

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

О местоположении геометрических медиан треугольников

© 2024 г. П.А. Панов

П.А. Панов,

НИУ «Высшая школа экономики», Москва; e-mail: ppanov@hse.ru

Поступила в редакцию 14.07.2023

Аннотация. Геометрическая медиана является естественным пространственным обобщением статистической медианы одномерной выборки. Задача вычисления медианы конечного набора точек (выборки) на прямой не вызывает затруднений, но при переходе на плоскость или в пространства высшей размерности, где отсутствует естественный линейный порядок точек, такие затруднения возникают. Дело в том, что, например, для многомерной выборки среднее значение, как и на прямой, вычисляется взятием арифметического среднего. Однако для геометрической медианы подобная аналитическая формула принципиально отсутствует. Тем более такие формулы неизвестны для геометрических медиан непрерывных объектов, расположенных на плоскости или в пространстве. В связи с этим возникает естественный вопрос об аналитических оценках местоположения геометрических медиан. В работе приведены решения двух простейших задач такого рода. А именно – решение задачи об оценке местоположения геометрической медианы периметра треугольника и решение аналогичной задачи о геометрической медиане треугольной области. Для обеих задач получены точные оценки аффинного типа.

Ключевые слова: геометрическая медиана, барицентрические координаты, аффинные отображения, пространство треугольников, вырожденные треугольники, медианные отображения, градиентная система.

Классификация JEL: C61, C31, C65.

УДК: 519.863.

Для цитирования: **Панов П.А.** (2024). О местоположении геометрических медиан треугольников // *Экономика и математические методы*. Т. 60. № 2. С. 139–144. DOI: 10.31857/S0424738824020117

1. ВВЕДЕНИЕ

Геометрическая (пространственная) медиана и некоторые ее обобщения широко используются в экономической теории, начиная с работ Вильгельма Лаунхардта и Альфреда Вебера по теории размещения производства (Murray, 2020, vol. 8, p. 237–243). Теория размещения со временем стала необходимым инструментом в экономической географии, региональной экономике и в экономике города. Например, геометрическая медиана успешно используется для отыскания оптимального расположения культурных центров, школ, медицинских центров или аварийно-спасательных служб на городской территории (Панов, 2017; Yao, Zhang, Murray, 2019).

Важнейшее свойство медианы числовой выборки заключается в том, что эта медиана минимизирует суммарное расстояние до всех элементов выборки. Именно это свойство минимальности положено в основу определения геометрической медианы для конечных наборов точек на плоскости. Далее это определение легко переносится на любое метрическое пространство, в том числе и на Евклидово пространство \mathbb{R}^n . А с помощью интегрирования оно распространяется и на ограниченные подмножества любой размерности в \mathbb{R}^n (Fekete, Mitchell, Beurer, 2005).

Уже давно разработаны эффективные численные методы отыскания геометрической медианы, но до сих пор отсутствуют общие аналитические формулы для ее вычисления (Важај, 1988). Точные формулы не известны даже для различного рода геометрических медиан обычных треугольников, и в связи с этим речь здесь пойдет об оценках местоположения таких медиан.

Существует три различных взгляда на треугольник. Можно считать, что это: трехточечное подмножество плоскости; замкнутая трехзвенная ломаная на плоскости; треугольная область

на плоскости. В соответствии с этим имеются три рода геометрических медиан m_0, m_1, m_2 , связанных с треугольником:

$$m_0 = \arg \min_{X \in \mathbb{R}^2} (|A-X| + |B-X| + |C-X|);$$

$$m_1 = \arg \min_{X \in \mathbb{R}^2} \left(\int_{P \in a} |P-X| dP + \int_{P \in b} |P-X| dP + \int_{P \in c} |P-X| dP \right); \quad (1)$$

