ISSN 0374-0641

Том 61, Номер 1

Январь 2025

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

НАУКА

1727

СОДЕРЖАНИЕ

Том 61, номер 1, 2025

ЛЮДИ НАУКИ

К восьмидесятипятилетию Николая Алексеевича Изобова 3

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Модельная задача в полосе для гиперболического дифференциально-разностного уравнения
Зайцева Н.В. 5

Неустойчивость и стабилизация решений стохастической модели динамики вязкоупругой жидкости
Китаева О.Г. 13

Существование решений краевой задачи для уравнения диффузии с кусочно-постоянными аргументами
Муминов М.Э., Раджабов Т.А. 22

О движении фронта в задаче реакция–диффузия–адвекция с KPZ-нелинейностью
Орлов А.О. 35

Задача Дирихле для двумерного волнового уравнения в цилиндрической области
Сабитов К.Б. 50

Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения колебаний полого стержня
Умаров Х.Г. 68

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

О разрешимости одной системы многомерных интегральных уравнений с вогнутыми нелинейностями
Хачатрян Х.А., Петросян А.С. 84

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивое решение задач слежения и динамической реконструкции при измерении фазовых координат в дискретные моменты времени
Максимов В.И. 99

О задаче преследования группы скоординированных убегающих в игре с дробными производными
Петров Н.Н., Мачтакова А.И. 116

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Формула Басса–Гура для линейной системы с динамической обратной связью по выходу
Перепелкин Е.А. 133

Оптимальные траектории в α-плоскости Грушина
Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф. 139

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 3–4

ЛЮДИ НАУКИ

К ВОСЬМИДЕСЯТИПЯТИЛЕТИЮ НИКОЛАЯ АЛЕКСЕЕВИЧА ИЗОБОВА

23 января 2025 г. исполнилось 85 лет выдающемуся учёному, всемирно известному специалисту в области обыкновенных дифференциальных уравнений, академику Национальной академии наук Республики Беларусь, профессору, доктору физико-математических наук, члену редакционной коллегии журнала “Дифференциальные уравнения”, крупнейшему организатору науки и образования Николаю Алексеевичу Изобову.

Николай Алексеевич родился в деревне Красыни Лиозненского района Витебской области. В 1958 г. окончил среднюю школу с отличием, а в 1965 г. — математический факультет Белорусского государственного университета со специализацией по дифференциальным уравнениям, которым и посвятил всю дальнейшую научную деятельность. Н.А. Изобов в 1966 г. поступил в аспирантуру и уже в 1967 г. блестяще защитил кандидатскую диссертацию под руководством проф. Ю.С. Богданова. В 1979 г. в Ленинградском университете защитил докторскую диссертацию, автореферат которой (как одной из лучших диссертаций) опубликован в журнале “Математические заметки”. В 1980 г. Николай Алексеевич был избран членом-корреспондентом Академии наук БССР, а в 1994 г. — действительным членом Национальной академии наук Беларуси.

С ноября 1980 г. Н.А. Изобов работает в Институте математики НАН Беларуси последовательно в должностях: старшего научного сотрудника (1980–1986 гг.), заведующего лабораторией теории устойчивости (1986–1993 гг.), заведующего отделом дифференциальных уравнений (1993–2010 гг.), главным научным сотрудником (с 2010 г. и по настоящее время). Кроме того, в 1996–1999 гг. он заведовал кафедрой высшей математики факультета прикладной математики Белорусского государственного университета. С 1994 г. в течение 10 лет возглавлял Экспертный совет по математике ВАК Республики Беларусь.

В настоящее время Николай Алексеевич является членом редколлегий научных журналов “Дифференциальные уравнения” (в 1969–1990 гг. был заместителем главного редактора этого журнала), “Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics”, “Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук”, “Труды Института математики”.

Основными направлениями научных исследований Николая Алексеевича являются: теория характеристических показателей Ляпунова, теория устойчивости по линейному приближению, линейные системы Коппеля–Конти, уравнения Эмдена–Фаулера и линейные системы Пфаффа. Им введены понятия экспоненциальных показателей и сигма-показателей линейной системы, которые в настоящее время принято называть показателями Изобова.

Н.А. Изобовым опубликовано около 250 научных работ, в том числе 3 монографии, одна из которых издана в Кембридже. Под его руководством подготовлено и защищено более 20 кандидатских и докторских диссертаций.

Николай Алексеевич награждён орденом Франциска Скорины (2000 г.), Почётной грамотой Совета Министров Республики Беларусь (2000 г.), нагрудным знаком отличия имени В.М. Игнатовского НАН Беларуси (2020 г.), удостоен Государственной премии Республики Беларусь за цикл работ “Исследование асимптотических свойств дифференциальных и дискретных систем” (2000 г.), стал лауреатом Премии Международной академической издательской компании “Наука/Интерпериодика” за лучшую публикацию в издаваемых ею журналах (диплом подписан Президентом РАН Ю.С. Осиповым (2009 г.)), а также получил премию НАН Беларуси за цикл работ “Современное развитие первого метода Ляпунова: теория и приложения” (2013 г.).

Желаем дорогому Николаю Алексеевичу крепкого здоровья, бодрости, долгих активных лет жизни и успехов во всех его начинаниях.

Редакционная коллегия

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 5–12

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956.32+517.929

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА В ПОЛОСЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2025 г. Н. В. Зайцева

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 01.10.2024 г., после доработки 01.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследован вопрос существования классического решения начальной задачи в полосе с неполными данными на одной её границе для гиперболического дифференциально-разностного уравнения, содержащего суперпозицию дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси. Решение задачи получено в явном виде с помощью операционной схемы Гельфанда–Шилова.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, оператор сдвига, начальная задача, операционная схема, преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S0374064125010011, EDN: IATTRM

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Интерес к исследованию функционально-дифференциальных и, в частности, дифференциально-разностных уравнений и задач для них обусловлен двумя причинами. Во-первых, для таких обобщений дифференциальных уравнений оказываются неприменимыми некоторые методы, “хорошо работающие” для классических уравнений, а также возникают качественно новые эффекты в решениях, не имеющие места в классических случаях. Во-вторых, такие уравнения встречаются в разнообразных приложениях (механика деформируемого твёрдого тела, процессы вихреобразования и формирования сложных когерентных пятен, моделирование колебаний кристаллической решетки, нелинейная оптика, нейронные сети и др.), включая те, которые невозможно описать классическими моделями математической физики. Существенные результаты в исследовании задач для функционально-дифференциальных уравнений различных классов были получены А.Л. Скубачевским [1, 2], В.В. Власовым [3, 4], А.Б. Муравником [5], А.В. Разгулиным [6], Л.Е. Россовским [7], В.Ж. Сакбаевым [8] и другими авторами.

Будем называть согласно [1] *дифференциально-разностным* уравнение, содержащее как дифференциальные операторы, так и операторы сдвига.

К настоящему времени подробно изучены задачи для эллиптических (как в ограниченных, так и в неограниченных областях) и параболических дифференциально-разностных уравнений. В значительно меньшей степени исследованы гиперболические дифференциально-разностные уравнения. В работах [9, 10] впервые рассмотрены двумерные гиперболические уравнения с оператором сдвига в старшей производной, действующим по пространственной переменной. Цель настоящей статьи — построить в явном виде с помощью известной операционной схемы [11] решение модельной начальной задачи в полосе для такого уравнения.

Обозначим через $D=\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0<t<T\}$ область координатной плоскости Oxt, где $T>0$ — заданное действительное число, пусть $\overline{D}=\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t\leqslant T\}$.

Требуется найти функцию $u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x-h,t)}{\partial x^2},\quad (x,t)\in D, \tag{1}$$

где $a>0$, $h\neq 0$ — заданные действительные числа, и начальному условию

$$u(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Определение. *Классическим решением задачи* (1), (2) будем называть функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по переменным x и t в множестве $\overline{D}$; дважды непрерывно дифференцируемую по x и t в D; удовлетворяющую в каждой точке области D соотношению (1); такую, что для каждой точки $x_0\in\mathbb{R}$ предел функции $u(x_0,t)$ при $t\to+0$ существует и равен нулю.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для нахождения решения задачи (1), (2) согласно операционной схеме [11] применим к уравнению (1) и начальному условию (2) (формально) преобразование Фурье по переменной x, действующее по правилу

$$\widehat{u}(\xi,t):=F_x[u(x,t)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{i\xi x}\,dx.$$

В результате получим задачу в образах Фурье

$$\frac{d^2\widehat{u}(\xi,t)}{dt^2}+a^2\xi^2e^{ih\xi}\widehat{u}(\xi,t)=0, \tag{3}$$

$$\widehat{u}(\xi,0)=0,\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Характеристические корни уравнения, соответствующего уравнению (3), определяются по формуле

$$k_{1,2}=\pm i\,a\xi e^{ih\xi/2},$$

тогда общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\widehat{u}(\xi,t)=C_1(\xi)\cos(a\xi e^{ih\xi/2}t)+C_2(\xi)\sin(a\xi e^{ih\xi/2}t),$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ — произвольные постоянные, зависящие от параметра $\xi\in\mathbb{R}$. Подставив данную функцию в начальное условие (4), получим $C_1(\xi)=0$. Так как задача (3), (4) — задача с неполными начальными данными, положим

$$C_2(\xi)=(a\xi e^{ih\xi/2})^{-1}$$

и запишем окончательный вид её решения:

$$\widehat{u}(\xi,t)=\frac{\sin(a\xi e^{ih\xi/2}t)}{a\xi e^{ih\xi/2}},\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Применив теперь к найденной функции (формально) обратное преобразование Фурье, получим по аналогии с [12] следующие соотношения:

$$F_\xi^{-1}[\widehat{u}(\xi,t)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi,t)e^{-ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a\xi te^{ih\xi/2})}{\xi e^{ih\xi/2}}e^{-ix\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(a\xi e^{-ih\xi/2}t\right)}{\xi}e^{i(x+h/2)\xi}\,d\xi + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(a\xi e^{ih\xi/2}t\right)}{\xi}e^{-i(x+h/2)\xi}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\sin\left((at\cos\left(h\xi/2\right)+x+h/2)\xi\right)}{\xi e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}} + \frac{\sin\left((at\cos\left(h\xi/2\right)-x-h/2)\xi\right)}{\xi e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}}\right]d\xi. \qquad (5)$$

Замечание 1. Если положим в (5) $h=0$, то получим $\theta(at-|x|)/(2a)$ — *фундаментальное решение* волнового оператора $\partial^2/\partial t^2 - a^2\partial^2/\partial x^2$, где θ — функция Хевисайда.

Так как полученный несобственный интеграл в (5) расходится, введём согласно [11] *регуляризатор* $f(\xi)$ для выражения (5) — функцию, удовлетворяющую условиям:

1) $f(\xi)$ положительно определена и непрерывна на множестве $[0,+\infty)$;

2) для любого числа $\varepsilon>0$ имеют место равенства

$$\lim_{\xi\to+\infty} f(\xi)e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\xi^\varepsilon = 0, \quad \lim_{\xi\to+\infty} f(\xi)e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\xi^\varepsilon = 0; \qquad (6)$$

3) при любом значении $t\in[0,T]$ сходятся интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi, \quad \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi; \qquad (7)$$

4) при любом значении $t\in(0,T]$ сходятся интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi, \quad \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi. \qquad (8)$$

Примером такой функции, удовлетворяющей условиям 1)–4), является, например, функция $f(\xi)=\xi^\beta e^{-CT\xi}$, где $\beta\geqslant 0$ и $C>a>0$ — любые вещественные константы.

Замечание 2. Выполнение равенств (6) влечёт за собой [13, с. 102] сходимость несобственных интегралов

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi}e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi, \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi}e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi. \qquad (9)$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма. *При выполнении условий* 1)–4) *функция*

$$G(x,t) := \int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{f(\xi)\sin\big((at\cos\left(h\xi/2\right)+x+h/2)\xi\big)}{\xi e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}} + \frac{f(\xi)\sin\big((at\cos\left(h\xi/2\right)-x-h/2)\xi\big)}{\xi e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}}\right]d\xi \qquad (10)$$

удовлетворяет уравнению (1) *в классическом смысле.*

Доказательство. Подынтегральная функция в (10) непрерывна на множестве $[0,+\infty)$ как композиция непрерывных функций (в точке $\xi=0$ особенности нет в силу предельного соотношения $\sin\alpha/\alpha\to 0$ при $\alpha\to 0$).

Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} F(x,t;\xi)\,d\xi := \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi)\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)}{\xi e^{-at\xi\sin(h\xi/2)}}\,d\xi. \tag{11}$$

Так как с учётом условия 1)

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} F(x,t;\xi)\,d\xi\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi,$$

то в силу выполнения условия 2) и, как следствие, замечания 2 интеграл (11) сходится.

Проверим теперь, что функция (11) удовлетворяет уравнению (1). Для этого продифференцируем (11) формально под знаком интеграла по переменным t и x до второго порядка:

$$\int\limits_0^{+\infty} F_x(x,t;\xi)\,d\xi = \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\cos\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi; \tag{12}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} F_{xx}(x,t;\xi)\,d\xi = -\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi,$$

тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} F_{xx}(x-h,t;\xi)\,d\xi = -\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x-h/2)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi. \tag{13}$$

Далее,

$$\int\limits_0^{+\infty} F_t(x,t;\xi)\,d\xi = a\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\Big[\cos(h\xi/2)\cos\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)+$$
$$+\sin(h\xi/2)\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)\Big]e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi =$$
$$= a\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\cos\big((at\cos(h\xi/2)+x)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi; \tag{14}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} F_{tt}(x,t;\xi)\,d\xi = -a^2\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi\Big[\cos(h\xi/2)\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x)\xi\big)-$$
$$-\sin(h\xi/2)\cos\big((at\cos(h\xi/2)+x)\xi\big)\Big]e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi =$$
$$= -a^2\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x-h/2)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi. \tag{15}$$

Подставляя найденные производные (13) и (15) в соотношение (1), убеждаемся в его справедливости.

Исследуем на равномерную сходимость интеграл (12). Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} |F_x(x,t;\xi)|\,d\xi \leqslant \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi.$$

Так как интеграл в правой части неравенства сходится ввиду условия 3), а подынтегральное выражение в нём не зависит от переменной x, то в силу признака Вейерштрасса интеграл (12) сходится равномерно по переменной x на любом конечном промежутке $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$.

Аналогично из оценки

$$\int\limits_0^{+\infty} |F_{xx}(x-h,t;\xi)|\,d\xi \leqslant \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi,$$

условия 4) и независимости подынтегральной функции от x в правой части последнего неравенства вытекает равномерная сходимость интеграла (13) по переменной x на любом отрезке $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$. Это значит, что дифференцирование под знаком интеграла в (11) по переменной x до второго порядка включительно было законным.

Оценим теперь интеграл (14):

$$\int\limits_0^{+\infty} |F_t(x,t;\xi)|\,d\xi \leqslant a\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi \leqslant \begin{cases} a\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at_2\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi, & \sin(h\xi/2)\geqslant 0,\\ a\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at_1\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi, & \sin(h\xi/2)<0.\end{cases}$$

Интегралы в правой части соотношений сходятся согласно условию 3), а подынтегральные выражения в них не зависят от t, следовательно, интеграл (14) сходится равномерно на любом промежутке $[t_1,t_2]\subset[0,T]$.

Из оценки

$$\int\limits_0^{+\infty} |F_{tt}(x,t;\xi)|\,d\xi \leqslant \begin{cases} a^2\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi e^{at_2\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi, & \sin(h\xi/2)\geqslant 0,\\ a^2\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi e^{at_1\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi, & \sin(h\xi/2)<0\end{cases}$$

и условия 4) вытекает, что интеграл (15) сходится равномерно на любом отрезке $[t_1,t_2]\subset(0,T]$. Таким образом, справедливо дифференцирование (15) под знаком интеграла по переменной t до второго порядка включительно.

Аналогично можно показать, ввиду условий 1) и 2), что сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} H(x,t;\xi)\,d\xi := \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi)\sin\big((at\cos(h\xi/2)-x-h/2)\xi\big)}{\xi e^{at\xi\sin(h\xi/2)}}\,d\xi \tag{16}$$

и что функция (16) удовлетворяет уравнению (1), дифференцируя непосредственно (16) под знаком интеграла по переменным x и t до второго порядка включительно и подставляя найденные производные $H_{tt}(x,t;\xi)$ и $H_{xx}(x-h,t;\xi)$ в (1). При этом в силу условий 3) и 4) интегралы $H_x(x,t;\xi)$ и $H_{xx}(x,t;\xi)$ сходятся равномерно по переменной x на любом отрезке $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$ и интегралы $H_t(x,t;\xi)$ и $H_{tt}(x,t;\xi)$ равномерно сходятся на любом отрезке $[t_1,t_2]$ множества $[0,T]$ и $(0,T]$ соответственно.

Таким образом, показано, что функция (10) существует в каждой точке области D и удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле. Лемма доказана.

На основании леммы справедлива следующая

Теорема. *При выполнении условий* 1)–4) *функция*

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x-\tau,t)u_0(\tau)\,d\tau, \tag{17}$$

где $G(x,t)$ *определяется равенством* (10), $u_0(x)$ — *любая интегрируемая на всей числовой прямой функция, удовлетворяет уравнению* (1) *в классическом смысле и предельному соотношению*

$$\lim_{t\to+0} u(x_0,t)=0$$

для любого значения $x_0\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Функция (17) имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)\int\limits_{0}^{+\infty}\biggl[\frac{\sin\bigl((at\cos(h\xi/2)+x-\tau+h/2)\xi\bigr)}{\xi e^{-at\xi\sin(h\xi/2)}}+$$
$$+\frac{\sin\bigl((at\cos(h\xi/2)-x+\tau-h/2)\xi\bigr)}{\xi e^{at\xi\sin(h\xi/2)}}\biggr]\,d\xi\,d\tau.$$

Так как $u_0(x)\in L_1(\mathbb{R})$, то для существования в области D функции (17) достаточно показать, что $|G(x-\tau,t)|\leqslant\mathrm{const}$, что верно в силу условия 2) и замечания 2. Ввиду доказанной леммы функция (17) является классическим решением уравнения (1). Отметим также, что в силу этой же леммы функция (17) принадлежит классу $C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$ (подынтегральная функция в (17) непрерывна), интегралы $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ сходятся равномерно по переменной x на любом конечном отрезке $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$, интегралы $u_t(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$ сходятся равномерно по t на любом конечном отрезке $[t_1,t_2]$ из множеств $[0,T]$ и $(0,T]$ соответственно (интеграл $u_t(x,t)$ сходится на границе $t=0$).

Пусть $x_0\in\mathbb{R}$. В (17) сделаем замену переменной по формуле $(x_0-\tau)/t=\eta$ и получим

$$u(x_0,t)=\frac{t}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t\eta,t)u_0(x_0-t\eta)d\eta,$$

откуда при $t\to+0$ следует оценка $|u(x_0,t)|<\varepsilon$ для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$. Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skubachevskii, A.L. Elliptic Functional-Differential Equations and Applications / A.L. Skubachevskii. — Basel ; Boston ; Berlin : Birkhäuser, 1997. — 294 p.
2. Скубачевский, А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, № 5 (431). — С. 3–122.
3. Власов, В.В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В.В. Власов, Д.А. Медведев // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2008. — Т. 30. — С. 3–173.
4. Власов, В.В. Дифференциально-разностные уравнения / В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М. : МАКС Пресс, 2016. — 488 с.
5. Муравник, А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А.Б. Муравник // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2014. — Т. 52. — С. 3–143.
6. Разгулин, А.В. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием / А.В. Разгулин, Т.Е. Романенко // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2013. — Т. 53, № 11. — С. 42–60.
7. Россовский, Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции / Л.Е. Россовский // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2014. — Т. 54. — С. 3–138.
8. Акбари Фаллахи, А. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием / А. Акбари Фаллахи, А. Йаакбариех, В.Ж. Сакбаев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 352–365.
9. Зайцева, Н.В. О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н.В. Зайцева // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491, № 2. — С. 44–46.
10. Зайцева, Н.В. Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н.В. Зайцева // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 745–751.
11. Гельфанд, И.М. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов // Успехи мат. наук. — 1953. — Т. 30, № 6 (58). — С. 3–173.
12. Zaitseva, N.V. On one Cauchy problem for a hyperbolic differential-difference equation / N.V. Zaitseva // Differ. Equat. — 2023. — V. 59, № 12. — P. 1787–1792.
13. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Часть II / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — 4-е изд. — М. : Наука, 2002. — 464 с.

MODEL PROBLEM IN A STRIP FOR THE HYPERBOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATION

© 2025 / N. V. Zaitseva

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

The paper investigates the question of the existence of a classical solution to the initial value problem with incomplete initial data on the boundary of the strip for a hyperbolic differential-difference equation. The equation contains a superposition of a differential operator and a translation operator with respect to a spatial variable that varies along the entire real axis. Using the Gelfand–Shilov operational scheme, a solution to the problem was obtained in explicit form.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, translation operator, initial problem, operational scheme, Fourier transform

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Skubachevskii, A.L., *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
2. Skubachevskii, A.L., Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications, *Russ. Math. Surv.*, 2016, vol. 71, no. 5, pp. 801–906.
3. Vlasov, V.V. and Medvedev, D.A., Functional-differential equations in Sobolev spaces and related problems of spectral theory, *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 164, no. 5, pp. 659–841.
4. Vlasov, V.V. and Rautian, N.A., *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* (Spectral Analysis of Functional Differential Equations), Moscow: MAKS Press, 2016.
5. Muravnik, A.B., Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem, *J. Math. Sci.*, 2016, vol. 216, no. 3, pp. 345–496.
6. Razgulin, A.V. and Romanenko, T.E., Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 11, pp. 1626–1643.
7. Rossovskii, L.E., Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function, *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 223, no. 4, pp. 351–493.
8. Akbari Fallahi, A., Yaakbariev, A., and Sakbaev, V.Zh., Weel-posedness of a problem with initial conditions for hyperbolic differential-difference equations with shifts in the time argument, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 3, pp. 346–360.
9. Zaitseva, N.V., On global classical solutions of hyperbolic differential-difference equations, *Dokl. Math.*, 2020, vol. 101, no. 2, pp. 115–116.
10. Zaitseva, N.V., Global classical solutions of some two-dimensional hyperbolic differential-difference equations, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 734–739.
11. Gel'fand, I.M. and Shilov, G.E., Fourier transforms of rapidly growing functions and questions of uniqueness of the solution of the Cauchy problem, *Usp. Mat. Nauk*, 1953, vol. 8, no. 6 (58), pp. 3–54.
12. Zaitseva, N.V., On one Cauchy problem for a hyperbolic differential-difference equation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1787–1792.
13. Il'in, V.A. and Poznyak, E.G., *Osnovy matematicheskogo analiza* (Fundamentals of Mathematical Analysis), Moscow: Nauka, 2002.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 13–21

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

О. Г. Китаева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: kitaevaog@susu.ru

Поступила в редакцию 22.05.2024 г., после доработки 22.05.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследованы неустойчивость и устойчивость решений стохастической системы уравнений, описывающей течение вязкоупругой жидкости. При определённых значениях параметров, входящих в уравнения, показано существование неустойчивого и устойчивого инвариантных пространств. Для неустойчивого случая решена задача стабилизации на основе принципа обратной связи.

Ключевые слова: стохастическое уравнение соболевского типа, инвариантное пространство, стабилизация

DOI: 10.31857/S0374064125010021, EDN: IAPEHN

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂D класса C^∞. В $D\times\mathbb{R}$ рассмотрим следующую модель течения вязкоупругой несжимаемой жидкости:

$$(\lambda-\nabla^2)u_t=\nu\nabla^2u-\nabla p,\quad \nabla u=0; \tag{1}$$
$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial D\times\mathbb{R};\quad u(x,0)=u_0,\quad x\in D,$$

где $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),\ldots,u_n(x,t))$ и p — векторы скоростей и давления соответственно. Система (1) является линеаризацией системы

$$(\lambda-\nabla^2)u_t=\nu\nabla^2u-(u\nabla)u-\nabla p,\quad \nabla u=0,$$

полученной А.П. Осколковым [1] для описания течения вязких жидкостей, обладающих свойством упругости. Переобозначив ∇p через p, запишем систему (1) в виде

$$(\lambda-\nabla^2)u_t=\nu\nabla^2u-p,\quad \nabla(\nabla)u=0. \tag{2}$$

Здесь параметр λ характеризует упругие свойства, а ν — вязкие. В статье [2] было показано, что параметр λ может принимать отрицательные значения. В работе [3] построена физическая модель течения жидкости с отрицательной вязкостью, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\nu\in\mathbb{R}$.

Экспериментально показано, что течение растворов и расплавов полимеров обладает свойством неустойчивости (см. обзор [4] и библиографию в нём). Данная неустойчивость может оказывать существенное влияние на технологические процессы переработки материалов и качество конечной продукции. Одной из причин появления этой неустойчивости являются пульсации на входе ("входная неустойчивость"). Заметим, что раствор и расплавы полимеров являются вязкоупругими жидкостями. Мы будем исследовать неустойчивость и устойчивость течения несжимаемой вязкоупругой жидкости, описываемого системой (2) со стохастическими начальными данными. В качестве начального условия выберем случайную величину

$$\eta(0)=\eta_0, \tag{3}$$

а систему (2) будем рассматривать в виде стохастического уравнения соболевского типа

$$L\overset{\circ}{\eta}=M\eta. \tag{4}$$

Решением стохастического уравнения является стохастический процесс, который не дифференцируем ни в одной точке. Поэтому в качестве производной стохастического процесса η будем рассматривать производную Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}$ [5]. В настоящее время известно большое число работ, посвящённых изучению стохастических уравнений соболевского типа. Отметим некоторые из них. Разрешимость задачи Коши для уравнения (4) изучена в статьях [6] (в случае относительно ограниченного оператора), [7] (в случае относительно секториального оператора) и [8] (в случае относительно радиального оператора). В [9] рассмотрены стохастические линейные уравнения соболевского типа высокого порядка, в [10, 11] исследована "начально-конечная" задача для уравнения (4), в [12] — устойчивость уравнения (4). В [13–15] проведены численные эксперименты по нахождению устойчивого и неустойчивого решений стохастических неклассических уравнений, которые могут быть представлены в виде (4).

Детерминированная система (2) изучалась в различных аспектах. Исследование её разрешимости начато в [1] при условии, что параметры $\lambda,\nu\in\mathbb{R}_+$. В работе [16] вопрос о существовании решений решался с помощью метода фазового пространства при $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\nu\in\mathbb{R}_+$; было показано существование экспоненциальной дихотомии решений. В [17] исследовалась начально-конечная задача для линейной системы уравнений Осколкова.

Цель данной статьи — изучить неустойчивость и устойчивость решений стохастической системы (2) в случае, когда параметры $\lambda,\nu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, а также решить задачу стабилизации неустойчивых решений. В п. 2 приведены абстрактные результаты о существовании решений уравнения (4) и их устойчивости. В п. 3 рассмотрена система (2) в пространствах случайных K-величин, показана разрешимость стохастической системы (2). В п. 4 доказано существование устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств, решена задача стабилизации неустойчивых решений по принципу обратной связи.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Через $\mathbf{L}_2$ обозначим пространство случайных величин ξ с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией, а через $\mathbf{CL}_2$ — пространство непрерывных стохастических процессов η. Зафиксируем $\eta\in\mathbf{CL}_2$ и $t\in\mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}$ — некоторый промежуток, через $\mathcal{N}_t^\eta$ обозначим σ-алгебру, порождённую η и $\mathbf{E}_t^\eta=\mathbf{E}(\cdot|\mathcal{N}_t^\eta)$. Определим *производную Нельсона–Гликлиха* стохастического процесса η в точке $t\in\mathfrak{I}$ как предел

$$\overset{\circ}{\eta}(\,\cdot\,,\omega)=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta t\to+0}\mathbf{E}_t^\eta\left(\frac{\eta(t+\Delta t,\cdot)-\eta(t,\cdot)}{\Delta t}\right)+\lim_{\Delta t\to+0}\mathbf{E}_t^\eta\left(\frac{\eta(t,\cdot)-\eta(t-\Delta t,\cdot)}{\Delta t}\right)\right],$$

если он сходится в равномерной метрике на $\mathbb{R}$. Через $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$ обозначим пространство стохастических процессов, производные Нельсона–Гликлиха которых п.н. (почти наверно) непрерывны на $\mathfrak{I}$ до порядка l включительно.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — действительные сепарабельные гильбертовы пространства, через $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ обозначим базис в $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Выберем последовательность случайных величин $\{\xi_k\}\subset \mathbf{L}_2$ $(\{\zeta_k\}\subset \mathbf{L}_2)$, причём $\|\xi_k\|_{\mathbf{L}_2}\leqslant \mathrm{const}$ $(\|\zeta_k\|_{\mathbf{L}_2}\leqslant \mathrm{const})$. Элементами пространства $\mathbf{U_K L}_2$ $(\mathbf{F_K L}_2)$ ($\mathfrak{U}$-значных ($\mathfrak{F}$-значных)) случайных $\mathbf{K}$-величин являются векторы $\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\varphi_k$ $(\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\zeta_k\psi_k)$, где последовательность $\mathbf{K}=\{\lambda_k\}\subset\mathbb{R}_+$ такова, что $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2<+\infty$. Справедлива следующая

Лемма 1 [18]. *Оператор* $A\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *(линеен и непрерывен) тогда и только тогда, когда оператор* $A\in\mathcal{L}(\mathbf{U_K K}_2;\mathbf{F_K L}_2)$.

Пусть операторы $L\in\mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2;\mathbf{F_K L}_2)$, $M\in Cl(\mathbf{U_K L}_2;\mathbf{F_K L}_2)$. Через

$$\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}\colon (\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

обозначим L-*резольвентное множество*, а через $\sigma^L(M)=\mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$ — L-*спектр оператора* M. Если оператор M (L,σ)-ограничен, т.е. его L-спектр ограничен, то существуют проекторы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\mu L-M)^{-1}L\,d\mu\in\mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2),\quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}L(\mu L-M)^{-1}\,d\mu\in\mathcal{L}(\mathbf{F_K L}_2). \tag{5}$$

Здесь контур $\gamma\subset\mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L(M)$.

Проекторы (5) расщепляют пространства $\mathbf{U_K L}_2=\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2\oplus\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2=\mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2\oplus\mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$, где $\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ $(\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)=\ker P$ $(\operatorname{im}P)$, $\mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ $(\mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)=\ker Q$ $(\operatorname{im}Q)$. Сужение оператора L (M) на $\mathbf{U}^k_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$, $k=0,1$, обозначим как L_k (M_k). Операторы $L_k(M_k)\in\mathcal{L}(\mathbf{U}^k_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2,\mathbf{F}^k_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$, $k=0,1$; существуют операторы $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2,\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$, $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2,\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$. Рассмотрим операторы $H=L_0^{-1}M_0$ и $S=L_1^{-1}M_1$. Пусть оператор M (L,p)-ограничен и $H\equiv\mathbb{O}$, $p=0$ или $H^p\not\equiv\mathbb{O}$, $H^{p+1}\equiv\mathbb{O}$, тогда он называется (L,p)-*ограниченным* оператором.

Стохастический $\mathbf{K}$-процесс $\eta\in\mathbf{C}^1(\mathcal{J};\mathbf{U_K L}_2)$ назовём *решением уравнения* (4), если п.н. все его траектории удовлетворяют уравнению (4) при всех $t\in\mathcal{J}$. Решение $\eta=\eta(t)$ уравнения (4) назовём *решением задачи Коши* (3), (4), если равенство (3) выполняется для некоторой случайной $\mathbf{L}$-величины $\eta_0\in\mathbf{U_L L}_2$. Множество $\mathbf{P}\subset\mathbf{U_L L}_2$ назовём *стохастическим фазовым пространством* уравнения (4), если п.н. любая траектория решения $\eta=\eta(t)$ лежит в $\mathbf{P}$ поточечно, т.е. $\eta(t)\in\mathbf{P}$ при всех $t\in\mathcal{J}$, и для п.в. $\eta_0\in\mathbf{P}$ существует решение задачи (3), (4).

Теорема 1 [7]. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен*, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$. *Тогда группа*

$$U^t=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}R^L_{\mu}(M)e^{\mu t}\,d\mu$$

является голоморфной разрешающей группой уравнения (4); *подпространство* $\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ *является фазовым пространством уравнения* (4).

Определение. Инвариантное подпространство $\mathbf{I}^{s(u)}\subset\mathbf{P}$ называется *устойчивым* (*неустойчивым*) инвариантным пространством уравнения (4), если выполнено условие

$$\|\eta^{s(u)}(t)\|_{\mathbf{U_K L}_2}\leqslant Ne^{-\nu(s-t)}\|\eta^{s(u)}(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2}$$

при $s\geqslant t$ $(t\geqslant s)$, $\eta^{s(u)}=\eta^{s(u)}(t)\in\mathbf{I}^1$ и некоторых $N,\alpha\in\mathbb{R}_+$. Если фазовое пространство расщепляется на прямую сумму $\mathbf{P}=\mathbf{I}^1\oplus\mathbf{I}^2$, то решения $\eta=\eta(t)$ уравнения (4) имеют *экспоненциальную дихотомию*.

Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ и относительный спектр имеет вид

$$\sigma^L(M)=\sigma^L_s(M)\oplus\sigma^L_u(M), \tag{6}$$

где
$$\sigma_s^L(M)=\{\mu\in\sigma^L(M)\colon\ \mathrm{Re}\,\mu<0\}\neq\varnothing,\quad \sigma_u^L(M)=\{\mu\in\sigma^L(M)\colon\ \mathrm{Re}\,\mu>0\}\neq\varnothing.$$
Тогда существуют проекторы
$$P_{l(r)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{l(r)}} R_\mu^L(M)\,d\mu\in\mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2),$$
где контур $\gamma_{l(r)}$ лежит в левой (правой) полуплоскости комплексной плоскости и ограничивает часть L-спектра оператора M $\sigma_{s(u)}^L(M)$. Обозначим $\mathbf{I}^{s(u)}=\mathrm{im}\,P_{l(r)}$.

Пусть оператор M (L,p)-ограничен и выполнено условие (6), тогда $\mathbf{U_K^1 L}_2=\mathbf{I}^s\oplus\mathbf{I}^u$. Уравнение (4) будем рассматривать в виде системы
$$H\overset{\circ}{\eta}{}^0=\eta^0, \tag{7}$$
$$L_s\overset{\circ}{\eta}{}^s=M_s\eta^s, \tag{8}$$
$$L_u\overset{\circ}{\eta}{}^u=M_u\eta^u. \tag{9}$$

Замечание 1. Оператор M (L,p)-ограничен, поэтому оператор H нильпотентен степени p. Тогда решение уравнения (7) $\eta^0=0$ и стохастический процесс $\eta=\eta^s+\eta^u$ является решением уравнения (4), где η^s и η^u — решения уравнений (8) и (9) соответственно. Таким образом, вопрос об устойчивости и неустойчивости решений уравнения (4) сводится к изучению устойчивости и неустойчивости решений η^s и η^u.

