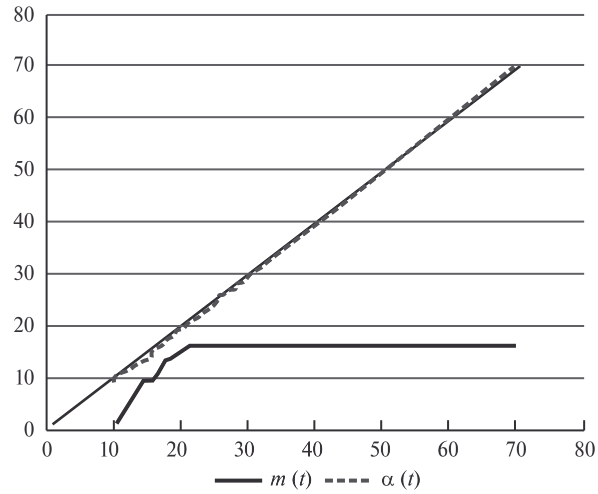

Рис. 3. Графики функций $m(t)$, $\alpha(t)$ в случае, когда убывание трудовых ресурсов сменяются их ростом

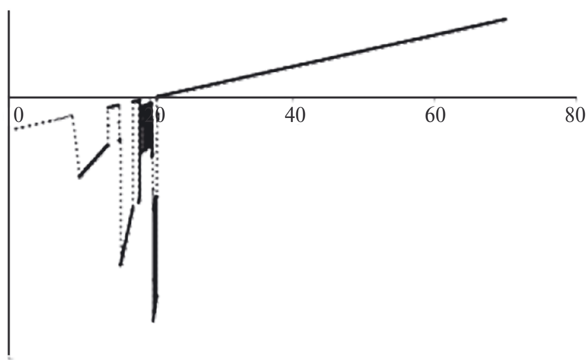

Рис. 4. График функции $\varphi(t)$ в случае, когда убывание трудовых ресурсов сменяется их ростом

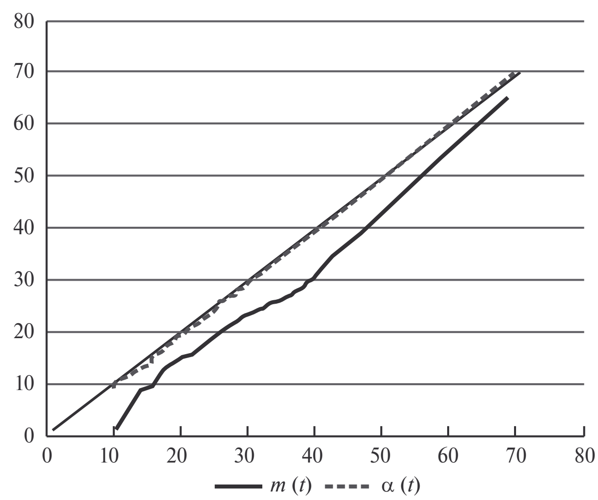

Рис. 5. Графики функций $m(t)$, $\alpha(t)$, когда убывание трудовых ресурсов сменяется их ростом (после коррекции)

начиная с некоторого момента времени, длина таких интервалов очень мала и функция $\alpha(t)$ практически совпадает с t, т.е. срок освоения новых фондов очень мал, а фонды эксплуатируются практически до конца срока своей службы. Этим как раз и определяется вид функции $\varphi(t)$, а именно — чередованием периодов, когда интенсивность падения объема трудовых ресурсов определяется сокращением их общего объема $\varphi(t)=T_a'(t)+T_p'(t)$ в случае $m'(t)=0$ и сокращением, связанным еще и с выводом трудовых ресурсов с устаревших фондов $\varphi(t)=\varphi(m(t)M+T_a'(t)+$ $+T_p'(t)$, когда $m'(t)=M$.

2. Если после некоторого периода сокращения объема трудовых ресурсов наблюдается их рост, будем предполагать, что функция $T(t)=a_1+a_2t+a_3t^2$. На рис. 3–4 представлен результат численного решения системы (28).

Как и в предыдущем случае, наблюдается чередование интервалов освоения новых фондов и активного выведения устаревших, но происходит это до некоторого момента времени — этот период соответствует промежутку убывания функции $T(t)$. После прохождения точки, в которой функция $\varphi(t)$ равна нулю, на всем промежутке возрастания $T(t)$ новые фонды вводятся мгновенно ($\alpha(t)=0$), а устаревшие фонды не выводятся. Было сделано предположение, что темпа роста трудовых ресурсов недостаточно для эффективного функционирования экономики. Численные эксперименты показали, что незначительные изменения коэффициента a_3 в сторону увеличения на промежутке возрастания функции существенно влияют на процесс обновления фондов. На рис. 4–6 представлены графики функций $m(t),\alpha(t),\varphi(t)$ после увеличения значения a_3 на промежутке возрастания функции $T(t)$.