$$m_2 = \arg \min_{X \in \mathbb{R}^2} \int_{P \in abc} |P-X| dP. \quad (2)$$

Здесь A, B, C — вершины треугольника; a, b, c — его стороны и abc — треугольная область, ограниченная сторонами a, b, c . Геометрическая медиана m_0 — это точка Ферма–Торричелли треугольника ABC , формулы для вычисления которой хорошо известны¹, — поэтому она исключается из обсуждения. Но для точек m_1, m_2 точные формулы отсутствуют. Однако удалось получить точные оценки аффинного типа для возможного расположения геометрических медиан m_1 периметров треугольников и для расположения геометрических медиан m_2 треугольных областей.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. Пусть задан произвольный треугольник δ , и пусть δ' — его образ при гомотетии с коэффициентом $1/4$ с центром, расположенным в центроиде треугольника δ , а δ'' — криволинейный треугольник, составленный из дуг трех гипербол. При этом вершины δ'' совпадают с вершинами δ' , а каждая из трех гипербол имеет асимптотами две стороны треугольника δ и касается двух его медиан (рис. 1). Тогда:

- 1) геометрическая медиана $m_1(\delta)$ треугольника δ лежит внутри треугольника δ' ;
- 2) геометрическая медиана $m_2(\delta)$ треугольника δ лежит внутри треугольника δ'' .

Рис. 1 служит иллюстрацией к теореме 1. На нем изображен треугольник δ со сторонами 9, 7, 5, соответствующие ему треугольник δ' и криволинейный треугольник δ'' , а также две точки — геометрические медианы $m_1(\delta)$ и $m_2(\delta)$.

Дополним геометрическое описание треугольников δ' и δ'' , представленных в теореме 1, их аналитическим описанием.

Дополнение 1. Пусть задан треугольник $\delta = A_1A_2A_3$. Тогда стороны соответствующего ему треугольника δ' задаются следующими параметрическими уравнениями

$$h_i(t) = tA_i + \frac{1}{4}A_j + \left(\frac{3}{4} - t\right)A_k, \quad (3)$$

где (i, j, k) произвольная циклическая перестановка чисел 1, 2, 3, а параметр t меняется в пределах $1/4 \leq t \leq 1/2$.

Дополнение 2. Для треугольника $\delta = A_1A_2A_3$ отрезки гипербол, ограничивающих соответствующий δ треугольник δ'' из теоремы 1, имеют параметрические уравнения вида

$$h_i(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(tA_i + t^{-1}A_j + (2\sqrt{2} - (t+t^{-1}))A_k \right). \quad (4)$$

Здесь (i, j, k) — произвольная циклическая перестановка чисел 1, 2, 3, а параметр t на этот раз меняется в пределах $1/\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

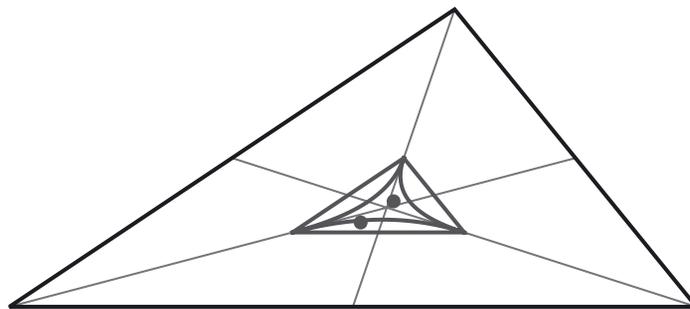


Рис. 1. Геометрическая медиана $m_1(\delta)$ содержится внутри подобного δ маленького треугольника δ' , а геометрическая медиана $m_2(\delta)$ — в маленьком криволинейном треугольнике δ''

¹ Точка $X(13)$ из «Encyclopedia of triangle centers» (<https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>).

3. ОСНОВНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

В этом разделе мы укажем основные инструменты, которые используются при доказательстве теоремы 1, а именно: барицентрические координаты, аффинные отображения, пространство треугольников, медианные отображения и вырожденные треугольники.

Барицентрические координаты (Балк, Болтянский, 1987). Пусть задан треугольник $\delta = A_1A_2A_3$. Тогда любая точка A внутри этого треугольника однозначно представляется в виде

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3, \tag{5}$$

где числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ положительны и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Набор из этих трех чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ называется барицентрическими координатами точки A относительно треугольника δ .

Теперь, если вернуться к формулам (3) и (4) из дополнений 1 и 2, то эти формулы задают барицентрические координаты границ треугольников δ' и δ'' , соответствующих треугольнику $\delta = A_1A_2A_3$.