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ и выполнено условие* (6), *тогда решения $\eta=\eta(t)$ уравнения* (4) *имеют экспоненциальную дихотомию.*

Доказательство. Разрешающие группы уравнений (8) и (9) имеют вид
$$U_l^t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_l}(\mu L_s-M_s)^{-1}L_s e^{\mu t}\,d\mu,\quad U_r^t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(\mu L_u-M_u)^{-1}L_u e^{\mu t}\,d\mu.$$
Обозначим $\alpha=-\max_{\mu\in\sigma_l^L(M)}\mathrm{Re}\,\mu$ и $\beta=\min_{\mu\in\sigma_r^L(M)}\mathrm{Re}\,\mu$. Тогда
$$\|U_l^t\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2)}\leqslant e^{-\alpha t}\int\limits_{\gamma_l}\|(\mu L_s-M_s)^{-1}L_s\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2)}\,|d\mu|\leqslant N_l e^{-\alpha t}, \tag{10}$$
$$\|U_r^t\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2)}\leqslant e^{\beta t}\int\limits_{\gamma_r}\|(\mu L_r-M_r)^{-1}L_r\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2)}\,|d\mu|\leqslant N_r e^{\beta t}. \tag{11}$$

Пусть $s\geqslant t$. Тогда решение η^s уравнения (8) можно записать как $\eta^s(t)=U_l^{s-t}\eta^s(s)$. В силу (10) имеем соотношения
$$\|\eta^s(t)\|_{\mathbf{U_K L}_2}=\|U_l^{s-t}\eta^s(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2}\leqslant N_l e^{-\alpha(s-t)}\|\eta^s(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2}.$$

Далее, пусть $t\geqslant s$. Тогда решение η^u уравнения (9) будет следующим: $\eta^u(t)=U_r^{t-s}\eta^u(s)$. В силу (11) имеем
$$\|\eta^u(t)\|_{\mathbf{U_K L}_2}=\|U_r^{t-s}\eta^u(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2}\leqslant N_r e^{\beta(t-s)}\|\eta^u(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2}=N_r e^{-\beta(s-t)}\|\eta^s(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2}.$$
Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 2 *п.н. любая траектория решения $\eta^{s(u)}=\eta^{s(u)}(t)$ уравнения* (8) *(уравнения* (9)*) лежит в устойчивом (неустойчивом) инвариантном пространстве $\mathbf{I}^{s(u)}$ поточечно, т.е. $\eta^{s(u)}(t)\in\mathbf{I}^{s(u)}$ при всех $t\in\mathbb{R}$.*

Замечание 2. Если $\sigma_{s(u)}^L(M)=\varnothing$, то $\mathbf{I}^{s(u)}=\{0\}$.

3. СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Систему (2) будем рассматривать в пространствах случайных K-величин. Для этого обозначим $\mathbb{H}^2=(W_2^2(D))^n$, $\mathring{\mathbb{H}}^1=(\mathring{W}_2^2(D))^n$, $\mathbb{L}^2=(L_2(D))^n$. Замыкание $\{u\in C^\infty\colon \nabla u=0\}$ линеала $\mathbb{L}^2$ обозначим $\mathbb{H}_\sigma$, причём существует расщепление $\mathbb{L}^2=\mathbb{H}_\sigma\oplus\mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$, а $\Pi\colon \mathbb{L}^2\to\mathbb{H}_\pi$ — отропроектор, соответствующий этому дополнению. Сужение проектора Π на $\mathbb{H}^2\cap\mathring{\mathbb{H}}^1\subset\mathbb{L}^2$ является непрерывным оператором $\Pi\colon \mathbb{H}^2\cap\mathring{\mathbb{H}}^1\to\mathbb{H}^2\cap\mathring{\mathbb{H}}^1$. Представим пространство $\mathbb{H}^2\cap\mathring{\mathbb{H}}^1=\mathbb{H}^2_\sigma\oplus\mathbb{H}^2_\pi$, где $\ker\Pi=\mathbb{H}^2_\sigma$, $\operatorname{im}\Pi=\mathbb{H}^2_\pi$. Обозначим $\Sigma=\mathbb{I}-\Pi$. Положим $\mathfrak{U}=\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}^2_\pi\times\mathbb{H}_\pi$ и $\mathfrak{F}=\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{H}_\pi\times\mathbb{H}_\pi$. Элемент $u\in\mathfrak{U}$ имеет вид $u=(u_\sigma,u_\pi,p)$.

Лемма 2 [2]. *Формулой $A=(-\nabla^2)^n\colon \mathbb{H}^2\cap\mathring{\mathbb{H}}^1\to\mathbb{L}^2$ задаётся линейный непрерывный оператор с положительным дискретным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся к точке $+\infty$, причём отображение $A\colon \mathbb{H}^2_{\sigma(\pi)}\to\mathbb{H}^2_{\sigma(\pi)}$ биективно.*

Формулой $B\colon u\to-\nabla(\nabla u)$ задаётся линейный непрерывный сюръективный оператор $B\colon \mathbb{H}^2\cap\mathring{\mathbb{H}}^1\to\mathbb{H}^2_\pi$, причём $\ker B=\mathbb{H}^2_\sigma$.

Пространства $W_2^2(D)$, $L_2(D)$ — сепарабельные гильбертовы пространства, поэтому пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ являются сепарабельными гильбертовыми пространствами как их конечные произведения. Построим пространства $\mathbf{U_K L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2$. Операторы $L,M\in\mathcal{L}(\mathbf{U_K K}_2;\mathbf{F_K L}_2)$ зададим как

$$L=\begin{pmatrix}\Sigma(\lambda\mathbb{I}+A) & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \Pi(\lambda\mathbb{I}+A) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}-\nu\Sigma A & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & -\nu\Pi A & -\Pi\\ \mathbb{O} & \Pi B & \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

Тогда стохастическую систему уравнений (2) можно рассматривать как стохастическое линейное уравнение (4). Справедлива следующая

Лемма 3. *Операторы $L,M\in\mathcal{L}(\mathbf{U_K K}_2;\mathbf{F_K L}_2)$.*

Доказательство. Очевидно, что операторы $L,M\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причём $\operatorname{im}L=\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}^2_\pi\times\{0\}$, $\ker L=\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{H}^2_\pi$, поэтому в силу леммы 1 $L,M\in\mathcal{L}(\mathbf{U_K K}_2;\mathbf{F_K L}_2)$.

Лемма 4. *При любых $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\sigma(A)$, $\nu\in\mathbb{R}$ оператор M $(L,1)$-ограничен.*

Доказательство. В работе [2] показано, что оператор M $(L,1)$-ограничен, если операторы $L,M\colon \mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$, поэтому в силу леммы 1 следует утверждение данной леммы.

Теорема 3. *При любых $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\sigma(A)$, $\nu\in\mathbb{R}$ и при любой случайной величине $\eta_0\in\mathbf{U}^1_\mathbf{K}\mathbf{L}_2$ существует решение задачи* (3), (4), *которое имеет вид $\eta(t)=U^t\eta_0$, $t\in\mathcal{J}$.*

Доказательство. В силу лемм 3 и 4 стохастическая система уравнений (2) удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Фазовое пространство имеет вид

$$\mathbf{U}^1_\mathbf{K}\mathbf{L}_2=\begin{cases}\mathbf{U_K L}_2, & \text{если } \lambda\neq\nu_k \text{ при } k\in\mathbb{N};\\ \eta\in\mathbf{U_K L}_2\colon \langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k=0, & \text{если } \lambda=\nu_k,\end{cases}$$

где $\{\nu_k\}$ — спектр оператора $\tilde{A}\colon \mathbb{H}^2_\pi\to\mathbb{H}^2_\pi$, являющегося сужением оператора A на $\mathbb{H}^2_\pi$. Разрешающую группу можно представить в виде

$$U^t=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{\nu_k\neq\lambda}\exp\left\{\frac{\nu\nu_k}{\nu_k-\lambda}\right\}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ДИХОТОМИИ И СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Относительный спектр имеет вид $\sigma^L(M)=\{\nu\nu_k/(\nu_k-\lambda)\}$. Заметим, что спектр $\sigma(\tilde{A})=\{\nu_k\}$ положителен дискретен конечнократен и сгущается к точке $+\infty$ (теорема Солонникова–Воровича–Юдовича). Справедлива следующая

Теорема 4. *При любых* $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\sigma(A)$, $\lambda>\nu_1$ *и* $\nu\in\mathbb{R}\{0\}$ *решения* $\eta=\eta(t)$ *стохастической системы уравнений* (2) *имеют экспоненциальную дихотомию.*

Доказательство. Пусть $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\sigma(A)$ и $\lambda>\nu_1$, тогда $\sigma^L(M)=\sigma_1^L(M)\bigcup\sigma_2^L(M)$, где $\sigma_1^L(M)= =\{\mu\in\sigma^L(M)\colon \nu_k<\lambda\}$, $\sigma_2^L(M)=\{\mu\in\sigma^L(M)\colon \nu_k>\lambda\}$. Данному спектральному разложению сопутствуют инвариантные пространства

$$\mathbf{I}^1=\{\eta\in\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2\colon \langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k=0,\ \nu_k<\lambda\},\quad \mathbf{I}^2=\{\eta\in\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2\colon \langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k=0,\ \nu_k>\lambda\}.$$

Пространство $\mathbf{I}^1$ является конечномерным, $\dim\mathbf{I}^1=\max\{k\colon \nu_k<\lambda\}$, а пространство $\mathbf{I}^2$ — бесконечномерным, $\operatorname{codim}\mathbf{I}^2=\dim\mathbf{I}^1+\dim\ker L$.

Если $\nu>0$ $(\nu<0)$, то $\sigma^L_{1(2)}(M)$ лежит в левой полуплоскости, а $\sigma^L_{2(1)}(M)$ — в правой полуплоскости комплексной плоскости. В силу теоремы 2 $\mathbf{I}^{1(2)}$ является устойчивым инвариантным пространством, $\mathbf{I}^{2(1)}$ — неустойчивым инвариантным пространством, и решения стохастической системы уравнений (2) имеют экспоненциальную дихотомию. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если* $\lambda<\nu_1$ *и* $\nu<0$, *то фазовое пространство стохастической системы уравнений* (2) *совпадает с устойчивым инвариантным пространством.*

Если $\lambda<\nu_1$ *и* $\nu>0$, *то фазовое пространство стохастической системы уравнений* (2) *совпадает с неустойчивым инвариантным пространством.*

Перейдём к задаче стабилизации неустойчивых решений. Для этого уравнение (4) будем рассматривать в виде системы (7)–(9). Для определённости положим $\nu>0$ и $\lambda>\nu_1$. Из теоремы 4 следует, что $\mathbf{I}^s=\mathbf{I}^1$ и $\mathbf{I}^u=\mathbf{I}^2$. Пространство $\mathbf{I}^s$ является устойчивым инвариантным пространством, поэтому для решений $\eta_l=\eta_l(t)$ уравнения (8) справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty}\|\eta_l(t)\|_{\mathbf{U_K L_2}}=0.$$

В силу замечания 1 рассмотрим следующую задачу стабилизации. Требуется найти такой стохастический процесс χ, чтобы для решений уравнения

$$L_r\overset{\circ}{\eta}_r=M_r\eta_r+\chi \tag{12}$$

было выполнено условие

$$\lim_{t\to+\infty}\|\eta_r(t)\|_{\mathbf{U_K L_2}}=0. \tag{13}$$

Будем находить χ с помощью обратной связи $\chi=B\eta_r$, где B — некоторый линейный ограниченный оператор. Уравнение (12) примет вид

$$L_r\overset{\circ}{\eta}_r=M_r\eta_r+B\eta_r=(M_r+B)\eta_r.$$

Найдём $m=\max_{\mu_k\in\sigma_2^L(M)}\{\mu_k\}$ и номер n полученного максимального значения. Положим

$$B=-\nu(\varepsilon+\nu_n)\mathbb{I},$$

где ε можно выбрать сколь угодно малым. Тогда относительный спектр

$$\sigma^{L_u}(M_u+B)=\left\{\frac{\nu\nu_k-\nu(\varepsilon+\nu_n)}{\lambda-\nu_k}\right\}$$

лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости и в силу теоремы 2 для решения $\eta_r=\eta_r(t)$ выполнено равенство (13).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Планируется продолжить исследования по изучению устойчивости и неустойчивости решений для стохастических полулинейных уравнений соболевского типа с относительно спектральным оператором. Предполагается провести численные эксперименты по нахождению устойчивого и неустойчивого решений стохастической системы (2) и стабилизации неустойчивых решений.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Г.А. Свиридюку за интерес к работе и полезные обсуждения.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и Олдройта / А.П. Осколков // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.
2. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева, Я.И. Ходорковский // Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та. — 1975. — Т. 96. — С. 3–9.
3. Turning bacteria suspensions into superfluids / H.M. Lopez, J. Gachelin, C. Douarche [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — V. 115. — Art. 028301.
4. Малкин, А.Я. Неустойчивость при течении растворов и расплавов полимеров / А.Я. Малкин // Высокомол. соед. Сер. С. — 2006. — Т. 48, № 7. — С. 1241–1262.
5. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. — London ; Dordrecht ; Heidelberg ; New York : Springer, 2011. — 436 p.
6. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова и аддитивными "шумами" / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 1. — С. 90–103.
7. Favini, A. Linear Sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of "noises" / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstr. Appl. Anal. — 2015. — V. 15. — Art. 69741.
8. Favini, A. Linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators in space of "noises" / A. Favini, G.A. Sviridyuk, M.A. Sagadeeva // Mediterranean J. Math. — 2016. — V. 13, № 6. — P. 4607–4621.
9. Favini, A. One class of Sobolev type equations of higher order with additive "white noise" / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Commun. Pure Appl. Anal. — 2016. — V. 15, № 1. — P. 185–196.
10. Favini, A. Multipoint initial-final value problem for dynamical Sobolev-type equation in the space of noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electron. J. Differ. Equat. — 2018. — V. 2018, № 128. — P. 1–10.
11. Favini, A. The multipoint initial-final value condition for the Hoff equations on geometrical graph in spaces of K-"noises" / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Mediterranean J. Math. — 2022. — V. 19, № 2. — Art. 53.
12. Kitaeva, O.G. Invariant spaces of Oskolkov stochastic linear equations on the manifold / O.G. Kitaeva // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. — 2021. — Т. 13, № 2. — С. 5–10.
13. Kitaeva, O.G. Exponential dichotomies of a non-classical equations of differential forms on a two-dimensional torus with "noises" / O.G. Kitaeva // J. Comp. Engineer. Math. — 2019. — V. 6, № 3. — P. 26–38.
14. Kitaeva, O.G. Stable and unstable invariant spaces of one stochastic non-classical equation with a relatively radial operator on a 3-torus / O.G. Kitaeva // J. Comp. Engineer. Math. — 2020. — V. 7, № 2. — P. 40–49.

15. Kitaeva, O.G. Exponential dichotomies of a stochastic non-classical equation on a two-dimensional sphere / O.G. Kitaeva // J. Comp. Engineer. Math. — 2021. — V. 8, № 1. — P. 60–67.
16. Свиридюк, Г.А. Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. — 1988. — № 1. — С. 74–79.
17. Yakupov, M.M. The Oskolkov System with a multipoint initial-final value condition / M.M. Yakupov, A.S. Konkina // J. Comp. Engineer. Math. — 2022. — V. 9, № 4. — P. 44–50.
18. Свиридюк, Г.А. Задачи Шоуолтера–Сидорова и Коши для линейного уравнения Дзекцера с краевыми условиями Вентцеля и Робена в ограниченной области / Г.А. Свиридюк, Н.С. Гончаров, С.А. Загребина // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. — 2022. — Т. 14, № 1. — С. 50–63.

INSTABILITY AND STABILIZATION OF SOLUTIONS OF A STOCHASTIC MODEL OF VISCOELASTIC FLUID DYNAMICS

 O. G. Kitaeva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
e-mail: kitaevaog@susu.ru

The instability and stability of solutions of the stochastic system describing the flow of a viscoelastic liquid are investigated. It is shown that for certain values of the parameters included in the equations of the system, the existence of unstable and stable invariant spaces. For unstable case, the stabilization problem is solved based on the feedback principle.

Keywords: Sobolev type stochastic equation, invariant space, stabilization

REFERENCES

1. Oskolkov, A.P., Initial boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voigt and Oldroit fluids, *Trudi Mat. in-ta AN SSSR*, 1988, vol. 179, pp. 126–164.
2. Amfilohiev, V.B., Voitkunsky, Ya.I., Mazaeva, N.P., and Khodorkovskii, Ya.I., Flows of polymer structures in the presence of convective accelerations, *Tr. Leningr. korablestr. in-ta*, 1975, vol. 96, pp. 3–9.
3. Lopez, H.M., Gachelin, J., Douarche, C. [et al.], Turning bacteria suspensions into superfluids, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, vol. 115, art. 028301.
4. Malkin, A.Ya., Instability during the flow of solutions and melts of polymers, *High Molecular Weight Compounds. Series C*, 2006, vol. 48, no. 7, pp. 1241–1262.
5. Gliklikh, Yu.E., *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*, London; Dordrecht; Heidelberg; New York: Springer, 2011.
6. Sviridyuk, G.A. and Manakova, N.A., Dynamic models of the Sobolev type with the Showalter–Sidorov condition and additive "noises", *Bull. of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 90–103.
7. Favini, A., Sviridyuk, G.A., and Manakova, N.A., Linear Sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of "noises", *Abstr. Appl. Anal.*, 2015, vol. 15, art. 69741.
8. Favini, A., Sviridyuk, G.A., and Sagadeeva, M.A., Linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators in space of "noises", *Mediterranean J. Math.*, 2016, vol. 6, no. 13, pp. 4607–4621.
9. Favini, A., Sviridyuk, G.A., and Zamyshlyaeva, A.A., One class of Sobolev type equations of higher order with additive "white noise", *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 185–196.
10. Favini, A., Zagrebina, S.A., and Sviridyuk, G.A., Multipoint initial-final value problem for dynamical Sobolev-type equation in the space of noises, *Electron. J. Differ. Equat.*, 2018, vol. 2018, no. 128, pp. 1–10.
11. Favini, A., Zagrebina, S.A., and Sviridyuk, G.A., The multipoint initial-final value condition for the Hoff equations on geometrical graph in spaces of K-"noises", *Mediterranean J. Math.*, 2022, vol. 19, no. 2, art. 53.
12. Kitaeva, O.G., Invariant spaces of Oskolkov stochastic linear equations on the manifold, *Bull. of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 5–10.
13. Kitaeva, O.G., Exponential dichotomies of a non-classical equations of differential forms on a two-dimensional torus with "noises", *J. Comp. Engineer. Math.*, 2019, vol. 6, no. 3, pp. 26–38.

14. Kitaeva, O.G., Stable and unstable invariant spaces of one stochastic non-classical equation with a relatively radial operator on a 3-torus, *J. Comp. Engineer. Math.*, 2020, vol. 7, no. 2, pp. 40–49.
15. Kitaeva, O.G., Exponential dichotomies of a stochastic non-classical equation on a two-dimensional sphere, *J. Comp. Engineer. Math.*, 2021, vol. 8, no. 1, pp. 60–67.
16. Sviridyuk, G.A., On a model of the dynamics of an incompressible viscoelastic fluid, *Izv. vuzov. Matematika*, 1988, no. 1, pp. 74–79.
17. Yakupov, M.M. and Konkina, A.S., The Oskolkov system with a multipoint initial-final value condition, *J. Comp. Engineer. Math.*, 2022, vol. 9, no. 4, pp. 44–50.
18. Sviridyuk, G.A., Goncharov, N.S., and Zagrebina, S.A., Showalter–Sidorov and Cauchy problems for the Dzekzer linear equation with Wentzel and Robin boundary conditions in a bounded domain, *Bull. of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 50–63.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 22–34

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ АРГУМЕНТАМИ

М. Э. Муминов[1], Т. А. Раджабов[2]

[1]*Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент*

[1,2]*Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Узбекистан*

[2]*Ташкентский международный университет Кимё, Узбекистан*

e-mail: [1]mmuminov@mail.ru, [2]radjabovtirkash@yandex.com

Поступила в редакцию 17.12.2023 г., после доработки 08.05.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследована краевая задача для уравнения диффузии с кусочно-постоянными аргументами. Установлены условия существования бесконечного числа решений (найдены их явные формулы) или отсутствия решения для дифференциального уравнения, полученного после разделения переменных. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: уравнение диффузии, кусочно-постоянный аргумент, периодическое решение

DOI: 10.31857/S0374064125010037, EDN: IANIEX

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дифференциальные уравнения с кусочно-постоянными аргументами встречаются при изучении гибридных систем и могут моделировать определённые гармонические осцилляторы с почти периодическим воздействием [1, 2]. Широкий обзор исследований, посвящённых обыкновенным уравнениям и уравнениям с частными производными с кусочно-постоянными аргументами, приведён в работах [3, 4].

В статьях [5, 6] изучены дифференциальные уравнения специального вида с кусочно-постоянным аргументом. Периодические (разрешимые) задачи сведены к системе линейных алгебраических уравнений, описаны все условия существования её n-периодических решений, с помощью которых найдены явные формулы решений дифференциальных уравнений.

Уравнения с частными производными с кусочно-постоянным временны́м аргументом естественным образом возникают в процессе аппроксимации [7].

В статье [8] для уравнения с частными производными с кусочно-постоянным аргументом изучены существование, осцилляционность и асимптотические границы решений начальных задач с кусочно-постоянными запаздываниями.

Краевые и начальные задачи для уравнения диффузии с кусочно-постоянными аргументами исследовались в [9] и [10] соответственно. Уравнение с кусочно-постоянными смешанными аргументами вида

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+bu_{xx}(x,[t-1])+cu(x,[t])+du(x,[t+1])$$

рассматривалось в [11], где были исследованы вопросы существования решений, сходимости решений к нулю, неограниченность решений и их осцилляции.

В статье [12] найдено асимптотическое поведение решения уравнения диффузии с кусочно-постоянным аргументом обобщённого вида.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения диффузии с кусочно-постоянными аргументами вида [10, 13]

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)-bu_{xx}(x,[t])-cu_{xx}(x,[t+1]),\quad 0<x<1,\ t>0, \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=v(x). \tag{3}$$

Адаптировав метод [10, 14], получим сначала формальное решение задачи (1)–(3) в виде ряда. Для этого после разделения переменных исследуем дифференциальное уравнение первого порядка с кусочно-постоянным аргументом времени, получим условие существования и явную формулу его решения. Затем, применив метод [5, 6, 15, 16], найдём N-периодические решения и их явные формулы этого дифференциального уравнения. В частном случае докажем существование бесконечного числа решений дифференциального уравнения с кусочно-постоянным аргументом, что показывает некорректность результата о единственности, приведённого в [13].

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ АРГУМЕНТОМ

Пусть v_j — коэффициенты синусоидального ряда Фурье для функции $v(x)$, т.е.

$$v(x)=\sum_{j=1}^{+\infty}v_j\sin(j\pi x),\quad v_j=2\int\limits_0^1 v(x)\sin(j\pi x)\,dx.$$

Решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{+\infty}T_j(t)\sin(j\pi x). \tag{4}$$

Подставив функцию (4) в уравнение (1) и начальные условия (3), получим

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big(T_j'(t)+a^2\pi^2j^2T_j(t)+b\pi^2j^2T_j([t])+c\pi^2j^2T_j([t+1])\Big)\sin(j\pi x)=0,$$

$$u(x,0)=\sum_{j=1}^{\infty}T_j(0)\sin(j\pi x)=v(x),\quad T_j(0)=v_j.$$

Отсюда, с учётом ортогональности функций $\sin(n\pi x)$, имеем бесконечную последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным аргументом

$$T_j'(t)+a^2\pi^2j^2T_j(t)+b\pi^2j^2T_j([t])+c\pi^2j^2T_j([t+1])=0,\quad t>0,\ j\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

с начальным условием

$$T_j(0)=v_j. \tag{6}$$

Определение 1. Функция $T(t)$ называется решением задачи (5), (6), если она удовлетворяет следующим условиям:

(i) $T(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$;

(ii) производная $T'(t)$ существует и непрерывна в $\mathbb{R}_+$, за исключением точек $[t]\in\mathbb{R}_+$, где существуют односторонние производные;

(iii) $T(t)$ удовлетворяет (5) и (6) в $\mathbb{R}_+$ с возможным исключением в точках $[t]\in\mathbb{R}_+$.

Обозначим

$$E_j(t)=e^{-a^2\pi^2j^2t}-\frac{b}{a^2}\big(1-e^{-a^2\pi^2j^2t}\big),\quad D_j(t)=\frac{c}{a^2}\big(1-e^{-a^2\pi^2j^2t}\big),\quad j\in\mathbb{N}.$$

Теорема 1. *Пусть a, b, c — действительные числа. Если $D_j(1)\neq-1$, то уравнение* (5) *имеет единственное решение, представимое на промежутках $t\in[n,n+1)$, $n=0,1,2,\ldots,$ в виде*

$$T_j(t)=\left(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j. \tag{7}$$

Теорема 2. 1. *Если $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)=0$ для $j>0$, то задача* (5), (6) *имеет бесконечно много решений. В частности, эта задача имеет единственное однопериодическое и бесконечное множество N-периодических решений, $N=2,3,\ldots$*

2. *Пусть $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)\neq0$. Тогда если $v_j\neq0$, то задача* (5), (6) *не имеет решения. Если $v_j=0$, то эта задача имеет тривиальное решение.*

Пример 1. Пусть $j=1$, $a\in\mathbb{R}$, $c=a^2/(e^{-a^2\pi^2j^2}-1)$, $b=-a^2e^{-a^2\pi^2j^2}/(e^{-a^2\pi^2j^2}-1)$, $v_1=1$. В этом случае $D_j(1)=-1$, $E_j(1)=0$. Функции

$$F_2(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1-e^{a^2\pi^2}}+\dfrac{e^{a^2\pi^2}}{e^{a^2\pi^2}-1}e^{-a^2\pi^2t}\right)v_1-\dfrac{1-e^{-a^2\pi^2t}}{e^{-a^2\pi^2}-1}T_{11}(1), & t\in[0,1),\\[2ex] \left(\dfrac{1}{1-e^{a^2\pi^2}}+\dfrac{e^{a^2\pi^2}}{e^{a^2\pi^2}-1}e^{-a^2\pi^2(t-1)}\right)T_{11}(1)-\dfrac{1-e^{-a^2\pi^2(t-1)}}{e^{-a^2\pi^2}-1}v_1, & t\in[1,2],\end{cases}$$

и

$$F_3(t)=\begin{cases}\left(-\dfrac{b}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2t})+e^{-a^2\pi^2t}\right)v_1-\dfrac{c}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2t})T_{11}(1), & t\in[0,1),\\[2ex] \left(-\dfrac{b}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2(t-1)})+e^{-a^2\pi^2(t-1)}\right)T_{11}(1)-\dfrac{c}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2(t-1)})T_{21}(2), & t\in[1,2),\\[2ex] \left(-\dfrac{b}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2(t-2)})+e^{-a^2\pi^2(t-2)}\right)T_{21}(2)-\dfrac{c}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2(t-2)})v_1, & t\in[2,3),\end{cases}$$

являются двух- и трёхпериодическими решениями задачи (5), (6) при $j=1$ соответственно, где $T_{11}(1)$, $T_{21}(2)$ — произвольные числа. Выбрав эти константы, приведём решения и их графики.

Функция $F_2(t)$ при $T_{11}(1)=3$ и $a=1/\pi$ имеет вид (рис. 1, *а*)

$$F_2(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e^{1-t}}{e-1}-\dfrac{3(1-e^{-t})}{e^{-1}-1}, & t\in[0,1),\\[2ex] \dfrac{1-e^{1-t}}{1-e^{-1}}+3\left(\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e^{2-t}}{e-1}\right), & t\in[1,2].\end{cases} \tag{8}$$

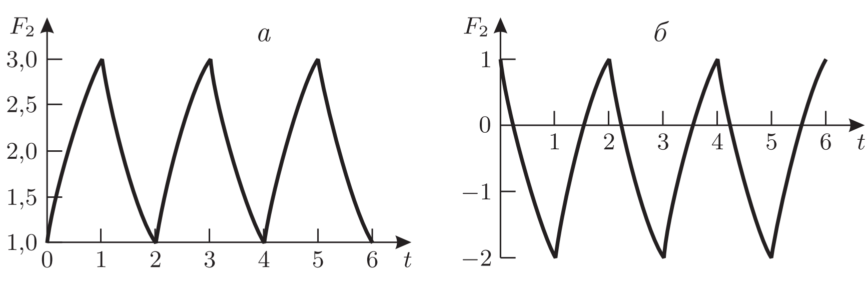


Рис. 1. Графики функции $F_2(t)$

а при $T_{11}(1)=-2$ и $a=1/\pi$ (рис. 1, *б*)

$$F_2(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e^{1-t}}{e-1}+\dfrac{2(1-e^{-t})}{e^{-1}-1}, & t\in[0,1),\\ \dfrac{e^{1-t}-1}{e^{-1}-1}-2\left(\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e^{2-t}}{e-1}\right), & t\in[1,2].\end{cases} \tag{9}$$

Функция $F_3(t)$ при $T_{11}(1)=2$, $T_{21}(2)=3/2$ и $a=1/\pi$ представима в виде (рис. 2, *а*)

$$F_3(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e(2-e^{-t})}{e-1}, & t\in[0,1),\\ \dfrac{2}{1-e}+\dfrac{e(3+e^{1-t})}{2(e-1)}, & t\in[1,2),\\ \dfrac{3}{2(1-e)}+\dfrac{e(2+e^{2-t})}{2(e-1)}, & t\in[2,3],\end{cases} \tag{10}$$

при $T_{11}(1)=-2$, $T_{21}(2)=-3/2$ и $a=1/\pi$ (рис. 2, *б*)

$$F_3(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e(3e^{-t}-2)}{e-1}, & t\in[0,1),\\ \dfrac{2}{e-1}-\dfrac{e(3+e^{1-t})}{2(e-1)}, & t\in[1,2),\\ \dfrac{3}{2(e-1)}-\dfrac{e(5e^{2-t}-2)}{2(e-1)}, & t\in[2,3],\end{cases} \tag{11}$$

а при $T_{11}(1)=3$, $T_{21}(2)=-4$ и $a=1/\pi$ (рис. 2, *в*)

$$F_3(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e(3-2e^{-t})}{e-1}, & t\in[0,1),\\ \dfrac{3}{1-e}+\dfrac{e(7e^{1-t}-4)}{e-1}, & t\in[1,2),\\ \dfrac{4}{e-1}-\dfrac{e(5e^{2-t}-1)}{e-1}, & t\in[2,3].\end{cases}$$

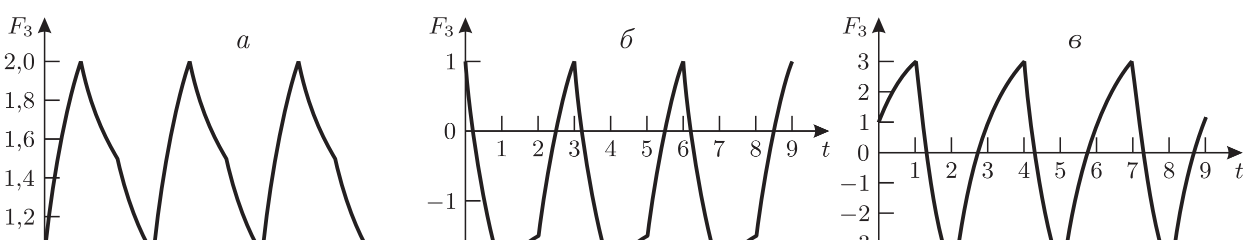


Рис. 2. Графики функции $F_3(t)$

Замечание 1. В примере 1 параметры уравнения удовлетворяют условиям теоремы единственности из статьи [13]. В нём показана некорректность результатов теоремы 2 из [11], утверждающей единственность решения задачи (5), (6).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Определение 2. Функция $u(x,t)$ называется *решением задачи* (1)–(3), если выполняются следующие условия:

(i) $u(x,t)$ непрерывна на множестве $\Omega=[0,1]\times\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+=[0,\infty)$;

(ii) частные производные u_t и u_{xx} существуют и непрерывны на Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$, где односторонние производные существуют по второму аргументу;

(iii) $u(x,t)$ удовлетворяет (1)–(3) в Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$.

Предположение. *Пусть функция $v(\cdot)$ имеет на отрезке $[0,1]$ непрерывные производные до третьего порядка включительно и удовлетворяет условиям $v(0)=v(1)=v''(0)=v''(1)=0$.*

Теорема 3. *Пусть выполняется предположение, $c\neq -a^2$ и $D_j(1)\neq -1$ при $j\in\mathbb{N}$. Тогда задача* (1)–(3) *имеет единственное решение, представимое в виде ряда*

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{+\infty}\biggl(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\biggr)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j\sin(j\pi x),\quad t\in[n,n+1),\ n=0,1,2,\ldots$$

Теорема 4. 1. *Пусть выполняется предположение, $D_{j_0}(1)=-1$ и $E_{j_0}(1)=0$. Тогда задача* (1)–(3) *имеет бесконечное число решений, представимых на $t\in[n,n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$, как*

$$u(x,t)=\sum_{j=1,j\neq j_0}^{+\infty}\biggl(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\biggr)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j\sin(j\pi x)+T_{j_0}(t)\sin(j\pi x),\tag{12}$$

где $T_{j_0}(t)$ — произвольное решение задачи (5), (6) *(см. п. 2 в теореме 2).*

2. *Если $D_{j_0}(1)=-1$, $E_{j_0}(1)\neq 0$ и $v_{j_0}\neq 0$ при $j=j_0$, то задача* (1)–(3) *не имеет решения.*

Пример 2. Пусть $a=1/\pi$, $c=2$, $b=3$ в уравнении (1) и $u(x,0)=\sum_{j=1}^{5}\sin(j\pi x)/j$ в условии (3). Тогда решение задачи (1)–(3) имеет вид (рис. 3)

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{5}\biggl[\biggl(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\biggr)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j\biggr]\sin(j\pi x),\quad t\in[n,n+1),\ n=0,1,2,\ldots$$

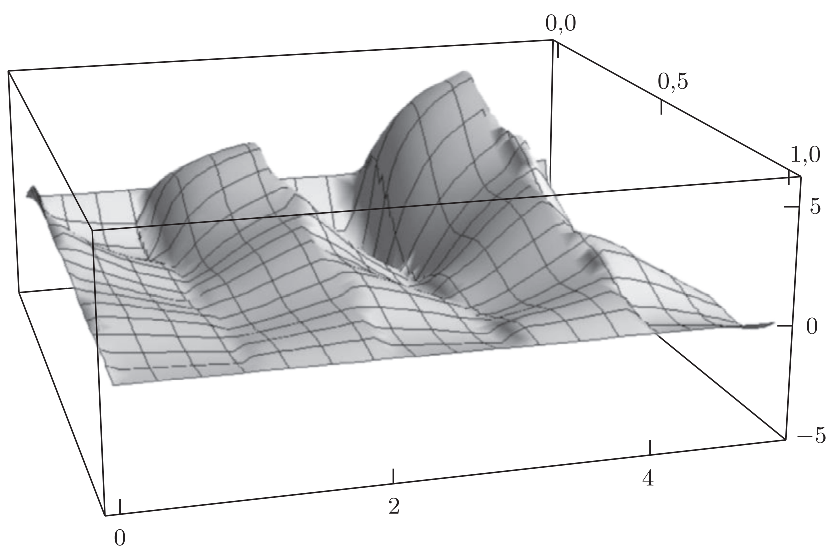


Рис. 3. График функции $u(x,t)$

Пример 3. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $c = a^2/(e^{-a^2\pi^2 j^2} - 1)$, $b = -a^2 e^{-a^2\pi^2 j^2}/(e^{-a^2\pi^2 j^2} - 1)$, $v(x) = \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x)$. Тогда решение задачи (1)–(3) определяется по формуле

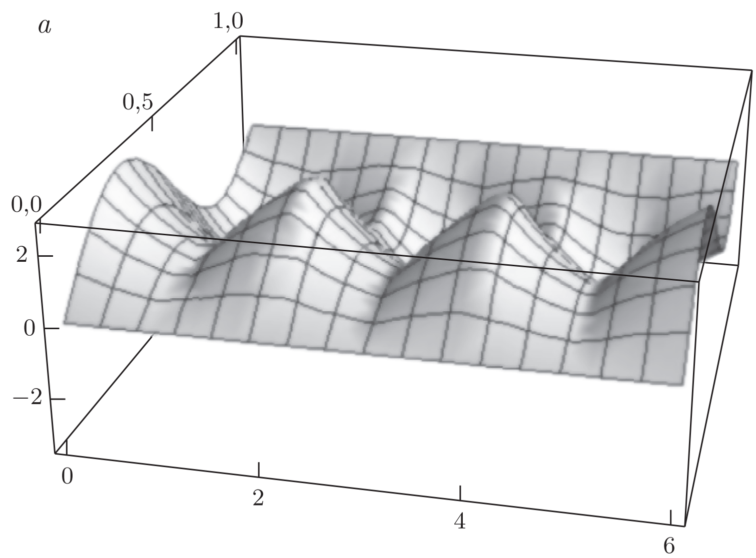
$$u(x,t) = T_1(t)\sin(\pi x) + 2T_2(t)\sin(2\pi x).$$

Отметим, что $D_1(1) = -1$, $E_1(1) = 0$ и $D_2(1) \neq -1$, т.е. числа a, b и c удовлетворяют условиям п. 1 теоремы 2 и теореме 1. Поэтому согласно теореме 1 функция $T_2(t)$ имеет вид

$$T_2(t) = 2(E_2(t-n) - D_2(t-n)), \quad t \in [n, n+1),$$

а функцию $T_1(t)$ можно определить многими способами.