Из графика на рис. 5 видно, что теперь на промежутке роста функции $T(t)$ наблюдается сначала сокращение периодов освоения и ввода

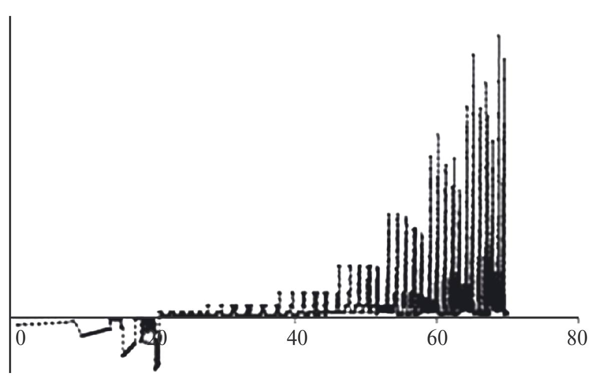

Рис. 6. График функции $\varphi(t)$, когда убывание трудовых ресурсов сменяется их ростом (после коррекции)

новых фондов, затем эти периоды становятся более продолжительными, при этом срок службы фондов увеличивается и далее происходит сокращение времени освоения новых при заметном уменьшении срока службы фондов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для разработанной ранее модели обновления производственных фондов исследована возможность ее применения в случае сокращения объема трудовых ресурсов в условиях роста выпуска и капиталовложений. Получена система функционально-дифференциальных уравнений, позволяющая определить переменные модели. Для нахождения оптимальных сроков вывода устаревших и ввода новых фондов использовались численные методы. Результаты численной реализации показали, что и при сокращении трудовых ресурсов происходит чередование интервалов освоения новых фондов и активного выведения устаревших фондов. Причем при изменении поведения функции объема трудовых ресурсов с убывания на возрастание требуется коррекция темпов ее роста.

Следующим этапом работы предполагается использовать модифицированную модель Канторовича для оценки сроков службы фондов в различных отраслях промышленности. Однако подобный усредненный подход не будет учитывать межотраслевого перераспределения трудовых ресурсов, в частности, обусловленного такими важными характеристиками рабочих мест различных отраслей экономики, как относительный уровень заработной платы, различия в условиях труда, географическая удаленность и др. Как было показано в работах (Макаров и др., 2019, 2020, 2022), на поведение агентов-индивидуумов, осуществляющих поиск и выбор рабочих мест, существенно влияет «гравитационный эффект» и индивидуальные характеристики работников (например, возраст, образование, семейное положение, профессиональный опыт и др.). Поэтому в рыночной экономической системе централизованное управление трудовыми ресурсами практически нереализуемо, т.е. невозможно нарастить численность задействованных трудовых ресурсов или обеспечить их выбытие до заданного уровня в соответствии с оптимальной траекторией развития производственной деятельности. Работники самостоятельно осуществляют поиск и смену рабочих мест при условии их соответствия заданным критериям (Акопов, Бекларян, 2022). При вводе производственных мощностей и формировании новых рабочих мест необходимо учитывать состояние рынка труда, возможность найма работников, квалификацию нанимаемых и др.

Подобная задача децентрализованного управления динамикой ввода и вывода производственных мощностей с учетом индивидуальной системы принятия решений работниками может быть разрешена в рамках агент-ориентированного подхода. Для этого (на следующем этапе) исследуемая в данной статье динамическая модель замещения производственных мощностей, использующая принцип дифференциальной оптимизации, будет дополнена включением популяции агентов-индивидуумов, занятых в различных отраслях экономики. Эволюционное развитие подобной популяции (т.е. расширение, воспроизводство, обучение и т.д.) являются важнейшей задачей социально-экономической системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Акопов А.С., Бекларян Г.Л. (2022). Оптимизация структуры занятости с использованием мультисекторной модели ограниченного соседства // *Вестник ЦЭМИ*. Т. 5. Вып. 1. Режим доступа: https://cemi.jes.su/s265838870019919-3-1/ DOI: 10.33276/S265838870019919-3 [**Akopov A., Beklaryan G.** (2022). Optimization of the employment structure using the multi-sector bounded-neighbourhood model. *Vestnik CEMI*, 5 (1). Available at: https://cemi.jes.su/s265838870019919-3-1/ DOI: 10.33276/S265838870019919-3 (in Russian).]

