

---

---

НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

---

---

## Моделирование пенсионных доходов и расходов на основе уравнения Ферхюльста и полиномиальной регрессии с демографическими прогнозами

© 2024 г. С. Со, Е.В. Костырин

**С. Со,**

*МГТУ имени Н.Э. Баумана (НИУ), Москва; e-mail: sisuo1997@gmail.com*

**Е.В. Костырин,**

*МГТУ имени Н.Э. Баумана (НИУ), Москва; e-mail: kostyrinev@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 01.02.2023

**Аннотация.** Для расчета коэффициента демографической нагрузки в данной работе осуществлено прогнозирование численности населения России трудоспособного возраста с помощью уравнения полиномиальной регрессии четвертой степени с точностью 0,227% и прогнозирование численности населения старше трудоспособного возраста с помощью уравнения Ферхюльста (точность прогнозирования 1,084%) на период с 2023 по 2031 г. (9 лет). Разработана экономико-математическая модель для расчета пенсионных доходов и расходов граждан при внедрении индивидуальных (персонифицированных) пенсионных счетов граждан, учитывающая прогнозные значения коэффициента демографической нагрузки, и осуществлен стресс-анализ модели на основе оценки влияния ставки пенсионных взносов, среднемесячной заработной платы, средней ставки инвестиционного дохода по операциям с пенсионными средствами граждан (нормы доходности) и темпов роста заработной платы, при которых обеспечивается сбалансированность пенсионных поступлений и расходов на пенсию граждан. Практическая реализация разработанной экономико-математической модели показала, что минимальное значение нормы доходности, при котором обеспечивается сбалансированность пенсионных поступлений и расходов на пенсию граждан, равно 1,408%; минимальная среднемесячная заработная плата составляет 22 949,39 руб.; ставка взносов в СФР на пенсионное обеспечение оценивается в размере 18,813%.

**Ключевые слова:** уравнение Ферхюльста, полиномиальная регрессия, численность населения, коэффициент демографической нагрузки, ставка пенсионных взносов, заработная плата, пенсия, персонифицированный пенсионный счет, норма доходности.

**Классификация JEL:** C53, C63, J11, J26.

**УДК:** 336.233.2, 369.542.2, 314.93.

Для цитирования: Со С., Костырин Е.В. (2024). Моделирование пенсионных доходов и расходов на основе уравнения Ферхюльста и полиномиальной регрессии с демографическими прогнозами // *Экономика и математические методы*. Т. 60. № 2. С. 50–66. DOI: 10.31857/S0424738824020054

### ВВЕДЕНИЕ

Статистические данные показывают, что старение населения России еще больше углубилось. И Россия будет продолжать сталкиваться с давлением на долгосрочное сбалансированное развитие структуры населения в течение определенного периода времени в будущем. Население мира также стареет ускоренными темпами. К 2050 г. доля мирового населения в возрасте 65 лет и старше увеличится до 16%. Поэтому вопрос о том, как создать эффективную систему пенсионного обеспечения, чтобы справиться с наступлением пика старения, стал в центре внимания всех стран мира<sup>1</sup>.

В результате постоянно низкого уровня рождаемости и общего увеличения продолжительности жизни возрастная структура населения смещается в сторону старших возрастов, в результате чего коэффициент демографической нагрузки (КДН) растет. КДН отражает демографическую структуру старения общества. Чем выше коэффициент, тем тяжелее нагрузка на взрослое население

---

<sup>1</sup> Отчет «World Population Prospects 2019: Highlights». Организация Объединенных Наций. Департамент по экономическим и социальным вопросам (<https://www.un.org/development/desa/publications/world-population-prospects-2019-highlights.html>).

и тем более сильное негативное влияние она окажет на долгосрочное экономическое и социальное развитие страны. Поэтому изучение КДН актуально для использования человеческих ресурсов и стабильности социального обеспечения. Количественное исследование таких параметров, как норма прибыли, темпы роста заработной платы, минимальный размер заработной платы, ставка пенсионных взносов и т.д., направленное на решение проблемы дисбаланса между пенсионными доходами и расходами пенсионного фонда, может сыграть положительную роль в снижении давления на баланс его средств.

## ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Проблема дефицита средств пенсионного фонда может быть смягчена или решена путем корректировки таких параметров, как ставки взносов, минимальный размер заработной платы и возраст выхода на пенсию.

В контексте меняющейся демографической ситуации и макроэкономической среды параметры, задействованные при формировании системы пенсионного страхования, в том числе ставки взносов в фонд, необходимо периодически корректировать, чтобы обеспечить долгосрочную стабильность системы. Так, авторы работы (Holzmann, Palmer, Reform, 2006) утверждают, что такой параметр пенсионной системы, как ставка взносов, необходимо периодически корректировать, чтобы обеспечить долгосрочную стабильность системы в меняющихся демографических и макроэкономических условиях.

В работе (Borgschulte, Heeryung, 2018) авторы изучают влияние минимальной заработной платы на выход на пенсию в США, где получение более высокой минимальной заработной платы может задержать обращение в службу социального обеспечения для получения пенсии.

В дополнение к этому многие ученые отмечают важное влияние ожидаемой продолжительности жизни населения на принятие решений о пенсионном возрасте, и в соответствующей литературе обычно делается вывод о том, что оптимальный пенсионный возраст увеличивается с ростом ожидаемой продолжительности жизни (Sánchez-Romero, Prskawetz, 2016; Bloom, Canning, Moore, 2014).

В (Cai, Zhu, Han, 2017) авторы отмечают, что оптимальное число лет работы для индивидуума увеличивается с ростом продолжительности жизни, разработав анализ модели жизненного цикла.

В работе (Duan, Gao, Li, 2022) изучался оптимальный возраст выхода на пенсию на основе функции полезности и показано, что такие факторы, как пол, предпочтение досуга, возраст начала трудовой деятельности и индивидуальная ставка взноса в пенсионное страхование, влияют на оптимальный возраст выхода на пенсию работников.

Из-за сложности моделей управления доходами и расходами пенсионных фондов ученые в настоящее время делают предположения при построении моделей, которые могут не полностью отражать реальную ситуацию. Кроме того, некоторые текущие исследования не полностью учитывают совместное влияние заработной платы, сбережений и других факторов, и модель не является достаточно полной.

Поэтому, основываясь на вышеприведенных исследованиях, в данной работе в модель баланса доходов и расходов Пенсионного фонда Российской Федерации вводятся показатели нормы сбережений, размера заработной платы и пенсий, включая базовые пенсии и субсидии из государственного бюджета, что еще больше расширяет возможности модели и приближает ее к отражению реальной ситуации. Кроме того, в данной работе в модель на основе уравнения Ферхюльста и полиномиальной регрессии вводится будущая численность трудоспособного населения и численность пенсионеров, что делает результаты модели более точными и по своей сути отражает меняющуюся тенденцию уровня старения.

## ПРОГНОЗ ПРИРОСТА НАСЕЛЕНИЯ РОССИИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ФЕРХЮЛЬСТА

Еще в XVIII в. Томас Мальтус предположил, что «на протяжении большей части существования человечества рост его численности на каждый данный момент времени был ограничен потолком несущей способности земли, обусловленным наблюдаемым в данный момент времени уровнем развития жизнеобеспечивающих технологий» (Malthus, 1978). Мальтузианская модель роста,

в литературе называемая также моделью Мальтуса, устанавливает темп прироста населения  $a$  как константу, так что численность населения  $P(t)$  растет экспоненциально. Мальтузианские модели выглядят следующим образом:

$$P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}, \quad (1)$$

где  $P(t)$  — размер популяции в момент времени  $t$ , человек;  $P_0 = P(0)$  — исходная численность населения, человек;  $a$  — темп прироста населения, годы;  $t$  — время, годы. Эта модель также может быть выражена в виде дифференциального уравнения:

$$dP(t)/dt = aP(t). \quad (2)$$

В 1840 г. бельгийский математик Ферхюльст изменил модель Мальтуса. Он утверждал, что «население не может расти сверх максимальной экологической емкости  $M$ , определяемой его географической средой». Это привело к появлению логистической модели. На начальных этапах функция растет примерно экспоненциально; затем рост замедляется по мере насыщения; и, наконец, рост прекращается, когда функция достигает зрелости (Verhulst, 1945).