Приведём графики $u(x,t)$ для примера 1. В случае когда $T_1(t) = F_2(t)$ и $F_2(t)$ определяется равенством (8), график функции $u(x,t)$ изображён на рис. 4, *а*, если $F_2(t)$ определяется выражением (9), то на рис. 4, *б*. При $T_1(t) = F_3(t)$, где $F_3(t)$ определяется равенством (10), график функции $u(x,t)$ представлен на рис. 5, *а*, а если $F_3(t)$ определяется равенством (11), то на рис. 5, *б*.



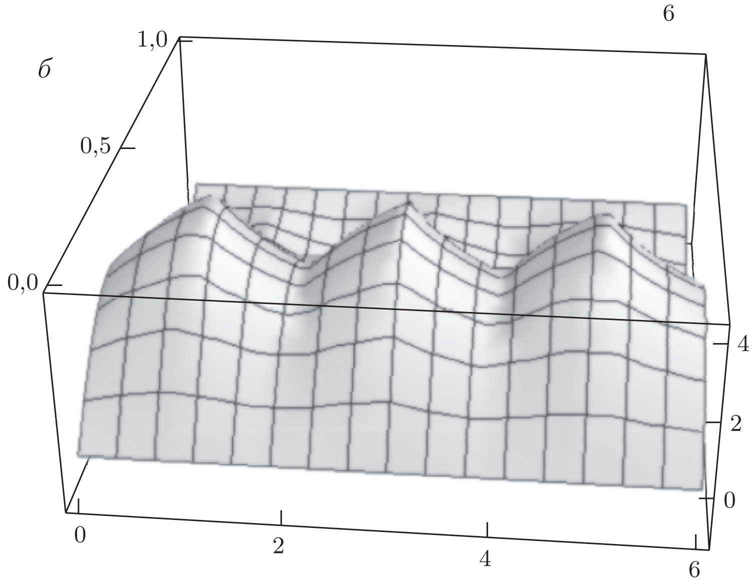


Рис. 4. Графики функции $u(x,t)$

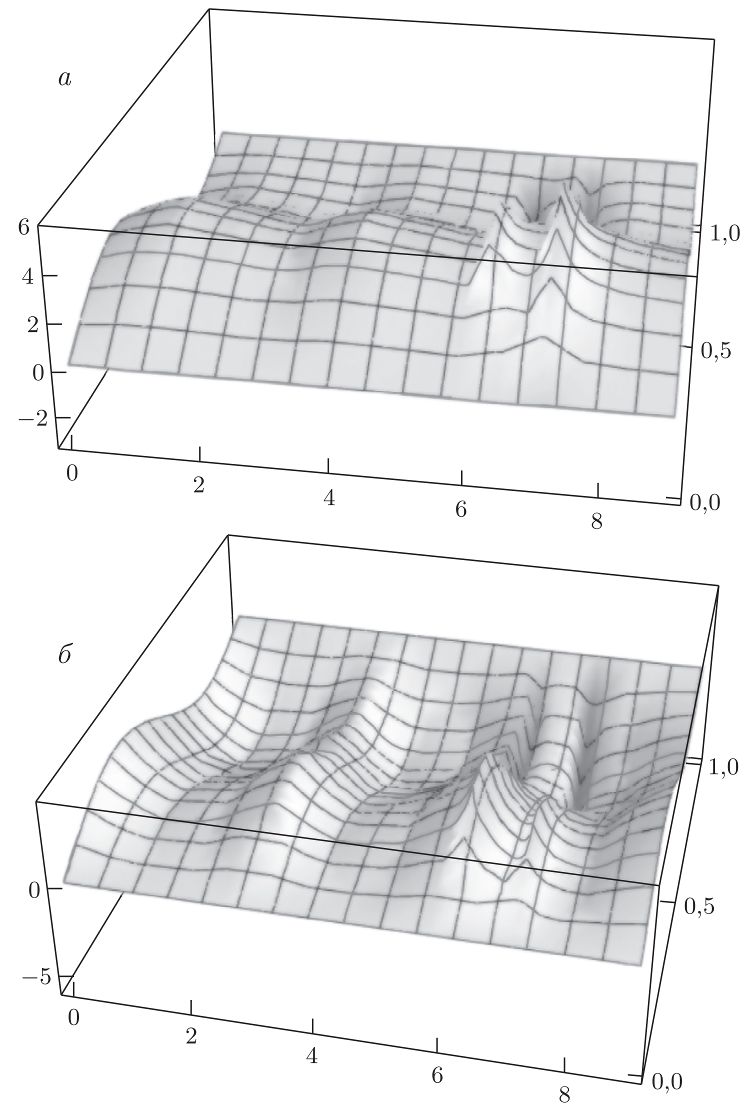


Рис. 5. Графики функции $u(x,t)$

Замечание 2. В примере 3 параметры уравнения не удовлетворяют условиям следствия 1 в [13], т.е. $a^2+b+c=0$. Решение u периодично по t. Это означает, что нулевое решение задачи (1)–(3) не является асимптотически устойчивым. Поэтому условия следствия 1 являются достаточными для того, чтобы нулевое решение было асимптотически устойчиво.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $T_{nj}(t)$ решение уравнения (5) на промежутке $[n,n+1)$, т.е.

$$T_j(t)=T_{nj}(t),\quad t\in[n,n+1),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Тогда

$$T'_{nj}(t)+a^2\pi^2j^2T_{nj}(t)=-b\pi^2j^2T_{nj}(n)-c\pi^2j^2T_{nj}(n+1),\quad t\in[n,n+1). \tag{13}$$

Решение уравнения (13) определяется по формуле

$$T_{nj}(t)=-\frac{bT_{nj}(n)}{a^2}\big(1-e^{-a^2\pi^2j^2(t-n)}\big)+T_{nj}(n)e^{-a^2\pi^2j^2(t-n)}-\frac{cT_{nj}(n+1)}{a^2}\big(1-e^{-a^2\pi^2j^2(t-n)}\big)$$

или

$$T_{nj}(t)=E_j(t-n)T_{nj}(n)-D_j(t-n)T_{nj}(n+1),\quad t\in[n,n+1). \tag{14}$$

Положив $t=n+1$ в (14) для всех $n=0,1,2,\ldots$, получим

$$T_{nj}(n+1)=E_j(1)T_{nj}(n)-D_j(1)T_{nj}(n+1).$$

Отсюда с учётом $D_j(1)\neq -1$ имеем

$$T_{nj}(n+1)=\frac{E_j(1)T_{nj}(n)}{1+D_j(1)}. \tag{15}$$

Тогда (14) запишем как

$$T_{nj}(t)=E_j(t-n)T_{nj}(n)-\frac{D_j(t-n)}{1+D_j(1)}E_j(1)T_{nj}(n). \tag{16}$$

Из непрерывности функции $T_j(t)$ по $t>0$ вытекают равенства

$$T_{n+1,j}(n+1)=T_j(n+1)=\lim_{t\to n+1-0}T_j(t)=T_{nj}(n+1).$$

Следовательно, формулу (15) можно переписать в виде

$$T_{n+1,j}(n+1)=\frac{E_j(1)T_{nj}(n)}{1+D_j(1)},$$

откуда

$$T_{nj}(n)=\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}T_{n-1,j}(n-1)=\frac{E_j^2(1)}{(1+D_j(1))^2}T_{n-2,j}(n-2)=\ldots=\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}T_{0j}(0),$$

или

$$T_{nj}(n)=\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}T_{0j}(0).$$

Таким образом, решение $T_{nj}(t)$, определённое формулой (16), представляется только через $T_{0j}(0)$:

$$T_{nj}(t)=\left(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}T_{0j}(0).$$

Равенство $T_{0j}(0)=v_j$ завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. 1. Пусть $D_j(1)=-1$, $E_j(1)=0$. Построим функцию $T_j(t)=$ $=T_{nj}(t)$, $t\in[n,n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$, следующим образом. Функция

$$T_{0j}(t)=E_j(t)T_{0j}(0)-D_j(t)C_{0j},\quad t\in[0,1),$$

удовлетворяет уравнению (5), где $T_{0j}(0)=v_j$ и C_{0j} — произвольное число. Так как $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)=0$, имеет место равенство $T_{0j}(1)=\lim_{t\to 1}T_{0j}(t)=C_{0j}$. Легко проверить, что функция

$$T_{1j}(t)=E_j(t-1)T_{1j}(1)-D_j(t-1)C_{1j},\quad t\in[1,2),$$

удовлетворяет уравнению (5), где C_{1j} — произвольное число.

В силу непрерывности функции $T_j(t)$ имеем

$$T_j(1)=T_{1j}(1)=\lim_{t\to 1-0}T_{0j}(t)=T_{0j}(1).$$

Равенства $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)=0$ дают $T_{1j}(2)=\lim_{t\to 2}T_{1j}(t)=C_{1j}$.

Функция

$$T_{nj}(t)=E_j(t-n)T_{nj}(n)-D_j(t-n)C_{nj}$$

на $[n,n+1)$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет уравнению (5), где C_{nj} — произвольное число. Ясно, что $T_j(n)=T_{nj}(n)=\lim_{t\to n-0}T_{n-1,j}(t)=T_{n-1,j}(n)$.

Аналогично из равенств $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)=0$ получим $T_{nj}(n)=\lim_{t\to n+1}T_{nj}(t)=C_{nj}$. По построению функция

$$T_j(t)=T_{nj}(t),\quad t\in[n,n+1),\ \ n=0,1,2,\ldots,$$

является решением задачи (5), (6). Так как константы C_{0j}, C_{1j}, $\ldots$, C_{nj}, $\ldots$ произвольные, то задача имеет бесконечное число решений.

Пусть $T_j(t)$ — однопериодическое решение задачи (5), (6), тогда его можно представить в виде

$$T_j(t)=T_{0j}(t)=E_j(t)T_{0j}(0)-D_j(t)C_{0j},\quad t\in[0,1].$$

Поскольку функция $T_j(t)$ однопериодическая и $T_{0j}(1)=C_{0j}$, то $T_{0j}(0)=T_{0j}(1)$, $C_{0j}(1)=$ $=T_{0j}(0)=v_j$. Это показывает единственность однопериодического решения (5), (6).

Пусть $T_j(t)$ является двухпериодическим решением задачи (5), (6). Тогда функция $T_j(t)$ на $[0,2]$ имеет вид

$$T_j(t)=\begin{cases}E_j(t)T_{0j}(0)-D_j(t)T_{1j}(1), & t\in[0,1),\\ E_j(t-1)T_{1j}(1)-D_j(t-1)C_{1j}, & t\in[1,2),\end{cases}$$

где $T_{0j}(0)=v_j$, $T_{1j}(1)$ — произвольное число. Из периодичности $T_j(t)$ следует, что $T_j(0)=$ $=T_{0j}(0)=T_j(2)=C_{1j}$. Это показывает, что задача (5), (6) имеет бесконечно много двухпериодических решений.

Пусть $T_j(t)$ — N-периодическое решение задачи (5), (6). Функция $T_j(t)$ на промежутке $[0,N]$ имеет вид

$$T_j(t)=\begin{cases}E_j(t)v_j-D_j(t)T_{1j}(1), & t\in[0,1),\\ E_j(t-1)T_{1j}(1)-D_j(t-1)T_{2j}(2), & t\in[1,2),\\ \vdots & \\ E_j(t-N+2)T_{N-1,j}(N-2)-D_j(t-N+2)T_{N-1,j}(N-1), & t\in[N-2,N-1),\\ E_j(t-N+1)T_{N-1,j}(N-1)-D_j(t-N+1)v_j, & t\in[N-1,N),\end{cases}$$

где $T_{1j}(1)$, $T_{2j}(2)$, $\ldots$, $T_{N-1,j}(N-1)$ — произвольные числа.

2. Предположим, что функция $T_j(t)$ является решением задачи (5), (6). Тогда согласно (14) имеет место равенство

$$T_{nj}(t)=E_j(t-n)T_{nj}(n)-D_j(t-n)T_{nj}(n+1),\quad t\in[n,n+1).$$

Отсюда при $t=n+1$ с учётом $D_j(1)=-1$ имеем $E_j(1)T_{nj}(n)=0$ для всех $n=0,1,2,\ldots$ Поэтому $T_{nj}(n)=0$ для всех $n=0,1,2,\ldots$, так как $E_j(1)\neq 0$, т.е. уравнение имеет только тривиальное решение. Следовательно, если $T_j(0)=v_j=T_{0j}(0)\neq 0$, то задача (5), (6) не имеет решения.

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем равномерную сходимость в любом замкнутом множестве $\overline{\Lambda}\subset[0,1]\times\mathbb{R}_+$ следующих рядов:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} T_j(t)\sin(j\pi x), \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} T_j'(t)\sin(j\pi x), \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \pi^2 j^2 T_j(t)\sin(j\pi x), \tag{19}$$

где $T_j(t)$ — решение задачи (5), (6), и на $[n,n+1)$, $n=0,1,2,\ldots,$ функции $T_j(t)$, $T_j'(t)$ представляются, соответственно, в виде (7) и

$$T_j'(t)=-\left(a^2+b+c\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\pi^2 j^2 e^{-a^2\pi^2 j^2(t-n)}\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j.$$

Согласно предположению имеет место равенство

$$v_j=-\frac{2v_j'''}{\pi^3 j^3},\quad v_j'''=\int_0^1 v'''(x)\cos(j\pi x)\,dx,\quad j=1,2,\ldots$$

Из непрерывности функции $v'''(x)$ вытекает сходимость ряда $\sum_{j=1}^{+\infty}(v_j''')^2$. Отсюда с учётом неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty} j^2 v_j\right|=\frac{2}{\pi^3}\left|\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{v_j'''}{j}\right|<+\infty. \tag{20}$$

Поскольку $0\leqslant 1-e^{-a^2\pi^2 j^2 t}\leqslant 1$, то для всех $t\in[0,\infty)$ и $j\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$|E_j(t)|\leqslant 1+\frac{|b|}{a^2},\quad |D_j(t)|<\frac{|c|}{a^2}. \tag{21}$$

Заметим, что $\lim_{j\to\infty} D_j(1)=c/a^2$, поэтому при $D_j(1)\neq -1$ и $c\neq -a^2$ существует число $\rho>0$ такое, что

$$|1+D_j(1)|\geqslant\rho,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Пользуясь неравенствами (21) и (22), получим равномерные оценки для $T_j(t)$ и $T_j'(t)$:

$$|T_j(t)|\leqslant C_1\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^n|v_j|,\quad t\in[n,n+1), \tag{23}$$

$$|T_j'(t)|\leqslant C_2\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^n\pi^2 j^2|v_j|,\quad t\in[n,n+1), \tag{24}$$

где

$$C_1=1+\frac{|b|}{a^2}+\frac{|c|}{a^2}\frac{1+|b|/a^2}{\rho},\quad C_2=a^2+|b|+|c|\frac{1+|b|/a^2}{\rho}.$$

Пусть $m=1+\sup_{(x,t)\in\overline{\Lambda}} t$. Тогда из (23) и (24) для всех $(x,t)\in\overline{\Lambda}$ ряды (17)–(19) оцениваются следующим образом:

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty} T_j(t)\sin(j\pi x)\right| \leqslant C_1\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^m \sum_{j=1}^{+\infty}|v_j|, \quad \left|\sum_{j=1}^{+\infty} T_j'(t)\sin(j\pi x)\right| \leqslant C_2\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^m \pi^2\sum_{j=1}^{+\infty} j^2|v_j|,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty} \pi^2 j^2 T_j(t)\sin(j\pi x)\right| \leqslant C_1\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^m \pi^2\sum_{j=1}^{+\infty} j^2|v_j|.$$

Отсюда и из (20) получаем равномерную сходимость рядов (17)–(19) в любом замкнутом множестве $\overline{\Lambda}\subset[0,1]\times\mathbb{R}_+$.

Таким образом, функция $u(x,t)=\sum_{j=1}^{+\infty} T_j(t)\sin(j\pi x)$ является непрерывной на множестве $\Omega=[0,1]\times\mathbb{R}_+$ и частные производные $u_t=\sum_{j=1}^{+\infty} T_j'(t)\sin(j\pi x)$, $u_{xx}=\sum_{j=1}^{+\infty}\pi^2 j^2 T_j(t)\sin(j\pi x)$ существуют и являются непрерывными на Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$, где односторонние производные существуют по второму аргументу.

Так как $D_j(1)\neq -1$ для каждого $j\in\mathbb{N}$, то по теореме 1 задача (5), (6) имеет единственное решение $T_j(t)$ для каждого $j\in\mathbb{N}$. Следовательно, функция $u(x,t)$, определяемая формулой (4), удовлетворяет равенствам (1)–(3) в Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$ и является единственным решением задачи (1)–(3).

Доказательство теоремы 4. 1. Пусть $D_{j_0}(1)=-1$ и $E_{j_0}(1)=0$ для некоторого $j=j_0$. Тогда $D_j(1)>-1$ при $j<j_0$ и $D_j(1)<-1$ при $j>j_0$. Отсюда имеем

$$|1+D_j(1)|\geqslant\rho_1$$

для некоторого числа $\rho_1>0$ и для всех $j\in\mathbb{N}\setminus\{j_0\}$.

По теореме 1 задача (5), (6) разрешима для $j\neq j_0$ и решение $T_j(t)$ при $j\neq j_0$ имеет вид (7). Поскольку $D_{j_0}(1)=-1$ и $E_{j_0}(1)=0$, то по п. 1 теоремы 2 задача (5), (6) имеет бесконечно много решений. Обозначим через $T_{j_0}(\cdot)$ решение задачи (5), (6) для $j=j_0$. Тогда из (4) решение краевой задачи (1)–(3) имеет вид (12). Равномерная сходимость этого ряда к непрерывной функции $u(x,t)$ в любом замкнутом множестве $\overline{\Lambda}\subset[0,1]\times\mathbb{R}_+$ и существование непрерывных частных производных u_t и u_{xx} на Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$, где односторонние производные существуют по второму аргументу, доказываются аналогично как в доказательстве теоремы 3.

2. Если $D_{j_0}(1)=-1$, $E_{j_0}(1)\neq 0$ и $v_{j_0}\neq 0$, то по теореме 2 задача (5), (6) не имеет решения при $j=j_0$. Следовательно, согласно (4), краевая задача (1)–(3) не имеет решения.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hale, J.K. Introduction to Functional Differential Equations / J.K. Hale, S.M.V. Lunel. — New York : Springer Science Business Media, 2013. — 449 p.
2. Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces / Y. Hino, T. Naito, N.V. Minh, J.S. Shin. — London ; New York : Taylor & Francis, 2002. — 249 p.
3. Wiener, J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations / J. Wiener. — Singapore ; New Jersey ; London ; Hong Kong : World Scientific, 1993. — 410 p.
4. Cooke, K.L. A survey of differential equations with piecewise continuous arguments / K.L. Cooke, J. Wiener // Delay Differential Equations and Dynamical Systems, Proc. of a Conf. in Honor

of Kenneth Cooke Held in Claremont, California / Eds. S. Busenberg, M. Martelli. — Berlin : Springer-Verlag, 1991. — P. 1–15.
5. Muminov, M.I. On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments / M.I. Muminov // Advances in Difference Equations. — 2017. — V. 336. — P. 1–17.
6. Muminov, M.I. Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments / M.I. Muminov, Ali H.M. Murid // Open Math. — 2020. — V. 18, № 1. — P. 93–105.
7. Wiener, J. Boundary-value problems for partial differential equations with piecewise constant delay / J. Wiener // Int. J. Math. Math. Sci. — 1991. — V. 14. — P. 301–321.
8. Wiener, J. Partial differential equations with piecewise constant delay / J. Wiener, L. Debnath // Int. J. Math. Math. Sci. — 1991. — V. 14. — P. 485–496.
9. Wiener, J. Oscillatory and periodic solutions to a diffusion equation of neutral type / J. Wiener, W. Heller // Int. J. Math. Math. Sci. — 1999. — V. 22, № 2. — P. 313–348.
10. Wiener, J. Boundary value problems for the diffusion equation with piecewise continuous time delay / J. Wiener, L. Debnath // Int. J. Math. Math. Sci. — 1997. — T. 20, № 1. — C. 187–195.
11. Buyukkahraman, M.L. On a partial differential equation with piecewise constant mixed arguments / M.L. Buyukkahraman, H. Bereketoglu // Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci. — 2020. — V. 44. — P. 1791–1801.
12. Veloz, T. Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument / T. Veloz, M. Pinto // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — V. 426, № 1. — P. 330–339.
13. Wang, Q. Analytical and numerical stability of partial differential equations with piecewise constant arguments / Q. Wang, J. Wen // Numer. Methods Partial Differ. Equat. — 2014. — V. 30, № 1. — P. 1–16.
14. Muminov, M.I. Forced diffusion equation with piecewise continuous time delay / M.I. Muminov, T.A. Radjabov // Adv. Math. Sci. J. — 2021. — V. 10, № 4. — P. 2269–2283.
15. Muminov, M.I. On existence conditions for periodic solutions to a differential equation with constant argument / M.I. Muminov, T.A. Radjabov // Nanosystems: Phys. Chem. Math. — 2022. — V. 13, № 5. — P. 491–497.
16. Muminov, M.I. Existence conditions for 2-periodic solutions to a non-homogeneous differential equations with piecewise constant argument / M.I. Muminov, T.A. Radjabov // Examples and Counterexamples. — 2024. — V. 5. — Art. 100145.

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DIFFUSION EQUATION WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENTS

M. I. Muminov[1], T. A. Radjabov[2]

[1] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
[1,2] Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Uzbekistan
[2] Kimyo International University in Tashkent, Uzbekistan
e-mail: [1] mmuminov@mail.ru, [2] radjabovtirkash@yandex.com

In this paper the boundary value problem (BVP) for diffusion equation with piecewise constant arguments is studied. By using the separation of variables method, the considered BVP is reduced to the investigation of the existence conditions of solutions of initial value problems for differential equation with piecewise constant arguments. Existence conditions of infinitely many solutions or emptiness for considered differential equation are established and explicit formula for these solutions are obtained. Several examples are given to illustrate the obtained results.

Keywords: diffusion equation, piecewise constant argument, periodic solution

REFERENCES

1. Hale, J.K. and Lunel, S.M.V., *Introduction to Functional Differential Equations*, New York: Springer Science Business Media, 2013.
2. Hino, Y., Naito, T., Minh, N.V., and Shin, J.S. *Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, London; New York: Taylor & Francis, 2002.
3. Wiener, J., *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 1993.
4. Cooke, K.L. and Wiener, J., A survey of differential equations with piecewise continuous arguments, in: *Delay Differential Equations and Dynamical Systems, Proc. of a Conf. in Honor of Kenneth Cooke Held in Claremont, California*, Eds. S. Busenberg, M. Martelli, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
5. Muminov, M.I., On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments, *Advances in Difference Equations*, 2017, vol. 336, pp. 1–17.
6. Muminov, M.I. and Murid, Ali H.M., Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments, *Open Math.*, 2020, vol. 18, no. 1, pp. 93–105.
7. Wiener, J., Boundary-value problems for partial differential equations with piecewise constant delay, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1991, vol. 14, pp. 301–321.
8. Wiener, J. and Debnath, L., Partial differential equations with piecewise constant delay, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1991, vol. 14, pp. 485–496.
9. Wiener, J. and Heller, W., Oscillatory and periodic solutions to a diffusion equation of neutral type, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1999, vol. 22, no. 2, pp. 313–348.
10. Wiener, J. and Debnath, L., Boundary value problems for the diffusion equation with piecewise continuous time delay, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 1, pp. 187–195.
11. Buyukkahraman, M.L. and Bereketoglu, H., On a partial differential equation with piecewise constant mixed arguments, *Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, 2020, vol. 44, pp. 1791–1801.
12. Veloz, T. and Pinto, M., Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, vol. 426, no. 1, pp. 330–339.
13. Wang, Q. and Wen, J., Analytical and numerical stability of partial differential equations with piecewise constant arguments, *Numer. Methods Partial Differ. Equat.*, 2014, vol. 30, no. 1, pp. 1–16.
14. Muminov, M.I. and Radjabov, T.A., Forced diffusion equation with piecewise continuous time delay, *Adv. Math. Sci. J.*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 2269–2283.
15. Muminov, M.I. and Radjabov, T.A., On existence conditions for periodic solutions to a differential equation with constant argument, *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 2022, vol. 13, no. 5, pp. 491–497.
16. Muminov, M.I. and Radjabov, T.A., Existence conditions for 2-periodic solutions to a non-homogeneous differential equations with piecewise constant argument, *Examples and Counterexamples*, 2024, vol. 5, art. 100145.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 35–49

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

О ДВИЖЕНИИ ФРОНТА В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ–АДВЕКЦИЯ С KPZ-НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А. О. Орлов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 26.03.2024 г., после доработки 24.06.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Получено асимптотическое приближение решения, имеющего вид движущегося внутреннего слоя (фронта), начально-краевой задачи для сингулярно возмущённого параболического уравнения реакция–диффузия–адвекция с KPZ-нелинейностью. Найдено асимптотическое приближение для скорости движения фронта. Доказательство теоремы существования и единственности решения проведено с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: уравнение реакция–адвекция–диффузия, KPZ-нелинейность, контрастные структуры, движение фронта, малый параметр

DOI: 10.31857/S0374064125010041, EDN: HZYRYP

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущённого параболического уравнения, которое отличается от классического сингулярно возмущённого уравнения реакция–диффузия–адвекция (см. [1, 2]) наличием дополнительного нелинейного слагаемого, содержащего квадрат градиента искомой функции (KPZ-нелинейности [3, 4]):

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2 A(u,x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-f(u,x,\varepsilon)=0,\quad x\in(-1,1),\ \ t\in(0,T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\quad t\in[0,T],$$

$$u(x,0,\varepsilon)=u_{init}(x,\varepsilon),\quad x\in[-1,1],\tag{1}$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ — малый параметр, $\varepsilon>0$ — заданная постоянная.

Решения типа бегущих волн для квазилинейных параболических уравнений реакция–диффузия–адвекция являются предметом интенсивного изучения (см. обширные монографии [5, 6]). Внимание к нелинейностям вида $A(u,x)(\partial u/\partial x)^2$ обусловлено как теоретическим интересом — квадрат является предельным показателем степени, при котором выполнены условия Бернштейна на рост нелинейности (см., например, [7–9]), так и важными приложениями, где такие нелинейности используются в математических моделях, в частности, моделях популяционной динамики [10], при моделировании роста свободной поверхности в теории полимеров [3, 4, 11], и многими другими. Отметим работу [12], в которой построены точные решения уравнения KPZ для нескольких физически оправданных нелинейностей. Однако там предполагается, что $A(u,x)=\mathrm{const}$, $f=f(x,t)$. Кардинальное отличие задачи (1) состоит в том, что рассматривается уравнение, в котором нелинейные слагаемые явно зависят от координаты и искомой функции. В настоящей работе предлагается алгоритм построения асимптотического приближения решения вида фронта, при этом скорость движения является функцией координаты.

Стационарные решения задачи (1) с пограничными и внутренними слоями изучены в статьях [13, 14]. Погранслойные решения у системы тихоновского типа с KPZ-нелинейностями изучены в работе [15].

Статья структурирована следующим образом. В п. 2 строится асимптотическое приближение решения вида движущегося фронта, используя метод А.Б. Васильевой [16]. Отметим, что поскольку задача (1) является сингулярно возмущённой, то при $\varepsilon=0$ уравнение задачи (1) меняет свой тип, превращаясь из параболического в алгебраическое с тремя корнями (см. условие 2), два из которых описывают устойчивые положения равновесия системы и представляют собой регулярную часть асимптотического приближения нулевого порядка точности. Однако регулярное приближение не позволяет описать узкую область с большим градиентом, в которой решение переходит с одного устойчивого уровня на другой. Для описания решения в этой области и согласования устойчивых положений равновесия между собой строятся так называемые функции переходного слоя. Таким образом строится формальное асимптотическое приближение решения во всей рассматриваемой области. В п. 3 указан алгоритм нахождения асимптотического приближения положения фронта. В п. 4 приведено обоснование формальной асимптотики и доказана теорема существования и единственности, используя асимптотический метод дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова, который показал свою эффективность во многих сингулярно возмущённых задачах [16]. Полученные результаты проиллюстрированы в п. 5 на примере, который может быть использован для разработки и верификации новых численных методов для рассматриваемого класса задач (см. [17]).

Результаты, полученные в данной статье, развивают исследования [1, 2], в которых рассмотрено движение фронта в уравнении реакция–диффузия–адвекция со слабой адвекцией и гладкими или модульными (разрывными при некотором значении искомой функции нелинейностями) источниками, и переносят их на новый класс сингулярно возмущённых задач с KPZ-нелинейностями. При этом, как и в работах [1, 2], доказана теорема существования и единственности решения, имеющего в обоих случаях одинаковую форму контрастной структуры типа ступеньки [16].

В обсуждаемой ниже задаче предполагается, что в начальный момент времени фронт уже сформирован. Это означает, что функция $u_{init}(x,\varepsilon)$ имеет внутренний переходный слой в окрестности некоторой точки $x_{00}\in(-1,1)$, т.е. она близка к некоторому корню $\varphi^{(-)}(x)$ вырожденного уравнения $f(u,x,0)=0$ левее точки x_{00} и к корню $\varphi^{(+)}(x)$ правее этой точки. В окрестности x_{00} происходит резкий переход от $\varphi^{(-)}(x)$ к $\varphi^{(+)}(x)$.

Будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 1. Функции $A(u,x)$, $f(u,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими в своих областях определения.

Условие 2. Вырожденное уравнение $f(u,x,0)=0$ имеет ровно три решения $u=\varphi^{(\pm,0)}(x)$, причём $\varphi^{(-)}(x)<\varphi^{(0)}(x)<\varphi^{(+)}(x)$, $x\in[-1,1]$, а также справедливы неравенства

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0)>0,\quad f_u(\varphi^{(0)}(x),x,0)<0,\quad x\in[-1,1].$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ

Асимптотика решения задачи (1) строится методом пограничных функций отдельно в каждой из областей $[-1,\hat{x}]\times[0,T]$ и $[\hat{x},1]\times[0,T]$ с подвижной границей (см. [16]) с использованием развиваемого в научной школе профессоров А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, Н.Н. Нефедова эффективного метода построения асимптотики локализации внутреннего слоя в виде

$$U(x,\varepsilon)=\begin{cases}U^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t,\varepsilon)\in[-1,\hat{x}]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0],\\ U^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t,\varepsilon)\in[\hat{x},1]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0].\end{cases}$$

Каждую из функций $U^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ будем представлять в виде суммы трёх слагаемых:

$$U^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)=\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)+Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+R^{(\pm)}\big(\eta^{(\pm)},\varepsilon\big),$$

где $\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)=\bar{u}_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x)+\ldots$ — регулярная часть разложения, функции $Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)=$ $=Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+\ldots$ описывают поведение решения в окрестности точки перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$, $\xi=(x-\hat{x}(t,\varepsilon))/\varepsilon$ — переменная переходного слоя: $\xi\leqslant 0$ для функций с индексом $(-)$ и $\xi\geqslant 0$ для функций с индексом $(+)$; функции $R^{(\pm)}(\eta^{(\pm)},\varepsilon)=R_0^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})+\varepsilon R_1^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})+\ldots$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка $[-1,1]$, $\eta^{(\pm)}=(x\mp 1)/\varepsilon$ — растянутые переменные вблизи точек $x=\pm 1$ соответственно. Поскольку функции $R_i^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})$ определяются стандартным образом (см., например, [16]), то процедуру их построения опускаем. Отметим, что данные функции не зависят от переменной t и тем самым не участвуют в описании движущегося переходного слоя, а функции $R_0^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})=0$ в силу краевых условий Неймана.

Положение внутреннего переходного слоя определяется из условия C^1-сшивания асимптотических представлений $U^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$:

$$U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varphi^{(0)}(\hat{x}(t,\varepsilon)), \tag{2}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{3}$$

Точку перехода $x=\hat{x}(t,\varepsilon)$ будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$\hat{x}(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\ldots \tag{4}$$

Коэффициенты данного разложения будут определены в процессе построения асимптотики.

Регулярная часть асимптотики определяется после подстановки представления для функций $\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ в уравнение

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{u}^{(\pm)}}{\partial x^2}-\varepsilon^2A(\bar{u}^{(\pm)},x)\left(\frac{\partial\bar{u}^{(\pm)}}{\partial x}\right)^2-f(\bar{u}^{(\pm)},x,\varepsilon)=0.$$

Стандартным образом [16] получим алгебраические уравнения для определения функций регулярной части $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$, $k=0,1,\ldots$

С учётом условия 2 регулярные функции нулевого порядка определяются как

$$\bar{u}_0^{(\pm)}(x)=\varphi^{(\pm)}(x).$$

Для сокращения записи введём обозначения

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x):=f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0).$$

Функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ при $k=1,2,\ldots$ определяются из уравнений

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x)\bar{u}_k^{(\pm)}(x)=\bar{h}_k^{(\pm)}(x),$$

где функции $\bar{h}_k^{(\pm)}(x)$ известны на каждом k-м шаге и выражаются рекуррентно через функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ с индексами $0,1,\ldots,k-1$. Разрешимость этих уравнений следует из условия 2.