Для нас существенно, что для подобных треугольников δ_1 и δ_2 барицентрические координаты геометрических медиан $m_1(\delta_1)$ и $m_1(\delta_2)$ равны между собой, аналогично — и для $m_2(\delta_1)$ и $m_2(\delta_2)$. В этом смысле можно сказать, что в подобных треугольниках геометрические медианы расположены одинаковым образом. Это свойство геометрических медиан называют их *эквивариантностью* относительно преобразования подобия.

Пространство треугольников. Для каждого треугольника существует единственный подобный ему треугольник периметра 1. В силу эквивариантности геометрических медиан теорему 1 достаточно доказать только для треугольников периметра 1.

Существует много способов объединения треугольников единичного периметра в единое пространство (Behrend, 2014; Панов, 2021). Для наших целей выберем самый простой из них (Stewart, 2017). А именно каждому треугольнику единичного периметра с упорядоченным набором сторон a, b, c сопоставим точку $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Эти точки заполнят в \mathbb{R}^3 целый треугольник с вершинами $(1/2, 1/2, 0)$, $(1/2, 0, 1/2)$, $(0, 1/2, 1/2)$ лежащий в плоскости $x + y + z = 1$. Обозначим его ∇ . Каждая точка, принадлежащая ∇ , отвечает некоторому треугольнику, поэтому ∇ называется *пространством треугольников*.

Вырожденные треугольники. Обратим внимание на граничные точки пространства ∇ . Для координат (a, b, c) внутренних точек ∇ выполняется неравенство треугольника, т.е. большее из чисел a, b, c меньше суммы двух других, но для граничных точек ∇ большая из координат будет равна сумме двух других.

Треугольники, у которых одна сторона равна сумме двух других, называются *вырожденными*.

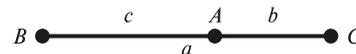


Рис. 2. Вырожденный треугольник, $a = b + c$

В случае когда именно $a = b + c$, вырожденный треугольник можно представлять как отрезок CB с отмеченной на нем точкой A (рис. 2). Таким образом, можно считать, что граница $\partial\nabla$ пространства ∇ соответствует вырожденным треугольникам с единичным периметром.

Медианные отображения. Введем в рассмотрение еще один правильный треугольник Δ с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, лежащий в плоскости $x + y + z = 1$, и определим два *медианных* отображения M_i , $i = 1, 2$: $M_i : \nabla \rightarrow \Delta$ из пространства треугольников ∇ в правильный треугольник Δ .

Пусть задана точка $(a, b, c) \in \nabla$, соответствующая некоторому треугольнику δ с упорядоченным набором сторон a, b, c . Пусть также m_i — геометрическая медиана этого треугольника δ , а $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i$ — ее барицентрические координаты относительно δ , тогда $\lambda_1^i + \lambda_2^i + \lambda_3^i = 1$. Поэтому $(\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i) \in \Delta$ и по определению отображение M_i устроено следующим образом:

$$M_i : (a, b, c) \mapsto (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i). \tag{5}$$

Образ отображения M_1 обозначим Δ' , образ отображения M_2 обозначим Δ'' .

Как мы собрали все треугольники в единое пространство ∇ , так и медианное отображение M_1 собирает геометрические медианы m_1 всех треугольников в единое пространство $\Delta' \subset \Delta$, а медианное отображение M_2 собирает геометрические медианы m_2 всех треугольников в $\Delta'' \subset \Delta$.

Используя понятие аффинного отображения, можно дать альтернативное определение медианных отображений M_1 и M_2 . Напомним, что для любой пары треугольников с заданным порядком вершин существует единственное аффинное отображение, переводящее вершины первого из них в вершины второго в указанном порядке. При этом отображении точка, имеющая барицентрические координаты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ относительно первого треугольника, переходит в точку, имеющую те же самые барицентрические координаты относительно второго треугольника.