Уравнение Ферхюльста представлено дифференциальным уравнением

$$dP(t)/dt = aP(t)(1 - P(t)/M), \quad (3)$$

где  $M$  — поддерживающая емкость среды, т.е. максимально возможная численность популяции, человек. Решая дифференциальное уравнение (3) с начальным условием  $P(t_0) = P_0$ , получаем:

$$P(t) = M / (1 + ce^{-a(t-t_0)}), \quad (4)$$

$$c = (M - P_0) / P_0, \quad (5)$$

где  $c$  — константа. После упрощения имеем

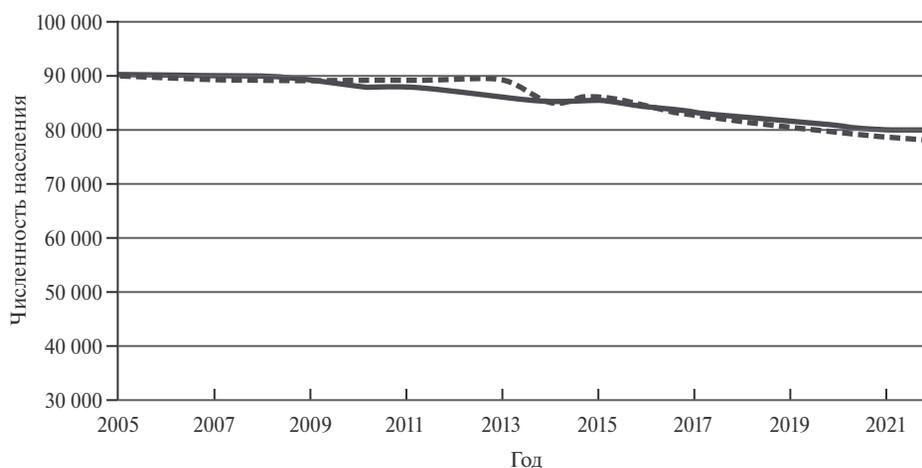
$$P(t) = M / (1 + e^{-a(t-t')}), \quad (6)$$

где  $t'$  — год с наибольшим изменением численности населения — год, в который достигается половина емкости среды.

Согласно международным критериям население считается «старым», если доля людей в возрастах 65 лет и более во всем населении превышает 7%. В настоящее время каждый седьмой россиянин, т.е. 15,8% (на начало 2020 г. — 15,5%) жителей страны, находится в возрасте 65 лет и выше.

Поскольку данные с 2014 г. включают численность населения Республики Крым, для устранения ошибки, вызванной этим изменением, расчет разделен на два периода 2005–2013 и 2015–2022 гг., используя 2014 г. в качестве границы. При этом 2014 г. не включен в статистику, а реальное значение используется непосредственно для прогнозируемой численности населения в 2014 г.

Далее уравнение Ферхюльста будет использоваться для прогнозирования численности населения в трудоспособном возрасте и численности населения старше трудоспособного возраста России. Полученные данные построены и представлены на рис. 1–2.



**Рис. 1.** Сравнение фактической (сплошная линия) с прогнозируемой (пунктирная линия) численностью населения России в трудоспособном возрасте в 2005–2021 гг., тыс. человек

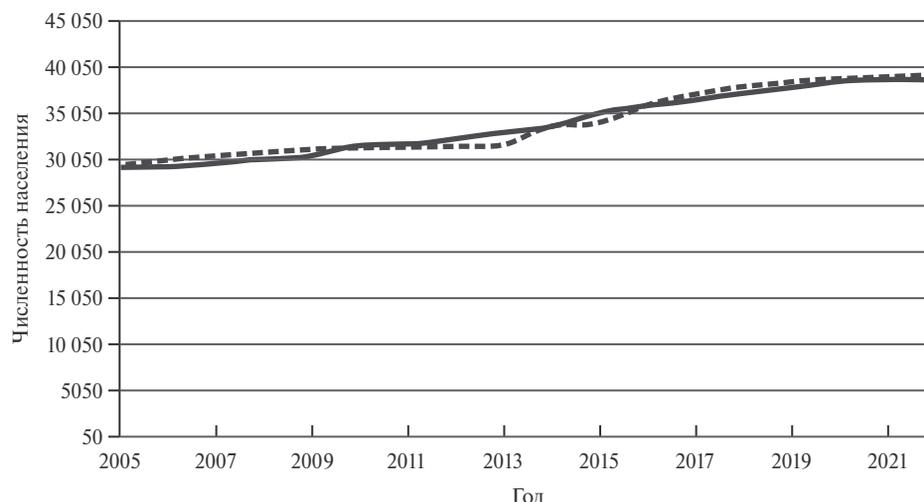


Рис. 2. Сравнение фактической (сплошная линия) с прогнозируемой (пунктирная линия) численностью населения России старше трудоспособного возраста в 2005–2021 гг., тыс. человек

Таблица 1. Параметры численности населения России

Параметр	Численность населения России			
	в трудоспособном возрасте		старше трудоспособного возраста	
	Период времени		Период времени	
	2005–2013	2015–2021	2005–2013	2015–2021
Темп прироста населения ( $a$ )	0,744	0,159	0,324	0,474
Поддерживающая емкость среды ( $M$ )	89 124	74 631	31 962	39 374
Год, в котором достигается половина поддерживающей емкости среды ( $t'$ )	1999	2002	1998	2011
Численность населения ( $P(t)$ )	$\frac{89\,124}{1 - e^{-0,744(t-1999)}}$	$\frac{74\,631}{1 - e^{-0,159(t-2002)}}$	$\frac{31\,962}{1 + e^{-0,324(t-1998)}}$	$\frac{39\,374}{1 + e^{-0,474(t-2011)}}$

Таблица 2. Результаты расчетов по уравнению Ферхюльста в России на период 2005–2022 гг.

Год	В трудоспособном возрасте		Старше трудоспособного возраста	
	Прогнозируемое население, тыс. человек	Погрешность, %	Прогнозируемое население, тыс. человек	Погрешность, %
2005	90099	0,000	29353	0,000
2006	89584	0,635	30031	2,118
2007	89342	0,795	30541	2,721
...	...	...	...	...
2020	79414	1,631	38826	0,648
2021	78674	1,517	39031	0,343
2022	78053	1,713	39160	0,861
Средняя погрешность, %	1,089		1,484	

В табл. 1 представлены исходные параметры численности населения Российской Федерации, а в табл. 2 — результаты расчетов по уравнению Ферхюльста и их верификации.

Согласно данным, представленным в последней строке табл. 2, средняя погрешность прогноза прироста населения России на основе уравнения Ферхюльста равна 1,089% для населения в трудоспособном возрасте и 1,084% — для населения старше трудоспособного возраста.