Бекларян Л.А., Борисова С.В. (2002). Об одной динамической модели замещения производственных мощностей // *Экономика и математические методы*. Т. 38. № 3. С. 73–93. [**Beklaryan L.A., Borisova S.V.** (2002). On one dynamic model of replacing production capacities. *Economics and Mathematical Methods*, 38, 3, 73–93 (in Russian).]

Бекларян Л.А., Борисова С.В., Хачатрян Н.К. (2012). Однопродуктовая динамическая модель замещения производственных фондов. Магистральные свойства // *Журнал вычислительной математики и матем. физики*. Т. 52. № 5. С. 801–817. [**Beklaryan L.A., Borisova S.V., Khachatryan N.K.** (2012). One-product dynamic model of replacement of production assets. Trunk properties. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 52, 5, 801–817 (in Russian).]

Канторович Л.В., Горьков Л.В. (1959). О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // *Доклады АН СССР*. Т. 129. № 4. С. 732–736. [**Kantorovich L.V., Gorkov L.V.** (1959). On some functional equations arising in the analysis of a one-product economic model. *Doklady Akademii Nauk USSR*, 129, 4, 732–736 (in Russian).]

Канторович Л.В., Жиянов В.И. (1973). Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса // *Доклады АН СССР*. Т. 211. № 6. С. 1280–1283. [**Kantorovich L.V., Zhiyanov V.I.** (1973). A one-product dynamic model of the economy considering the change in the structure of funds in presence of technical progress. *Doklady Akademii Nauk USSR*, 211, 6, 1280–1283 (in Russian).]

Канторович Л.В., Жиянов В.И., Хованский А.Г. (1978). Принцип дифференциальной оптимизации в применении к однопродуктовой динамической модели экономики // *Сибирский математический журнал*. Т. XIX. № 5. С. 1053–1064. [**Kantorovich L.V., Zhiyanov V.I., Khovansky A.G.** (1978). The principle of differential optimization in application to a one-product dynamic model of economy. *Siberian Mathematical Journal*, XIX, 5, 1053–1064 (in Russian).]

Колесникова О.А., Маслова Е.В., Околелых И.В. (2022). Проблемы трудовых ресурсов: дефицит, сдвиги в структуре, парадоксы старения // *Социально-трудовые исследования*. Т. 47 (2). С. 42–55. DOI: 10.34022/2658-3712-2022-47-2-42-55 [**Kolesnikova O.A., Maslova E.V., Okolelykh I.V.** (2022). Labor resource challenges: Deficits, structural shifts, paradoxes of aging. *Social & Labour Research*, 47 (2), 42–55. DOI: 10.34022/2658-3712-2022-47-2-42-55 (in Russian).]

Кондратьев В. (2013). Обрабатывающая промышленность: секреты и тенденции // *Прямые инвестиции*. № 8 (136). С. 41–45. [**Kondratiev V.** (2013). Manufacturing industry: secrets and trends. *Direct Investment*, 8 (136), 41–45 (in Russian).]

Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Акопов А.С., Бекларян Г.Л., Ровенская Е.А. (2020). Агентное моделирование популяционной динамики двух взаимодействующих сообществ: мигрантов и коренных // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 2. С. 5–19. DOI: 10.31857/S042473880009217-7 [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Akopov A.S., Beklaryan G.L., Rovenskaya E.A.** (2020). Agent-based modelling of population dynamics of two interacting social communities: Migrants and natives. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 2, 5–19. DOI: 10.31857/S042473880009217-7 (in Russian).]

Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Акопов А.С., Бекларян Г.Л., Ровенская Е.А., Стрелковский Н.В. (2022). Агентное моделирование социально-экономических последствий миграции при государственном регулировании занятости жителей // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 1. С. 113–130. DOI: 10.31857/S042473880018960-5 [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Akopov A.S., Beklaryan G.L., Rovenskaya E.A., Strelkovskii N.V.** (2022). Agent-based modeling of social and economic impacts of migration under the government regulated employment. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 1, 113–130. DOI: 10.31857/S042473880018960-5 (in Russian).]

Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бекларян Г.Л., Акопов А.С., Ровенская Е.А., Стрелковский Н.В. (2019). Укрупненная агент-ориентированная имитационная модель миграционных потоков стран Европейского Союза // *Экономика и математические методы*. Т. 55. № 1. С. 3–15. DOI: 10.31857/S042473880004044-7 [**Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Akopov A.S., Beklaryan G.L., Rovenskaya E.A., Strelkovskii N.V.** (2019). Aggregated Agent-Based Simulation model of migration flows of the European Union countries. *Economics and Mathematical Methods*, 55, 1 P. 3–15. DOI: 10.31857/S042473880004044-7 (in Russian).]