Для того чтобы получить уравнения, которым удовлетворяют функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, перепишем дифференциальный оператор задачи в переменных (ξ,t). Тогда уравнения для функций $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $k=0,1,\ldots$, определяются стандартным способом [16] путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в обеих частях равенств:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}\frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial\xi}+A\big(\bar{u}^{(\pm)}\big(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon)\big)\left(\frac{\partial\bar{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2-\\ -A\big(\bar{u}^{(\pm)}\big(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big)+Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon)\big)\left(\frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2-\varepsilon\frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial t}=\\ =f\big(\bar{u}^{(\pm)}\big(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big)+Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big)-f\big(\bar{u}^{(\pm)}\big(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big).\end{gathered}\tag{5}$$

В отличие от подхода, изложенного в работе [2], мы не будем раскладывать по степеням ε точку перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$. Это упростит алгоритм построения асимптотики. Отметим, что уравнения, из которых находятся функции $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, содержат функции, зависящие от $\hat{x}(t,\varepsilon)$, $\partial\hat{x}(t,\varepsilon)/\partial t$, что и объясняет наличие у $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ аргумента ε.

Потребуем, чтобы функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $k=0,1,\ldots$, удовлетворяли условиям равенства нулю на бесконечности: $Q_k^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0$ при $\xi\to-\infty$, $Q_k^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0$ при $\xi\to+\infty$, $k=0,1,\ldots$, $t\in[0,T]$.

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в правой и левой частях равенств (5), получаем уравнения для функции $Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)$ при $\xi\leqslant 0$ и функции $Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)$ при $\xi\geqslant 0$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi}-A\big(\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\hat{x}(t,\varepsilon)\big)\left(\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2=\\ =f\big(\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\hat{x}(t,\varepsilon),0\big).\end{gathered}\tag{6}$$

Дополнительные условия при $\xi=0$ получим из условия непрерывного сшивания (2), записанного в нулевом порядке по ε:

$$Q_0^{(-)}(0,t,\varepsilon)+\varphi^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon))=Q_0^{(+)}(0,t,\varepsilon)+\varphi^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon))=\varphi^{(0)}(\hat{x}(t,\varepsilon)).$$

Добавим также условия на бесконечности: $Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0$ при $\xi\to-\infty$, $Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0$ при $\xi\to+\infty$, $t\in[0,T]$.

Введём оператор D, действующий по правилу

$$D\hat{x}:=\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t},\tag{7}$$

и функции

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon), \tag{8}$$

$$\tilde{u}(\xi,t,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon), & \text{если } \xi\leqslant 0,\\ \varphi^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon), & \text{если } \xi\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\tilde{v}^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}(\xi,t,\varepsilon),\quad \xi\leqslant 0,\quad \tilde{v}^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}(\xi,t,\varepsilon),\quad \xi\geqslant 0.$$

Замечание. Из вида уравнений (6) следует, что в функциях $Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $\tilde{u}(\xi,t,\varepsilon)$, $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ можно перейти к другому набору аргументов — $(\xi,\hat{x})$. В дальнейшем будем пользоваться обоими наборами, выбирая для каждого конкретного случая наиболее удобный.

Перепишем уравнения (6), а также дополнительные условия, с использованием (8):

$$\frac{\partial^2\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+D\hat{x}\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}-A(\tilde{u}^{(\pm)},\hat{x})\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2=f(\tilde{u}^{(\pm)},\hat{x},0),$$

$$\tilde{u}^{(\pm)}(0,\hat{x})=\varphi^{(0)}(\hat{x}),\quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty,\hat{x})=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \tag{9}$$

Наряду с задачами (9), рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\xi^2}+W\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}-A(\hat{u},\hat{x})\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}\right)^2=f(\hat{u},\hat{x},0),\quad \hat{u}(0,\hat{x})=\varphi^{(0)}(\hat{x}),\quad \hat{u}(\pm\infty,\hat{x})=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \tag{10}$$

Сформулируем и докажем результат существования решения задачи (10) в виде леммы.

Лемма. *Для каждого $\hat{x}\in(-1,1)$ существует единственная величина W такая, что задача* (10) *имеет единственное гладкое монотонное решение $\hat{u}(\xi,\hat{x})$, удовлетворяющее оценке*

$$|\hat{u}(\xi,\hat{x})-\varphi^{(\pm)}(\hat{x})|<C\exp\{-\kappa|\xi|\},$$

где C и κ — некоторые положительные постоянные. При этом зависимость $W(\hat{x})$ определяется как

$$W(\hat{x})=\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\varphi^{(+)}(\hat{x})}f(u,\hat{x},0)\exp\left\{-2\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{u}A(y,\hat{x})\,dy\right\}du\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}(\xi,\hat{x})\right)^2\exp\left\{-2\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\tilde{u}(\xi,\hat{x})}A(y,\hat{x})dy\right\}d\xi\right]^{-1}.$$

Гладкость функции $W(\hat{x})$ совпадает с гладкостью функций $f(u,\hat{x},0)$ и $A(u,\hat{x})$.

Доказательство. Для того чтобы использовать известный результат из [18], сделаем монотонное преобразование, предложенное А.В. Бицадзе в работе [19]:

$$z(\xi,\hat{x}):=z(\hat{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x})=\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\hat{u}(\xi,\hat{x})}\exp\left\{-\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{y}A(r,\hat{x})\,dr\right\}dy,\quad (\hat{u},\hat{x})\in[\varphi^{(-)}(\hat{x}),\varphi^{(+)}(\hat{x})]\times[-1,1].$$

Введём обозначения

$$z^{(\pm,0)}(\hat{x})=\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\varphi^{(\pm,0)}(\hat{x})}\exp\left\{-\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{y}A(r,\hat{x})\,dr\right\}dy.$$

В силу монотонности преобразования $z(\hat{u},\hat{x})$ по $\hat{u}$ можно определить обратную функцию

$$\hat{u}(\xi,\hat{x})=h(z(\xi,\hat{x}),\hat{x}),\quad (z,\hat{x})\in[0,z^{(+)}(\hat{x})]\times[-1,1].$$

Таким образом, задача (10) переходит в задачу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+W\frac{\partial z}{\partial\xi}-f(h(z,\hat{x}),\hat{x},0)\exp\left\{-\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{h(z,\hat{x})}A(r,\hat{x})\,dr\right\}=0,$$

$$z(-\infty,\hat{x})=0,\quad z(0,\hat{x})=z^{(0)}(\hat{x}),\quad z(+\infty,\hat{x})=z^{(+)}(\hat{x}), \tag{11}$$

для которой в силу условий 1 и 2 верны [18] следующие утверждения.

1. Для каждого $\hat{x}\in(-1,1)$ существует единственная величина W такая, что задача (11) имеет единственное гладкое монотонное решение $\hat{z}(\xi,\hat{x})$, удовлетворяющее оценке

$$|z(\xi,\hat{x})-z^{(\pm)}(\hat{x})|<C\exp\{-\kappa|\xi|\},$$

где C и κ — некоторые положительные постоянные.

2. Зависимость $W(\hat{x})$ определяется как

$$W(\hat{x})=\int\limits_0^{z^{(+)}(\hat{x})}f(h(z,\hat{x}),\hat{x},0)\exp\left\{-\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{h(z,\hat{x})}A(r,\hat{x})\,dr\right\}dz\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\hat{z}}{\partial\xi}(\xi,\hat{x})\right)^2d\xi\right]^{-1}. \tag{12}$$

Гладкость функции $W(\hat{x})$ совпадает с гладкостью функций $f(u,\hat{x},0)$ и $A(u,\hat{x})$.

Наконец, возвращаясь к функции $\hat{u}(\xi,\hat{x})$ с помощью преобразования $\hat{u}(\xi,\hat{x})=h(z(\xi,\hat{x}),\hat{x})$ и пересчитывая интегралы в выражении (12), имеем утверждение леммы. Лемма доказана.

Потребуем выполнения ещё одного условия.

Условие 3. Задача

$$\frac{dx}{dt}=W(x),\quad x(0)=x_{00} \tag{13}$$

имеет решение $x=x_0(t)$ такое, что $x_0(t)\in(-1,1)$ при $t\in[0,T]$; $W(x)>0$ для всех $x\in[-1,1]$.

Неравенство $W(x)>0$ в условии 3 гарантирует отсутствие стационарных решений у задачи (13). Обозначим через (9a) задачи (9), в которых заменим $\hat{x}$ на $x_0(t)$, или, иначе, в которых положим $\varepsilon=0$.

Из леммы и условия 3 следует единственная разрешимость задач (9a), так как выполнено условие $D\hat{x}_0=W(x_0)$. При этом

$$\frac{\partial\tilde{u}^{(+)}}{\partial\xi}(0,x_0(t))-\frac{\partial\tilde{u}^{(-)}}{\partial\xi}(0,x_0(t))=0.$$

В силу предполагаемой гладкости функций $f(u,\hat{x},0)$, $A(u,\hat{x})$ (см. условие 1) задачи (9) являются регулярными возмущениями задач (9a), потому они также единственно разрешимы. Отметим, что в силу представления (4)

$$\frac{\partial\tilde{u}^{(+)}}{\partial\xi}(0,\hat{x}(t,\varepsilon))-\frac{\partial\tilde{u}^{(-)}}{\partial\xi}(0,\hat{x}(t,\varepsilon))=O(\varepsilon).$$

Таким образом, построение функций переходного слоя в нулевом порядке завершено.

Функции переходного слоя первого порядка находятся из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+D\hat{x}\frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial\xi}-2\tilde{A}(\xi,t)\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial\xi}-\big(\tilde{A}_u(\xi,t)\big(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\big)^2+\tilde{f}_u(\xi,t)\big)Q_1^{(\pm)}=r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),$$

$$Q_1^{(\pm)}(0,t,\varepsilon)+\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x})=0,\quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty,t,\varepsilon)=0, \tag{14}$$

где введены обозначения

$$\tilde{f}_u(\xi,t)=f_u(\tilde{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x},0),\quad \tilde{A}(\xi,t)=A_u(\tilde{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x}),\quad \tilde{A}_u(\xi,t)=A_u(\tilde{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x}) \tag{15}$$

и

$$r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)=\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial t}(\xi,t,\varepsilon)+2\tilde{A}(\xi,t)\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x})+$$

$$+\left(\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x})+\xi\frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x})\right)\big(\tilde{f}_u(\xi,t)+\tilde{A}_u(\xi,t)\big(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\big)^2\big)+\xi\big(\tilde{f}_x(\xi,t)+\tilde{A}_x(\xi,t)\big(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\big)^2\big)+\tilde{f}_\varepsilon(\xi,t).$$

Здесь производные $\tilde{f}_x(\xi,t)$, $\tilde{f}_\varepsilon(\xi,t)$ вычисляются в той же точке, что и производная $\tilde{f}_u(\xi,t)$ в (15). Аналогично $\tilde{A}_x(\xi,t)$ вычисляется в той же точке, что и $\tilde{A}_u(\xi,t)$. Во всех введённых здесь обозначениях аргумент ε подразумеваем, но для краткости опускаем. Задачу для функции $Q_1^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)$ будем решать на полупрямой $\xi\leqslant 0$, а для функции $Q_1^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)$ — на полупрямой $\xi\geqslant 0$. Решения задач (14) записываются в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)=-\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x})\frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,\hat{x})}+$$

$$+\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\int\limits_0^\xi\frac{e^{-(D\hat{x})\eta}}{(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,\hat{x}))^2p^{(\pm)}(\eta,\hat{x})}\int\limits_{\pm\infty}^{\eta}\tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,\hat{x})p^{(\pm)}(\sigma,\hat{x})e^{(D\hat{x})\sigma}r_1^{(\pm)}(\sigma,t,\varepsilon)\,d\sigma\,d\eta, \tag{16}$$

где

$$p^{(\pm)}(\xi,\hat{x})=\exp\left\{-2\int\limits_0^\xi A(\tilde{u}^{(\pm)}(y,\hat{x}),\hat{x})\tilde{v}^{(\pm)}(y,\hat{x})\,dy\right\}.$$

Из выражения для функций $r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ следует, что они имеют экспоненциальные оценки [16], а из (16) стандартным образом выводим, что аналогичные оценки справедливы и для функций $Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$.

Аналогично первому приближению можно найти для любого $k=2,3,\ldots$ функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$: они определяются из краевых задач с таким же дифференциальным оператором, что и в задачах (14).

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ФРОНТА

Опишем алгоритм нахождения асимптотического приближения положения фронта. Неизвестные коэффициенты $x_i(t)$, $i\in\mathbb{N}$, разложения определяются из условий сшивания (3) производных асимптотических приближений. Введём функцию

$$H(\varepsilon,t):=\varepsilon\left(\frac{dU^{(+)}}{dx}(\hat{x},t,\varepsilon)-\frac{dU^{(-)}}{dx}(\hat{x},t,\varepsilon)\right)=H_0(\varepsilon,t)+\varepsilon H_1(\varepsilon,t)+\varepsilon^2H_2(\varepsilon,t)+\ldots, \tag{17}$$

где

$$H_0(\varepsilon,t)=\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,\hat{x})-\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,\hat{x}),$$

$$H_1(\varepsilon,t)=\frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(\hat{x})-\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(\hat{x})+\left(\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,t,\varepsilon)-\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,t,\varepsilon)\right)$$

и т.д.

Условие C^1-сшивания (3) выражается равенством $H(\varepsilon,t)=0$. В силу леммы и условия 3 с учётом разложения точки перехода (4) это равенство выполнено в порядке ε^0.

Анализ задач (9), (10) показывает, что функция $H_0(\varepsilon,t)$ может быть представлена в виде

$$H_0(\varepsilon,t)=(D\hat{x}-W(\hat{x}))\left[\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,\hat{x})}\int\limits_0^{\pm\infty}(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x}))^2e^{(D\hat{x})\xi}p^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\,d\xi\right]_-^+ +O(\varepsilon^2). \qquad (18)$$

Здесь и далее $[\ ]_-^+$ означает разность между выражениями, помеченными символами $+$ и $-$.

Как следует из разложения (17) и представления (18), члены $x_i(t)$, $i\geqslant 1$, высших порядков в (4) могут быть найдены из следующих задач Коши:

$$\frac{dx_i}{dt}-W'(x_0(t))x_i(t)=G_i(t), \quad x_i(0)=0,$$

где $G_i(t)$ — известные функции.

4. ОБОСНОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ

Положим

$$X_n(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i(t), \quad \xi=\frac{x-X_n(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Кривая $X_n(t,\varepsilon)$ разделяет область $\bar{D}\colon(x,t)\in[-1,1]\times[0,T]$ на две подобласти:

$$\bar{D}_n^{(-)}\colon (x,t)\in[-1,X_n(t,\varepsilon)]\times[0,T] \quad \text{и} \quad \bar{D}_n^{(+)}\colon (x,t)\in[X_n(t,\varepsilon),1]\times[0,T].$$

Определим функции

$$U_n^{(-)}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\Big(\bar{u}_i^{(-)}(x)+Q_i^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)+R_i^{(-)}(\eta^{(-)})\Big), \quad (x,t)\in\bar{D}_n^{(-)},$$

$$U_n^{(+)}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\Big(\bar{u}_i^{(+)}(x)+Q_i^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)+R_i^{(+)}(\eta^{(+)})\Big), \quad (x,t)\in\bar{D}_n^{(+)},$$

где $\hat{x}(t,\varepsilon)$, входящие в выражения для функций переходного слоя, заменены на $X_n(t,\varepsilon)$, и обозначим

$$U_n(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}U_n^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_n^{(-)},\\ U_n^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_n^{(+)}.\end{cases} \qquad (19)$$

Для доказательства существования и единственности решения вида движущегося фронта используем асимптотический метод дифференциальных неравенств [16]. Построим непрерывные функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$, $\beta(x,t,\varepsilon)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим условиям.

1. Условие упорядоченности:

$$\alpha(x,t,\varepsilon)\leqslant\beta(x,t,\varepsilon),\quad x\in[-1,1],\ t\in[0,T],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]. \tag{20}$$

2. Действие дифференциального оператора на верхнее и нижнее решения:

$$L[\beta]:=\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial t}-\varepsilon^2A(\beta,x)\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2-f(\beta,x,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant$$

$$\leqslant L[\alpha]:=\varepsilon^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\varepsilon^2A(\alpha,x)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-f(\alpha,x,\varepsilon) \tag{21}$$

для всех $x\in(-1,1)$ и $t\in[0,T]$, за исключением тех $x(t)$, в которых функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,t,\varepsilon)$ являются негладкими.

3. Условия на границе:

$$\frac{d\alpha}{dx}(-1,t,\varepsilon)\geqslant 0\geqslant\frac{\partial\beta}{\partial x}(-1,t,\varepsilon),\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x}(+1,t,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\frac{\partial\beta}{\partial x}(+1,t,\varepsilon),\quad t\in[0,T],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]. \tag{22}$$

4. Условия на начальную функцию:

$$\alpha(x,0,\varepsilon)\leqslant u_{init}(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,0,\varepsilon),\quad x\in[-1,1],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]. \tag{23}$$

5. Условия на скачок производных:

$$\frac{\partial\beta}{dx}(\overline{x}(t)-0,t,\varepsilon)\geqslant\frac{\partial\beta}{dx}(\overline{x}(t)+0,t,\varepsilon), \tag{24}$$

где $\overline{x}(t)$ — точка, в которой верхнее решение является негладким;

$$\frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x}(t)-0,t,\varepsilon)\leqslant\frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x}(t)+0,t,\varepsilon), \tag{25}$$

где $\underline{x}(t)$ — точка, в которой нижнее решение является негладким.

Известно (см. [20]), что при выполнении условий (20)–(25) существует единственное решение задачи (1), для которого выполняются неравенства

$$\alpha(x,t,\varepsilon)\leqslant u(x,t,\varepsilon)\leqslant\beta(x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in[-1,1]\times[0,T].$$

Докажем следующую теорему существования и единственности.

Теорема. *При выполнении условий* 1–3 *для любой достаточно гладкой начальной функции* $u_{init}(x)$, *лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha(x,0,\varepsilon)\leqslant u_{init}(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,0,\varepsilon),$$

существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$ *задачи* (1), *которое при любом* $t\in[0,T]$ *заключено между этими верхним и нижним решениями и для которого функция* $U_n(x,t,\varepsilon)$ *является равномерным в области* $[-1,1]\times[0,T]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O(\varepsilon^{n+1})$.

Доказательство. Верхнее и нижнее решения задачи будем строить как модификацию асимптотических рядов (19). Зададим функцию

$$x_\beta(t,\varepsilon)=X_{n+1}(t)-\varepsilon^{n+1}\delta(t),$$

а положительную функцию $\delta(t)>0$ определим ниже. Построим верхнее решение задачи в каждой из областей $\bar D_\beta^{(-)}: (x,t)\in[-1,x_\beta(t,\varepsilon)]\times[0,T]$ и $\bar D_\beta^{(+)}: (x,t)\in[x_\beta(t,\varepsilon),1]\times[0,T]$:

$$\beta(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\beta^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar D_\beta^{(-)},\\ \beta^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar D_\beta^{(+)}.\end{cases}$$

Сшивать функции $\beta^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $\beta^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке $x_\beta(t,\varepsilon)$ будем таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$\beta^{(-)}(x_\beta(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\beta^{(+)}(x_\beta(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varphi^{(0)}(x_\beta(t,\varepsilon)).$$

Отметим, что функция $\beta(x,t,\varepsilon)$ не является гладкой. Введём растянутую переменную

$$\xi_\beta=\frac{x-x_\beta(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Построим функции $\beta^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ как модификации формальной асимптотики (19):

$$\beta^{(-)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(-)}|_{\xi_\beta}+\varepsilon^{n+1}\big(\mu+q_\beta^{(-)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)\big)+\varepsilon^{n+1}R_\beta^{(-)}(\eta^{(-)}),\quad (x,t)\in D_\beta^{(-)},\ \xi_\beta\leqslant0,\ \eta^{(-)}\geqslant0;$$

$$\beta^{(+)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(+)}|_{\xi_\beta}+\varepsilon^{n+1}\big(\mu+q_\beta^{(+)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)\big)+\varepsilon^{n+1}R_\beta^{(+)}(\eta^{(+)}),\quad (x,t)\in D_\beta^{(+)},\ \xi_\beta\geqslant0,\ \eta^{(+)}\leqslant0.$$

Здесь под обозначениями $U_{n+1}^{(\pm)}|_{\xi_\beta}$ понимаем функции из (19), в которых аргумент ξ у функций переходного слоя заменён на ξ_β, а X_{n+1} — на x_β.

Положительная величина μ выбирается так, чтобы были выполнены условия (20) и (21). Функции $R_\beta^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})$ подбираются так, чтобы было выполнено условие (22) (их построение в данной работе не рассматривается). Функции $q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)$ нужны для устранения невязок, которые возникают при действии оператора на верхнее решение. Определим их из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 q_\beta^{(\pm)}}{\partial\xi_\beta^2}+Dx_\beta\frac{\partial q_\beta^{(\pm)}}{\partial\xi_\beta}-2\tilde A(\xi_\beta,t)\tilde v^{(\pm)}(\xi_\beta,x_\beta)\frac{\partial q_\beta^{(\pm)}}{\partial\xi_\beta}-$$
$$-\big(\tilde A_u(\xi_\beta,t)\big(\tilde v^{(\pm)}(\xi_\beta,x_\beta)\big)^2+\tilde f_u(\xi_\beta,t)\big)q_\beta^{(\pm)}-qf^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)=0,$$
$$q_\beta^{(\pm)}(0,t,\varepsilon)+\mu=0,\quad q_\beta^{(\pm)}(\pm\infty,t,\varepsilon)=0,\tag{26}$$

где $qf^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)=\mu\big(\tilde A_u(\xi_\beta,t)\big(\tilde v^{(\pm)}(\xi_\beta,x_\beta)\big)^2+\tilde f_u(\xi_\beta,t)-\bar f_u^{(\pm)}(x_\beta)\big)$.

Для данных функций можно получить явные выражения

$$q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)=-\mu\frac{\tilde v^{(\pm)}(\xi,x_\beta)}{\tilde v^{(\pm)}(0,x_\beta)}+$$
$$+\tilde v^{(\pm)}(\xi_\beta,x_\beta)\int\limits_0^{\xi_\beta}\frac{e^{-(Dx_\beta)\eta}}{(\tilde v^{(\pm)}(\eta,x_\beta))^2p^{(\pm)}(\eta,x_\beta)}\int\limits_{\pm\infty}^{\eta}\tilde v^{(\pm)}(\sigma,x_\beta)e^{(Dx_\beta)\sigma}p^{(\pm)}(\sigma,x_\beta)qf^{(\pm)}(\sigma,t,\varepsilon)\,d\sigma\,d\eta.\tag{27}$$

Функции $q^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)$ имеют экспоненциальные оценки [16].

Можно упростить выражения (27) следующим образом:

$$q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)=$$

$$=-\mu-\mu\bar{f}_u^{(\pm)}(x_\beta)\tilde{v}^{(\pm)}(\xi_\beta,x_\beta)\int\limits_0^{\xi_\beta}\frac{e^{-(Dx_\beta)\eta}}{(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x_\beta))^2p^{(\pm)}(\eta,x_\beta)}\int\limits_{\pm\infty}^{\eta}\tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,x_\beta)e^{(Dx_\beta)\sigma}p^{(\pm)}(\sigma,x_\beta)\,d\sigma\,d\eta.$$

По аналогичному алгоритму построим нижнее решение. Зададим функцию

$$x_\alpha(t,\varepsilon)=X_{n+1}(t)+\varepsilon^{n+1}\delta(t),$$

где $\delta(t)$ — та же самая функция, что и при построении верхнего решения.

Построим нижнее решение задачи в каждой из областей $\bar{D}_\alpha^{(-)}:(x,t)\in[-1,x_\alpha(t,\varepsilon)]\times[0,T]$ и $\bar{D}_\alpha^{(+)}:(x,t)\in[x_\alpha(t,\varepsilon),1]\times[0,T]$:

$$\alpha(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_\alpha^{(-)},\\ \alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_\alpha^{(+)}.\end{cases}$$

Будем сшивать функции $\alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $\alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке $x_\alpha(t,\varepsilon)$ таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$\alpha^{(-)}(x_\alpha(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\alpha^{(+)}(x_\alpha(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varphi^{(0)}(x_\alpha(t,\varepsilon)).$$

Отметим, что функция $\alpha(x,t,\varepsilon)$ не является гладкой. Введём растянутую переменную

$$\xi_\alpha=\frac{x-x_\alpha(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Построим функции $\alpha^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ как модификации формальной асимптотики (19):

$$\alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(-)}\big|_{\xi_\alpha}-\varepsilon^{n+1}(\mu+q_\alpha^{(-)}(\xi_\alpha,t,\varepsilon))+\varepsilon^{n+1}R_\alpha^{(-)}(\eta^{(-)}),\quad (x,t)\in D_\alpha^{(-)},\ \xi_\alpha\leqslant0,\ \eta^{(-)}\geqslant0;$$

$$\alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(+)}\big|_{\xi_\alpha}-\varepsilon^{n+1}(\mu+q_\alpha^{(+)}(\xi_\alpha,t,\varepsilon))+\varepsilon^{n+1}R_\alpha^{(+)}(\eta^{(+)}),\quad (x,t)\in D_\alpha^{(+)},\ \xi_\alpha\geqslant0,\ \eta^{(+)}\leqslant0.$$

Здесь $\mu>0$ — величина, что и в выражении для верхнего решения, а $q_\alpha^{(\pm)}(\xi_\alpha,t,\varepsilon)$ определяются из задач (26), в которых растянутая переменная ξ_β заменена на ξ_α, а x_β — на x_α.

Убедимся, что построенные функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам (20)–(25). Условие упорядоченности (20) можно проверить аналогично тому, как это было сделано в работе [2].

Покажем, что неравенство (21) выполняется. Из способа построения верхнего и нижнего решений следуют равенства

$$L\big[\alpha^{(\pm)}\big]=\varepsilon^{n+1}\bar{f}_u^{(\pm)}(x_\alpha)\mu+O(\varepsilon^{n+2}),\quad L\big[\beta^{(\pm)}\big]=-\varepsilon^{n+1}\bar{f}_u^{(\pm)}(x_\beta)\mu+O(\varepsilon^{n+2}).$$

Неравенства вблизи границы (22) выполняются за счёт стандартной модификации погранслойных функций [16] (их проверка в данной работе не предусматривается).

Проверим условие скачка производной (24)

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta}-\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta}\right)=-\varepsilon^{n+1}\frac{1}{\tilde{v}(0,x_0)}\left(L(x_0)\frac{d\delta}{dt}-L(x_0)W'(x_0(t))\delta(t)+F(x_0)\right)+O(\varepsilon^{n+2}),$$

где

$$F(x_0) = \mu \left[\bar{f}_u^{(\pm)}(x_0) \int\limits_{\pm\infty}^{0} p(\sigma, x_0)\tilde{v}(\sigma, x_0) e^{(Dx_0)\sigma}\, d\sigma \right]_-^+,$$

$$L(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, x_0) e^{(Dx_0)\xi} p(\xi, x_0)\, d\xi > 0.$$

Здесь индекс у функций $\tilde{v}(\xi, x_0)$, $p(\xi, x_0)$ опущен в силу их гладкости при $\xi = 0$.

Определим функцию $\delta(t)$ как решение задачи

$$L(x_0)\frac{d\delta}{dt} - L(x_0)W'(x_0(t))\delta(t) + F(x_0) = \sigma, \quad \delta(0) = \delta_0,$$

где σ — достаточно большая положительная величина и $\delta_0 > 0$. В этом случае решение задачи $\delta(t)$ — положительная функция. Таким образом,

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \beta^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta} - \frac{\partial \beta^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta} \right) = -\varepsilon^{n+1}\frac{\sigma}{\tilde{v}(0, x_0)} + O(\varepsilon^{n+2}).$$

Выражение в правой части отрицательно ввиду $\sigma > 0$. При том же выборе функции $\delta(t)$ будет выполнено неравенство скачка производной для нижнего решения $\alpha(x, t, \varepsilon)$. Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = e^u(1 - e^{-u})\left(\frac{1}{2} - e^{-u}\right)(1 - \varphi^{(0)}(x) - e^{-u}), \quad x \in (-1, 1), \ \ t \in (0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1].$$

Будем считать, что при всех $x \in [-1, 1]$ выполнено неравенство $1/4 < \varphi^{(0)}(x) < 1/2$. Члены регулярной части нулевого порядка легко определяются:

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = 0, \quad \bar{u}_0^{(+)}(x) = \ln 2.$$

Задача для функции $\tilde{u}(\xi, x_0)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + W\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\right)^2 = e^{\tilde{u}}(1 - e^{-\tilde{u}})\left(\frac{1}{2} - e^{-\tilde{u}}\right)(1 - \varphi^{(0)}(x_0) - e^{-\tilde{u}}),$$

$$\tilde{u}(0, x_0) = -\ln(1 - \varphi^{(0)}(x_0)), \quad \tilde{u}(-\infty, x_0) = 0, \quad \tilde{u}(\infty, x_0) = \ln 2. \tag{28}$$

Заменой $z(\xi, x_0) := z(\tilde{u}(\xi, x_0)) = 1 - e^{-\tilde{u}(\xi, x_0)}$ задача (28) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + W\frac{\partial z}{\partial \xi} = z\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - \varphi^0(x_0)), \quad z(-\infty, x_0) = 0, \quad z(\infty, x_0) = 1/2. \tag{29}$$

Решение задачи (29) определяется по формуле

$$z=\left(2+\left(\frac{1}{\varphi(x_0)}-2\right)\exp\left\{-\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right\}\right)^{-1}.$$

Сделав обратную замену, получим выражение для решения исходной задачи (28):

$$\tilde{u}(\xi,x_0)=-\ln\left(1-\left(2+\left(\frac{1}{\varphi(x_0)}-2\right)\exp\left\{-\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right\}\right)^{-1}\right).$$

Начальная задача для определения положения фронта в нулевом приближении имеет вид

$$\frac{dx_0}{dt}=\sqrt{2}\left(\varphi^{(0)}(x_0)-\frac{1}{4}\right),\quad x_0(0)=x_{00}. \tag{30}$$

Автор выражает благодарность проф. Н.Н. Нефедову за плодотворные обсуждения и внимание к работе.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефедов, Н.Н. Движение фронта со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа / Н.Н. Нефедов, Е.И. Никулин, А.О. Орлов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 6. — С. 763–776.
2. Божевольнов, Ю.В. Движение фронта в параболической задаче реакция–диффузия / Ю.В. Божевольнов, Н.Н. Нефедов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 264–273.
3. Kardar, M. Dynamic scaling of growing interfaces / M. Kardar, G. Parisi, Y.C. Zhang // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 56, № 9. — P. 889–892.
4. Burgers equation with correlated noise: renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth / E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, Y.C. Zhang // Phys. Rev. A. — 1989. — V. 39, № 6. — P. 3053–3075.
5. Gilding, B.H. Travelling Waves in Nonlinear Diffusion-Convection Reaction / B.H. Gilding, R. Kersner. — Basel : Birkhäuser, 2004. — 210 p.
6. Volpert, A.I. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems / A.I. Volpert, Vit.A. Volpert, Vl.A. Volpert. — Providence : Amer. Math. Soc., 1994. — 448 p.
7. Похожаев, С.И. Об уравнениях вида $\Delta u=f(x,u,Du)$ / С.И. Похожаев // Мат. сб. — 1980. — Т. 113, № 2. — С. 324–338.
8. Денисов, В.Н. О стабилизации решения задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений / В.Н. Денисов, А.Б. Муравник // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 351–355.
9. Муравник, А.Б. Об убывании неотрицательных решений сингулярных параболических уравнений с KPZ-нелинейностями / А.Б. Муравник // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 8. — С. 1422–1427.
10. Grimson, M.J. Continuum model for the spatiotemporal growth of bacterial colonies / M.J. Grimson, G.C. Barker // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 49, № 2. — P. 1680–1687.
11. Krug, J. Universality classes for deterministic surface growth / J. Krug, H. Spohn // Phys. Rev. A. — 1988. — V. 38, № 8. — P. 4271–4283.

12. Analytic traveling-wave solutions of the Kardar–Parisi–Zhang interface growing equation with different kind of noise terms / I.F. Barna, G. Bognár, L. Mátyás [et al.] // Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2019, Lisbon, Portugal, July 1–5 / Eds. S. Pinelas, J.R. Graef, S. Hilger, [et al.]. — Cham : Springer, 2020. — P. 239–253.
13. Васильева, А.Б. О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка / А.Б. Васильева, М.А. Давыдова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 6. — С. 938–947.
14. Нефедов, Н.Н. Существование и устойчивость решений с внутренним переходным слоем уравнения реакция–диффузия–адвекция с KPZ-нелинейностью / Н.Н. Нефедов, А.О. Орлов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1007–1021.
15. Нефедов, Н.Н. Существование и устойчивость стационарных решений с пограничными слоями в системе быстрого и медленного уравнений реакция–диффузия–адвекция с KPZ-нелинейностями / Н.Н. Нефедов, А.О. Орлов // Теор. мат. физика. — 2024. — Т. 220, № 1. — С. 137–153.
16. Нефедов, Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвеция: теория и применение / Н.Н. Нефедов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 22. — С. 2074–2094.
17. Аналитико-численный подход для решения сигулярно возмущённых параболических уравнений с использованием динамически адаптированных сеток / Д.В. Лукьяненко, В.Т. Волков, Н.Н. Нефедов [и др.] // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, № 3. — С. 334–341.
18. Fife, C.P. The generation and propogation of internal layers / C.P. Fife, L. Hsiao // Nonlin. Anal. Theory Methods Appl. — 1998. — V. 12, № 1. — P. 19–41.
19. Бицадзе, А.В. К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 11. — С. 1993–2008.
20. Fife, C.P. Comparison principles for reaction–diffusion systems / C.P. Fife, M.M. Tang // J. Differ. Equat. — 1995. — V. 40 — P. 168–185.

ON FRONT MOTION IN THE REACTION–DIFFUSION–ADVECTION PROBLEM WITH KPZ-NONLINEARITY

A. O. Orlov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

We obtain an asymptotic approximation to a moving inner layer (front) solution of an initial– boundary value problem for a singularly perturbed parabolic reaction–diffusion–advection equation with KPZ-nonlinearity. An asymptotic approximation for the velocity of the front is found. To prove the existence and uniqueness of a solution the asymptotic method of differential inequalities is used.

Keywords: reaction–advection–diffusion equation, KPZ-nonlinearity, contrast structures, front motion, small parameter

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-11-00069).

REFERENCES

1. Nefedov, N.N., Nikulin, E.I., and Orlov, A.O., Front motion in a problem with weak advection in the case of a continuous source and a modular-type source, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 6, pp. 757–770.
2. Bozhevol'nov, Y.V. and Nefedov, N.N., Front motion in the parabolic reaction–diffusion problem, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 2, pp. 264–273.
3. Kardar, M., Parisi, G., and Zhang, Y.C., Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, no. 9, pp. 889–892.