### ПРОГНОЗ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ РОССИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ

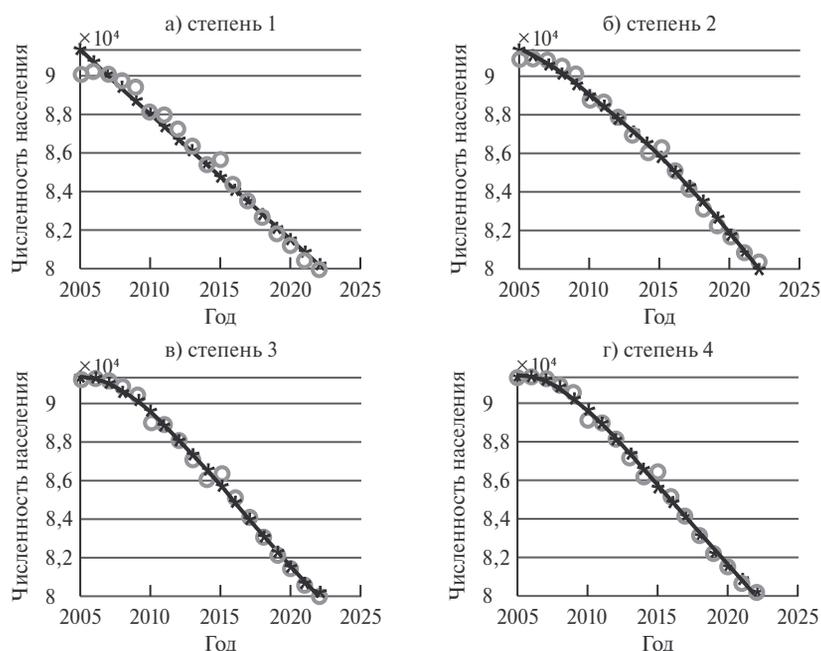
Полиномиальная регрессия выступает наиболее часто используемым методом прогнозирования, а программное обеспечение MATLAB дает уникальные возможности прогнозирования численности населения с использованием полиномиальной регрессии, что в совокупности позволяет получить беспрецедентные преимущества по сравнению с другими методами прогнозирования населения. Подгонка данных (кривой) является важным методом обработки данных, цель которой состоит в том, чтобы установить эффективную эмпирическую функциональную связь между зависимой переменной и независимой переменной в соответствии с данными, а также предоставить рекомендации для дальнейшего исследования функции (Zhou, Qi, Jiao, 2008).

Верификация модели прогнозирования численности населения России трудоспособного и старше трудоспособного возрастов, выполненная в программной среде MATLAB с использованием полиномиальной регрессии, представлена на рис. 3, 4 и в табл. 3.

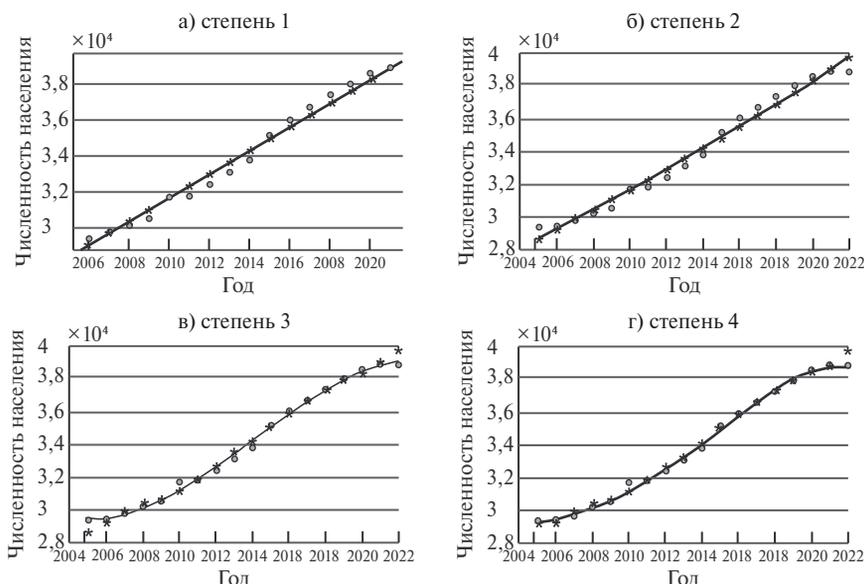
Анализ данных табл. 3 показал, что наименьшая средняя погрешность прогноза численности населения России, равная 0,227% для численности населения трудоспособного возраста и 0,372%

**Таблица 3.** Оценка средней погрешности результатов верификации полиномиальной регрессии для численности населения России в трудоспособном возрасте на период 2005–2022 гг., тыс. человек

Год	Фактическое население	Расчетное значение по полиномиальной регрессии			
		Степень 1	Степень 2	Степень 3	Степень 4
2005	90099	91440	90689	90290	90209
2006	90157	90748	90262	90145	90159
2007	90058	90056	89802	89879	89935
...	...	...	...	...	...
2020	80731	81064	80809	80733	80790
2021	79886	80372	79886	80003	80017
2022	79414	79680	78929	79327	79245
Средняя погрешность, %		0,470	0,324	0,230	0,227



**Рис. 3.** Результаты верификации полиномиальной регрессии для численности населения России в трудоспособном возрасте на период 2005–2022 гг., тыс. человек



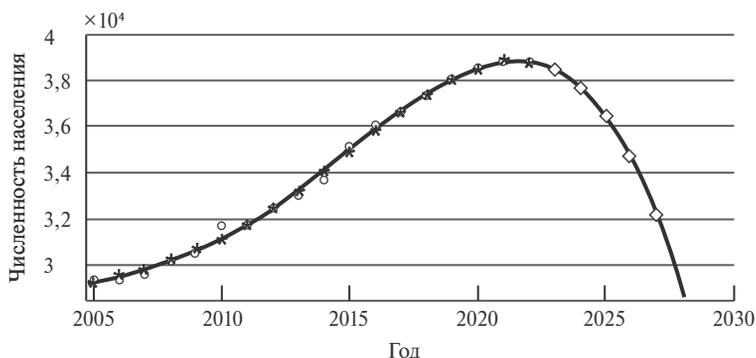
**Рис. 4.** Результаты верификации полиномиальной регрессии для численности населения России старше трудоспособного возраста на период 2005–2022 гг., тыс. человек

для численности населения старше трудоспособного возраста, получается для уравнения полиномиальной регрессии четвертой степени, которое имеет вид

$$y = -1,664 \times 10^{12} + 3,299 \times 10^9 x - 2,451 \times 10^6 x^2 + 809,7x^3 - 0,1003x^4. \quad (7)$$

Для численности населения старше трудоспособного возраста мы столкнулись с явлением переобучения модели, которое хорошо изучено и рассмотрено, например, в работе (Головкина, Козыченко, Клименко, 2022). Смысл такого переобучения заключается в том, что с ростом сложности модели (увеличением степени полинома) средняя погрешность на обучающих данных снижается, но при этом возрастает ошибка прогноза, что хорошо видно на рис. 5. Переобучение в статистике — явление, когда построенная модель хорошо объясняет примеры из обучающей выборки, но относительно плохо работает на примерах, не участвовавших в обучении (на примерах из тестовой выборки). Данная проблема решается путем снижения сложности модели до оптимального значения с точки зрения точности модели на обучающей и тестовой выборках данных, которым в нашем случае является уравнение полиномиальной регрессии второй степени вида

$$y = 2,264 \times 10^7 - 2,31 \times 10^4 x + 5,898x^2. \quad (8)$$



**Рис. 5.** Демонстрация явления переобучения модели на примере прогнозирования численности населения России старше трудоспособного возраста на период 2023–2027 гг. с использованием уравнения полиномиальной регрессии четвертой степени, тыс. человек

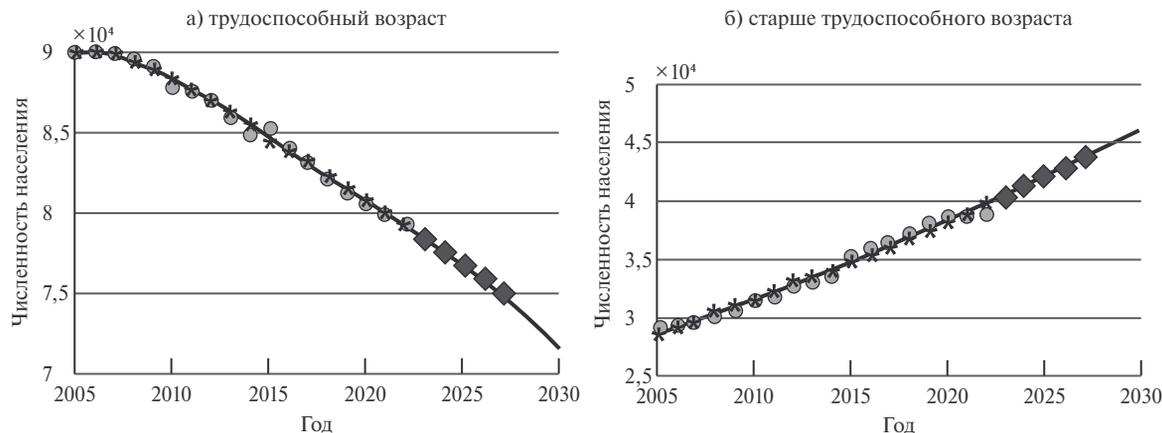


Рис. 6. Результаты прогнозирования численности населения России на период 2023–2027 гг., тыс. человек

На рис. 6 показаны результаты прогнозирования численности населения России по формулам (7) и (8) на период 2023–2027 гг.