Пусть теперь $\delta = abc$ — треугольник единичного периметра со сторонами a, b, c и геометрическими медианами $m_1(\delta)$ и $m_2(\delta)$. Пусть также A_δ — аффинное отображение треугольника δ в треугольник Δ : $A_\delta: \delta \rightarrow \Delta$. Тогда медианное отображение M_i из формулы (5) можно определить формулой

$$M_i: (a, b, c) \mapsto A_\delta(m_i(\delta)). \quad (6)$$

Это следует из того, что для точек, лежащих в плоскости $x + y + z = 1$, их барицентрические координаты относительно Δ и их декартовы координаты совпадают.

Компьютерная визуализация. На рис. 3 представлена компьютерная визуализация медианного отображения $M_1: \nabla \rightarrow \Delta$. Для его построения была использована репрезентативная выборка точек из пространства ∇ , образы которых достаточно плотно заполняют Δ' . Используя это изображение, а также подвижную визуализацию отображения M_1^2 , можно сделать вывод, что граница пространства треугольников $\partial\nabla$, соответствующая вырожденным треугольникам, при отображении M_1 переходит в границу области Δ' , которую мы обозначим $\partial\Delta'$.

То же самое, что было отмечено выше в отношении отображения M_1 , можно отнести и к медианному отображению M_2 (рис. 4). И здесь граница пространства треугольников $\partial\nabla$, соответствующая вырожденным треугольникам, при отображении M_2 тоже переходит в границу образа этого отображения, т.е. в $\partial\Delta''$. Описанные здесь свойства медианных отображений M_1 и M_2 позволяют наметить основные шаги для доказательства теоремы 1.

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Главный шаг в доказательстве основного результата — вычисление уравнений границ образов медианных отображений M_1 и M_2 , т.е. границ множеств Δ' и Δ'' на рис. 3–4. Как было указано в предыдущем разделе, для этого нужно уметь вычислять местоположение геометрических медиан m_1 и m_2 вырожденных треугольников, а именно барицентрические координаты этих медиан. Это вычисление осуществляется с помощью предельного перехода и с помощью соответствующего этому переходу асимптотического анализа градиентных систем для решения минимизационных задач (1) и (2) (Панов, 2021). Вот формулировка нужного нам результата.

Предложение 1. Пусть $\delta = abc$ — вырожденный треугольник и $a \geq b \geq c$, и пусть a_n, b_n, c_n — последовательность сходящихся к нему обычных треугольников, т.е. обычных треугольников, для которых $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$. Тогда:

1) геометрическая медиана m_1 треугольника a_n, b_n, c_n удалена от общей вершины сторон a_n и b_n на расстояние, близкое к $a/2$, а отношение расстояний от нее до сторон a_n и b_n близко к 1;

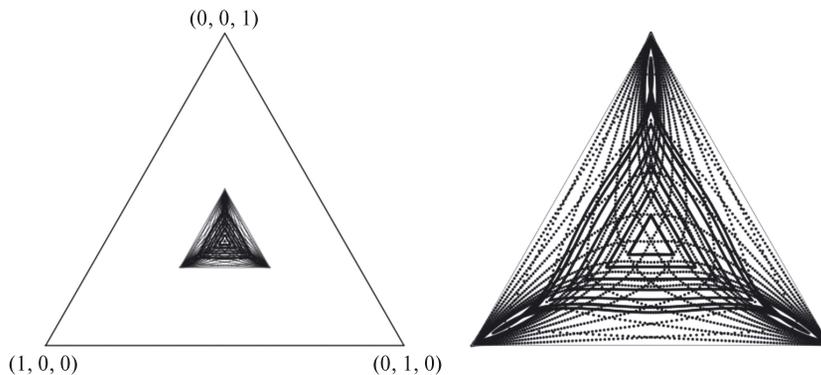


Рис. 3. Слева в треугольнике Δ находится образ отображения M_1 — область Δ' , справа — увеличенная копия Δ'