4. Medina, E., Hwa, T., Kardar, M., and Zhang, Y.C., Burgers equation with correlated noise: renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth, *Phys. Rev. A*, 1989, vol. 39, no. 6, pp. 3053–3075.
5. Gilding, B.H. and Kersner, R., *Travelling Waves in Nonlinear Diffusion–Convection Reaction*, Basel: Birkhäuser, 2004.
6. Volpert, A.I., Volpert, V.A., and Volpert, V.A., *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, Providence: Amer. Math. Soc., 1994.
7. Pokhozhaev, S.I., On equations of the form $\Delta u = f(x,u,Du)$, *Math. USSR-Sb.*, 1982, vol. 41, no. 2, pp. 269–280.
8. Denisov, V.N. and Muravnik, A.B., On stabilization of the solution of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 3, pp. 369–374.
9. Muravnik, A.B., Decay of nonnegative solutions of singular parabolic equations with KPZ-nonlinearities, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 8, pp. 1375–1380.
10. Grimson, M.J. and Barker, G.C., Continuum model for the spatiotemporal growth of bacterial colonies, *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 49, no. 2, pp. 1680–1687.
11. Krug, J. and Spohn, H., Universality classes for deterministic surface growth, *Phys. Rev. A.*, 1988, vol. 38, no. 8, pp. 4271–4283.
12. Barna, I.F., Bognár, G. Mátyás, L. [et al.], Analytic traveling-wave solutions of the Kardar–Parisi–Zhang interface growing equation with different kind of noise terms, in: *Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2019, Lisbon, Portugal, July 1–5*, S. Pinelas, J.R. Graef, S. Hilger [et al.] eds., Cham: Springer, 2020.
13. Vasil'eva, A.B. and Davydova, M.A., On a contrast steplike structure for a class of second-order nonlinear singularly perturbed equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 6, pp. 900–908.
14. Nefedov, N.N. and Orlov, A.O., Existence and stability of solutions with internal transition layer for the reaction–diffusion–advection equation with a KPZ-nonlinearity, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 1009–1024.
15. Nefedov, N.N. and Orlov, A.O., Existence and stability of stationary solutions with boundary layers in a system of fast and slow reaction–diffusion–advection equations with KPZ-nonlinearities, *Theor. Math. Phys.*, 2024, vol. 220, no. 1, pp. 1178–1192.
16. Nefedov, N.N., Development of methods of asymptotic analysis of transition layers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 12, pp. 2068–2087.
17. Lukyanenko, D.V., Volkov, V.T., Nefedov, N.N. [et al.], Analytic-numerical approach to solving singularly perturbed parabolic equations with the use of dynamic adapted meshes, *Model. Anal. Int. Syst.*, 2016, vol. 23, no. 3, pp. 334–341.
18. Fife, C.P. and Hsiao, L., The generation and propogation of internal layers, *Nonlin. Anal. Theory Methods Appl.*, 1998, vol. 12, no. 1, pp. 19–41.
19. Bitsadze, A.V., On the theory of a class of nonlinear partial differential equations, *Differ. Equat.*, 1977, vol. 13, no. 11, pp. 1993–2008.
20. Fife, C.P. and Tang, M.M., Comparison principles for reaction–diffusion systems, *J. Differ. Equat.*, 1995, vol. 40, pp. 168–185.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 50–67

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

 К. Б. Сабитов

Самарский государственный технический университет,
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2022 г., после доработки 10.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Для двумерного волнового уравнения в цилиндрической области изучена первая граничная задача, установлен критерий единственности её решения, которое построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда решена проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлена оценка об отделимости от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения задачи.

Ключевые слова: волновое уравнение, задача Дирихле, критерий единственности, существование, устойчивость, ряд, малые знаменатели

DOI: 10.31857/S0374064125010058, EDN: HZWWAG

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волновое уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) - bu = 0 \tag{1}$$

в цилиндре $Q = \{(x,y,t)\colon (x,y) \in D,\ 0 < t < T\}$, где $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 < l^2\}$; $a > 0$, b, $T > 0$ и $l > 0$ — заданные действительные постоянные, и поставим первую граничную задачу.

Требуется найти функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y,t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q); \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv 0, \quad (x,y,t) \in Q; \tag{3}$$

$$u(x,y,t)\big|_{x^2+y^2=l^2} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{4}$$

$$u(x,y,0) = \tau(x,y), \quad u(x,y,T) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{5}$$

где $\tau(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования с граничным условием (4).

Известно, что задача Дирихле для уравнений гиперболического типа поставлена некорректно. С.Л. Соболев показал [1], что исследование вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости внутри тонкостенных баков ракет с собственными колебаниями) тесно связано с задачей Дирихле для волнового уравнения. В более известной форме эта связь показана в книге В.И. Арнольда [2, с. 132]. Достаточно полный обзор работ, посвящённых изучению задачи Дирихле для гиперболических уравнений, приведён в монографии Б.И. Пташника [3, с. 89–95] и в работах [4; 5, с. 112–118] автора.

Работы Р. Денчева [6–8] посвящены исследованию задачи Дирихле для уравнения (1) при $b=0$, $a=1$ с ненулевой правой частью и однородными условиями на границе области Ω, когда Ω — эллипсоид, цилиндр с образующими, параллельными оси t, и параллелепипед. В них также установлен критерий единственности и существования решения задачи в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ при определённых условиях на правую часть, связанных со сходимостью числовых рядов, при этом возникающие малые знаменатели не изучены.

В работе [9] для многомерного уравнения с волновым оператором в цилиндрической области $D\times(0,T)$ найдены условия $\sqrt{\lambda_k}T\neq m\pi$, где $k,m\in\mathbb{N}$, при которых имеет место теорема единственности решения задачи Дирихле. Здесь λ_k — собственные значения соответствующей спектральной задачи в области D.

В монографии Б.И. Пташника [3, с. 95–101] также изучена задача Дирихле в $(p+1)$-мерном параллелепипеде $Q=[0,T]\times\Pi$, где $\Pi=\{x\in R^p\colon 0\leqslant x_r\leqslant\pi,\ \ r=\overline{1,p}\}$, для строго гиперболического уравнения чётного порядка $2n$ с постоянными коэффициентами. Решение задачи определяется p-мерным рядом Фурье. Установлен критерий единственности решения в $C^{2n}(Q)$. Для серии неравенств, выражающих оценку малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, приведено обоснование сходимости ряда в указанном классе. При этом не показано для каких чисел вида π/T эти оценки имеют место, только отмечено, что множество чисел π/T, для которых они не выполняются, есть множество нулевой меры Лебега.

В статье В.П. Бурского [10] получено необходимое и достаточное условие тривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле в единичном шаре B с центром в начале координат в пространстве $C^2(\overline{B})$ для уравнения с комплексной постоянной a:

$$u_{xx}+u_{yy}-a^2u_{zz}=0.$$

В работах С.А. Алдашева [11–14] изучены задача Дирихле и задача со смешанными граничными условиями в цилиндрической области Q (где $l=1$, $T=\alpha$) для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором; решения задач построены в виде суммы ряда Фурье в сферической системе координат. Но из-за возникающих малых знаменателей нельзя считать, что эти ряды сходятся в пространстве $C^1(\overline{Q})\cap C^2(Q)$. При доказательстве теорем единственности также появляются вопросы о равномерной сходимости используемых рядов, так как они содержат малые знаменатели.

В данной статье в классе регулярных решений уравнения (1), т.е. удовлетворяющих условиям (2) и (3), установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5) и само решение построено в явном виде — суммы ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей, как в известных работах В.И. Арнольда [15, 16] и В.В. Козлова [17], но от двух натуральных аргументов. В связи с этим установлены оценки об отделимости от нуля малых знаменателей, на основании которых доказана сходимость ряда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ при некоторых условиях относительно функций $\tau(x,y)$ и $\psi(x,y)$, а также получены оценки об устойчивости решения.

2. КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

В цилиндрической системе координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $t=t$, $0\leqslant r<l$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, уравнение (1) примет вид

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{b}{a^2}u=\frac{1}{a^2}u_{tt}. \tag{6}$$

Разделив переменные $u(r,\varphi,t)=v(r,\varphi)T(t)$ в уравнении (6), получим относительно функции $v(r,\varphi)$ следующую спектральную задачу:

$$v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}+\lambda^2 v=0, \tag{7}$$

$$v(l,\varphi)=0, \tag{8}$$

$$|v(0,\varphi)|<+\infty, \quad v(r,\varphi)=v(r,\varphi+2\pi), \tag{9}$$

где $\lambda^2=b/a^2+\mu^2$, μ — постоянная разделения переменных.

Решение задачи (7)–(9) аналогично [18, с. 215] будем искать в виде $v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ и получим две одномерные спектральные задачи:

$$\Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \tag{10}$$

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi), \quad \Phi'(\varphi)=\Phi'(\varphi+2\pi); \tag{11}$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda^2-\frac{p^2}{r^2}\right)R(r)=0, \quad 0<r<l, \tag{12}$$

$$|R(0)|<+\infty, \quad R(l)=0. \tag{13}$$

Ненулевые периодические решения задачи (10) и (11) существуют лишь при целом $p=n$ и определяются по формуле

$$\Phi_n(\varphi)=a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi),$$

где a_n, b_n — произвольные постоянные, $n=0,1,2,\ldots$ При $p=n$ общее решение уравнения (12) имеет вид

$$R_n(r)=c_nJ_n(\lambda r)+d_nY_n(\lambda r),$$

здесь c_n и d_n — произвольные постоянные, $J_n(\lambda r)$ и $Y_n(\lambda r)$ — цилиндрические функции первого и второго рода соответственно. Из первого условия в (13) следует, что $d_n=0$, а второе условие даёт уравнение

$$J_n(q)=0, \quad q=\lambda l,$$

которое, как известно, имеет счётное множество положительных корней q_{nm}, $n=0,1,2,\ldots$, $m=1,2,\ldots$, и им соответствуют собственные значения

$$\lambda_{nm}=q_{nm}/l, \quad m=1,2,\ldots,\ n=0,1,2,\ldots,$$

и собственные функции

$$\widetilde{R}_{nm}(r)=J_n(\lambda_{nm}r)=J_n\Big(\frac{q_{nm}}{l}r\Big)$$

спектральной задачи (12), (13).

Таким образом, спектральная задача (10), (11) имеет систему собственных функций

$$\Phi_n(\varphi)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\varphi),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\varphi)\right\}, \tag{14}$$

ортонормированную, полную и образующую базис в пространстве $L_2(0,2\pi)$, а спектральная задача (12), (13) — систему собственных функций

$$R_{nm}(r)=\frac{J_n(\lambda_{nm}r)}{\|J_n(\lambda_{nm}r)\|_{L_2(0,l)}}=\frac{\sqrt{2}}{l}\frac{J_n(\lambda_{nm}r)}{|J_{n+1}(q_{nm})|}, \tag{15}$$

полную и образующую ортонормированный базис в $L_2(0,l)$ с весом r.

Тогда спектральная задача (7)–(9) имеет собственные значения $\lambda_{nm}^2 = b/a^2 + \mu_{nm}^2 = (q_{nm}/l)^2$ и им соответствует с учётом (14) и (15) система собственных функций

$$v_{nm}(r,\varphi) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_{0m}(r), \frac{1}{\sqrt{\pi}} R_{nm}(r)\cos(n\varphi), \frac{1}{\sqrt{\pi}} R_{nm}(r)\sin(n\varphi) \right\}, \tag{16}$$

которая полна и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(D)$ с весом r.

В дальнейшем будем считать, что $b \geqslant 0$, так как если $b < 0$, то, начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$, правая часть $\lambda_{nm}^2 = b/a^2 + \mu_{nm}^2$ принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b, по существу, не влияет на полученные результаты.

Пусть $u(r,\varphi,t)$ — решение задачи (2)–(5). На основании системы (16) введём функции

$$A_{0m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint\limits_D u(r,\varphi,t) R_{0m}(r) r\,dr\,d\varphi, \tag{17}$$

$$A_{nm}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D u(r,\varphi,t) R_{nm}(r)\cos(n\varphi) r\,dr\,d\varphi, \tag{18}$$

$$B_{nm}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D u(r,\varphi,t) R_{nm}(r)\sin(n\varphi) r\,dr\,d\varphi. \tag{19}$$

Дифференцируя равенство (18) по t два раза и учитывая уравнение (6), получаем

$$A_{nm}''(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D u_{tt}(r,\varphi,t) R_{nm}(r)\cos(n\varphi) r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right) R_{nm}(r)\cos(n\varphi) r\,dr\,d\varphi + bA_{nm}(t) = J_1 + J_2 + bA_{nm}(t), \tag{20}$$

где

$$J_1 = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) R_{nm}(r)\cos(n\varphi) r\,dr\,d\varphi = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \int\limits_0^l (ru_r)_r' R_{nm}(r)\,dr\,d\varphi, \tag{21}$$

$$J_2 = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D \frac{1}{r} u_{\varphi\varphi} R_{nm}(r)\cos(n\varphi)\,dr\,d\varphi = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l \frac{1}{r} R_{nm}(r) \int\limits_0^{2\pi} u_{\varphi\varphi}\cos(n\varphi)\,d\varphi\,dr. \tag{22}$$

Вычислим внутренние интегралы в правых частях равенств (21) и (22):

$$\int\limits_0^l (ru_r)_r' R_{nm}(r)\,dr = ru_r R_{nm}(r)\big|_0^l - \int\limits_0^l u_r r R_{nm}'(r)\,dr = -\int\limits_0^l u_r r R_{nm}'(r)\,dr =$$

$$= ruR_{nm}'(r)\big|_0^l + \int\limits_0^l u(rR_{nm}'(r))'\,dr = -\lambda_{nm}^2 \int\limits_0^l urR_{nm}(r)\,dr + n^2 \int\limits_0^l u\frac{R_{nm}(r)}{r}\,dr,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\varphi\varphi}\cos(n\varphi)\,d\varphi = -n^2 \int\limits_0^{2\pi} u\cos(n\varphi)\,d\varphi.$$

Подставив эти значения в (21) и (22), а затем (21) и (22) в равенство (20), получим

$$A''_{nm}(t)+a^2\mu_{nm}^2 A_{nm}(t)=0. \tag{23}$$

Общее решение уравнения (23) определяется по формуле

$$A_{nm}(t)=a_{nm}\cos(a\mu_{nm}t)+b_{nm}\sin(a\mu_{nm}t), \tag{24}$$

где a_{nm} и b_{nm} — произвольные постоянные. Для их определения воспользуемся граничными условиями (5):

$$A_{nm}(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D u(r,\varphi,0)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D \tau(r,\varphi)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=:\tau_{nm}, \tag{25}$$

$$A_{nm}(T)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D u(r,\varphi,T)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D \psi(r,\varphi)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=:\psi_{nm}. \tag{26}$$

Подчинив общее решение (24) граничным условиям (25) и (26), найдём

$$a_{nm}=\tau_{nm},\quad b_{nm}=\frac{1}{\sin(a\mu_{nm}T)}\big(\psi_{nm}-\tau_{nm}\cos(a\mu_{nm}T)\big)$$

при условии, что

$$\Delta_{nm}(T)=\sin(a\mu_{nm}T)\neq 0\quad\text{при всех } n,m\in\mathbb{N}. \tag{27}$$

Тогда

$$A_{nm}(t)=\tau_{nm}\frac{\sin(a\mu_{nm}(T-t))}{\sin(a\mu_{nm}T)}+\psi_{nm}\frac{\sin(a\mu_{nm}t)}{\sin(a\mu_{nm}T)}. \tag{28}$$

Продифференцировав равенство (19) два раза по t с учётом уравнения (6), получим

$$B''_{nm}(t)+a^2\mu_{nm}^2 B_{nm}(t)=0.$$

Отсюда (по аналогии с функцией $A_{nm}(t)$) найдём при выполнении условия (27)

$$B_{nm}(t)=\widetilde{\tau}_{nm}\frac{\sin(a\mu_{nm}(T-t))}{\sin(a\mu_{nm}T)}+\widetilde{\psi}_{nm}\frac{\sin(a\mu_{nm}t)}{\sin(a\mu_{nm}T)}, \tag{29}$$

где

$$\widetilde{\tau}_{nm}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D \tau(r,\varphi)R_{nm}(r)\sin(n\varphi)r\,dr\,d\varphi, \tag{30}$$

$$\widetilde{\psi}_{nm}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D \psi(r,\varphi)R_{nm}(r)\sin(n\varphi)r\,dr\,d\varphi. \tag{31}$$

Теперь продифференцируем равенство (17) два раза по t и аналогично на основании уравнения (6) получим, что функция $A_{0m}(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$A''_{0m}(t)+a^2\mu_{0m}^2 A_{0m}(t)=0.$$

Отсюда (по аналогии с функцией $A_{nm}(t)$) найдём

$$A_{0m}(t)=\tau_{0m}\frac{\sin(a\mu_{0m}(T-t))}{\sin(a\mu_{0m}T)}+\psi_{0m}\frac{\sin(a\mu_{0m}t)}{\sin(a\mu_{0m}T)} \tag{32}$$

при условии $\sin(\mu_{0m}T)\neq 0$ для всех $m\in\mathbb{N}$, где

$$\tau_{0m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint\limits_D \tau(r,\varphi)R_{0m}(r)r\,dr\,d\varphi, \tag{33}$$

$$\psi_{nm}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint\limits_D \psi(r,\varphi)R_{0m}(r)r\,dr\,d\varphi. \tag{34}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (2)–(5). Пусть $\tau(x,y)=\psi(x,y)\equiv 0$ и выполнены условия (27) при всех $m\in\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда в силу равенств (25), (26), (30), (31), (33) и (34) все $\tau_{nm}=0$, $\widetilde{\tau}_{nm}=0$, $\psi_{nm}=0$, $\widetilde{\psi}_{nm}=0$ при $n=0,1,2,\ldots$, $m=1,2,\ldots$ Отсюда и на основании формул (32), (29), (28) и (17)–(19) имеем равенства

$$\iint\limits_D u(r,\varphi,t)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=0,\quad \iint\limits_D u(r,\varphi,t)R_{nm}(r)\sin(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=0$$

при всех $n=0,1,2,\ldots$, $m=1,2,\ldots$, $t\in[0,T]$. Из этих равенств на основании полноты системы функций (16) в пространстве $L_2(D)$ с весом r следует, что $u(r,\varphi,t)=0$ почти всюду в $\overline{D}$ при любом $t\in[0,T]$. Поскольку в силу (2) функция $u(r,\varphi,t)$ непрерывна в $\overline{Q}$, то $u(r,\varphi,t)\equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Пусть при некоторых $n=n_0$ или $m=m_0$ выражение $\Delta_{n_0m}(T)=0$ или $\Delta_{nm_0}(T)=0$. Для определённости допустим, что $\Delta_{n_0m}(T)=0$. Тогда однородная задача (2)–(5) ($\tau(x,y)=$ $=\psi(x,y)\equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_{n_0m}(r,\varphi,t)=\sin(a\mu_{n_0m}t)\big(a_{0m}R_{0m}(r)+a_{n_0m}R_{n_0m}(r)\cos(n_0\varphi)+b_{n_0m}R_{n_0m}(r)\sin(n_0\varphi)\big), \tag{35}$$

где a_{0m}, a_{n_0m} и b_{n_0m} — произвольные постоянные.

Рассмотрим вопрос о нулях выражения $\Delta_{nm}(T)$. Равенство

$$\Delta_{nm}(T)=\sin(a\mu_{nm}T)=0$$

имеет место только тогда, когда

$$T=\frac{\pi k}{a\mu_{nm}},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{36}$$

Значит, $\Delta_{nm}(T)$ обращается в нуль, когда T определяется по формуле (36).

Таким образом, установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5).

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(5), *то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех n и m выполнены условия* (27).

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

При выполнении условий (27) решение задачи (2)–(5) определяется суммой ряда

$$u(r,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}(t)R_{0m}(r)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\big(A_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R_{nm}(r), \tag{37}$$

где коэффициенты $A_{0m}(t)$, $A_{nm}(t)$ и $B_{nm}(t)$ находятся по формулам (32), (28) и (29) соответственно. Поскольку $\Delta_{nm}(T)$ является знаменателем коэффициентов ряда (37) и, как показано выше, уравнение $\sin(a\mu_{nm}T)=0$ имеет счётное множество нулей (36), то возникает проблема малых знаменателей. В связи с этим следует установить оценки об отделимости от нуля. Для упрощения в дальнейшем положим, что $b=0$. Выражение $\Delta_{nm}(T)$ при $b=0$ представим в следующем виде:

$$\Delta_{nm}(\nu)=\sin(\nu q_{nm}), \quad \nu=aT/l. \tag{38}$$

Лемма 1. *Если выполнено одно из следующих условий*:

1) *число $\nu/2=p$ натуральное и нечётное*;

2) *число $\nu/2=p/q$ — дробно-рациональное и отношение $(2r-p)/(2q)$ — не целое число, где $r\in\mathbb{N}_0$ и $0\leqslant r<q$,*

то существуют положительные постоянные C_0 и m_0 $(m_0\in\mathbb{N})$ такие, что при всех $m>m_0$ справедлива оценка

$$|\Delta_{nm}(\nu)|\geqslant C_0>0. \tag{39}$$

Доказательство. Для нулей q_{nm} функции Бесселя $J_n(q)$ при бо́льших значениях $m>m_0$, где m_0 — достаточно большое натуральное число, справедлива асимптотическая формула [19, с. 241]

$$q_{nm}=\frac{\pi}{2}\left(2m+n-\frac{1}{2}\right)+O((4m+2n-1)^{-1}). \tag{40}$$

Подстановка (40) в (38) даёт

$$\Delta_{nm}(\nu)=\sin\frac{\nu\pi}{2}\left(2m+n-\frac{1}{2}\right)+O((4m+2n-1)^{-1}), \tag{41}$$

так как

$$\sin O((4m+2n-1)^{-1})\approx O((4m+2n-1)^{-1}), \quad \cos O((4m+2n-1)^{-1})\approx 1+O((4m+2n-1)^{-1})$$

при бо́льших $m>m_0$.

Пусть число $\nu/2=p\in\mathbb{N}$ и нечётное. Тогда из равенства (41) при всех $m>m_0$ и $n\in\mathbb{N}_0$ получим

$$\begin{aligned}|\Delta_{nm}(\nu)|&\geqslant\left|\sin\left(\pi p(2m+n)-\frac{p\pi}{2}\right)\right|-\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|=\\&=\left|\sin\frac{p\pi}{2}\right|-\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|=1-\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|>\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{42}$$

в силу

$$\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|<C_1<\frac{1}{2}$$

при бо́льших m.

Пусть $\nu/2=p/q$, $p,\ q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, $p/q\notin\mathbb{N}$. В этом случае разделим $p(2m+n)$ на q с остатком: $p(2m+n)=qs+r$, $s,\ r\in\mathbb{N}_0$, $0\leqslant r<q$. Тогда соотношение (41) примет вид

$$\Delta_{nm}(\nu)=\sin\left(s\pi+\frac{r\pi}{q}-\frac{p\pi}{2q}\right)+O((4m+2n-1)^{-1})=(-1)^s\sin\left(\pi\frac{2r-p}{2q}\right)+O((4m+2n-1)^{-1}).$$

Если $r=0$, то имеем случай 1) леммы. Тогда $1\leqslant r\leqslant q-1$. Отсюда (поскольку отношение $(2r-p)/(2q)$ — не целое число) следует, что

$$|\Delta_{nm}(\nu)|\geqslant\left|\sin\left(\pi\frac{2r-p}{2q}\right)\right|-\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|\geqslant\left|\sin\left(\pi\frac{2r-p}{2q}\right)\right|-C_1\geqslant C_2-C_1>0, \tag{43}$$

где

$$C_2=\min_{1\leqslant r\leqslant q-1}\left|\sin\left(\pi\frac{2r-p}{2q}\right)\right|.$$

Тогда из (42) и (43) при условии $C_1<C_2$ вытекает справедливость оценки (39).

Лемма 2. *Пусть выполнено одно из условий леммы 1, тогда при всех $m>m_0$, $n\in\mathbb{N}_0$ и любом $t\in[0,T]$ справедливы оценки*

$$|A_{nm}(t)|\leqslant M_1\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|\big), \tag{44}$$

$$|B_{nm}(t)|\leqslant M_1\big(|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big), \tag{45}$$

$$|A'_{nm}(t)|\leqslant M_2\mu_{nm}\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|\big),\quad |B'_{nm}(t)|\leqslant M_2\mu_{nm}\big(|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big),$$

$$|A''_{nm}(t)|\leqslant M_3\mu^2_{nm}\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|\big),\quad |B''_{nm}(t)|\leqslant M_3\mu^2_{nm}\big(|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big),$$

здесь и далее M_i — положительные постоянные, зависящие от T, a и l.

Справедливость этих оценок непосредственно следует из формул (28) и (29) на основании неравенств (39).

Теперь формально из ряда (37) при $b=0$ почленным дифференцированием получим ряды

$$u_{tt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}A''_{0m}(t)R_{0m}(r)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\big(A''_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B''_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R_{nm}(r),$$

$$u_{\varphi\varphi}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}n^2\big(A_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R_{nm}(r),$$

$$u_{rr}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}(t)R''_{0m}(r)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\big(A_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R''_{nm}(r),$$

которые при любых $(r,\varphi,t)\in\overline{Q}$ мажорируются соответственно числовыми рядами

$$\frac{4M_3}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m>m_0}^{\infty}\mu^2_{0m}\big(|\tau_{0m}|+|\psi_{0m}|\big)|R_{0m}(r)|+$$
$$+\frac{M_3}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\mu^2_{nm}\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|+|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big)|R_{nm}(r)|, \tag{46}$$

$$\frac{M_1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}n^2\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|+|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big)|R_{nm}(r)|, \tag{47}$$

$$\frac{M_1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m>m_0}^{\infty}\big(|\tau_{0m}|+|\psi_{0m}|\big)|R''_{0m}(r)|+$$
$$+\frac{M_1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|+|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big)|R''_{nm}(r)|. \tag{48}$$

Лемма 3. *Пусть* $0<r_0\leqslant r\leqslant l$, *где* r_0 — *малая положительная фиксированная постоянная. Тогда при* $m>m_0$ *и любом фиксированном* $n\in\mathbb{N}_0$ *имеют место оценки*

$$|R_{nm}(r)|\leqslant M_4, \tag{49}$$

$$|R'_{nm}(r)|\leqslant M_5\mu_{nm}, \tag{50}$$

$$|R''_{nm}(r)|\leqslant M_6\mu_{nm}^2. \tag{51}$$

Доказательство. На основании асимптотической формулы для функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ при бо́льших значениях аргумента z [20, с. 98]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2z}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O(z^{-5/2}) \tag{52}$$

имеем

$$|J_n(\mu_{nm}r)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}\left(1+\frac{1}{2r_0\mu_{nm}}\right)\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}, \tag{53}$$

так как $1/(2r_0\mu_{nm})<1$ при бо́льших m.

Аналогично получим оценки

$$|J_{n+1}(q_{nm})|=|J_{n+1}(l\mu_{nm})|\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi l\mu_{nm}}}, \tag{54}$$

из которых следует оценка (49).

Теперь найдём производную

$$R'_{nm}(r)=\frac{\sqrt{2}}{l|J_{n+1}(q_{nm})|}\mu_{nm}J'_n(z),\quad z=\mu_{nm}r. \tag{55}$$

Используя равенство

$$J'_\nu(z)=\frac{1}{2}[J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)] \tag{56}$$

и формулу (52), получаем для $J'_n(z)$ при бо́льших z асимптотическую формулу

$$J'_n(z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{n-1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(z-\frac{n+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O(z^{-3/2})=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-3/2}),$$

на основании которой, аналогично оценкам (53) и (54), находим

$$|J'_n(\mu_{nm}r)|\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}. \tag{57}$$

Тогда из равенства (55) в силу оценок (57) и (54) следует оценка (50).

Из (12) вычислим вторую производную

$$J''_n(\mu_{nm}r)=-\frac{1}{r}J'_n(\mu_{nm}r)+\left(\frac{n^2}{r^2}-\mu_{nm}^2\right)J_n(\mu_{nm}r). \tag{58}$$

Отсюда с учётом оценок (53) и (57) имеем

$$|J''_n(\mu_{nm}r)|\leqslant\frac{1}{r_0}2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}+\frac{n^2}{r_0^2}2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}+\mu_{nm}^2 2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}.$$

Из данного неравенства в силу (54) убеждаемся в справедливости оценки (51).

Лемма 4. *Пусть* $0 < r_0 \leqslant r \leqslant l$. *Тогда при больши́х* n *и любом фиксированном* $m \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$|R_{nm}(r)| \leqslant M_7, \tag{59}$$

$$|R'_{nm}(r)| \leqslant M_8 n, \tag{60}$$

$$|R''_{nm}(r)| \leqslant M_9 n^2. \tag{61}$$

Доказательство. Для получения этих оценок воспользуемся асимптотической формулой Лангера при больши́х значениях порядка p функции Бесселя [20, с. 103]

$$J_p(t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1 - \frac{\operatorname{arctg}\omega}{\omega}} K_{1/3}(z) + O(p^{-4/3}), \tag{62}$$

где

$$\omega = \sqrt{1 - (t/p)^2}, \quad t < p, \quad z = p(\operatorname{Arth}\omega - \omega),$$

$K_{1/3}(z)$ — функция Макдональда.

Используя разложение в степенной ряд функции

$$\operatorname{arctg}\omega = \omega - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \ldots,$$

оценим выражение

$$\frac{\omega^2}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\omega^2\right) < 1 - \frac{\operatorname{arctg}\omega}{\omega} < \frac{\omega^2}{3}.$$

Отсюда при $0 < \omega < 1$ будем иметь

$$\sqrt{\frac{2}{15}}\omega < \left(1 - \frac{\operatorname{arctg}\omega}{\omega}\right)^{1/2} < \frac{\omega}{\sqrt{3}}. \tag{63}$$

Тогда из формулы (62) с учётом оценки (63) получим

$$|J_p(t)| \leqslant \frac{\omega}{\pi\sqrt{3}} K_{1/3}(z), \tag{64}$$

$$|J_p(t)| > \sqrt{\frac{2}{15}}\frac{\omega}{\pi} K_{1/3}(z). \tag{65}$$

Теперь на основании оценок (64) и (65) имеем

$$|J_n(\mu_{nm} r)| \leqslant \frac{\omega_1}{\pi\sqrt{3}} K_{1/3}(z_1), \tag{66}$$

$$|J_n(q_{nm})| \geqslant \sqrt{\frac{2}{15}}\frac{\omega_2}{\pi} K_{1/3}(z_2), \tag{67}$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{q_{nm} r}{n\,l}\right)^2}, \quad z_1 = n(\operatorname{Arth}\omega_1 - \omega_1),$$

$$\omega_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{q_{nm}}{n+1}\right)^2}, \quad z_2 = (n+1)(\operatorname{Arth}\omega_2 - \omega_2).$$

Из неравенств (66) и (67) следует оценка (59), так как $\omega_1 \approx \omega_2$ при больши́х n.

На основании формул (55) и (56) оценим производную $R'_{nm}(r)$:

$$|R'_{nm}(r)| \leqslant \frac{q_{nm}}{\sqrt{2}l^2|J_{n+1}(q_{nm})|}\big(|J_{n-1}(\mu_{nm}r)|+|J_{n+1}(\mu_{nm}r)|\big).$$

Отсюда с учётом оценок (66) и (67) получим (60).

В силу равенства (58) на основании (59) и (60) убеждаемся в справедливости оценки (61).

Замечание. Отметим, что функция $R_{nm}(r)$ и её производные $R'_{nm}(r)$, $R''_{nm}(r)$, начиная с некоторого номера n, при $r\to 0$ стремятся к нулю. Поэтому в леммах 3 и 4 оценки (49)–(51) и (59)–(61) получены при $r\geqslant r_0>0$.

В силу лемм 3 и 4 ряды (46)–(48) мажорируются комбинацией рядов

$$M_{10}\sum_{m>m_0}^{\infty} m^2\big(|\tau_{0m}|+|\psi_{0m}|\big),\quad M_{11}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty} n^2\big(|\tau_{0m}|+|\psi_{0m}|\big),$$
$$M_{12}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\mu_{nm}^2\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|+|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big). \tag{68}$$

Обозначим через $C^{4,4}(\overline{D})$ множество функций $f(r,\varphi)$, имеющих непрерывные смешанные производные по r и φ до четвёртого порядка включительно в замкнутой области $\overline{D}$.