#### ПРОГНОЗ КОЭФФИЦИЕНТА ДЕМОГРАФИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Представленные на рис. 6 результаты прогнозирования численности населения России позволяют осуществить прогноз коэффициента демографической нагрузки (КДН), определяемого отношением численности населения старше трудоспособного возраста (пенсионеров) к численности населения трудоспособного возраста и выступающего одним из основных показателей демографического статуса страны, влияющего на пенсионное обеспечение ее граждан, на здравоохранение, производительность труда и другие факторы социально-экономического развития государства. КДН получены на основе прогнозируемой численности населения России трудоспособного возраста с помощью уравнения полиномиальной регрессии четвертой степени и прогнозируемой численности населения старше трудоспособного возраста с помощью уравнения Ферхюльста, которые имеют минимальные погрешности (см. табл. 2 и 3). Результаты расчетов КДН на основе прогнозирования числа работающих граждан и числа пенсионеров на период 2023–2031 гг. (девять лет) и КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарной системы пенсионного обеспечения, поскольку они накопят на своих индивидуальных (персонифицированных) пенсионных счетах сумму, достаточную для пенсионного обеспечения на период дожития, показаны в табл. 4.

При прогнозировании численности населения число лет прогноза соотносится с числом лет фактических данных и составляет половину лет фактических данных. Эта закономерность отражена во многих статьях, например, прогноз численности населения Китая на 2019–2050 гг. основан на численности населения 1950–2018 гг. (Chen, Xiao, 2020). Прогноз численности населения на 2021–2030 гг. Китая основан на численности населения 1990–2020 гг. (Shi, Yin, 2021).

Поскольку обучающие данные составляют 18 лет (с 2005 по 2022 г.), прогнозы могут быть сделаны для девяти лет, т.е. на 2023–2031 гг., при этом КДН остается постоянным на уровне 0,669 для последующих лет (см. столбец 5 в табл. 5).

Число граждан трудоспособного возраста и число пенсионеров за пределами горизонта прогнозирования, т.е. начиная с 2032 г., принимаются равными значениям последнего года прогнозного периода и составляют 70 285 тыс. человек и 47 006 тыс. человек соответственно (см. столбцы 3 и 4 табл. 4). Следовательно, начиная с 2032 г. КДН равен  $47\,006 \text{ тыс. человек} / 70\,285 \text{ тыс. человек} = 0,669$ , что и указано в столбце 5 табл. 4. В столбце 6 табл. 4 указано число пенсионеров, на которых распространяется солидарная система пенсионного обеспечения. Численность пенсионеров, на которых распространяется солидарная система пенсионного обеспечения, сокращается, поскольку часть пенсионеров выходят из солидарной системы пенсионного обеспечения, а на их место поступает значительно меньшее число вышедших на пенсию. И так до тех пор, пока все действующие пенсионеры, т.е. те, которые находятся на пенсии в момент внедрения персонифицированных пенсионных счетов, не выйдут из солидарной системы пенсионного обеспечения. В ряде научных исследований, посвященных прогрессивным

**Таблица 4.** КДН России в 2023–2082 гг. с помощью уравнения полиномиальной регрессии

Год	Работающие граждане, тыс. человек	Число пенсионеров, тыс. человек	КДН	Число пенсионеров, на которых распространяется солидарная система пенсионного обеспечения, тыс. человек	КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарной системы
1	2	3	4	5	6
2023	78466	40528	0,516	40528	0,516
2024	77670	41296	0,532	40463	0,521
...	...	...	...	...	...
2040	70285	47006	0,669	7836	0,111
2041	70285	47006	0,669	5810	0,083
2042	70285	47006	0,669	3784	0,054
2043	70285	47006	0,669	3784	0,054
...	...	...	...	...	...
2081	70285	47006	0,669	3784	0,054
2082	70285	47006	0,669	3784	0,054

технологиям финансирования пенсионного обеспечения граждан России с использованием индивидуальных (персонифицированных) пенсионных счетов (Соколов, Костырин, 2021; Костырин, Дрынкин, 2023, с. 129–144), период дожития принимается равным 20 годам, а период трудовой деятельности — 40 лет, поэтому после двадцатилетнего периода, начиная с 2042 г., солидарная система пенсионного обеспечения распространяется только на вновь вышедших на пенсию пенсионеров, численность которых постоянна и составляет 3784 тыс. человек, а КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарной системы составляет 0,054 в 2042–2082 гг.

### ПЕНСИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ В РОССИИ

В Российской Федерации действуют три уровня пенсионного обеспечения: государственное пенсионное обеспечение, обязательное пенсионное страхование и негосударственное (дополнительное) пенсионное обеспечение. Состав современной пенсионной системы РФ представлен на рис. 7.



**Рис. 7.** Основные типы систем пенсионного обеспечения в России

В 2023 г. государство реорганизовало Пенсионный фонд России (ПФР) — он вошел в Социальный фонд России (СФР)<sup>2</sup>. Теперь СФР получает отчисления работодателей и выплачивает деньги пенсионерам, как показано на рис. 7. Значительная часть нынешних и будущих пенсионеров в той или иной степени не удовлетворены размером назначенных и будущих пенсий (Алексашенко, 2019; Гурвич, 2019). Как и во многих странах, в России проводится очередной этап преобразований пенсионной системы, который затрагивает в первую очередь распределительные элементы: повышение пенсионного возраста, изменение требований к минимальному страховому стажу, изменение порядка индексации пенсионных выплат (Биткина, 2020).

Для изучения факторов, влияющих на доходы и расходы пенсий в России, в данной работе строится математическая модель и осуществляется решение задачи линейного программирования для получения значений факторов, влияющих на пенсионные доходы и расходы.

### Моделирование пенсионных доходов и расходов

Общая сумма накоплений в СФР на пенсионное обеспечение граждан Российской Федерации равна сумме взносов минус расходы на пенсионное обеспечение тех граждан, которые находятся на пенсии и (или) не успели накопить себе на пенсионное обеспечение на период дожития. Для первого года накопительная часть пенсии на конец года находится по формуле

$$O_1 = (12c_0w_0 / D_1 + H_1 + \Pi_1), \quad (9)$$

где  $c_t$  — ставка пенсионных взносов в году  $t$ , доли ед. (2022 г. принят за базовый и имеет порядковый номер  $t = 1$ );  $w_t$  — среднемесячная заработная плата в году  $t$ , руб.;  $D_t = P_t / K_t$  — КДН в году  $t$ , доли ед.;  $K_t$  — число граждан трудоспособного возраста в году  $t$ , перечисляющих средства в СФР на пенсионное обеспечение, определяется по формуле (7) с учетом тех граждан, которые выходят из «тени» и начинают делать отчисления в СФР;  $P_t$  — число пенсионеров в году  $t$ , на которых распространяется солидарная система пенсионного обеспечения, определяется по формуле (6) за вычетом тех пенсионеров, которые успевают накопить на своих индивидуальных (персонифицированных) пенсионных счетах сумму, достаточную для пенсионного обеспечения на период дожития;  $H_t$  — бюджетные доходы, направляемые в году  $t$  в СФР на одного пенсионера в месяц, руб.;  $\Pi_t$  — размер средней страховой пенсии в месяц в году  $t$ , руб.;  $\Pi_1 = r_1w_1$ ;  $\Pi_2 = r_1w_1(1+s)$ ; и т.д., где  $r_t$  — коэффициент замещения выпадающих доходов при выходе работника на пенсию — доля годовой суммы, которую работник получает от пенсионной схемы после выхода на пенсию и которая эквивалентна его или ее зарплатному доходу за год до выхода на пенсию, доли ед.;  $s$  — темпы роста заработной платы, доли ед.