² https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Animation_M_1.gif

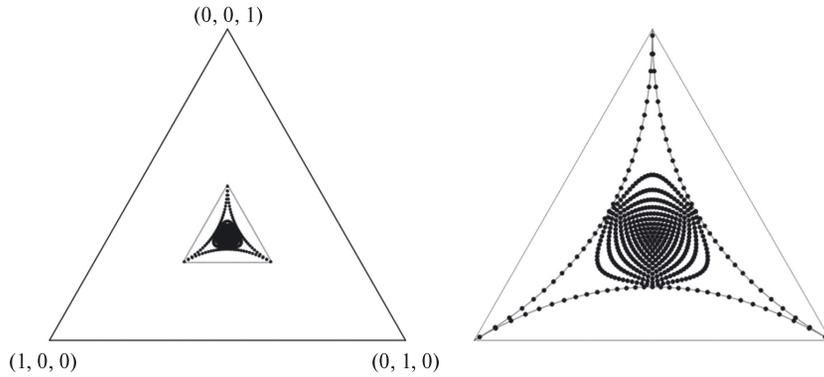


Рис. 4. Треугольник Δ (слева — область Δ'' — образ отображения M_2 , справа — увеличенная копия Δ'')

2) геометрическая медиана m_2 треугольника $a_n b_n c_n$ удалена от общей вершины сторон a_n и b_n на расстояние, близкое к $\sqrt{ab}/2$, и отношение расстояний от нее до сторон a_n и b_n близко к 1.

На менее формальном и более выразительном языке можно сказать, что геометрические медианы m_1 и m_2 вырожденного треугольника $\delta = abc$, $a \geq b \geq c$ лежат на биссектрисе его меньшего угла на расстояниях $a/2$ и $\sqrt{ab}/2$ от вершины этого угла.

Следующее утверждение является прямым переводом предложения 1 на язык барицентрических координат.

Предложение 2. Пусть $\delta = abc$ — вырожденный треугольник, в котором $a \geq b \geq c$. Тогда геометрическая медиана его периметра, точка m_1 , имеет барицентрические координаты

$$\lambda_a = \frac{a}{4b}, \quad \lambda_b = \frac{1}{4}, \quad \lambda_c = \frac{3}{4} - \frac{a}{4b}, \tag{7}$$

а геометрическая медиана его внутренности, точка m_2 , имеет барицентрические координаты

$$\lambda_a = (2\sqrt{2})^{-1} \sqrt{a/b}, \quad \lambda_b = (2\sqrt{2})^{-1} \sqrt{b/a}, \quad \lambda_c = 1 - (2\sqrt{2})^{-1} (\sqrt{a/b} + \sqrt{b/a}). \tag{8}$$

И теперь уже можно утверждать, что теорема 1 является прямым следствием предложения 2. Действительно, пусть задан произвольный треугольник δ и пусть δ' и δ'' — соответствующие ему треугольники из теоремы 1. Тогда сравнение формул (7) и (3), а также (8) и (4) показывает, что

$$\delta' = \mathcal{A}_\delta^{-1}(\Delta') \text{ и } \delta'' = \mathcal{A}_\delta^{-1}(\Delta''), \tag{9}$$

где \mathcal{A}_δ^{-1} — аффинное отображение треугольника Δ в треугольник δ , обратное аффинному отображению \mathcal{A}_δ . В свою очередь, соотношение (6) свидетельствует о том, что

$$\mathcal{A}_\delta(m_1(\delta)) \in \Delta' \text{ и } \mathcal{A}_\delta(m_2(\delta)) \in \Delta'', \tag{10}$$

а (10) и (9) дают $m_1(\delta) \in \delta'$ и $m_2(\delta) \in \delta''$, как и записано в теореме 1.

Некоторые дополнительные подробности изложены в (Панов, 2021).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хотя существуют эффективные численные методы нахождения геометрической медианы, но нет аналитических формул для её вычисления. Поэтому нужны хорошие универсальные оценки для местоположения геометрических медиан. Имеется два типа таких оценок. Первая — достаточно очевидна и заключается в том, что для любого подмножества пространства \mathbb{R}^n геометрическая медиана, если она существует, принадлежит выпуклой оболочке этого множества. Вторая — универсальная оценка (Mallows, 1991; Piché, 2012) — основана на вероятностных соображениях и применима к подмножествам \mathbb{R}^n . Однако обе эти оценки для треугольника, расположенного на плоскости, сильно уступают тем, что предъявлены в теореме 1.