Лемма 5. *Пусть* $\tau(r,\varphi)$, $\psi(r,\varphi)\in C^{4,4}(\overline{D})$ *и* $\tau^{(0,i)}(r,0)=\tau^{(0,i)}(r,2\pi)$, $i=\overline{0,3}$, $\tau^{(k,4)}(0,\varphi)=0$, $k=\overline{0,3}$, $\psi^{(0,i)}(r,0)=\psi^{(0,i)}(r,2\pi)$, $i=\overline{0,3}$, $\psi^{(k,4)}(0,\varphi)=0$, $k=\overline{0,3}$. *Тогда коэффициенты* τ_{nm}, $\widetilde{\tau}_{nm}$, ψ_{nm}, $\widetilde{\psi}_{nm}$ *при* $\mu_{nm}\to+\infty$ *имеют оценки*

$$\tau_{nm}=O\bigg(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\bigg),\quad \widetilde{\tau}_{nm}=O\bigg(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\bigg),\quad \psi_{nm}=O\bigg(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\bigg),\quad \widetilde{\psi}_{nm}=O\bigg(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\bigg).$$

Доказательство. Рассмотрим коэффициенты τ_{nm}, ψ_{nm}, $\widetilde{\tau}_{nm}$ и $\widetilde{\psi}_{nm}$, определённые по формулам (25), (26), (30) и (31) соответственно. Представим τ_{nm} в следующем виде:

$$\tau_{nm}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l R_{nm}(\mu_{nm}r)I(r)r\,dr, \tag{69}$$

где

$$I(r)=\int\limits_0^{2\pi}\tau(r,\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi.$$

По условию $\tau'_\varphi(r,0)=\tau'_\varphi(r,2\pi)$ и $\tau'''_\varphi(r,0)=\tau'''_\varphi(r,2\pi)$, тогда интеграл $I(r)$ с помощью четырёхкратного интегрирования по частям можно преобразовать к виду

$$I(r)=\frac{1}{n^4}\int\limits_0^{2\pi}\tau_\varphi^{(4)}(r,\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi. \tag{70}$$

Теперь интеграл (69) с учётом представления (70) запишем как

$$\tau_{nm}=\frac{\sqrt{2}}{l\sqrt{\pi}|J_{n+1}(q_{nm})|n^4}\int\limits_0^{2\pi}J(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi, \tag{71}$$

где

$$J(\varphi)=\int\limits_0^l\tau_\varphi^{(4)}(r,\varphi)J_n(\mu_{nm}r)r\,dr. \tag{72}$$

Заметим, что функция $X_n(r)=r^{-n}J_n(\xi)$, $\xi=\mu_{nm}r$, является решением дифференциального уравнения

$$X''_n(r)+\frac{2n+1}{r}X'_n(r)+\mu^2_{nm}X_n(r)=0. \tag{73}$$

Тогда интеграл (72) с учётом уравнения (73) преобразуем следующим образом:

$$J(\varphi)=\int\limits_0^l \tau^{(4)}_\varphi(r,\varphi)X_n(r)r^{n+1}\,dr=-\frac{1}{\mu^2_{nm}}\int\limits_0^l \tau^{(4)}_\varphi(r,\varphi)\left[X''_n(r)+\frac{2n+1}{r}X'_n(r)\right]r^{n+1}\,dr=$$

$$=-\frac{1}{\mu^2_{nm}}\int\limits_0^l \tau^{(4)}_\varphi(r,\varphi)\left[(r^{n+1}X'_n(r))'+nr^nX'_n(r)\right]dr=$$

$$=-\frac{1}{\mu^2_{nm}}\int\limits_0^l \tau^{(2,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr-\frac{1}{\mu^2_{nm}}\int\limits_0^l \tau^{(1,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)r^nX_n(r)\,dr+\frac{n^2}{\mu^2_{nm}}\int\limits_0^l \tau^{(0,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)r^{n-1}X_n(r)\,dr=$$

$$=-\frac{1}{\mu^2_{nm}}J_1-\frac{1}{\mu^2_{nm}}J_2+\frac{n^2}{\mu^2_{nm}}J_3, \tag{74}$$

где

$$J_1=\int\limits_0^l \tau^{(2,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr,\quad J_2=\int\limits_0^l \tau_1(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr,\quad J_3=\int\limits_0^l \tau_2(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr,$$

$$\tau_1(r,\varphi)=\frac{\tau^{(1,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)}{r},\quad \tau_2(r,\varphi)=\frac{\tau^{(0,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)}{r^2}.$$

Аналогично интегралу $J(\varphi)$ по формуле (74) преобразуем интегралы J_i, $i=1,2$:

$$J_i=-\frac{1}{\mu^2_{nm}}J_{i1}-\frac{1}{\mu^2_{nm}}J_{i2}+\frac{n^2}{\mu^2_{nm}}J_{i3}, \tag{75}$$

где

$$J_{11}=\int\limits_0^l \tau^{(4,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \tau^{(4,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{12}=\int\limits_0^l \tau^{(3,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)r^nX_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \frac{\tau^{(3,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)}{r}J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{13}=\int\limits_0^l \tau^{(2,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)r^{n-1}X_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \frac{\tau^{(2,4)}_{r,\varphi}(r,\varphi)}{r^2}J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{21}=\int\limits_0^l \tau''_{1r}(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \tau''_{1r}(r,\varphi)J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{22}=\int\limits_0^l \tau'_{1r}(r,\varphi)r^nX_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \frac{\tau'_{1r}(r,\varphi)}{r}J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{23}=\int\limits_0^l \tau_1(r,\varphi)r^{n-1}X_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \frac{\tau_1(r,\varphi)}{r^2}J_n(\mu_{nm}r)r\,dr.$$

Интеграл J_3 преобразуем следующим образом:

$$J_3=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{-1}J_n(\mu_{nm}r)\,dr=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{-n-2}r^{n+1}J_n(\mu_{nm}r)\,dr=$$
$$=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)}{r}J_{n+1}(\mu_{nm}r)\Big|_0^l-\frac{1}{\mu_{nm}}\int\limits_0^l d\Big[r^{-n-2}\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)\Big]\,r^{n+1}J_{n+1}(\mu_{nm}r)\,dr=$$
$$=-\frac{1}{\mu_{nm}}\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(1,4)}(r,\varphi)r^{-1}J_{n+1}(\mu_{nm}r)\,dr+\frac{n+2}{\mu_{nm}}\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{-2}J_{n+1}(\mu_{nm}r)\,dr=$$
$$=-\frac{1}{\mu_{nm}}J_{31}+\frac{n+2}{\mu_{nm}}J_{32}. \tag{76}$$

После подстановки (75) и (76) в равенство (74) получим

$$J(\varphi)=\frac{1}{\mu_{nm}^4}\big(J_{11}+J_{12}+J_{21}+J_{22}\big)-\frac{n^2}{\mu_{nm}^4}\big(J_{13}+J_{23}\big)-\frac{n^2}{\mu_{nm}^3}J_{31}+\frac{n^2(n+2)}{\mu_{nm}^3}J_{32}. \tag{77}$$

Если $\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)\in C^4[0,l]$ и $\tau_{r,\varphi}^{(k,4)}(0,\varphi)=0$, $k=\overline{0,3}$, то справедливы представления

$$\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(\theta,\varphi)r^4}{4!},\quad 0<\theta<r,$$
$$\tau_{r,\varphi}^{(1,4)}(r,\varphi)=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(\theta,\varphi)r^3}{3!},\quad \tau_{r,\varphi}^{(2,4)}(r,\varphi)=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(\theta,\varphi)r^2}{2!},\quad \tau_{r,\varphi}^{(3,4)}(r,\varphi)=\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(\theta,\varphi)r.$$

В силу этого в интегралах J_{31} и J_{32} функции $\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{-5/2}$, $\tau_{r,\varphi}^{(1,4)}(r,\varphi)r^{-3/2}$ непрерывно дифференцируемы на $[0,l]$, поэтому на данном промежутке имеют полную ограниченную вариацию, т.е. конечное изменение. С учётом теоремы из [21, с. 653] интегралы J_{31} и J_{32} при $\mu_{nm}\to\infty$ имеют оценку

$$J_{31}=O(\mu_{nm}^{-3/2}),\quad J_{32}=O(\mu_{nm}^{-3/2}). \tag{78}$$

В интегралах J_{1i}, $i=1,2,3$, подынтегральные функции $\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(r,\varphi)$, $\tau_{r,\varphi}^{(3,4)}(r,\varphi)r^{-1}$ и $\tau_{r,\varphi}^{(2,4)}(r,\varphi)r^{-2}$ непрерывны на отрезке $[0,l]$. Тогда в силу теоремы Юнга [21, с. 654] эти интегралы при $\mu_{nm}\to\infty$ имеют оценку

$$J_{1i}=O(\mu_{nm}^{-1/2}). \tag{79}$$

Теперь рассмотрим интегралы J_{2i}, $i=1,2,3$. В них функции $\tau_{1r}''(r,\varphi)$, $\tau_{1r}'(r,\varphi)r^{-1}$ и $\tau_{1r}(r,\varphi)r^{-2}$ также непрерывны на отрезке $[0,l]$, поэтому справедливы оценки

$$J_{2i}=O(\mu_{nm}^{-1/2}),\quad \mu_{nm}\to\infty. \tag{80}$$

Тогда из представления (71) с учётом равенства (77) и оценок (78)–(80) получим

$$\tau_{nm}=O\left(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\right).$$

Аналогично из формул (26), (30) и (31) следуют остальные оценки. Лемма доказана.

Числовые ряды (68) в силу формулы (40) мажорируются соответственно сходящимися рядами

$$M_{13}\sum_{m>m_0}^{\infty}\frac{1}{m^2},\quad M_{14}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\frac{n}{(4m+2n-1)^4},\quad M_{15}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\frac{1}{n(4m+2n-1)^2}.$$

Если для чисел ν из леммы 1 при некоторых $m=m_1,m_2,\ldots,m_s\leqslant m_0$, где $1\leqslant m_1<m_2<\ldots\ldots<m_s$, $\Delta_{nm_i}(\nu)=0$, то для разрешимости задачи (2)–(5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\tau_{nm_i}=\psi_{nm_i}=0,\quad \widetilde{\tau}_{nm_i}=\widetilde{\psi}_{nm_i}=0,\quad i=\overline{1,s}. \tag{81}$$

В этом случае решение задачи (2)–(5) определяется в виде суммы ряда:

$$u(r,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg(\sum_{m=1}^{m_1-1}+\sum_{m=m_1+1}^{m_2-1}+\ldots+\sum_{m=m_{s-1}+1}^{m_s-1}+\sum_{m=m_s+1}^{\infty}\Bigg)A_{0m}(t)R_{0m}(r)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{m=1}^{m_1-1}+\sum_{m=m_1+1}^{m_2-1}+\ldots+\sum_{m=m_{s-1}+1}^{m_s-1}+\sum_{m=m_s+1}^{\infty}\Bigg)\times$$
$$\times\big(A_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R_{nm}(r)+\sum_{i=1}^{s}C_{nm_i}u_{nm_i}(r,\varphi,t), \tag{82}$$

здесь $u_{nm_i}(r,\varphi,t)$ определяются по формуле (35), где m_0 нужно заменить на m_i, C_{nm_i} — произвольные постоянные; если в конечных суммах в правой части (82) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* 1 *и* 5. *Тогда если* $\Delta_{nm}(\nu)\neq 0$ *при всех* $m=\overline{1,m_0}$, *то задача* (2)–(5) *однозначно разрешима и это решение определяется рядом* (37); *если* $\Delta_{nm}(\nu)=0$ *при некоторых* $m=m_1,m_2,\ldots,m_s\leqslant m_0$, *то задача* (2)–(5) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (81) *и решение определяется рядом* (82).

Отметим, что выполнения условия $\Delta_{nm}(\nu)\neq 0$ при $m=\overline{1,m_0}$ можно добиться, если $\nu\neq\pi k/q_{nm}$ (в силу формулы (36) при $b=0$).

4. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(r,\varphi,t)\|_{L_2(D)}=\iint\limits_D u^2(r,\varphi,t)r\,dr\,d\varphi,\quad \|u(r,\varphi,t)\|_{C(\overline{Q})}=\max_{r,\varphi,t\in\overline{Q}}|u(r,\varphi,t)|,$$
$$\|f^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\|_{L_2(D)}=\iint\limits_D\big(f^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\big)^2r\,dr\,d\varphi,\quad \|g^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\|^2_{C(\overline{D})}=\max_{r,\varphi\in\overline{D}}|g^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)|.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и* $\Delta_{nm}(\nu)\neq 0$ *при* $m=\overline{1,m_0}$. *Тогда для решения* (37) *задачи* (2)–(5) *справедливы оценки*

$$\|u(r,\varphi,t)\|_{L_2(D)}\leqslant M_{16}\big(\|\tau(r,\varphi)\|_{L_2(D)}+\|\psi(r,\varphi)\|_{L_2(D)}\big), \tag{83}$$

$$\|u(r,\varphi,t)\|_{C(\overline{Q})}\leqslant M_{17}\big(\big\|\tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\big\|_{C(\overline{D})}+\big\|\psi^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\big\|_{C(\overline{D})}\big). \tag{84}$$

Доказательство. Построенная система собственных функций (16) ортонормирована в пространстве $L_2(D)$ с весом r. Тогда из формулы (37) на основании оценок (44), (45) и (49) будем иметь

$$\|u(r,\varphi,t)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m=1}^{\infty} A^2_{0m}(t) + \sum_{n,m=1}^{\infty} A^2_{nm}(t) + B^2_{nm}(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2M_1^2 M_4^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty}\big(|\tau_{0m}|^2 + |\psi_{0m}|^2\big) + \sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\tau_{nm}|^2 + |\widetilde{\tau}_{nm}|^2 + |\psi_{nm}|^2 + |\widetilde{\psi}_{nm}|^2\big)\right] =$$

$$= 2M_1^2 M_4^2 \big(\|\tau(r,\varphi)\|^2_{L_2(D)} + \|\psi(r,\varphi)\|^2_{L_2(D)}\big).$$

Отсюда получим оценку (83).

Пусть (r,φ,t) — произвольная точка $\overline{Q}$. Тогда из формулы (37) с учётом оценок (44), (45) и (49) имеем

$$|u(r,\varphi,t)| \leqslant M_1 M_4 \left[\sum_{m=1}^{\infty}\big(|\tau_{0m}| + |\psi_{0m}|\big) + \sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\tau_{nm}| + |\psi_{nm}| + |\widetilde{\tau}_{nm}| + |\widetilde{\psi}_{nm}|\big)\right]. \tag{85}$$

Далее на основании рассуждений, приведённых при доказательстве леммы 5, коэффициент τ_{nm} представим в виде

$$\tau_{nm} = -\frac{\sqrt{2}}{l\sqrt{\pi}|J_{n+1}(q_{nm})|n^2} \int\limits_0^{2\pi} J(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi,$$

где

$$J(\varphi) = \int\limits_0^l \tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) J_n(\mu_{nm}r) r\,dr = -\frac{1}{\mu^2_{nm}}\big(J_1' + J_2' - n^2 J_3'\big),$$

$$J_1' = \int\limits_0^l \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) J_n(\mu_{nm}r) r\,dr, \quad J_2' = \int\limits_0^l \frac{\tau^{(1,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)}{r} J_n(\mu_{nm}r) r\,dr, \quad J_3' = \int\limits_0^l \frac{\tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)}{r^2} J_n(\mu_{nm}r) r\,dr.$$

Если $\tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) \in C^2[0,l]$ и $\tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(0,\varphi) = \tau^{(1,2)}(0,\varphi) = 0$, то функции $\tau^{(1,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)r^{-1} = \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(\theta,\varphi)$, $\tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) = \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(\theta,\varphi)/2$, $0 < \theta < r$, непрерывны на отрезке $[0,l]$, тогда

$$|\tau_{nm}| \leqslant \frac{M_{18}}{\mu^2_{nm}} |\tau^{(2,2)}_{nm}|,$$

где

$$\tau^{(2,2)}_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\cos(n\varphi) R_{nm}(r) r\,dr\,d\varphi. \tag{86}$$

Аналогично получим оценки

$$|\widetilde{\tau}_{nm}| \leqslant \frac{M_{18}}{\mu^2_{nm}} |\widetilde{\tau}^{(2,2)}_{nm}|,$$

$$\widetilde{\tau}^{(2,2)}_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\sin(n\varphi) R_{nm}(r) r\,dr\,d\varphi, \tag{87}$$

$$|\psi nm| \leqslant \frac{M_{18}}{\mu^2_{nm}} |\psi^{(2,2)}_{nm}|, \quad |\widetilde{\psi} nm| \leqslant \frac{M_{18}}{\mu^2_{nm}} |\widetilde{\psi}^{(2,2)}_{nm}|,$$

где $\psi^{(2,2)}_{nm}$ и $\widetilde{\psi}^{(2,2)}_{nm}$ определяются по формулам (86) и (87), но с заменой $\tau(r,\varphi)$ на $\psi(r,\varphi)$.

Теперь, продолжая оценку (85), будем иметь

$$|u(r,\varphi,t)|\leqslant M_{19}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{0m}^2}\big(|\tau_{0m}^{(2,2)}|+|\psi_{0m}^{(2,2)}|\big)+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm}^2}\big(|\tau_{nm}^{(2,2)}|+|\widetilde{\tau}_{nm}^{(2,2)}|+|\psi_{nm}^{(2,2)}|+|\widetilde{\psi}_{nm}^{(2,2)}|\big)\right].$$

Отсюда, используя неравенство Буняковского, получаем

$$|u(r,\varphi,t)|\leqslant M_{20}\Bigg\{\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{0m}^4}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\tau_{0m}^{(2,2)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{0m}^{(2,2)}|^2\right)^{1/2}\right]+$$

$$+\left(\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm}^4}\right)^{1/2}\left[\left(2\sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\tau_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\tau}_{nm}^{(2,2)}|^2\big)\right)^{1/2}+\left(2\sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\psi_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\psi}_{nm}^{(2,2)}|^2\big)\right)^{1/2}\right]\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant M_{21}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\tau_{0m}^{(2,2)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\tau_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\tau}_{nm}^{(2,2)}|^2\big)\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{0m}^{(2,2)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\psi_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\psi}_{nm}^{(2,2)}|^2\big)\right)^{1/2}\right]\leqslant$$

$$\leqslant M_{21}\sqrt{2}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\tau_{0m}^{(2,2)}|^2+\sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\tau_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\tau}_{nm}^{(2,2)}|^2\big)\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{0m}^{(2,2)}|^2+\sum_{n,m=1}^{\infty}\big(|\psi_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\psi}_{nm}^{(2,2)}|^2\big)\right)^{1/2}\right]=$$

$$=\sqrt{2}M_{21}\big(\|\tau^{(2,2)}(r,\varphi)\|_{L_2(D)}+\|\psi^{(2,2)}(r,\varphi)\|_{L_2(D)}\big)\leqslant M_{22}\big(\|\tau^{(2,2)}(r,\varphi)\|_{C(\overline{D})}+\|\psi^{(2,2)}(r,\varphi)\|_{C(\overline{D})}\big).$$

Из последнего неравенства непосредственно следует оценка (84).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев, С.Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе / С.Л. Соболев // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 109, № 4. — С. 707–709.
2. Арнольд, В.И. Математическое понимание природы / В.И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2010. — 144 с.
3. Пташник, Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.И. Пташник. — Киев : Наукова думка, 1984. — 264 с.
4. Сабитов, К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными / К.Б. Сабитов // Мат. заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 262–276.
5. Сабитов, К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. — М. : Физматлит, 2013. — 352 с.
6. Денчев, Р. О спектре одного оператора / Р. Денчев // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 126, № 2. — С. 259–262.
7. Денчев, Р. О задаче Дирихле для волнового уравнения / Р. Денчев // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 3. — С. 501–504.

8. Денчев, Р. Задача Дирихле для волнового уравнения на параллелепипеде. — Дубна : Объединенный институт ядерных исследований, 1969. — 13 с.
9. Dunninger, D.R. The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains / D.R. Dunninger, E.C. Zachmonoglou // J. Math. Mech. — 1969. — V. 18. — P. 763–766.
10. Бурский, В.П. Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения / В.П. Бурский // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 6. — С. 1038–1039.
11. Алдашев, С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором / С.А. Алдашев // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2011. — Т. 13, № 1. — С. 21–29.
12. Алдашев, С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором / С.А. Алдашев // Журн. вычислит. и прикл. математики. — 2013. — Т. 14, № 4. — С. 68–76.
13. Алдашев, С.А. Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором / С.А. Алдашев // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. — 2015. — Т. 15, № 4. — С. 3–11.
14. Алдашев, С.А. Корректность краевой задачи в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения / С.А. Алдашев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2012. — Т. 29, № 4. — С. 48–55.
15. Арнольд, В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике / В.И. Арнольд // Успехи мат. наук. — 1963. — Т. 18, № 6. — С. 91–192.
16. Арнольд, В.И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя / В.И. Арнольд // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1961. — Т. 25. — С. 21–86.
17. Козлов, В.В. Условие вмороженности поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости / В.В. Козлов // Прикл. математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 2. — С. 237–244.
18. Кошляков, Н.С. Уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глиннер, М.М. Смирнов. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.
19. Олвер, М.М. Асимптотика и специальные функции / М.М. Олвер ; пер. с англ. Ю.А. Брычкова ; под ред. А.П. Прудникова. — М. : Наука, 1990. — 528 с.
20. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи ; пер. с англ. Н.Я. Виленкина — М. : Наука, 1966. — 296 с.
21. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1 / Г.Н. Ватсон ; пер. со 2-го англ. изд. В.С. Бермана. — М. : Изд-во иностр. лит., 1949. — 799 с.

DIRICHLET PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL WAVE EQUATION IN A CYLINDRICAL DOMAIN

© 2025 / **K. B. Sabitov**

Samara State Technical University, Russia
Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Russia
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

In this work, the first boundary value problem is studied for a two-dimensional wave equation in a cylindrical domain. A uniqueness criterion has been established. The solution is constructed as the sum of an orthogonal series. When justifying the convergence of a series, the problem of small denominators from two natural arguments arose for the first time. An estimate for separation from zero with the corresponding asymptotics was established, which made it possible to prove the convergence of the series in the class of regular solutions and the stability of the solution.

Keywords: wave equation, Dirichlet problem, uniqueness criterion, existence, stability, series, small denominators

REFERENCES

1. Sobolev, S.L., An example of a correct boundary value problem for the equation of string vibration with data on the entire boundary, *Dokl. AN USSR*, 1956, vol. 109, no. 4, pp. 707–709.
2. Arnold, V.I., *Matematicheskoye ponimaniye prirody* (Mathematical Understanding of Nature), Moscow: MCCME, 2010.
3. Ptashnik, B.I., *Nekorrektnyye granichnyye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi* (Ill-Posed Boundary Value Problems for Partial Differential Equations), Kyiv: Naukova Dumka, 1984.
4. Sabitov, K.B., The Dirichlet problem for higher-order partial differential equations, *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 1–2, pp. 255–267.
5. Sabitov, K.B., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Fizmatlit, 2013.
6. Denchev, R., On the spectrum of one operator, *DAN USSR*, 1959, vol. 126, no. 2, pp. 259–262.
7. Denchev, R., On the Dirichlet Problem for the Wave Equation, *DAN USSR*, 1959, vol. 127, no. 3, pp. 501–504.
8. Denchev, R., *Zadacha Dirikhle dlya volnovogo uravneniya na parallelepipede* (Dirichlet Problem for the Wave Equation on a Parallelepiped), Dubna: Joint Institute for Nuclear Research, 1969.
9. Dunninger, D.R. and Zachmonoglou, E.C., The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains, *J. Math. and Mech.*, 1969, vol. 18, pp. 763–766.
10. Bursky, V.P., Uniqueness of the solution to the Dirichlet problem in a ball for the wave equation, *Differ. Equat.*, 1988, vol. 24, no. 6, pp. 1038–1039.
11. Aldashev, S.A., Well-posedness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator, *Dokl. AMAN.*, 2011, vol. 13, no. 1, pp. 21–29.
12. Aldashev, S.A., Correctness of the Poincarè problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator, *J. Comput. Appl. Math.*, 2013, vol. 14, no. 4, pp. 68–76.
13. Aldashev, S.A., Correctness of a local boundary value problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator, *Vestnik NGU. Series Mathematics, Mechanics, Computer Science*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 3–11.
14. Aldashev, S.A., Correctness of the boundary value problem in a cylindrical domain for multidimensional wave equations, *Bull. of Samara State Univ. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2012, vol. 29, no. 4. pp. 48–55.
15. Arnold, V.I., Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Uspekhi Mat.*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 91–192.
16. Arnold, V.I., Small denominators I. On mappings of a circle onto itself, *Proc. of the USSR Academy of Sciences. Mathematical Series*, 1961, vol. 25, pp. 21–86.
17. Kozlov, V.V., A condition for the freezing of a direction field, small denominators, and the chaotization of steady flows of a viscous fluid, *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 2, pp. 229–235.
18. Koshlyakov, N.S., Glinner, E.B., and Smirnov, M.M., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Vyschaya schkola, 1970.
19. Olver, F.W.J., *Asymptotics and Special Functions*, New York; London: Academic Press, 1974.
20. Bateman, H. and Erdélyi, A., *Higher Transcendental Functions*, New York; Toronto; London: McGraw-Hill, 1953.
21. Watson, G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1944.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 68–83

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГО СТЕРЖНЯ

© 2025 г. Х. Г. Умаров

Академия наук Чеченской Республики, г. Грозный
Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный
e-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 19.06.2024 г., после доработки 19.06.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными соболевского типа, обобщающего уравнение колебаний полого гибкого стержня, исследована задача Коши в пространстве заданных на всей числовой оси непрерывных функций, для которых существуют пределы на бесконечности. Рассмотрены условия существования глобального классического решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временно́м отрезке.

Ключевые слова: уравнение колебаний полого гибкого стержня, нелинейное уравнение соболевского типа, глобальное решение, разрушение решения

DOI: 10.31857/S0374064125010062, EDN: HZTIEE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Колебания полого гибкого стержня [1, гл. 8, формула (8.230)] моделируются нелинейным дифференциальным уравнением соболевского типа [2]

$$\delta u_{tt}-u_{ttxx}-\alpha_2 u_{txx}-\alpha_1 u_{tx}+\beta_2 u_{xxxx}+\beta_1 u_{xx}+\gamma u=u_{xx}f'(u_x), \tag{1}$$

где $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$, $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$; штрих в уравнении обозначает дифференцирование по $u_x=\partial_x u=\partial u/\partial x$; коэффициенты α_i, β_i, $i=1,2$, γ, δ — неотрицательные постоянные; нелинейность f — дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(r)$, $r\in\mathbb{R}$, для которой модуль $|f(r)|$ при $r\geqslant 0$ является неубывающей функцией и справедливы оценки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(i)}(g(x))|\leqslant\Big|f^{(i)}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|\Big)\Big|,\quad i=0,1,\quad g(x)\in C[\mathbb{R}],$$

$$|f(\xi r)|\leqslant\chi(\xi)|f(r)|,\quad \xi>0,\quad r\geqslant 0, \tag{2}$$

χ — непрерывная неубывающая функция (простейший её пример — степенная функция, другие нетривиальные примеры см. в [3]).

Полагаем, что стержень является бесконечным. Такая идеализация допустима [4], если на границах стержня находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не отражаются.

Задача Коши для уравнения (1) исследуется в пространстве $C[\mathbb{R}]$ [5, гл. 8, § 1] непрерывных функций $g=g(x)$, для которых существуют оба предела при $x\to\pm\infty$ и норма равна $\|g\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$, с начальными условиями

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Искомое классическое решение $u=u(t,x)$, $(t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty)$, и его частные производные, входящие в уравнение (1), для всех значений временно́й переменной t по переменной x принадлежат пространству $C[\mathbb{R}]$. (Под *классическим решением уравнения* понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.)

Через $C^{(k)}[\mathbb{R}]=\{g(x)\in C[\mathbb{R}]\colon g'(x),\ldots,g^{(k)}(x)\in C[\mathbb{R}]\}$, $k=1,2,\ldots$, обозначаются подмножества дифференцируемых функций в $C[\mathbb{R}]$.

Напомним [5, гл. 8, § 1; 6, § 2], что в пространстве $C[\mathbb{R}]$ дифференциальный оператор ∂_x с областью определения $D(\partial_x)=C^{(1)}[\mathbb{R}]$ порождает сжимающую сильно непрерывную группу $U(\tau;\partial_x)g(x)=g(x+\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$, левых сдвигов, а оператор ∂_x^2 с областью определения $D(\partial_x^2)=C^{(2)}[\mathbb{R}]$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t;\partial_x^2)g(x)=(2\sqrt{\pi t})^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)\,d\xi$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$; причём для резольвент $(\lambda I-\partial_x)^{-1}$, $(\lambda I-\partial_x^2)^{-1}$ справедливы оценки $\|(\lambda I-\partial_x)^{-1}\|\leqslant 1/\lambda$ и $\|(\lambda I-\partial_x^2)^{-1}\|\leqslant 1/\lambda$ при $\lambda>0$.

Исследование задачи Коши (1), (3) проведём по следующему плану.

1. Убедимся, что постановка задачи Коши (1), (3) корректна и локальное по времени её классическое решение существует. С этой целью для соответствующего (1) линейного однородного уравнения найдём решение задачи Коши.

2. Введём в рассмотрение вспомогательную задачу Коши

$$\delta v_{tt}-v_{ttxx}-\alpha_2 v_{txx}-\alpha_1 v_{tx}+\beta_2 v_{xxxx}+\beta_1 v_{xx}+\gamma v=\partial_x^2 f(v), \tag{4}$$

$$v|_{t=0}=\varphi'(x),\quad v_t|_{t=0}=\psi'(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

для которой найдём временной отрезок $[0,t_1]$ существования и единственности её классического решения и оценим норму в $C[\mathbb{R}]$ этого локального решения.

3. Установим связь между решениями уравнений (1) и (4), полагая, что на отрезке $[0,t_1]$ решение $u=u(t,x)$ по переменной x принадлежит пересечению подмножества $C^{(4)}[\mathbb{R}]\subset C[\mathbb{R}]$ с пространством Соболева $W_2^4(\mathbb{R})$, причём временны́е частные производные $u_t=u_t(t,x)$ и $u_{tt}=u_{tt}(t,x)$ принадлежат пересечению $C^{(2)}[\mathbb{R}]\cap W_2^2(\mathbb{R})$.

4. Найдём достаточные условия существования единственного классического глобального $(t\geqslant 0)$ решения и разрушения на конечном временно́м отрезке решения задачи Коши (1), (3).

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (1):

$$(\delta I-\partial_x^2)u_{tt}-(\alpha_2\partial_x^2+\alpha_1\partial_x)u_t+(\beta_2\partial_x^4+\beta_1\partial_x^2+\gamma I)u=0. \tag{6}$$

Введём в (6) новую неизвестную функцию

$$v(t,x)=\delta u(t,x)-u_{xx}(t,x), \tag{7}$$

полагая, что частные производные u_{xx}, u_{txx} непрерывны при $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$. Из замены (7) при условии, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}[\mathbb{R}]$, можно единственным образом определить начальные значения функции $v=v(t,x)$:

$$v|_{t=0}=v_0(x)=\delta\varphi(x)-\varphi''(x),\quad v_t|_{t=0}=v_1(x)=\delta\psi(x)-\psi''(x),$$

и, используя принадлежность положительной полуоси резольвентному множеству дифференциального оператора ∂_x^2, выразить решение $u(t,x)$ уравнения (6) через новую неизвестную функцию $v(t,x)$:

$$u(t,x)=(\delta I-\partial_x^2)^{-1}v(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\delta}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|s|\sqrt{\delta}}v(t,x+s)\,ds. \tag{8}$$

В результате замены (7) получим эквивалентное (6) интегро-дифференциальное уравнение

$$v_{tt}+A_1v_t+A_2v=0, \tag{9}$$

в котором операторные коэффициенты равны

$$A_1=\alpha_2I-(\alpha_2\sqrt{\delta}-\alpha_1)\sqrt{\delta}(\delta I-\partial_x^2)^{-1}-\alpha_1(\sqrt{\delta}I-\partial_x)^{-1},\quad D(A_1)=C[\mathbb{R}],$$

$$A_2=-\beta_2\partial_x^2-(\beta_2\delta+\beta_1)I+(\beta_2\delta^2+\beta_1\delta+\gamma)(\delta I-\partial_x^2)^{-1},\quad D(A_2)=C^{(2)}[\mathbb{R}].$$

Ограниченный оператор A_1 порождает равномерно непрерывную группу $U(\tau;A_1)$, $\tau\in\mathbb{R}$, представимую степенным рядом

$$U(\tau;A_1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tau^n}{n!}A_1^n,$$

равномерно сходящимся по τ на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}$, причём в силу перестановочности операторов $(\sqrt{\delta}I-\partial_x)^{-1}$ и $(\delta I-\partial_x^2)^{-1}$ справедливы представление

$$U(\tau;A_1)=e^{\alpha_2\tau}U\big(-\alpha_1\tau;(\sqrt{\delta}I-\partial_x)^{-1}\big)U\big(-(\alpha_2\sqrt{\delta}-\alpha_1)\sqrt{\delta}\tau;(\delta I-\partial_x^2)^{-1}\big)=$$

$$=e^{\alpha_2\tau}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\alpha_1^n\tau^n}{n!}(\sqrt{\delta}I-\partial_x)^{-n}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(\alpha_2\sqrt{\delta}-\alpha_1)^m\delta^{m/2}\tau^m}{m!}(\delta I-\partial_x^2)^{-m}\right)$$

и оценка

$$\|U(t;A_1)\|\leqslant e^{(\alpha_2+\alpha_1/\sqrt{\delta}+|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)t},\quad t\in\overline{R}_+.$$

В уравнении (9) проведём замену неизвестной функции

$$w(t,x)=U(t/2;A_1)v(t,x), \tag{10}$$

тогда можно единственным образом определить начальные значения функции $w(t,x)$:

$$w|_{t=0}=w_0(x)=v_0(x),$$

$$w_t|_{t=0}=w_1(x)=A_1v_0(x)/2+v_1(x)=$$

$$=\alpha_2\frac{v_0(x)}{2}-\frac{\alpha_2\sqrt{\delta}-\alpha_1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|s|\sqrt{\delta}}v_0(x+s)\,ds-\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-r\sqrt{\delta}}v_0(x+r)\,dr+v_1(x)$$

и выразить решение $v(t,x)$ уравнения (9) через новую неизвестную функцию $w(t,x)$:

$$v(t,x)=U(-t/2;A_1)w(t,x). \tag{11}$$

В результате замены (10) получим эквивалентное (9) интегро-дифференциальное уравнение

$$w_{tt} = (A_1^2/4 - A_2)w, \tag{12}$$

в котором операторный коэффициент

$$A_1^2/4 - A_2 = B = B_0 + B_1, \quad D(B) = C^{(2)}[\mathbb{R}],$$

где $B_0 = \beta_2\partial_x^2$ и

$$B_1 = \left(\beta_2\delta + \beta_1 + \frac{\alpha_2^2}{4}\right)I - \left(b_2\delta^2 + \beta_1\delta + \gamma + \frac{\alpha_2(\alpha_2\sqrt{\delta} - \alpha_1)}{2}\sqrt{\delta}\right)(\delta I - \partial_x^2)^{-1} -$$
$$- \frac{\alpha_2\alpha_1}{2}(\sqrt{\delta}I - \partial_x)^{-1} + \frac{1}{4}\left(\alpha_1(\sqrt{\delta}I - \partial_x)^{-1} + (\alpha_2\sqrt{\delta} - \alpha_1)\sqrt{\delta}(\delta I - \partial_x^2)^{-1}\right)^2.$$

Уравнение (12) можно записать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = BW, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{13}$$

где $W = W(t)\colon t \to w(t,x)$ — искомая вектор-функция, определённая для $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}]$.

Для уравнения (13) рассмотрим абстрактную задачу Коши с начальными условиями

$$W|_{t=0} = W_0, \quad W'|_{t=0} = W_1, \tag{14}$$

где $W_0 = w_0(x)$, $W_1 = w_1(x)$ — элементы пространства $C[\mathbb{R}]$.

Задача Коши (13), (14) равномерно корректна [6, § 1.4] только тогда, когда оператор B является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; B)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

В пространстве $C[\mathbb{R}]$ оператор B_0 является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; B_0)$, $\tau \in \mathbb{R}$ [6, § 1.5]:

$$C(\tau; B_0)g(x) = 2^{-1}\left[U\left(\tau\sqrt{\beta_2}; \partial_x\right) + U\left(-\tau\sqrt{\beta_2}; \partial_x\right)\right]g(x) = 2^{-1}\left[g(x + \tau\sqrt{\beta_2}) + g(x - \tau\sqrt{\beta_2})\right],$$

для которой справедлива оценка нормы

$$\|C(t; B_0)\| \leqslant 1, \quad t \in \overline{R}_+.$$

Соответствующая синус оператор-функция $S(\tau; B_0)$, $\tau \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$S(\tau; B_0)g(x) = \int\limits_0^\tau C(s; B_0)g(x)\,ds = \frac{1}{2\sqrt{\beta_2}}\int\limits_{x-\tau\sqrt{\beta_2}}^{x+\tau\sqrt{\beta_2}} g(\xi)\,d\xi$$

и для неё справедлива оценка нормы

$$\|S(t; B_0)\| \leqslant t, \quad t \in \overline{R}_+.$$

Ограниченный оператор B_1 порождает сильно непрерывную косинус оператор-функцию $C(\tau; B_1)$, для которой на произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}]$ справедливо представление [6, §§ 1.4, 4.2]

$$C(\tau; B_1)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tau^{2n}}{(2n)!}B_1^n g(x), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

причём степенной ряд сходится равномерно по τ на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}$. Отметим, что операторнозначная функция $C(\tau;B_1)$ непрерывна в равномерной операторной топологии и для неё справедлива оценка нормы

$$\|C(t;B_1)\|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\|B_1\|^n\leqslant\operatorname{ch}(c_1t),\quad t\in\overline{R}_+,$$

где $c_1^2=2\beta_2\delta+2\beta_1+\gamma/\delta+(\alpha_2\sqrt{\delta}+\alpha_1+|\alpha_2\sqrt{\delta}-\alpha_1|)^2/(4\delta)$.

Оператор B получен возмущением неограниченного оператора B_0 ограниченным оператором B_1, но возмущение ограниченным оператором сохраняет [6, § 8.2] способность оператора B_0 порождать косинус оператор-функцию, поэтому $B=B_0+B_1$ является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau;B)$, $\tau\in\mathbb{R}$, и значит, абстрактная задача Коши (13), (14) равномерно корректна.

Решение задачи Коши (13), (14) для любых начальных данных $W_0\in D(B)$ и $W_1\in C_1[\mathbb{R}]$ определяется формулой

$$W(t)=C(t;B)W_0+S(t;B)W_1,$$

где $S(t;B)$ — синус оператор-функция, ассоциированная с $C(t;B)$:

$$S(t;B)g=\int_0^t C(\tau;B)g\,d\tau,\quad g\in C[\mathbb{R}],$$

$C_1[\mathbb{R}]=\{g\in C[\mathbb{R}]\colon C(t;B)g\in C^{(1)}(\mathbb{R},C[\mathbb{R}])\}$ — линейное многообразие. Очевидно, что $D(B)=$ $=C^{(2)}[\mathbb{R}]\subset C_1[\mathbb{R}]$.