Накопленная часть пенсии с учетом капитализируемых процентов по вкладу на конец года для первого года составляет:

$$O_1^* = O_1(1+R), \quad (10)$$

Для второго года —  $O_2 = (12c_0w_0(1+s) / D_2 + H_2 - \Pi_2) + O_1$ . Накопленная часть пенсии с учетом капитализируемых процентов по пенсионному вкладу на конец года для второго года

$$O_2^* = O_2(1+R) + (O_1^* - O_1)(1+R), \quad (11)$$

где  $R$  — средняя ставка инвестиционного дохода по операциям с пенсионными средствами граждан (норма доходности), доли ед.

Аналогично — для всех остальных периодов накопления.

Таким образом, накопительная часть пенсии на конец года  $t$  составляет

$$O_t = \sum_{i=2}^t (12c_iw_i / D_i + H_i - \Pi_i), \quad (12)$$

а накопленная часть пенсии с учетом капитализируемых процентов по вкладу на конец года —

$$O_t^* = O_t(1+R) + (O_{t-1}^* - O_{t-1})(1+R). \quad (13)$$

Рассуждая аналогичным образом (формулы (9)–(12)), получаем, что общая сумма пенсионных накоплений равна:

1) от 1 до  $n$  лет —

$$J_1(n) = O_n^*, \quad (14)$$

<sup>2</sup> <https://sfr.gov.ru>

где  $J_1(n)$  — накопительная часть пенсии с учетом капитализируемых процентов по вкладу на конец года  $n$ , руб.;  $n$  — период накопления средств, достаточных для пенсионного обеспечения в размере 80% заработной платы на период дожития  $m$  ( $n \geq m$ );

2) от  $n$  до  $T$  лет —

$$J_2 = J_1(1+R)^{T-n}, \quad (15)$$

где  $J_2$  — накопительная часть пенсии с учетом капитализируемых процентов по вкладу на момент выхода на пенсию, руб.;  $T$  — период трудовой деятельности в годах.

Размер общей суммы пенсионных накоплений на период дожития составляет:

$$L = \sum_{t=1}^m (12 r_t w_t), \quad (16)$$

где  $L$  — общая сумма пенсионных накоплений на период дожития, руб.;  $m$  — период дожития, лет.

В итоге, объединив уравнения (14)–(16), мы получили целевую функцию экономико-математической модели для расчета пенсионных доходов и расходов граждан:

$$N = \min n, \text{ при котором } J_2(n) \geq L(m), \quad (17)$$

где

$$J_2(n) = J_1(n)(1+R)^{T-n}, \quad (18)$$

$$L(m) = \sum_{t=T}^{T+m} 12 r_t w_t. \quad (19)$$

### Практическая реализация модели (17)–(19). Настройки параметров модели и допущения

#### Средняя заработная плата $w_0$ и темпы ее роста $s$

Большинство стран мира постепенно отходят от практики ежегодной индексации пенсий по уровню инфляции, переходя к индексации в соответствии с изменением среднего уровня заработной платы в экономике (Honerlein, 2019). Поэтому в данной работе мы выбираем одним из факторов, влияющих на пенсионные доходы и расходы, среднюю заработную плату. По данным Федеральной службы государственной статистики (Росстат)<sup>3</sup> средняя заработная плата в 2023 г. в России составляла 65 094 руб. Средняя заработная плата работающих граждан значительно выросла за период с 2012 по 2023 г., но темпы ее роста сильно варьируют от года к году (рис. 8), при этом темпы ее роста после 2016 г. относительно стабильны, оставаясь на уровне около 8,47%. Таким образом, годовой темп роста средней заработной платы после 2016 г. в России оценивается в 8,47%.

Учитывая, что модель, используемая в данной работе, является инструментальным подходом, мы предварительно установили темп роста заработной платы на уровне 1,5% для обеспечения устойчивости моделирования.

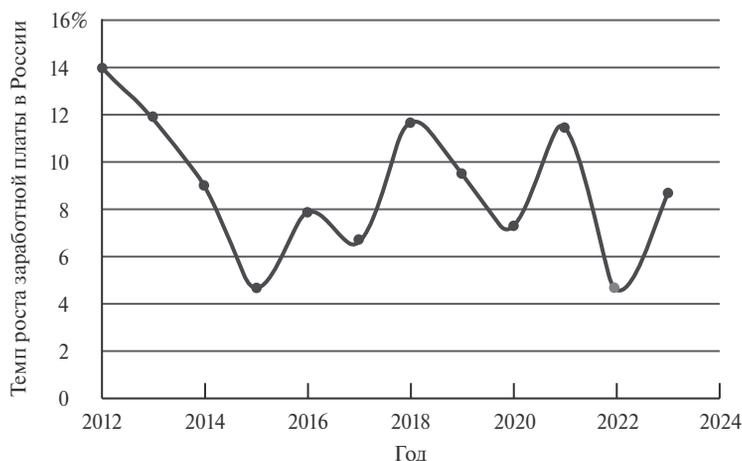


Рис. 8. Диаграмма разброса темпов роста средней заработной платы работников в России, 2012–2023 гг.

<sup>3</sup> <https://rosstat.gov.ru>

*Ставка пенсионных взносов  $s_0$* 

Ставка пенсионных взносов, которые осуществляет работодатель из фонда оплаты труда работающих на предприятии граждан, является центральным параметром системы пенсионного страхования и напрямую влияет на пенсионный доход и, следовательно, на пенсионный разрыв: высокая ставка пенсионных взносов может привести к повышению стоимости рабочей силы, что, в свою очередь, может вытеснить средства на технологические инновации и затормозить технологический прогресс на предприятиях (Zhao, Lu, 2018). В то же время компании в собственных интересах будут перекладывать финансовое бремя, обусловленное высокими ставками взносов, на своих сотрудников (Ma, Meng, Gan, 2014). Таким образом, повышение ставок пенсионных взносов окажет негативное влияние на технологические инновации предприятий, конкурентоспособность продукции и способность обеспечивать занятость (Song, Feng, Yang, 2021). А поскольку взносы являются основным источником дохода пенсионных фондов, то снижение доходов от взносов неизбежно усилит давление, связанное с балансированием доходов и расходов пенсионных фондов, что приведет к увеличению пенсионного разрыва (Zhao, Fan, 2020).

С целью поддержания финансового баланса в Пенсионном фонде РФ ставка пенсионного страхования была сокращена с 26% в 2011 г. до 22%, начиная с 2012 г., и остается на этом уровне и в настоящее время (Соколов, Костырин, 2021).

**Период накопления средств  $n$** , достаточных для пенсионного обеспечения в размере 80% заработной платы на период дожития  $m$  ( $n \geq m$ ). Учитывая, что модель, используемая в данной работе, является инструментальным подходом, мы предположили, что период накопления средств  $n$  составляет 20 лет, период дожития  $m$  — также 20 лет.

**Норма прибыли на инвестиции  $R$** . В данной работе сначала устанавливается инвестиционная доходность операции пенсионного фонда на уровне 2%, а затем корректируется в соответствии с реальной ситуацией результатов моделирования.

**КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарной системы.** Исходя из расчетов, показанных выше, воспользуемся данными в столбце 7 табл. 4.