Смирных Л.И., Емелина Н. (2021). *Движение рабочей силы и рабочих мест на российском рынке труда: факты, тенденции, перспективы*. Информационный бюллетень. М.: Изд. дом Высшей школы экономики. [**Smirnykh L.I., Emelina N.** (2021). *The movement of labor and jobs in the Russian labor market: Facts, trends, prospect*s. Newsletter. Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics (in Russian).]

Смоляк С.А. (2022а). О назначении сроков службы технических систем в условиях инфляции // *Бизнес-информатика*. Т. 16. № 2. С. 74–88. DOI: 10.17323/2587-814X.2022.2.74.88 [**Smolyak S.A.** (2022a). On assigning service life for technical systems under inflation. *Business Informatics*, 16, 2, 74–88. DOI: 10.17323/2587-814X.2022.2.74.88 (in Russian).]

Смоляк С.А. (2022б). Экономический критерий оптимизации срока службы машин и оборудования с учетом их надежности // *Экономическая наука современной России*. № 1 (96). С. 45-55. DOI: 10.33293/1609-1442-2022-1 (96)-45-55 [**Smolyak S.A.** (2022b). Economic criteria for optimizing the assigned service life of machinery and equipment. *Economics of Contemporary Russia*, 1 (96), 45–55. DOI: 10.33293/1609-1442-2022-1 (96)-45-55 (in Russian).]

Boucekkine R., de La Croix D., Licandro O. (2011). Vintage capital theory: Three breakthroughs. *Barcelona GSE Working Paper Series Working Paper no. 565.*

Hartman J.C., Tan C.H. (2014). Equipment replacement analysis: A literature review and directions for future research. *The Engineering Economist*, 59, 2, 136–153.

Horenbeek A. van, Pintelon L., Muchiri P. (2010). Maintenance optimization models and criteria. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 1 (3), 189–200.

Jiang X., Makis V., Jardine A.K.S. (2001). Optimal repair/ replacement policy for a general repair model. *Advances in Applied Probability*, 33 (01), 206–222.

Werbińska-Wojciechowska S. (2019). Technical system maintenance. Delay-time-based modelling. N.Y.: Springer.

Yatsenko Y., Hritonenko N. (2005). Optimization of the lifetime of capital equipment using integral models. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 1, 4, 415–432.

New aspects of the development of Kantorovich's one-product dynamic model of replacement of production funds

© 2024 L.A. Beklaryan, S.V. Borisova, A.S. Akopov, N.K. Khachatryan

L.A. Beklaryan,
CEMI RAS, Moscow, Russia; e-mail: beklar@cemi.rssi.ru

S.V. Borisova,
CEMI RAS, Moscow, Russia; e-mail: boriss@cemi.rssi.ru

A.S. Akopov,
CEMI RAS, Moscow, Russia; e-mail: akopovas@umail.ru

N.K. Khachatryan,
CEMI RAS, Moscow, Russia; e-mail: nerses-khachatryan@yandex.ru

Received 27.10.2023

Abstract. In the context of the development of scientific and technological progress and the growth of the capital stock, an important task is modeling and optimization of the terms of operation of production funds. The development of technologies and automation of production lead to a reduction in the workforce employed in production. In the article, for the previously developed single-product dynamic model of the replacement of production assets, taking into account the inertial properties of the funds being introduced, the case of a reduction in labor resources under the condition of an increase in output and capital investment is investigated. A solution was obtained that allows to determine the optimal strategy for the withdrawal of obsolete funds and the introduction of the new ones in case of decrease in labor resources. As the optimization criterion the principle of differential optimization is used. The theorem of equivalence of a trajectory satisfying the principle of differential optimization, the obtained solution is given. A system of functional differential equations is presented, which should be satisfied by variable models both in terms of growth and reduction of labor resources. Numerical methods are used to solve such a system. The variants of the system development are considered under various assumptions regarding changes in the total amount of labor resources. The results of numerical implementation of the model are presented.

Keywords: one-product dynamic model, production assets, scientific and technological progress, replacement of equipment, service life of equipment, differential optimization.

JEL Classification: C02, C69, L52, O21.

UDC: 338.32; 338.984; 517.977.1.

For reference: **Beklaryan L.A., Borisova S.V., Akopov A.S., Khachatryan N.K.** (2024). New aspects of the development of Kantorovich's one-product dynamic model of replacement of production funds. *Economics and Mathematical Methods*, 60, 4, 87–101. DOI: 10.31857/S0424738824040086 (in Russian).