Для того чтобы вывести оценку нормы решения уравнения (13) — абстрактной функции $W(t)$, найдём оценки норм косинус и синус оператор-функций, порождаемых оператором B, для чего получим представление операторнозначной функции $C(t;B)$ через $C(t;B_0)$ и $C(t;B_1)$.

Рассматривая производящий оператор B как результат возмущения производящего оператора B_0 оператором B_1, который, в свою очередь, порождает косинус оператор-функцию, для $g(x)\in D(B_0)\cap D(B_1)=C^{(2)}[\mathbb{R}]$, получаем [6, § 8.2] представление

$$C(t;B)g(x)=C(t;B_0)g(x)+\frac{t^2}{2}\int_0^1 j_1(t\sqrt{1-s^2},B_0)C(ts;B_1)g(x)\,ds,$$

где $j_1(t,B_0)g(x)=(4/\pi)\int_0^1\sqrt{1-r^2}C(tr;B_0)g(x)\,dr$.

Для $t\in\mathbb{R}_+$ получим оценки норм: $\|j_1(t,B_0)\|\leqslant(4/\pi)\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,dr=1$ и

$$\|C(t;B)\|\leqslant 1+\frac{t^2}{2}\int_0^1\operatorname{ch}(c_1ts)\,ds=1+\frac{t}{2c_1}\operatorname{sh}(c_1t)=\sigma_1(t),\tag{15}$$

$$\|S(t;B)\|\leqslant t+\frac{1}{2c_1}\int_0^t\tau\operatorname{sh}(c_1\tau)\,d\tau\leqslant t\bigg(1+\frac{\operatorname{ch}(c_1t)}{2c_1^2}\bigg)=\sigma_2(t).\tag{16}$$

С помощью формул (11) и (8) обратных замен имеем

$$u(t,x)=(\delta I-\partial_x^2)^{-1}v(t,x)=(\delta I-\partial_x^2)^{-1}U(-t/2;A_1)w(t,x).\tag{17}$$

Далее, используя перестановочность резольвенты $(\delta I-\partial_x^2)^{-1}$ и полугруппы $U(-t/2;A_1)$ как между собой, так и с косинус оператор-функцией, порождаемой оператором B, находим решение задачи Коши для уравнения (6):

$$u(t,x)=U(-t/2;A_1)\big[C(t;B)\varphi(x)+S(t;B)(A_1\varphi(x)/2+\psi(x))\big]. \tag{18}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат подмножеству $C^{(4)}[\mathbb{R}]$ пространства $C[\mathbb{R}]$, тогда задача Коши для линейного однородного уравнения* (6) *равномерно корректна, классическое решение даётся формулой* (18) *и для него справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leqslant e^{-(\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}-|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)t/2}\times$$
$$\times\left[\sigma_1(t)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|+\sigma_2(t)\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi(x)|+\frac{\alpha_2\sqrt{\delta}+\alpha_1+|\alpha_2\sqrt{\delta}-\alpha_1|}{2\sqrt{\delta}}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\right)\right],\quad t\in\overline{R}_+.$$

Замечание 1. Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (13), (14) принадлежит $C^{(2)}(\overline{R}_+,C[\mathbb{R}])$ и для него $BW(t)\in C(\overline{R}_+,C[\mathbb{R}])$, следовательно, $w(t,x)=U(t/2;A_1)\times\times(\delta I-\partial_x^2)u(t,x)\in C^{2,2}(\overline{R}_+,\mathbb{R})$. В силу (17) найденное решение задачи Коши (6), (3) $u(t,x)\in\in C^{2,4}(\overline{R}_+,\mathbb{R})$.

3. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ (4)

Уравнение (4) получается из уравнения (1) дифференцированием обеих частей по переменной x и последующей заменой $u_x=v$ (левые части этих уравнений совпадают).

Подействуем на обе части уравнения (4) оператором $(\delta I-\partial_x^2)^{-1}$ и получим эквивалентное ему уравнение

$$v_{tt}+A_1v_t+A_2v=f_1(v), \tag{19}$$

в котором нелинейность $f_1(u)=[\delta(\delta I-\partial_x^2)^{-1}-I]f(u)$, а операторы A_1 и A_2 такие же, как и в уравнении (9).

Уравнение (19) заменой $v(t,x)=U(-t/2;A_1)w(t,x)$ сводится к абстрактному полулинейному уравнению

$$W_{tt}=BW+f_2(t,U(-t/2;A_1)W), \tag{20}$$

где оператор B такой же, как и в (13), а нелинейный оператор f_2 определяется формулой

$$f_2(t,\cdot)=U(t/2;A_1)[\delta(\delta I-\partial_x^2)^{-1}-I]f(\cdot),$$

здесь $f(\cdot)$ — оператор суперпозиции: $f(g)=f(g(x))$, $g(x)\in C[\mathbb{R}]$.

При $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ справедлива оценка нормы оператора $f_2(t,\cdot)$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$:

$$\|F(t,g)\|_C\leqslant 2e^{(\alpha_2+\alpha_1/\sqrt{\delta}+|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)t/2}f(\|g\|_C). \tag{21}$$

Для уравнения (20) рассмотрим абстрактную задачу Коши с начальными условиями

$$W|_{t=0}=W_0',\quad W'|_{t=0}=W_1', \tag{22}$$

где $W_0'=(w_0(x))'$ и $W_1'=(w_1(x))'$ — элементы пространства $C[\mathbb{R}]$.

Из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции в пространстве непрерывных функций и ограниченности операторов $U(t/2;A_1)$ и $(\delta I-\partial_x^2)^{-1}$ следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $f_2(t,\cdot)$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$ и, следовательно, существует промежуток $[0,t_0)$, в котором абстрактная задача Коши (20), (22) имеет [7, § 3] единственное классическое решение $W=W(t)$ (при условии принадлежности начальных данных W_0', W_1' области определения оператора B), удовлетворяющее интегральному уравнению

$$W(t)=C(t;B)W_0'+S(t;B)W_1'+\int\limits_0^t S(t-\tau;B)f_2(\tau,U(-\tau/2;A_1)W)\,d\tau. \tag{23}$$

Из уравнения (23), используя оценки (15), (16), (21) и (2), выводим интегральное неравенство

$$\|W(t)\|_C\leqslant\sigma_1(t)\|W_0'\|_C+\sigma_2(t)\|W_1'\|_C+$$

$$+2\int\limits_0^t\sigma_2(t-\tau)e^{(\alpha_2+\alpha_1/\sqrt{\delta}+|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)\tau/2}\chi\big(e^{-(\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}-|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)\tau/2}\big)f(\|W(\tau)\|_C)\,d\tau, \tag{24}$$

где

$$\|W_0'\|_C=\|(w_0(x))'\|_C=\|(v_0(x))'\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\delta\varphi'(x)-\varphi'''(x)|,$$

$$\|W_1'\|_C=\|(w_1(x))'\|_C=\|(v_1(x))'\|_C=\|(A_1v_0(x)/2+v_1(x))'\|_C\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha_2\sqrt{\delta}+\alpha_1+|\alpha_2\sqrt{\delta}-\alpha_1|}{2\sqrt{\delta}}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\delta\varphi'(x)-\varphi'''(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|\delta\psi'(x)-\psi'''(x)|.$$

Обозначая

$$\sigma_3(t)=\sigma_1(t)\|W_0'\|_C+\sigma_2(t)\|W_1'\|_C,$$

$$\sigma_4(\tau)=e^{(\alpha_2+\alpha_1/\sqrt{\delta}+|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)\tau/2}\chi\big(e^{-(\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}-|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)\tau/2}\big)$$

и используя неравенство

$$\sigma_5(t)=t(1+\mathrm{ch}(c_1t)/(2c_1^2))\geqslant(t-\tau)(1+\mathrm{ch}(c_1(t-\tau))/(2c_1^2))=\sigma_2(t-\tau),\quad t\geqslant\tau\geqslant 0,$$

запишем интегральное неравенство (24) в виде

$$\|W(t)\|_C\leqslant\sigma_3(t)+2\sigma_5(t)\int\limits_0^t\sigma_4(\tau)f(\|W(\tau)\|_C)\,d\tau. \tag{25}$$

Из неравенства (25) выводим [3] оценку нормы в пространстве $C[\mathbb{R}]$ решения уравнения (20) на отрезке $[0,t_1]$:

$$\|W(t)\|_C\leqslant\sigma_3(t)\Phi^{-1}(\Psi(t))=\sigma_6(t),$$

где

$$\Psi(t)=\Phi(1)+2\sigma_5(t)\int\limits_0^t\sigma_4(\tau)\frac{\chi(\sigma_3(\tau))}{\sigma_3(\tau)}\,d\tau,$$

$\Phi(\xi)=\int_{\xi_0}^{\xi}|f(s)|^{-1}\,ds$ для $\xi_0,\xi>0$; Φ^{-1} — обратная функция к Φ, отрезок $[0,t_1]\subset[0,t_0)$ определяется теми значениями t, для которых значения функции $\Psi(t)$ принадлежат области существования $\mathrm{Dom}(\Phi^{-1})$ обратной функции Φ^{-1}.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условиям (2), а начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ задачи Коши (4), (5) принадлежат пространству $C[\mathbb{R}]$ вместе со своими производными до пятого порядка включительно, тогда на отрезке $[0,t_1]$ существует единственное классическое решение $u=u(t,x)$ этой задачи в пространстве $C[\mathbb{R}]$, для которого справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|v(t,x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_x(t,x)|\leqslant e^{-(\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}-|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)t/2}\sigma_6(t)=\sigma_7(t),\quad t\in[0,t_1].$$

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ (1) И (4)

Далее будем предполагать, что решение уравнения (1) принадлежит пересечению пространства $C[\mathbb{R}]$ с пространством $L_2(\mathbb{R})$ функций с интегрируемым квадратом.

Напомним, что скалярное произведение и норма в $L_2(\mathbb{R})$ определяются соответственно формулами $(\varphi,\psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)\,dx$ и $\|\varphi\|_2=\big(\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,dx\big)^{1/2}$, и что для функций $g(x)$, принадлежащих пересечению пространства непрерывных ограниченных функций $C(\mathbb{R})$ с пространством Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$, справедлива оценка

$$\|g\|_C\leqslant\|g\|_{W_2^1}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[(g(x))^2+(g'(x))^2]\,dx\right)^{1/2},\tag{26}$$

причём если $g(x)\in C^{(2)}(\mathbb{R})$, то [8] пределы функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x\to\pm\infty$ равны нулю.

Лемма. *Из существования локального классического решения $v=v(t,x)$, $t\in[0,t_1]$, уравнения (4) следует существование соответствующего решения*

$$u=u(t,x)=\lim_{x_0\to-\infty}\int_{x_0}^{x}v(t,s)\,ds=\int_{-\infty}^{x}v(t,s)\,ds\tag{27}$$

уравнения (1) на том же временнóм отрезке $[0,t_1]$ при выполнении условий

$$u(t,x)\in C^{(4)}[\mathbb{R}]\cap W_2^4(\mathbb{R}),\quad u_t(t,x),u_{tt}(t,x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}]\cap W_2^2(\mathbb{R}),\quad t\in[0,t_1].\tag{28}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий (28) следуют предельные равенства

$$\lim_{x\to\pm\infty}\partial_x^k u(t,x)=0,\quad k=\overline{0,4};\quad \lim_{x\to\pm\infty}\partial_t^n\partial_x^m u(t,x)=0,\quad n=1,2,\quad m=\overline{0,2};\quad t\in[0,t_1].\tag{29}$$

Пусть $v=v(t,x)$ — классическое решение уравнения (4) на временнóм отрезке $[0,t_1]$. Тогда, используя соотношения (29), получаем равенства

$$\int_{-\infty}^{x}\partial_t^i\partial_s^j v(t,s)\,ds=\int_{-\infty}^{x}(\partial_t^i\partial_s^j u(t,s))_s\,ds=\partial_t^i\partial_x^j u(t,x)-\lim_{s\to-\infty}\partial_t^i\partial_s^j u(t,s)=\partial_t^i\partial_x^j u(t,x).$$

Далее, в силу непрерывности функции f', имеем

$$\int_{-\infty}^{x}\partial_s^2 f(v(t,s))\,ds=\big(f(u_x(t,x))\big)_x-f'\Big(\lim_{x_0\to-\infty}u_x(t,x_0)\Big)\lim_{x_0\to-\infty}u_{xx}(t,x_0)=$$

$$=u_{xx}(t,x)f'(u_x(t,x)).$$

Теперь, используя полученные представления и подставляя функцию (27) в уравнение (1), получаем тождественное равенство на отрезке $[0,t_1]$, откуда следует, что функция (27) является решением уравнения (1). Лемма доказана.

Замечание 2. Из условий (28) для решения $u=u(t,x)$ задачи Коши (1), (3) с необходимостью следуют условия, которым должны удовлетворять начальные функции:

$$\varphi(x)\in C^{(4)}[\mathbb{R}]\cap W_2^4(\mathbb{R}),\quad \psi(x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}]\cap W_2^2(\mathbb{R}). \tag{30}$$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1)

Рассмотрим так называемый интеграл энергии для уравнения (1):

$$y(t)=\delta(u,u)+(u_x,u_x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\delta u^2+u_x^2)\,dx,\quad t\in[0,t_1]. \tag{31}$$

Применяя к производной интеграла энергии $y'(t)=2(\delta(u_t,u)+(u_{tx},u_x))$ неравенство Коши–Буняковского $|(\varphi,\psi)|\leqslant\|\varphi\|_2\|\psi\|_2$, выводим вспомогательную оценку на отрезке $t\in[0,t_1]$:

$$y'(t)\leqslant y(t)+z(t), \tag{32}$$

где

$$z(t)=\delta(u_t,u_t)+(u_{tx},u_{tx})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\delta u_t^2+u_{tx}^2)\,dx,\quad t\in[0,t_1], \tag{33}$$

— второй интеграл энергии для уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы 2 и пусть параметры* α_i, β_i, $i=1,2$, γ, δ *уравнения* (1), *нелинейность* f *и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям* (30) *и*

$$E_0=\delta\|\psi\|_2^2+\|\psi'\|_2^2+\beta_2\|\varphi''\|_2^2+\gamma\|\varphi\|_2^2+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\varphi'(x))\,dx-\beta_1\|\varphi'\|_2^2\geqslant 0;$$

$$F(\eta)=\int\limits_0^{\eta}f(s)\,ds\geqslant 0,\quad \eta\in\mathbb{R};\quad F(\varphi'(x))\in L(\mathbb{R}).$$

Тогда существует единственное глобальное решение задачи Коши (1), (3) *и для него справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leqslant\begin{cases}\sqrt{c_2/\delta}\,e^{(1+\beta_1)t/2}, & 0<\delta<1,\\ \sqrt{c_2}\,e^{(1+\beta_1)t/2}, & \delta\geqslant 1,\end{cases}\qquad t\geqslant 0,$$

где

$$c_2=\big(E_0+(1+\beta_1)(\delta\|\varphi\|_2^2+\|\varphi'\|_2^2)\big)/(1+\beta_1).$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1) на частную производную по времени $u_t=u_t(t,x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда, интегрируя по частям и учитывая в силу (29) равенство нулю вне интегральных слагаемых, получаем

$$\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2+(u_{ttx},u_{tx})+\alpha_2(u_{tx},u_{tx})-\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u_t^2)_x\,dx+$$
$$+\beta_2(u_{xx},u_{txx})-\beta_1(u_x,u_{tx})+\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_2^2+(f(u_x),u_{tx})=0. \tag{34}$$

Введём в рассмотрение потенциал $F(\eta)=\int_0^\eta f(s)ds$, порождаемый нелинейностью f уравнения (1), и, учитывая, что $\int_{-\infty}^{+\infty}(u_t^2)_x\,dx=u_t^2|_{-\infty}^{+\infty}=0$, перепишем равенство (34) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t)=0, \tag{35}$$

где

$$E(t)=\delta\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2+\beta_2\|u_{xx}\|_2^2-\beta_1\|u_x\|_2^2+\gamma\|u\|_2^2+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(u_x)\,dx+2\alpha_2\int\limits_0^t\|u\|_2^2\,d\tau$$

— функционал энергии уравнения (1).

Из соотношения (35) следует, что функционал энергии $E(t)$ не зависит от времени, тогда, интегрируя обе части (35), получаем закон сохранения

$$E(t)=E(0)\equiv E_0, \tag{36}$$

где

$$E_0=\delta\|\psi\|_2^2+\|\psi'\|_2^2+\beta_2\|\varphi''\|_2^2-\beta_1\|\varphi'\|_2^2+\gamma\|\varphi\|_2^2+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\varphi'(x))\,dx$$

— начальная энергия.

Потребуем неотрицательности начальной энергии: $E_0\geqslant 0$, т.е. выполнения неравенства

$$\delta\|\psi\|_2^2+\|\psi'\|_2^2+\beta_2\|\varphi''\|_2^2+\gamma\|\varphi\|_2^2+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\varphi'(x))\,dx\geqslant\beta_1\|\varphi'\|_2^2,$$

в котором функция $F(\varphi'(x))$ принадлежит пространству $L(\mathbb{R})$ функций, абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$.

Из закона сохранения (36) выводим

$$\delta\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2+\beta_2\|u_{xx}\|_2^2+\gamma\|u\|_2^2+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(u_x)\,dx+2\alpha_2\int\limits_0^t\|u_{sx}\|_2^2\,ds=E_0+\beta_1\|u_x\|_2^2. \tag{37}$$

Предположим, что

$$F(\eta)\geqslant 0,\quad \eta\in\mathbb{R}, \tag{38}$$

тогда из равенства (37), уменьшив левую часть, получим

$$z(t)\leqslant E_{10}+\beta_1(\delta\|u\|_2^2+\|u_x\|_2^2)=E_{10}+\beta_1 y(t),\quad t\in[0,t_1]. \tag{39}$$

Из неравенств (32) и (39) следует интегральное неравенство

$$y(t)\leqslant E_{10}t+y(0)+(1+\beta_1)\int\limits_0^t y(s)\,ds,\quad t\in[0,t_1]. \tag{40}$$

Применив к (40) лемму Гронуолла [9, § 1, формула (1.10)], получим оценку первого интеграла энергии

$$y(t)\leqslant\left(\frac{E_{10}}{1+\beta_1}+y(0)\right)e^{(1+\beta_1)t}=\sigma_8(t), \tag{41}$$

справедливую на всей положительной полуоси $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, и значит, классическое решение $u=$ $=u(t,x)$ при $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$:

$$\|u\|^2_{W_2^1}=\|u\|_2^2+\|u_x\|_2^2\leqslant\begin{cases}\left(1+\dfrac{1-\delta}{\delta}\right)y(t)\leqslant\dfrac{1}{\delta}\sigma_8(t), & 0<\delta<1,\\ \delta\|u\|_2^2+\|u_x\|_2^2=y(t)\leqslant\sigma_8(t), & \delta\geqslant 1.\end{cases}$$

Теперь, используя неравенства (26) и (41), получаем оценку решения $u=u(t,x)$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, задачи Коши (1), (3) в пространстве $C[\mathbb{R}]$:

$$\|u\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leqslant\|u\|_{W_2^1}\leqslant\begin{cases}\sqrt{\sigma_8(t)/\delta}, & 0<\delta<1,\\ \sqrt{\sigma_8(t)}, & \delta\geqslant 1,\end{cases}$$

обеспечивающую существование глобального решения. Теорема доказана.

6. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1)

Найдём достаточные условия возникновения разрыва второго рода для интеграла энергии (31) на отрезке $[0,t_2]\subseteq[0,t_1]$, который выбираем так, чтобы на нём выполнялось неравенство $y(t)>0$, вытекающее из начального условия $y(0)=\delta\|\varphi\|_2^2+\|\varphi'\|_2^2>0$.

Применив неравенство Коши–Буняковского к квадрату производной интеграла энергии $y(t)$ на отрезке $t\in[0,t_2]$, будем иметь

$$[y'(t)]^2\leqslant 4y(t)z(t).$$

Выведем оценку квадрата нормы частной производной u_{tt}, используя представление уравнения (1) в эквивалентном виде

$$u_{tt}=-A_1u_t-A_2u+(\delta I-\partial_x^2)^{-1}u_{xx}f'(u_x),$$

полученное действием на обе части уравнения (1) линейным ограниченным оператором $(\delta I-\partial_x^2)^{-1}$. С этой целью получим вспомогательные оценки

$$\|u_{xx}f'(u_x)\|_2^2\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}}(f'(u_x))^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\,dx\leqslant\Big(f'\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_x|\Big)\Big)^2\|u_{xx}\|_2^2\leqslant\sigma_9(t)\|u_{xx}\|_2^2,$$

где $\sigma_9(t)=(f'(\sigma_7(t)))^2$ — непрерывная функция на отрезке $[0,t_1]$;

$$\|A_1u_t\|_2^2\leqslant\big\|\alpha_2u_t-(\alpha_2\sqrt{\delta}-\alpha_1)\sqrt{\delta}(\delta I-\partial_x^2)^{-1}u_t-\alpha_1(\sqrt{\delta}I-\partial_x)^{-1}u_t\big\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\alpha_2\|u_t\|_2+\left|\alpha_2-\frac{\alpha_1}{\sqrt{\delta}}\right|\|u_t\|_2+\frac{\alpha_1}{\sqrt{\delta}}\|u_t\|_2\right)^2\leqslant c_3\|u_t\|_2^2\leqslant c_3z(t),$$

где $c_3=(\alpha_2+\alpha_1/\sqrt{\delta}+|\alpha_2-\alpha_1/\sqrt{\delta}|)^2$;

$$\|A_2u\|_2^2\leqslant\big\|-\beta_2\partial_x^2u-(\beta_2\delta+\beta_1)u+(\beta_2\delta^2+\beta_1\delta+\gamma)(\delta I-\partial_x^2)^{-1}u\big\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant\big(\beta_2\|u_{xx}\|_2+(\beta_2\delta+\beta_1)\|u\|_2+\big(\beta_2\delta+\beta_1+\gamma/\delta\big)\|u\|_2\big)^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\big(\beta_2^2\|u_{xx}\|_2^2+\big(2(\beta_2\delta+\beta_1)+\gamma/\delta\big)^2\|u\|_2^2\big)\leqslant 2\beta_2^2\|u_{xx}\|_2^2+c_4y(t),$$

где $c_4=2(2(\beta_2\delta+\beta_1)+\gamma/\delta)^2$.

Учитывая их, имеем

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant \big(\|A_1u_t\|_2 + \|A_2u\|_2 + \|(\delta I - \partial_x^2)^{-1}u_{xx}f'(u_x)\|_2\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 3\bigg(\|A_1u_t\|_2^2 + \|A_2u\|_2^2 + \frac{1}{\delta^2}\|u_{xx}f'(u_x)\|_2^2\bigg) \leqslant 3\bigg(c_3z(t) + 2\beta_2^2\|u_{xx}\|_2^2 + c_4y(t) + \frac{\sigma_9(t)}{\delta^2}\|u_{xx}\|_2^2\bigg),$$

откуда следует неравенство

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 3c_3z(t) + 3c_4y(t) + c_5\|u_{xx}\|_2^2, \quad t \in [0, t_2], \tag{42}$$

где $c_5 = 6\beta_2^2 + 3c_6/\delta^2$, $c_6 = \max_{t\in[0,t_1]}\sigma_9(t)$.

Вернёмся к рассмотрению закона сохранения (37) и получим из него соотношение

$$z(t) + \beta_2\|u_{xx}\|_2^2 + \gamma\|u\|_2^2 + 2\alpha_2\int\limits_0^t \|u_{sx}\|_2^2\,ds \leqslant E_{10} + \beta_1\|u_x\|_2^2 + 2\bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u_x)\,dx\bigg|. \tag{43}$$

Ранее при доказательстве существования глобального решения предполагалось выполнение условия (38) — неотрицательности потенциала $F(\eta)$ на всей числовой оси $\eta \in \mathbb{R}$. Теперь при рассмотрении разрушения решения потребуем для нелинейности f выполнения неравенства

$$\bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_0^{w(x)} f(s)\,ds\bigg| \leqslant \bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x)f(w(x))\,dx\bigg|, \tag{44}$$

где $w(x)$ — произвольная функция из $C[\mathbb{R}]$, для которой функции $F(w(x))$ и $w(x)f(w(x))$ принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Используя неравенство (44), оценим интеграл в правой части (43). Интегрируя по частям, применяя предельные равенства (29) и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$2\bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u_x)\,dx\bigg| \leqslant 2\bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u_x)\,du(x)\bigg| = \bigg|u(x)f(u_x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} uf'(u_x)u_{xx}\,dx\bigg| \leqslant$$
$$\leqslant 2|(uf'(u_x), u_{xx})| \leqslant 2\|uf'(u_x)\|_2\|u_{xx}\|_2 \leqslant \|uf'(u_x)\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}(f'(u_x))^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_2^2\,dx + \|u_{xx}\|_2^2 \leqslant (f'(\sigma_7(t)))^2\|u\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 = \sigma_9(t)\|u\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2,$$

откуда следует неравенство

$$2\bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u_x)\,dx\bigg| \leqslant c_6\|u\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2, \quad t \in [0, t_2]. \tag{45}$$

Применив оценку (45) к соотношению (43) при условии

$$\beta_2 > 1, \tag{46}$$

получим неравенство

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant \frac{E_0}{\beta_2 - 1} + \frac{\beta_1 + c_6}{\beta_2 - 1}y(t) - \frac{1}{\beta_2 - 1}z(t), \quad t \in [0, t_2],$$

используя которое увеличим правую часть оценки (42):

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant \frac{c_5}{\beta_2-1}E_0+\left(3c_4+c_5\frac{\beta_1+c_6}{\beta_2-1}\right)y(t)+\left(3c_3-\frac{c_5}{\beta_2-1}\right)z(t), \quad t\in[0,t_2].$$

Вычислим производную второго порядка функционала (31) и выразим её значение через второй интеграл энергии (33):

$$y''(t)+2(u_{tt},u_{xx})-2\delta(u_{tt},u)=2z(t).$$

Используя оценки

$$2(u_{tt},u_{xx})\leqslant 2|(u_{tt},u_{xx})|\leqslant \|u_{tt}\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2\leqslant 3c_3z(t)+3c_4y(t)+(c_5+1)\|u_{xx}\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_5+1}{\beta_2-1}E_0+\left(3c_4+(c_5+1)\frac{\beta_1+c_6}{\beta_2-1}\right)y(t)+\left(3c_3-\frac{c_5+1}{\beta_2-1}\right)z(t),$$

$$-2\delta(u_{tt},u)\leqslant 2\delta|(u_{tt},u)|\leqslant \delta\|u_{tt}\|_2^2+\delta\|u\|_2^2\leqslant 3\delta c_3z(t)+\delta(3c_4+1)y(t)+\delta c_5\|u_{xx}\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta c_5}{\beta_2-1}E_0+\delta\left(3c_4+1+c_5\frac{\beta_1+c_6}{\beta_2-1}\right)y(t)+\delta\left(3c_3-\frac{c_5}{\beta_2-1}\right)z(t),$$

увеличим его левую часть:

$$y''(t)+c_7+c_8y(t)\geqslant c_9z(t), \quad t\in[0,t_2], \tag{47}$$

где

$$c_7=\frac{(\delta+1)c_5+1}{\beta_2-1}E_0, \quad c_8=3(\delta+1)c_4+\delta+((\delta+1)c_5+1)\frac{\beta_1+c_6}{\beta_2-1},$$

$$c_9=2+\frac{(\delta+1)c_5+1}{\beta_2-1}-3(\delta+1)c_3.$$

Уменьшим теперь правую часть неравенства (47):

$$y(t)y''(t)-\frac{c_9}{4}(y'(t))^2+c_7y(t)+c_8y^2(t)\geqslant 0, \quad t\in[0,t_2]. \tag{48}$$

Потребуем, чтобы коэффициент при квадрате производной в неравенстве (48) был больше единицы, т.е. потребуем выполнения неравенства $c_9/4>1$ или (в подробной записи)

$$6(\delta+1)\beta_2^2-(2+3(\delta+1)c_3)\beta_2+3(\delta+1)(c_6/\delta^2+c_3)+3>0. \tag{49}$$

Здесь возникают два случая: 1) если дискриминант квадратного трёхчлена

$$D_1=D_1(\delta,c_3,c_6)=(2+3(\delta+1)c_3)^2-72(\delta+1)((\delta+1)(c_6/\delta^2+c_3)+1)<0, \tag{50}$$

то неравенство (49) справедливо при всех значениях $\beta_2>1$; 2) если $D_1\geqslant 0$, то неравенство (49) выполняется при

$$1<\beta_2<\frac{2+3(\delta+1)c_3-\sqrt{D_1(\delta,c_3,c_6)}}{12(\delta+1)} \quad \text{или} \quad \beta_2>\frac{2+3(\delta+1)c_3+\sqrt{D_1(\delta,c_3,c_6)}}{12(\delta+1)}. \tag{51}$$

Из условия (50) следует неравенство

$$9c_3^2-12\left(6-\frac{1}{(\delta+1)^2}\right)c_3-72\frac{c_6}{\delta^2}-\frac{72(\delta+1)-4}{(\delta+1)^2}<0, \tag{52}$$

причём дискриминант квадратного трёхчлена

$$D_2 = D_2(\delta, c_6) = 36(6-(\delta+1)^{-2})^2 + 648(\delta^{-2}c_6 + (\delta+17/18)(\delta+1)^{-2}) \geqslant 0,$$

поэтому неравенство (52), а значит и (50), выполняется при

$$0 < c_3 = \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\delta}} + \left|\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\delta}}\right|\right)^2 < \frac{6(6-(\delta+1)^{-2}) + \sqrt{D_2(\delta, c_6)}}{9}, \tag{53}$$

т.е. при выполнении условия (53) неравенство $c_9/4 > 1$ справедливо для любого значения параметра $\beta_2 > 1$.

В случае $D_1 \geqslant 0$ неравенство (49) выполняется для значений параметров, удовлетворяющих условиям (51), в которых величины δ, c_3 и c_6 связаны соотношением

$$\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\delta}} + \left|\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\delta}}\right|\right)^2 \geqslant \frac{6(6-(\delta+1)^{-2}) + \sqrt{D_2(\delta, c_6)}}{9}.$$

Сравнивая неравенство (48) с одним из основных обыкновенных дифференциальных неравенств для интеграла энергии [10, Приложение A, § 5], заключаем, что если выполнены начальные условия

$$(\delta(\varphi,\psi) + (\varphi',\psi'))^2 > \left(\frac{c_8}{c_9-4}\big(\delta\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2\big) + \frac{c_7}{c_9-2}\right)\big(\delta\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2\big), \tag{54}$$

то время t_2 существования решения задачи Коши (1), (3) не может быть сколь угодно большим, а именно, имеет место оценка сверху

$$t_2 \leqslant T_\infty \leqslant \frac{1}{c_{10}(\delta\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2)^{(c_9-4)/4}}, \tag{55}$$

где

$$c_{10}^2 = \frac{(c_9-4)^2}{4(\delta\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2)^{c_9/2}}\left((\delta(\varphi,\psi) + (\varphi',\psi'))^2 - \left(\frac{c_8(\delta\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2)}{c_9-4} + \frac{c_7}{c_9-2}\right)(\delta\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2)\right) > 0,$$

причём для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta u^2 + u_x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{\big((\delta\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2)^{(c_9-4)/4} - c_{10}t\big)^{4/(c_9-4)}}, \tag{56}$$

и значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (1), (3).

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы* 2 *и пусть параметры* α_i, β_i, $i = 1, 2$, γ, δ *уравнения* (1), *нелинейность* f *и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют соответственно условиям* (30), (44), (46), (49), (54), *тогда время* t_2 *существования решения* $u(t,x)$ *задачи Коши* (1), (3) *не может быть сколь угодно большим, а именно оно ограничено сверху и имеет место оценка* (55), *причём для интеграла энергии* $y(t)$ *справедлива оценка снизу* (56).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий, В.А. Механика гибких стержней и нитей / В.А. Светлицкий. — М. : Машиностроение, 1978. — 222 с.
2. Демиденко, Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений / Г.В. Демиденко // Сиб. мат. журн. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 1289–1303.
3. Dannan, F.M. Integral inequalities of Gronwall–Bellman–Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations / F.M. Dannan // J. Math. Anal. Appl. — 1985. — V. 108, № 1. — P. 151–164.
4. Ерофеев И.В. Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях / И.В. Ерофеев // Вестн. научно-технического развития. — 2012. — Т. 5, № 57. — С. 3–18.
5. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — М. : Изд-во иностр. лит., 1962. — 895 с.
6. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.
7. Travis, C.C. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations / C.C. Travis, G.F. Webb // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. — 1978. — V. 32. — P. 75–96.
8. Benjamin, T.B. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems / T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.L. Mahony // Philos. Trans. Roy. Soc. London. — 1972. — V. 272. — P. 47–78.
9. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. — М. : Наука, 1976. — 152 с.
10. Корпусов, М.О. Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией / М.О. Корпусов. — М. : Книжный дом «Либроком», 2012. — 256 с.

BLOW-UP OF THE SOLUTION AND GLOBAL SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION OF VIBRATIONS OF A HOLLOW ROD

© 2025 / Kh. G. Umarov

Academy of Sciences of the Chechen Republic, Grozny, Russia
Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russia
e-mail: umarov50@mail.ru

For a nonlinear partial differential equation of Sobolev type, generalizing the equation of oscillations of a hollow flexible rod, the Cauchy problem is studied in the space of continuous functions defined on the entire numerical axis and for which there are limits at infinity. The conditions for the existence of a global classical solution and the blow-up of the solution to the Cauchy problem on a finite time interval are considered.

Keywords: equation of vibrations of a hollow flexible rod, nonlinear equation of Sobolev type, global solution, blow-up of the solution

REFERENCES

1. Svetlitsky, V.A., *Mekhanika gibkikh sterzhney i nitey* (Mechanics of Flexible Rods and Threads), Moscow: Mashinostroenie, 1978.
2. Demidenko, G.V. Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations, *Sib. J. Math.*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1028–1041.
3. Dannan, F.M., Integral inequalities of Gronwall–Bellman–Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 1985, vol. 108, no. 1, pp. 151–164.