**Государственный бюджет.** Солидарные пенсии остаются важным элементом пенсионной системы, во многом обеспечивающим устойчивость пенсионных систем в разных странах. В то же время, бюджет солидарной пенсионной системы все больше испытывает хронический дефицит средств и требует постоянных дополнительных трансфертов из бюджета (Питиляк и др., 2019; Фатхлисламова, 2019). Расчет доплаты из бюджета, приходящейся на одного пенсионера, показан позже.

## ПОЛУЧЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Результаты моделирования средней страховой пенсии за период трудовой деятельности с использованием экономико-математической модели (17)–(19) приведены в табл. 5–7. Согласно формулам (17)–(19) оценивается влияние следующих параметров модели: ставки пенсионных взносов  $s$ ; среднемесячной заработной платы  $w$ ; средней ставки инвестиционного дохода по операциям с пенсионными средствами граждан  $R$  (нормы доходности) и темпов роста заработной платы  $s$ , при которых обеспечивается сбалансированность пенсионных поступлений и расходов на пенсию граждан, т.е. при которых  $J_2(n) - L(m) = 0$ , что можно видеть в последней строке табл. 5–7.

В столбце 1 табл. 5–7 указан год, для которого осуществляется моделирование. Первая строка — базовый вариант моделирования, соответствующий 2023 г., т.е. моменту введения персонализированных пенсионных счетов, а последняя строка соответствует сумме лет трудоспособного периода и периода дожития, в рассматриваемых табл. 5–7 последняя строка соответствует 2082 г.

Согласно данным Федеральной службы государственной статистики среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций Российской Федерации по состоянию на 2023 г. равна  $w_1 = 65\,094$  руб., что указано в первой строке столбца 2 табл. 5. Предполагается ее ежегодное увеличение на 1,5% в год. Значит, в 2024 г. ожидаемое значение среднемесячной заработной платы составит  $w_2 = 65\,094$  руб. в месяц  $\times 1,015 = 66\,070,41$  руб. в месяц, что дано во второй строке столбца 2 табл. 5, и так далее по всем вариантам моделирования.

В столбце 3 табл. 5 представлены бюджетные доходы, направляемые в СФР на одного пенсионера, в месяц. Для расчета их размера использованы открытые данные СФР (Социальный фонд России, 2024). Основные показатели на официальном интернет-ресурсе СФР представлены

**Таблица 5.** Результаты моделирования средней страховой пенсии за период трудовой деятельности в России. Выход на пенсию в 2063 г. (норма доходности — 1,408%)

Год	Средняя заработная плата, руб.	Бюджетные доходы на 1 пенсионера в месяц, руб.	Средняя страховая пенсия в месяц, руб.	КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарной системы	Накопительная часть пенсии на конец года, руб.	Накопленная часть пенсии с учетом капитализации на конец года, руб.
1	2	3	4	5	6	7
2023	65094,00	11908,75	19003,33	0,516	247582,83	251068,44
2024	66070,41	11908,75	21161,34	0,521	471369,76	481540,65
...	...	...	...	...	...	...
2041	85100,03	11908,75	34040,01	0,083	12037996,64	13085945,58
2042	86376,53	11908,75	34550,61	0,054	16002401,48	17290394,94
2043	87672,18	...	35068,87	0,054	16002401,48	17533818,93
...	...	...	...	...	...	...
2061	114617,40	...	45846,96	0,054	16002401,48	22550978,55
2062	116336,66	...	46534,67	0,054	16002401,48	22868464,03
2063	118081,71	...	94465,37	0,054	21734879,57	22040875,55
2064	119852,94	...	95882,35	0,054	20890287,32	21184392,65
2065	121650,73	...	97320,59	0,054	20016545,60	20298349,90
2066	123475,50	...	98780,40	0,054	19112985,14	19382068,60
...	...	...	...	...	...	...
2079	149843,99	...	119875,19	0,054	4323354,11	4384220,75
2080	152091,65	...	121673,32	0,054	2924140,92	2965308,64
2081	154373,02	...	123498,42	0,054	1483327,61	1504210,74
2082	156688,62	...	125350,90	0,054	0,00	0,00

**Таблица 6.** Результаты моделирования средней страховой пенсии за период трудовой деятельности. Выход на пенсию в 2063 г. (минимальная заработная плата — 22 949,39 руб.)

Год	Средняя заработная плата, руб.	Бюджетные доходы на 1 пенсионера в месяц, руб.	Средняя страховая пенсия в месяц, руб.	КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарной системы	Накопительная часть пенсии на конец года, руб.	Накопленная часть пенсии с учетом капитализации на конец года, руб.
1	2	3	4	5	6	7
2023	22949,39	11908,75	19003,33	0,516	32167,24	32810,58
2024	23293,63	11908,75	19288,38	0,521	61654,31	63543,61
...	...	...	...	...	...	...
2041	30002,67	11908,75	24843,83	0,083	3358286,04	3710595,76
2042	30452,71	11908,75	25216,49	0,054	4692065,32	5145262,54
2043	30909,50	...	25594,73	0,054	4692065,32	5248167,79
...	...	...	...	...	...	...
2061	40409,25	...	33461,04	0,054	4692065,32	7495675,95
2062	41015,38	...	33962,95	0,054	4692065,32	7645589,47
2063	41630,61	...	34472,39	0,054	7231920,73	7376559,14
2064	42255,07	...	34989,48	0,054	6970910,44	7110328,64
2065	42888,90	...	35514,32	0,054	6698595,20	6832567,11
2066	43532,23	...	36047,04	0,054	6414657,67	6542950,82
...	...	...	...	...	...	...

## Окончание таблицы 6

Год	Средняя заработная плата, руб.	Бюджетные доходы на 1 пенсионера в месяц, руб.	Средняя страховая пенсия в месяц, руб.	КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарной системы	Накопительная часть пенсии на конец года, руб.	Накопленная часть пенсии с учетом капитализации на конец года, руб.
1	2	3	4	5	6	7
2079	52828,65		43744,97	0,054	1506597,43	1536729,38
2080	53621,08		44401,15	0,054	1021967,03	1042406,37
2081	54425,39		45067,16	0,054	519922,59	530321,04
2082	55241,78		45743,17	0,054	0,00	0,00

**Таблица 7.** Результаты моделирования средней страховой пенсии за период трудовой деятельности. Выход на пенсию в 2063 г. (ставка взноса — 18,813%)

Год	Средняя заработная плата, руб.	Бюджетные доходы на 1 пенсионера, в месяц, руб.	Средняя страховая пенсия в месяц, руб.	КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарных систем	Накопительная часть пенсии на конец года, руб.	Накопленная часть пенсии с учетом капитализации на конец года, руб.
1	2	3	4	5	6	7
2023	65094,00	11908,75	19003,33	0,516	199388,64	203376,42
2024	66070,41	11908,75	21161,34	0,521	374677,18	386238,25
2041	85100,03	11908,75	34040,01	0,083	9731616,34	10930910,81
...	...	...	...	...	...	...
2042	86376,53	11908,75	34550,61	0,054	13082420,97	14567349,75
2043	87672,18		35068,87	0,054	13082420,97	14858696,74
...	...	...	...	...	...	...
2061	114617,40		45846,96	0,054	13082420,97	21221877,87
2062	116336,66		46534,67	0,054	13082420,97	21646315,42
2063	118081,71		94465,37	0,054	20512730,97	20922985,59
2064	119852,94		95882,35	0,054	19772397,36	20167845,31
2065	121650,73		97320,59	0,054	18999998,26	19379998,23
2066	123475,50		98780,40	0,054	18194633,47	18558526,14
...	...	...	...	...	...	...
2079	149843,99		119875,19	0,054	4273336,08	4358802,81
2080	152091,65		121673,32	0,054	2898722,98	2956697,44
2081	154373,02		123498,42	0,054	1474716,41	1504210,74
2082	156688,62		125350,90	0,054	0,00	0,00

по состоянию на 2022 г. Так, поступление страховых взносов на обязательное пенсионное страхование в 2022 г. составило 6 189 млрд руб., а расходы на выплату пенсий равны 9 598,9 млрд руб. Недостающие средства компенсируются из федерального бюджета за счет бюджетных доходов, размер которых составил 9 598,9 млрд руб. — 6 189 млрд руб. = 3 409,9 млрд руб. Таким образом, доплаты из бюджета, приходящиеся на одного пенсионера в месяц, равны 3 409,9 млрд руб.: 36 629 000 человек: 12 (число месяцев в году) = 7 757,74 руб., что и указано в столбце 3 табл. 5–7.