Во многих экономических задачах также возникает вопрос о расположении геометрической медианы выпуклой области, а именно вопрос об удаленности медианы от границы этой области. В работе (Панов, 2017) получена универсальная оценка для этой задачи, и для треугольника она опять сильно уступает оценке, следующей из теоремы 1. Поэтому представляется желательным

распространить полученные результаты, по крайней мере, на произвольные выпуклые кривые и выпуклые области, расположенные на плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Балк М.Б., Болтынский В.Г.** (1987). Геометрия масс. М.: Наука. [**Balk M.B., Boltyansky V.G.** (1987). *Geometry of masses*. М.: Nauka (in Russian).]
- Панов П.А.** (2017). Равновесные расположения центров благ по городу // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 1. С. 28–42. [**Panov P.A.** (2017). Nash equilibria in the facility location problem with externalities. *Journal of the New Economic Association*, 1 (33), 28–42 (in Russian).]
- Панов П.А.** (2021). О геометрических медианах треугольников. Режим доступа: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2007/2007.14231.pdf> [**Panov P.A.** (2021). *On geometric medians of triangles*. Available at: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2007/2007.14231.pdf> (in Russian).]
- Vajaj C.** (1988). The algebraic degree of geometric optimization problems. *Discrete and Computational Geometry*, 3 (2), 177–191.
- Behrend K.** (2014). Introduction to algebraic stacks. In: *Moduli Spaces*. L. Brambila-Paz, P. Newstead, R.P. Thomas, O. García-Prada (eds.). *London Mathematical Society Lecture Notes*, 411. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1–131.
- Fekete S.P., Mitchell J.S.B., Beurer K.** (2005). On the continuous Fermat-Weber problem. *Operations Research*, 53 (1), 61–76. DOI: 10.1287/opre.1040.0137. S2CID1121
- Mallows C.** (1991). Another comment on O’Cinneide. *The American Statistician*, 45, 3, 257. DOI:10.1080/00031305.1991.10475815
- Murray A.T.** (2020). Location theory. In: *International encyclopedia of human geography*. 2nd ed. A. Kobayashi (ed.). Oxford: Elsevier. DOI: 10.1016/B978-0-08-102295-5.10104-0
- Piché R.** (2012). *Random vectors and random sequences*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing. ISBN: 978-3659211966
- Stewart I.** (2017). Why do all triangles form a triangle? *American Mathematical Monthly*, 124, 1, 70–73. DOI: 10.4169/amer.math.monthly.124.1.70
- Yao J., Zhang X., Murray A.T.** (2019). Location optimization of urban fire stations: Access and service coverage. *Computers, Environment and Urban Systems*, 73, 184–190. DOI: 10.1016/j.compenvurbsys.2018.10.006

On the location of geometrical medians of triangles

© 2024 P.A. Panov

P.A. Panov,
HSE University, Moscow, Russia; e-mail: ppanov@hse.ru

Received 14.07.2023

Abstract. The geometrical median is a natural spatial generalization of the statistical median of a one-dimensional sample. Thus the problem of computing the median of a finite set of points (a sample) on a straight line presents no difficulties, but unexpected difficulties arise in moving to the plane or to higher dimensional spaces, where the natural linear order of points is absent. While the mean of a multidimensional sample, as on a straight line, is calculated by taking the arithmetic mean, no such analytical formula is available for the geometric median. Moreover, such formulas are absent when we deal with geometrical medians of continuous objects located on a plane or in space. This raises the natural question of analytical estimates of the locations of geometric medians. This paper presents the solutions for two such simplest problems. Namely, the solution of the problem on estimating the location of the geometric median of the perimeter of a triangle and the solution of a similar problem on the geometric median of a triangular area. For both problems, we obtain exact estimates of the affine type.

Keywords: geometrical median, barycentric coordinates, affine mappings, triangle space, degenerate triangles, median mappings, gradient system.

JEL Classification: C61, C31, C65.

UDK: 519.863.

For reference: **Panov P.A.** (2024). On the location of geometrical medians of triangles. *Economics and Mathematical Methods*, 60, 2, 139–144. DOI: 10.31857/S0424738824020117 (in Russian).