Согласно открытым данным СФР средний размер страховой пенсии по старости равен 19003 руб., что и указано в первой строке столбца 4 табл. 5–7. При внедрении прорывной технологии пенсионного обеспечения граждан России на основе индивидуальных (персонифицированных)

пенсионных счетов моделируется равномерное ежегодное увеличение средней пенсии в течение пяти лет до размера, составляющего 40% средней заработной платы в соответствующем году (параметр  $r_t$  в модели (9)–(19)), так как за этот период ожидается выход граждан трудоспособного возраста из «тени». Через пять лет, начиная с 2028 г., средняя страховая пенсия в месяц составляет 40% средней заработной платы в соответствующем году. Следует обратить внимание на то, что в 2031 г. средняя страховая пенсия в месяц с учетом соотношения числа работающих и пенсионеров, на которых распространяется солидарная система, составляет уже 60% средней заработной платы. Поэтому, начиная с 2031 г., средняя страховая пенсия для пенсионеров, которые участвуют в солидарной системе пенсионного обеспечения, станет равной 60% средней заработной платы в соответствующем году, а те средства, которые превышают эту величину, поступают в накопительную часть пенсии работающих граждан, тем самым значительно ее увеличивая. Начиная с пенсионного возраста, средняя пенсия равна 80% средней заработной платы в соответствующем году.

КДН с учетом выхода пенсионеров из солидарной системы (столбец 5 табл. 5–7) взят из последнего столбца табл. 4.

В столбце 6 табл. 5–7 представлена накопительная часть пенсии на одного работающего на конец года нарастающим итогом, равная разности между средствами, перечисляемыми в СФР на пенсионное обеспечение от одного работающего, с учетом бюджетных доходов на одного пенсионера и средней страховой пенсией, а в столбце 7 табл. 5–7 дана накопленная часть пенсии, приходящаяся на одного работающего, с учетом капитализируемых процентов по вкладу на конец года, определяемая по формуле (13).

Зависимость между темпом роста пенсий и темпом роста заработной платы представлена на рис. 9. График показывает, что с увеличением темпов роста заработной платы темпы роста пенсий также возрастают, и наоборот. Выше (см. рис. 8) было отмечено, что годовой темп роста средней заработной платы после 2016 г. в России оценивается в 8,47%. Такому значению соответствуют темпы роста пенсий, равные 6,167% (рис. 9). Также отметим, что при значениях темпов роста заработной платы ниже 5,2% пенсия растет быстрее, а свыше 5,2% — пенсия растет более медленными темпами.

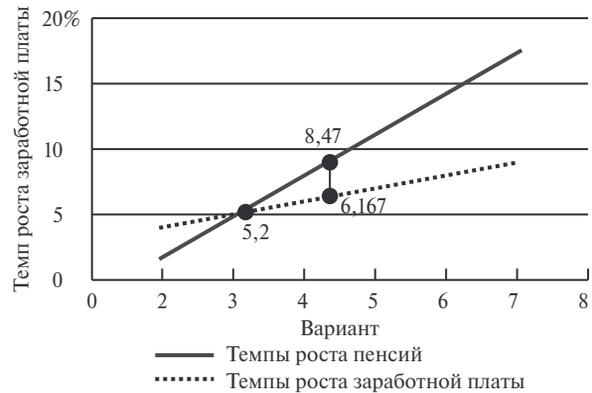


Рис. 9. Зависимости между темпами роста заработной платы и темпами роста пенсий в России

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты практической реализации экономико-математической модели (17)–(19) представлены в табл. 8.

**Таблица 8.** Результаты практической реализации экономико-математической модели (17)–(19), при которых обеспечивается сбалансированность пенсионных поступлений и расходов на пенсию граждан

Показатель	Обозначение показателя	Исходное значение показателя	Минимальное значение показателя, при котором $J_2(n) - L(m) = 0$
Норма доходности, %	$R$	2	1,408
Среднемесячная заработная плата, руб.	$w$	65 094	22 949,39
Ставка взносов в СФР на пенсионное обеспечение, %	$c$	22	18,813

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прогнозирование численности населения России трудоспособного возраста с помощью уравнения полиномиальной регрессии четвертой степени характеризуется средней погрешностью 0,227%, а прогнозирование численности населения старше трудоспособного возраста с помощью уравнения Ферхюльста имеет среднюю погрешность 1,084%. Поэтому данные модели используются для прогнозирования численности соответствующих категорий граждан на период с 2023 по 2031 г. (девять лет) и расчета на основе полученных значений КДН.

Разработана экономико-математическая модель (17)–(19) для расчета пенсионных доходов и расходов граждан при внедрении индивидуальных (персонифицированных) пенсионных счетов граждан, учитывающая прогнозные значения КДН, и осуществлен стресс-анализ модели на основе оценки влияния следующих параметров модели: ставки пенсионных взносов  $c_j$ ; среднемесячной заработной платы  $w_j$ ; средней ставки инвестиционного дохода по операциям с пенсионными средствами граждан  $R$  (нормы доходности) и темпов роста заработной платы  $s$ , при которых обеспечивается сбалансированность пенсионных поступлений и расходов на пенсию граждан, т.е. при которых достигается равенство  $J_2(n) - L(m) = 0$ .

Так, по результатам моделирования, представленным в табл. 8, минимальное значение нормы доходности, при котором обеспечивается сбалансированность пенсионных поступлений и расходов на пенсию граждан, равно 1,408%. Минимальная среднемесячная заработная плата составляет 22 949,39 руб.; а ставка взносов в СФР на пенсионное обеспечение равна 18,813%.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Алексашенко С.В.** (2019). Русское экономическое чудо: что пошло не так? М.: АСТ. 320 с. [Aleksashenko S.V. (2019). *Russian economic miracle: What went wrong?* Moscow: AST. 320 p. (in Russian).]
- Биткина И.К.** (2020). К вопросу об эффективности накопительных элементов пенсионной системы: международный опыт // *Финансы: теория и практика*. № 5. С. 24–40. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-5-24-40 [Bitkina I.K. (2020). Efficiency of the funded elements of the pension system: International practices. *Finance: Theory and Practice*, 5, 24–40 (in Russian).]
- Головкина А.Г., Козыниченко В.А., Клименко И.С.** (2022). Метод последовательных приближений для построения модели динамической полиномиальной регрессии // *Вестник Санкт-Петербургского университета*. Т. 18. Вып. 4. С. 487–500. [Golovkina A.G., Kozychenko V.A., Klimenko I.S. (2022). Method of successive approximations for the dynamic polynomial regression model building. *Saint-Petersburg University Bulletin*, 4, 18, 487–500 (in Russian).]
- Гурвич Е.Т.** (2019). Развилки пенсионной реформы: российский и международный опыт // *Вопросы экономики*. № 9. С. 5–39. [Gurvich E.T. (2019). Pension reform developments: Russian and international experience. *Voprosy Ekonomiki*, 9, 5–39 (in Russian).]
- Костырин Е.В., Дрынкин С.Г.** (2023). Экономический эффект от внедрения персонифицированных пенсионных счетов в систему пенсионного обеспечения граждан России // *Экономика и управление: проблемы, решения*. Т. 3. № 9. С. 129–144. [Kostyrin E.V., Drynkin S.G. (2023). Economic effect of the introduction of personalized pension accounts into the pension system of Russian citizens. *Economics and Management: Problems, Solutions*, 3, 9, 129–144 (in Russian).]
- Питиляк Д.А., Драненко Л.П., Базиль Т.В., Черняева М.А.** (2019). Оценка и применение незадействованных резервов стабилизации пенсионной системы // *Экономика. Налоги. Право*. № 12 (3). С. 103–115. [Pitilyak D.A., Dranenko L.P., Bazil T.V., Chernyaeva M.A. (2019). Assessment and utilization of uncommitted reserves of the pension system stabilization. *Economics, Taxes & Law*, 12 (3), 103–115 (in Russian).]
- Соколов Е.В., Костырин Е.В.** (2021). Экономический эффект от использования персонифицированных пенсионных счетов вместо существующей системы пенсионного обеспечения граждан России // *Экономика и управление: проблемы, решения*. Т. 1. № 3. С. 78–85. [Sokolov E.V., Kostyrin E.V. (2021). Economic effect from the use of personalized pension accounts instead of the existing system of pension provision for Russian citizens. *Economics and Management: Problems, Solutions*, 1, 3, 78–85 (in Russian).]
- Фатхлисламова Г.Ф.** (2019). Сравнительный анализ развития накопительной компоненты пенсионной системы и негосударственного пенсионного страхования России // *Экономическое развитие России*. № 26. С. 65–75. [Fatkhislamova G.F. (2019). Comparative analysis of the development of the accumulative component of the pension system and non-governmental pension insurance of Russia. *Economic Development of Russia*, 26, 65–75 (in Russian).]

- Bloom D.E., Canning D., Moore M.** (2014). Optimal retirement with increasing life expectancy. *Scandinavian Journal of Economics*, 116 (3), 838–858. DOI: 10.2139/ssrn.1857565
- Borgschulte M., Heeppung C.** (2018). Minimum wages and retirement. *Discussion Paper Series*, 11728, 18–20.
- Cai D.H., Zhu C.Y., Han W.J.** (2017). Life cycle model with optimal working years and leisure time. *Journal of Wuhan University*, 63 (6), 533–537 (in Chinese). [蔡东汉, 朱长艳, 韩文晶 (2017). 具有最优工作年限与闲暇的生命周期模型. *武汉大学学报理学版*, 63(6), 533–537.]
- Chen X., Xiao L.** (2020). Improving logistic models and population forecasts in China. *Journal of Chengdu University of Information Engineering*, 35 (2), 239–243 (in Chinese). [陈霞, 肖岚 (2020). Logistic 模型的改进与中国人口预测. *成都信息工程大学学报*, 35 (2), 239–243.]
- Holzmann R., Palmer E.** (2006). Pension reform: Issues and prospects for non–financial defined contribution (NDC) schemes. *The World Bank*, 601–660.
- Honerlein E.M.** (2019). Pension indexation for retirees revisited — normative patterns and legal standards. *Global Social Policy*, 19 (8), 246–265. DOI: 10.1177/1468018119842028
- Hong S., Jin F., Yu Ya.W.** (2021). The effect of reducing the social security contribution rate on corporate social security contributions and labor force hiring. *Economic Studies*, 01, 90–104 (in Chinese). [宋弘, 封进, 杨婉璇 (2021). 社保缴费率下降对企业社保缴费与劳动力雇佣的影响, *经济研究*, 第1期, 90–104.]
- Ma S., Meng X., Gan L.** (2014). Analysis of the impact of contributions of pension insurance companies on wages and employment of workers. *Economics*, 03, 969–1000 (in Chinese). [马双, 孟宪芮, 甘犁 (2014). 养老保险企业缴费对员工工资, 就业的影响分析. *经济学*, 第3期, 969–1000.]
- Malthus T.R.** (1978). *Population: First essay*. Ann-Arbor: University of Michigan Press.
- Sánchez-Romero M., Prskawetz A.** (2016). Education, lifetime labor supply and improvement of life expectancy. *Journal of Economic Dynamics and Management*, 73, 118–141.
- Shi C., Yin X.** (2021). Study of population size based on Leslie and logistic models. *Journal of Liaoning Institute of Science and Technology*, 23 (6), 89–91 (in Chinese). [史纯阳, 尹鑫鑫 (2021). 基于leslie和logistic模型的人口数量研究. *辽宁科技学院学报*, 23 (6), 89–91.]
- Verhulst P.F.** (1975). *Mathematical investigations on the law of increasing population growth*. Brussels: New Memoirs of the Royal Academy of Sciences and Fiction Brussels. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02309004>. First published in 1838 in *Correspondence in Mathematical Physics*, 10, 113–121. Transl. from French.
- Xinyan D., Jianwei G., Shuqing L.** (2022). The impact of deferred retirement on workers' utility maximization — an analysis based on the utility function “S”. *Population and Economy*, 1, 106–120 (in Chinese). [段欣言, 高建伟, 李淑清 (2022). 延迟退休对职工效用最大化的影响 — 基于“S”型效用函数的分析. *人口与经济*, 第1期, 106–120 (in Chinese).]
- Zhao J., Lu Z.** (2018). Does the share of pension insurance contributions affect the productivity of enterprises. *Economic Studies*, 10, 97–112 (in Chinese). [赵健宇, 陆正飞 (2018). 养老保险缴费比例会影响企业生产效率吗? *经济研究*, 第10期, 97–112.]
- Zhou J., Qi X., Jiao J.** (2008). *MATLAB from entry to mastery*. Beijing: People's Post and Telecommunication Press. 467 p. (in Chinese). [周建兴, 岂兴明, 矫津毅 (2008). MATLAB从入门到精通. 北京人民邮电出版社, 467.]
- Zhao R., Fan Z.** (2020). Pension coordination reform, tax incentives and corporate contribution rates. *China Industrial Economics*, 9, 29–43 (in Chinese). [赵仁杰, 范子英 (2020). 养老金统筹改革, 征管激励与企业缴费率. *中国工业经济*, 第9期, 29–43.]

## Modeling of pension income and expenditures based on the Verhulst equation and polynomial regression with demographic projections

© 2024 S. Suo, E.V. Kostyrin

**S. Suo,**

*Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Russia; e-mail: sisuo1997@gmail.com*

**E.V. Kostyrin,**

*Bauman Moscow State Technical University (National Research University) Moscow, Russia; e-mail: kostyrinev@bmsu.ru*

Received 01.02.2023

**Abstract.** To calculate the demographic load factor in this work, the forecasting of the working-age population of Russia was carried using the polynomial regression equation of the fourth degree with an accuracy of 0.227% and forecasting the number of people older than working age using the Verhulst equation (prediction accuracy of 1.084%) for the period from 2023 to 2031 (9 years). An economic and mathematical model was developed for calculating pension income and expenses for the implementation of individual (personalized) pension accounts of citizens and a stress analysis of the model was carried out based on an assessment of the impact of the pension contribution rate, average monthly salary, average investment income rate for transactions with pension funds of citizens (rate of return) and growth rates salaries, ensuring a balance between pension income and pension expenses of citizens. The practical implementation of the developed economic and mathematical model shows that the minimum value of the rate of return, ensuring balance between pension income and pension expenses of citizens, is 1.408%. The minimum average monthly salary is 22,949.39 rubles; the contribution rate to the Pension fund is estimated at 18.813%.

**Keywords:** Verhulst equation, polynomial regression, population size, demographic load factor, pension contribution rate, salary, pension, personalized retirement account, rate of return.

**JEL Classification:** C53, C63, J11, J26.

**UDC:** 336.233.2, 369.542.2, 314.93.

For reference: **Suo S., Kostyrin E.V.** (2024). Modeling of pension income and expenditures based on the Verhulst equation and polynomial regression with demographic projections. *Economics and Mathematical Methods*, 60, 2, 50–66. DOI: 10.31857/S0424738824020054 (in Russian).