4. Erofeev, I.V., Flexural-torsional, longitudinal-flexural and longitudinal-torsional waves in rods, *Bulletin of Scientific and Technical Development*, 2012, vol. 5, no. 57, pp. 3–18.
5. Dunford, N. and Schwartz, J.T., *Linear Operators. Part I: General Theory*, New York: Interscience, 1958.
6. Vasilyev, V.V., Crane, S.G., and Piskarev, S.I., Operator semigroups, cosine operator functions and linear differential equations, *Results of Science and Technology. Series Math. Analysis*, 1990, vol. 28, pp. 87–202.
7. Travis, C.C. and Webb, G.F., Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1978, vol. 32, pp. 75–96.
8. Benjamin, T.B., Bona J.L., and Mahony, J.L., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1972, vol. 272, pp. 47–78.
9. Filatov, A.N. and Sharova, L.V., *Integral'nyye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* (Integral Inequalities and the Theory of Nonlinear Oscillations), Moscow: Nauka, 1976.
10. Korpusov, M.O., *Razrusheniye v nelineynykh volnovykh uravneniyakh s polozhitel'noy energiyey* (Blow-up in Nonlinear Wave Equations with Positive Energy), Moscow: Librokom, 2012.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 84–98

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОГНУТЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2025 г. **Х. А. Хачатрян[1], А. С. Петросян[2]**

[1]*Ереванский государственный университет, Армения*

[2]*Национальный аграрный университет Армении, г. Ереван*

e-mail: [1]khachatur.khachatryan@ysu.am, [2]Haykuhi25@mail.ru

Поступила в редакцию 22.06.2024 г., после доработки 30.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследованы вопросы существования и единственности непрерывного ограниченного и положительного решения системы нелинейных многомерных интегральных уравнений, скалярный аналог которой при различных представлениях соответствующего матричного ядра и нелинейностей имеет важное прикладное значение в ряде задач физики и биологии. Предложен специальный итерационный подход для построения положительного непрерывного и ограниченного решения исследуемой системы. Показано, что соответствующие итерации равномерно сходятся к непрерывному решению указанной системы. С использованием некоторых априорных оценок для функций со строго вогнутыми графиками доказана единственность решения в достаточно широком подклассе непрерывных ограниченных и покоординатно неотрицательных вектор-функций. В случае когда интеграл матричного ядра имеет единичный спектральный радиус, установлено, что в определённом подклассе непрерывных ограниченных и покоординатно неотрицательных вектор-функций данная система имеет только тривиальное решение, являющееся собственным вектором матрицы интегрального ядра.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, система интегральных уравнений, положительное решение, непрерывное решение, ограниченное решение, тривиальное решение, итерационный процесс

DOI: 10.31857/S0374064125010075, EDN: HZTGIB

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему нелинейных многомерных интегральных уравнений

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,G_j(f_j(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n,\quad i=\overline{1,N},\tag{1}$$

относительно вектор-функции $f(x_1,\ldots,x_n)=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$ с неотрицательными непрерывными и ограниченными на множестве $\mathbb{R}^n$ координатами $f_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,N}$, где $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, т — знак транспонирования. В системе (1) матричное ядро

$$K(\mathrm{x},t):=(K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n))_{i,j=\overline{1,N}}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) $K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)>0$, $(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^{2n}$, $K_{ij}\in C(\mathbb{R}^{2n})$, $i,j=\overline{1,N}$;

2) существуют $a_{ij}:=\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n<+\infty,\ i,j=\overline{1,N}$, причём $r(A)=1,\ A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$, где $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A, т.е. модуль наибольшего по модулю собственного значения.

Согласно теореме Перрона (см. [1, с. 260]) существует вектор $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^{\mathrm{т}}$ с положительными координатами η_i такой, что

$$\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\eta_j=\eta_i,\quad i=\overline{1,N}. \tag{2}$$

Зафиксируем вектор η и наложим следующие условия на нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$ (рис. 1):

a) $G_j\in C(\mathbb{R}^+),\ \mathbb{R}^+=[0,+\infty),\ G_j(u)$ монотонно возрастают на множестве $\mathbb{R}^+,\ j=\overline{1,N}$;

b) $G_j(0)=0,\ G_j(\eta_j)=\eta_j,\ j=\overline{1,N}$;

c) $G_j(u),\ j=\overline{1,N}$, строго вогнуты (выпуклы вверх) на $\mathbb{R}^+$ и существует непрерывное отображение $\varphi\colon[0,1]\to[0,1]$ со свойствами

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1,\ \varphi \text{ монотонно возрастает на отрезке } [0,1], \tag{3}$$

$$\varphi \text{ строго вогнута на отрезке } [0,1], \tag{4}$$

такое, что имеют место следующие неравенства:

$$G_j(\sigma u)\geqslant\varphi(\sigma)G_j(u),\quad u\in[0,\eta_j],\ \ \sigma\in[0,1],\ \ j=\overline{1,N};$$

d) существует число $r>0$ такое, что функциональные уравнения $G_i(u)=u/\varepsilon_i(r),\ i=\overline{1,N}$, имеют положительные решения d_i, где

$$\varepsilon_i(r):=\min_{j=\overline{1,N}}\left\{\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n\right\}\in(0,1),\quad i=\overline{1,N},$$

$$B_r:=\Big\{\mathrm{x}:=(x_1,\ldots,x_n)\colon|\mathrm{x}|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\leqslant r\Big\}.$$

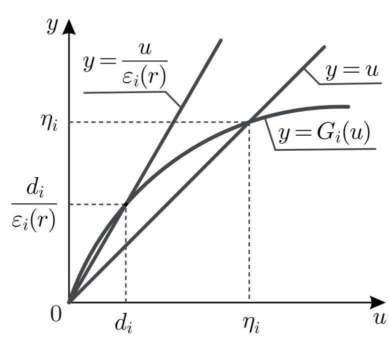


Рис. 1. График функции $y=G_i(u)$

Основная цель настоящей работы — исследовать вопросы существования и единственности непрерывного ограниченного и положительного решения системы (1), а также равномерную сходимость к решению соответствующего итерационного процесса со скоростью убывающей геометрической прогрессии.

Скалярный аналог системы нелинейных интегральных уравнений (1), кроме чисто теоретического интереса, имеет ряд важных приложений к исследованиям различных прикладных задач из физики и биологии. В частности, при конкретных представлениях матричного ядра K и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$ скалярная система (1) встречается в задачах из динамической теории p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн (см. [2–5]) и в математической теории пространственно-временнóго распространения пандемии в рамках модифицированных моделей Аткинсона–Ройтера и Дикмана–Капера (см. [6, с. 318] и [7, с. 121] соответственно).

Математические исследования системы вида (1) в основном проводились в одномерном случае при $n=1$. Так, например в случае, когда $n=1$ и ядро K зависит от разности своих аргументов, система (1) достаточно подробно изучена в работах [8–10]. Соответствующий скалярный аналог системы (1) ($N=1$) в многомерном случае рассмотрен в работах [5, 11–13], когда ядро K либо зависит от разности своих аргументов, либо мажорируется таким ядром. Следует также отметить, что соответствующие скалярные одномерные уравнения при различных ограничениях на ядро и на нелинейность исследовались (разными методами) в статьях [2, 3, 14–17].

В настоящей работе при условиях 1), 2) и a)–d) докажем сначала конструктивную теорему существования положительного непрерывного и ограниченного решения системы (1). В ходе доказательства этой теоремы получим равномерную оценку разности построенного решения и соответствующих последовательных приближений, причём правая часть полученного неравенства стремится к нулю как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, когда номер m-го приближения стремится к бесконечности. Далее, используя некоторые оценки для строго вогнутых и монотонных функций, докажем единственность решения системы (1) в достаточно широком подклассе непрерывных ограниченных и покоординатно неотрицательных вектор-функций. В случае когда

$$C_{ij}(x_1,\ldots,x_n):=\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n=a_{ij}$$

для всех $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и $i,j=\overline{1,N}$, покажем, что в отмеченном выше подклассе вектор-функций единственным решением системы (1) является только вектор $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^{\mathrm{т}}$. В работе приводятся конкретные примеры матричного ядра K и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$, удовлетворяющих всем условиям доказанных утверждений. Некоторые из этих примеров имеют прикладное значение в указанных выше областях физики и биологии.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Следующая лемма играет важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* a), b), 1), 2), *причём на* $\mathbb{R}^+$ *графики функций* $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$ *строго вогнуты. Тогда для любого покоординатно неотрицательного и ограниченного на* $\mathbb{R}^n$ *решения* $f^*(x_1,\ldots,x_n)=(f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N^*(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$ *системы* (1) *справедливо неравенство*

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\eta_i,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad i=\overline{1,N},$$

где $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^{\mathrm{т}}$ *— неподвижный вектор матрицы* A (*см.* (2)).

Доказательство. Обозначим $\gamma_i:=\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f_i^*(x_1,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,N}$. Тогда из системы (1) в силу условий 1), 2), a) и соотношения (2) будем иметь

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\sum_{j=1}^N a_{ij}G_j(\gamma_j)\leqslant\max_{j=\overline{1,N}}\left\{\frac{G_j(\gamma_j)}{\eta_j}\right\}\sum_{j=1}^N a_{ij}\eta_j=\eta_i\max_{j=\overline{1,N}}\left\{\frac{G_j(\gamma_j)}{\eta_j}\right\},$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_i \leqslant \eta_i \max_{j=\overline{1,N}} \left\{ \frac{G_j(\gamma_j)}{\eta_j} \right\}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Очевидно, что существует индекс $j^* \in \{1, 2, \ldots, N\}$ такой, что

$$\max_{j=\overline{1,N}} \left\{ \frac{G_j(\gamma_j)}{\eta_j} \right\} = \frac{G_{j^*}(\gamma_{j^*})}{\eta_{j^*}}. \tag{6}$$

Заменив в неравенстве (5) индекс i на индекс j^*, получим $\gamma_{j^*} \leqslant G_{j^*}(\gamma_{j^*})$. Убедимся, что из последнего неравенства следует оценка $\gamma_{j^*} \leqslant \eta_{j^*}$. Предположим обратное: $\gamma_{j^*} > \eta_{j^*}$. В силу условий a), b) и строгой вогнутости графика $G_{j^*}(u)$ следует, что функция $G_{j^*}(u)/u$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$. Значит, $G_{j^*}(\gamma_{j^*})/\gamma_{j^*} < G_{j^*}(\eta_{j^*})/\eta_{j^*} = 1$. Последнее неравенство противоречит полученному выше неравенству $\gamma_{j^*} \leqslant G_{j^*}(\gamma_{j^*})$. Таким образом, $\gamma_{j^*} \leqslant \eta_{j^*}$. В силу этой оценки, соотношения (6) и условий a), b) приходим из (5) к неравенству $\gamma_i \leqslant \eta_i$, $i = \overline{1, N}$. Лемма доказана.

Полезна также следующая

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* a), b), d), 1) *и* 2) *и* $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *произвольное покоординатно неотрицательное и непрерывное на* $\mathbb{R}^n$ *решение системы* (1). *Тогда если существует индекс* $j_0 \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *такой, что* $\delta_{j_0} := \inf_{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus B_r} f_{j_0}(x_1, \ldots, x_n) > 0$, *то* $\inf_{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n} f_i(x_1, \ldots, x_n) > 0$, $i = \overline{1, N}$, *где число* r *определено в условии* d).

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условий a), b), 1) и 2) следует, что

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} K_{ij}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) G_j(f_j(t_1, \ldots, t_n))\, dt_1 \ldots dt_n \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} K_{ij_0}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) G_{j_0}(f_{j_0}(t_1, \ldots, t_n))\, dt_1 \ldots dt_n \geqslant$$

$$\geqslant G_{j_0}(\delta_{j_0}) \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} K_{ij_0}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Далее рассмотрим функции

$$\tilde{C}_{ij_0}(x_1, \ldots, x_n) := \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} K_{ij_0}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ i = \overline{1, N},$$

и следующие возможные случаи: A) $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus B_r$, B) $(x_1, \ldots, x_n) \in B_r$.

В случае A), учитывая определение чисел $\varepsilon_i(r)$ в условии d) и неравенство (7), получаем

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant G_{j_0}(\delta_{j_0}) \varepsilon_i(r), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus B_r, \ i = \overline{1, N}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь случай B). Из условий 1), 2) немедленно следует, что $\tilde{C}_{ij_0} \in C(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{C}_{ij_0}(x_1, \ldots, x_n) > 0$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, N}$. Учитывая компактность шара B_r, согласно теореме Вейерштрасса можно утверждать, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ существует точка $\mathrm{x}^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i) \in B_r$ такая, что

$$\min_{(x_1,\ldots,x_n) \in B_r} \{\tilde{C}_{ij_0}(x_1, \ldots, x_n)\} = \tilde{C}_{ij_0}(x_1^i, \ldots, x_n^i) > 0. \tag{9}$$

Из (7)–(9) заключаем, что

$$\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f_i(x_1,\ldots,x_n) \geqslant \min\{\varepsilon_i(r), \tilde{C}_{ij_0}(x_1^i,\ldots,x_n^i)\}G_{j_0}(\delta_{j_0}), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \ i=\overline{1,N}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь функции $C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$, $i,j=\overline{1,N}$, и предположим, что

e) существуют точка $(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_n)\in\mathbb{R}^n$ и индексы $i_1,j_1\in\{1,2,\ldots,N\}$ такие, что

$$C_{i_1,j_1}(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_n) < a_{i_1j_1}.$$

Имеет место

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы* 1 *и* e). *Тогда любое непрерывное ограниченное и покоординатно неотрицательное решение* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *системы* (1) *удовлетворяет неравенствам* $f_i(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N}$.

Доказательство. Согласно лемме 1 решение $f_i(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\eta_i$, $i=\overline{1,N}$. Убедимся, что $f_i(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv\eta_i$, $i=\overline{1,N}$. Действительно, в противном случае из (1) с учётом условия b) получим

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\eta_j \equiv \eta_i, \quad i=\overline{1,N}.$$

Принимая во внимание (2), приходим к равенству

$$\sum_{j=1}^N \eta_j(C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)-a_{ij})\equiv 0, \quad i=\overline{1,N}. \tag{10}$$

Так как $C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant a_{ij}$, $\eta_j>0$, $i,j=\overline{1,N}$, то в силу условия e) приходим в (10) к противоречию. Следовательно, существуют точка $(x_1^*,\ldots,x_n^*)\in\mathbb{R}^n$ и индекс $j^*\in\{1,2,\ldots,N\}$ такие, что $f_{j^*}(x_1^*,\ldots,x_n^*)<\eta_{j^*}$. Отсюда в силу непрерывности функции f_{j^*} следует, что существует окрестность $O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ точки $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ такая, что

$$f_{j^*}(x_1,\ldots,x_n)<\eta_{j^*}, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*). \tag{11}$$

В силу (11), соотношения (2) и неравенства $C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant a_{ij}$ из (1) с учётом условий a), b) будем иметь

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j\neq j^*}\int_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_j(f_j(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_{j^*}(f_{j^*}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\neq j^*} C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\eta_j + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)} K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_{j^*}(f_{j^*}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n +$$

$$+\int\limits_{O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)} K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_{j^*}(f_{j^*}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\neq j^*} C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\eta_j + \eta_{j^*}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)} K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n +$$

$$+\int\limits_{O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)} K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_{j^*}(f_{j^*}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n <$$

$$< \sum_{j \neq j^*} C_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\eta_j + \eta_{j^*} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus O_\delta(x_1^*, \ldots, x_n^*)} K_{ij^*}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n +$$

$$+ \eta_{j^*} \int\limits_{O_\delta(x_1^*, \ldots, x_n^*)} K_{ij^*}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \sum_{j \neq j^*} C_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\eta_j + C_{ij^*}(x_1, \ldots, x_n)\eta_{j^*} \leqslant \sum_{j=1}^N a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Лемма доказана.

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим теперь следующие последовательные приближения для системы (1):

$$f_i^{(m+1)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)\, G_j(f_j^{(m)}(t_1, \ldots, t_n))\, dt_1 \ldots dt_n,$$

$$f_i^{(0)}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \eta_i, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; i = \overline{1, N}, \;\; m = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Предположим, что выполняются условия a)–d), 1) и 2). Индукцией по m несложно проверить достоверность следующих утверждений:

$$f_i^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) \text{ монотонно убывают по } m, \;\; m = 0, 1, 2, \ldots, \;\; i = \overline{1, N}, \tag{13}$$

$$f_i^{(m)} \in C(\mathbb{R}^n), \quad i = \overline{1, N}, \tag{14}$$

$$f_i^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) > 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \;\; i = \overline{1, N}. \tag{15}$$

Докажем, что для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus B_r$ имеют место следующие оценки снизу:

$$f_i^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant d_i, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \;\; i = \overline{1, N}, \tag{16}$$

где числа d_i определены в условии d).

Проверим неравенство (16) при $m = 0$. Действительно, так как функции $G_i(u)/u$ монотонно убывают на $(0, +\infty)$, $i = \overline{1, N}$, то из оценки

$$1 = \frac{G_i(\eta_i)}{\eta_i} < \frac{1}{\varepsilon_i(r)} = \frac{G_i(d_i)}{d_i}$$

получаем, что $d_i < \eta_i = f_i^{(0)}(x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, N}$.

Предположим теперь, что для $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus B_r$ неравенство (16) выполняется при некотором натуральном m. Тогда, используя условия a), b), d), 1) и 2), из (12) и (15) будем иметь

$$f_i^{(m+1)}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \sum_{j=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} K_{ij}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) G_j(f_j^{(m)}(t_1, \ldots, t_n))\, dt_1 \ldots dt_n \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^N G_j(d_j) \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} K_{ij}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n \geqslant G_i(d_i)\varepsilon_i(r) = d_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

При выполнении условия e) по аналогии с доказательством леммы 3 можно также убедиться, что имеют место неравенства

$$f_i^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) < \eta_i, \quad m = 1, 2, \ldots, \;\; i = \overline{1, N}, \;\; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Принимая во внимание (14), (15) и компактность шара B_r, можно утверждать, что для каждых $i\in\{1,2,\ldots,N\}$ и $m\in\{0,1,2,\ldots\}$ существует точка $(x_1^{m,i},\ldots,x_n^{m,i})\in B_r$ такая, что

$$\min_{(x_1,\ldots,x_n)\in B_r} f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n)=f_i^{(m)}(x_1^{m,i},\ldots,x_n^{m,i})>0,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in B_r. \tag{18}$$

Итак, из (16) и (18) для $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ следует, что

$$f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n)\geqslant\min\{f_i^{(m)}(x_1^{m,i},\ldots,x_n^{m,i}),d_i\}>0,\quad m=0,1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь функции $\chi_i(x_1,\ldots,x_n)=f_i^{(2)}(x_1,\ldots,x_n)/f_i^{(1)}(x_1,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,N}$, на множестве $\mathbb{R}^n$. Из (13), (14) и (19) имеем

$$\begin{gathered}\chi_i\in C(\mathbb{R}^n),\quad i=\overline{1,N},\\ \frac{\alpha_i}{\eta_i}\leqslant\chi_i(x_1,\ldots,x_n)\leqslant 1,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N},\end{gathered} \tag{20}$$

где в силу (17), (19)

$$0<\alpha_i:=\min\{f_i^{(2)}(x_1^{2,i},\ldots,x_n^{2,i}),d_i\}<\eta_i,\quad i=\overline{1,N}.$$

Обозначим через $\sigma_0=\min_{i=\overline{1,N}}(\alpha_i/\eta_i)$. Очевидно, что $\sigma_0\in(0,1)$.

Следовательно, учитывая (20) и (12), а также условия 1), a), будем иметь

$$\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_j(\sigma_0 f_j^{(1)}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n\leqslant$$
$$\leqslant f_i^{(3)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_j(f_j^{(1)}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n=$$
$$=f_i^{(2)}(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Отсюда в силу условия c) приходим к неравенствам

$$\varphi(\sigma_0)f_i^{(2)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(3)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(2)}(x_1,\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,N}. \tag{21}$$

Теперь, используя (21), (12), условия 1), a) и c), запишем

$$\varphi(\varphi(\sigma_0))f_i^{(3)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(4)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(3)}(x_1,\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,N}.$$

Продолжая эти рассуждения, на m-м шаге получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}F_m(\sigma_0)f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(m+2)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n),\\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N},\ \ F_m(\sigma):=\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\sigma))}_{m\ \text{раз}},\ \ \sigma\in[0,1].\end{gathered} \tag{22}$$

Далее, используя свойства (3) и (4) функции φ, докажем справедливость неравенства

$$F_m(\sigma_0)\geqslant k^m\sigma_0+1-k^m,\quad m=1,2,\ldots, \tag{23}$$

где

$$k:=\frac{1-\varphi(\sigma_0/2)}{1-\sigma_0/2}\in(0,1),\quad \sigma_0=\min_{i=\overline{1,N}}\{\alpha_i/\eta_i\}\in(0,1). \tag{24}$$

Для этого рассмотрим прямую $y=ku+1-k$, проходящую через точки $(1,1)$ и $(\sigma_0/2,\varphi(\sigma_0/2))$, где число k задаётся согласно формуле (24). Из свойств (3) и (4) немедленно следует, что (рис. 2)

$$\varphi(\sigma_0)\geqslant k\sigma_0+1-k. \tag{25}$$

Так как $k\sigma_0+1-k\in(0,1)$, то с учётом свойств вогнутости графика и монотонности функции φ из (25) будем иметь

$$F_2(\sigma_0)=\varphi(\varphi(\sigma_0))\geqslant\varphi(k\sigma_0+1-k)\geqslant k(k\sigma_0+1-k)+1-k=k^2\sigma_0+1-k^2.$$

Продолжив этот процесс, на m-м шаге получим неравенство (23).

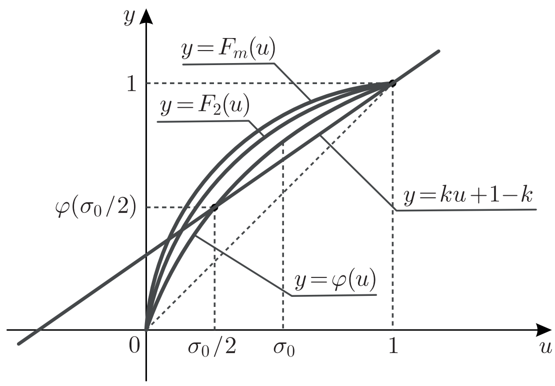


Рис. 2. График функции $y=\varphi(u)$

Таким образом, ввиду (22), (23), (17) и (13) приходим к следующей равномерной оценке для последовательных приближений (12):

$$0\leqslant f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n)-f_i^{(m+2)}(x_1,\ldots,x_n)<\eta_i(1-\sigma_0)k^m,$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{26}$$

Из (26) получаем равномерную сходимость последовательности непрерывных вектор-функций $f^{(m)}(x_1,\ldots,x_n)=(f_1^{(m)}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N^{(m)}(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$, $m=0,1,2,\ldots$, на множестве $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{m\to\infty}f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n)=f_i(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N},$$

причём $f_i\in C(\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,N}$.

В силу (13), условий 1), 2), a), (14), (16), (26) и теоремы Б. Леви (см. [18, с. 303]) предельная вектор-функция $f(x_1,\ldots,x_n)=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$ удовлетворяет системе (1) и оценке снизу

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)\geqslant d_i,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{27}$$

Учитывая оценку (27) и лемму 2, заключаем, что

$$\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}f_i(x_1,\ldots,x_n)>0,\quad i=\overline{1,N}. \tag{28}$$

Далее, принимая во внимание условие e), утверждение леммы 3 и свойство монотонности (13), приходим к строгому неравенству

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)<\eta_i,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{29}$$

Теперь в оценке (26) вместо m возьмём $m+1$, $m+2$, $\ldots$, $m+p$. В результате получим следующие неравенства:

$$0 \leqslant f_i^{(m+2)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+3)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)k^{m+1},$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N},$$
$$0 \leqslant f_i^{(m+3)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+4)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)k^{m+2},$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 \leqslant f_i^{(m+p+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+p+2)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)k^{m+p},$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ p,m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Суммируя их с неравенством (26), приходим к двусторонней оценке

$$0 \leqslant f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+p+2)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)(k^m+k^{m+1}+\ldots+k^{m+p}),$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ p,m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{30}$$

Из (30), в частности, следует, что

$$0 < f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+p+2)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)\frac{k^m}{1-k}. \tag{31}$$

Зафиксировав индекс m и устремив $p\to\infty$ в (31), получим

$$0 < f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)\frac{k^m}{1-k}. \tag{32}$$

Заметим также, что если функции $\{C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\}_{i,j=\overline{1,N}}$ удовлетворяют дополнительному условию

$$a_{ij} - C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\in L_1(\mathbb{R}^n), \quad i,j=\overline{1,N}, \tag{33}$$

то, рассуждая аналогично доказательству основной теоремы (об интегральной асимптотике решения) из работы [13], можно утверждать, что существуют положительные постоянные $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\ldots$, $\mathcal{D}_N$ такие, что

$$0 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta_i - f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n))dx_1\ldots dx_n \leqslant \mathcal{D}_i, \quad m=0,1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Отсюда согласно теореме Б. Леви заключаем, что $\eta_i - f_i\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,N}$, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta_i - f_i(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant \mathcal{D}_i, \quad i=\overline{1,N}.$$

На основании изложенного выше справедлива следующая

Теорема 1. *При выполнении условий* а)–е), 1), 2) *система нелинейных многомерных интегральных уравнений* (1) *имеет покоординатно положительное непрерывное и ограниченное на* $\mathbb{R}^n$ *решение* $f(x_1,\ldots,x_n)=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$, *являющееся равномерным пределом последовательных приближений* (12). *Более того, имеют место оценки* (27)–(29) *и* (32). *Если к тому же выполняется условие* (33), *то* $\eta_i - f_i\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,N}$.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1)

Рассмотрим следующий подкласс непрерывных покоординатно неотрицательных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ вектор-функций:

$$\mathbb{H} := \Big\{ f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}\colon f_i \in C_M(\mathbb{R}^n),$$

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) \geqslant 0,\ \ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N},$$

$$\text{существует } j_0 \in \{1,2,\ldots,N\} \text{ такое, что } \inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r} f_{j_0}(x_1,\ldots,x_n) > 0 \Big\}, \tag{34}$$

где число $r>0$ определяется в условии d), через $C_M(\mathbb{R}^n)$ обозначено пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^n$. Имеет место следующая

Теорема 2. *При выполнении условий* a)–e), 1), 2) *система нелинейных многомерных интегральных уравнений* (1) *кроме решения* f, *построенного при помощи последовательных приближений* (13), *в классе* $\mathbb{H}$ *других решений не имеет.*

Доказательство. Предположим обратное: система (1) кроме решения $f\in\mathbb{H}$, построенного при помощи последовательных приближений (12), обладает также другим решением $f^*\in\mathbb{H}$. Тогда, используя леммы 2 и 3, заключаем, что

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}, \tag{35}$$

$$\alpha_i^* := \inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f_i^*(x_1,\ldots,x_n) > 0, \quad i=\overline{1,N}. \tag{36}$$

Применив метод индукции по m, несложно убедиться в достоверности следующих неравенств:

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n) < f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=0,1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{37}$$

В (37) устремляя $m\to\infty$, приходим к неравенству

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n) \leqslant f_i(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{38}$$

Рассмотрим функции $B_i(x_1,\ldots,x_n) = f_i^*(x_1,\ldots,x_n)/f_i(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N}$. Так как $f, f^*\in\mathbb{H}$, то в силу (28), (29), (35), (36), (38) имеем, что $B_i\in C(\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,N}$, и

$$\frac{\alpha_i^*}{\eta_i} \leqslant B_i(x_1,\ldots,x_n) \leqslant 1, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Обозначим $\sigma^* = \min_{i\in\overline{1,N}}\{\alpha_i^*/\eta_i\}$. В силу (35) и (36) число $\sigma^*\in(0,1)$. Таким образом, получаем неравенство

$$\sigma^* f_i(x_1,\ldots,x_n) \leqslant f_i^*(x_1,\ldots,x_n) \leqslant f_i(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{39}$$

Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 1, из (39) получаем следующие оценки:

$$0 \leqslant f_i(x_1,\ldots,x_n) - f_i^*(x_1,\ldots,x_n) \leqslant \eta_i(1-\sigma^*)k_*^m, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}, \tag{40}$$

где $k_* = (1-\varphi(\sigma^*/2))/(1-\sigma^*/2)\in(0,1)$.

В (40) устремляя число $m\to\infty$, приходим к равенству $f_i(x_1,\ldots,x_n) = f_i^*(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N}$. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* a)–d), 1), 2) *и имеют место соотношения*

$$C_{ij}(x_1,\ldots,x_n) = a_{ij}, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i,j=\overline{1,N}.$$

Тогда система (1) *в классе* $\mathbb{H}$ *обладает только тривиальным решением* $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^{\mathrm{т}}$.

5. ПРИМЕРЫ

Для наглядности полученных теоретических результатов приведём примеры матричного ядра K и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$.

Примеры ядра K:

p$_1$) $K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=\overset{\circ}{K}_{ij}(x_1-t_1,x_2-t_2,\ldots,x_n-t_n)$, $(x_1,\ldots,x_n),(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $i,j=\overline{1,N}$, где $\overset{\circ}{K}_{ij}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)>0$, $\overset{\circ}{K}_{ij}\in C(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n}\overset{\circ}{K}_{ij}(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n=a_{ij}<1$, $i,j=\overline{1,N}$, $r(A)=1$, $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$, $(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in\mathbb{R}^n$.

p$_2$) $K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=\lambda_{ij}(|x|)\overset{\circ}{K}_{ij}(x_1-t_1,x_2-t_2,\ldots,x_n-t_n)$, $(x_1,\ldots,x_n),(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, $0<\inf_{v\geqslant 0}\lambda_{ij}(v)\leqslant\lambda_{ij}(v)<1$, $v\geqslant 0$, $1-\lambda_{ij}\in L_1(0,+\infty)$, $i,j=\overline{1,N}$.

p$_3$) $K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\overset{\circ}{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)$, $(x_1,\ldots,x_n),(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)>0$, $C^*_{ij}\in C(\mathbb{R}^n)$, $\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=1$, $i,j=\overline{1,N}$.

Приведём также *примеры функций* $\overset{\circ}{K}_{ij}$, λ_{ij}, C^*_{ij}, $i,j=\overline{1,N}$:

q$_1$) $\overset{\circ}{K}_{ij}(\tau_1,\ldots,\tau_n)=\pi^{-n/2}a_{ij}e^{-(\tau_1^2+\ldots+\tau_n^2)}$, $r(A)=1$, $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$, $\tau_j\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,N}$,

q$_2$) $\overset{\circ}{K}_{ij}(\tau_1,\ldots,\tau_n)=\int_a^b e^{-(|\tau_1|+\ldots+|\tau_n|)s}\,dQ_{ij}(s)$, $\tau_j\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,N}$, где $Q_{ij}(s)$ — монотонно возрастающие функции на $[a,b)$, $0<a<b\leqslant+\infty$, причём

$$2^n\int_a^b\frac{1}{s^n}\,dQ_{ij}(s)=a_{ij},\quad i,j=\overline{1,N};$$

q$_3$) $\lambda_{ij}(|x|)=1-\varepsilon_{ij}e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}$, $0<\varepsilon_{ij}<1$ — параметры, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i,j=\overline{1,N}$,

q$_4$) $C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=1-\varepsilon_{ij}e^{-(|x_1|+\ldots|x_n|)}$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i,j=\overline{1,N}$.

Перейдем теперь к *примерам нелинейностей* $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$:

r$_1$) $G_j(u)=u^{\beta_j}\eta_j^{1-\beta_j}$, $u\in[0,+\infty)$, $\beta_j\in(0,1)$, $j=\overline{1,N}$;

r$_2$) $G_j(u)=\eta_j(u^{\beta_j}+u^{\delta_j})/(\eta_j^{\beta_j}+\eta_j^{\delta_j})$, $u\in[0,+\infty)$, $\beta_j,\delta_j\in(0,1)$, $j=\overline{1,N}$;

r$_3$) $G_j(u)=l_j(1-e^{-u^{\beta_j}})$, $u\in[0,+\infty)$, $\beta_j\in(0,1)$, $l_j=\eta_j/(1-\exp\{-\eta_j^{\beta_j}\})$, $j=\overline{1,N}$.

Подробно остановимся на примерах p$_3$), q$_1$), r$_3$) и проверим выполнение условий 2) и d). Прежде всего заметим, что в данном случае

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\biggl(C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\int_{\mathbb{R}^n}\overset{\circ}{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n\biggr)=$$

$$=\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\biggl(C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\int_{\mathbb{R}^n}\overset{\circ}{K}_{ij}(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n\biggr)=$$

$$=a_{ij}\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=a_{ij},\quad i,j=\overline{1,N}.$$

Так как $r(A)=1$ (см. пример q$_1$)), то условие 2) выполняется. Для полноты изложения приведём пример матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$ с единичным спектральным радиусом и с элементами $a_{ij}\in(0,1)$, $i,j=\overline{1,N}$ (в случае когда $N=2$):

$$A=\begin{pmatrix}7/9 & 1/3\\ 1/3 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Проверим условие d). Сначала оценим интеграл от функции $\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)$ по множеству $\mathbb{R}^n\setminus B_r$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n-\int\limits_{B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=a_{ij}-\int\limits_{B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n\geqslant a_{ij}-\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=a_{ij}-\int\limits_{-r}^{r}\Phi_{ij}(x_n-t_n)\,dt_n=a_{ij}-\int\limits_{x_n-r}^{x_n+r}\Phi_{ij}(\tau_n)\,d\tau_n,$$

где $\Phi_{ij}(\tau):=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathring{K}_{ij}(t_1,\ldots,t_{n-1},\tau)\,dt_1\ldots dt_{n-1}$.

Рассмотрим функции $F_{ij}(x_n):=\int_{x_n-r}^{x_n+r}\Phi_{ij}(\tau_n)\,d\tau_n$, $i,j=\overline{1,N}$, $x_n\in\mathbb{R}$. Так как $F_{ij}(x_n)\to0$ при $|x_n|\to\infty$, то для каждых фиксированных $i,j\in\{1,2,\ldots,N\}$ существует число $r_0>0$ такое, что при $|x_n|>r_0$

$$F_{ij}(x_n)\leqslant\frac{a_{ij}}{2}.$$

Но поскольку $F_{ij}\in C(\mathbb{R})$ и $\mathring{K}_{ij}(t_1,\ldots,t_n)>0$, $(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, то для $x_n\in[-r_0,r_0]$

$$F_{ij}(x_n)\leqslant\max_{x_n\in[-r_0,r_0]}\left\{\int\limits_{x_n-r}^{x_n+r}\Phi_{ij}(\tau_n)\,d\tau_n\right\}=:\delta_{ij}<a_{ij}.$$

Следовательно, $F_{ij}(x_n)\leqslant\max\{a_{ij}/2,\delta_{ij}\}<a_{ij}$, $x_n\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,N}$.

Таким образом, имеем

$$\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n\geqslant$$

$$\geqslant\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n\geqslant a_{ij}-\max\left\{\frac{a_{ij}}{2},\delta_{ij}\right\}>0,\quad i,j=\overline{1,N},$$

откуда вытекает, что

$$\varepsilon_i(r)\geqslant\min_{j=\overline{1,N}}\left\{C^0_{ij}\left(a_{ij}-\max\left\{\frac{a_{ij}}{2},\delta_{ij}\right\}\right)\right\}>0,$$

где $C^0_{ij}:=\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$.

С другой стороны, очевидно, что $\varepsilon_i(r)\leqslant a_{ij}<1$, $i,j=\overline{1,N}$.

Теперь убедимся, что для примера p$_3$) уравнения $G_i(u)=u/\varepsilon_i(r)$ имеют положительные решения d_i. Действительно, так как $G_i\in C(\mathbb{R}^+)$, $G_i(\eta_i)=\eta_i$, $\lim_{u\to+0}G_i(u)/u=+\infty$, $\lim_{u\to+\infty}G_i(u)/u=0$, $i=\overline{1,N}$, а $\varepsilon_i(r)\in(0,1)$ и $G_i(u)/u$ монотонно убывает на $(0,+\infty)$, то при каждом $i\in\{1,2,\ldots,N\}$ существует единственное $d_i>0$ такое, что $G_i(d_i)/d_i=\varepsilon_i(r)$.

Проверка условий 2) и d) для остальных примеров выполняется аналогично.

Теперь приведём конкретный пример нелинейного многомерного интегрального уравнения, имеющего приложение в теории p-адической струны (см. [5]):

$$\varphi^p(x_1,\ldots,x_n)=\pi^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-((x_1-t_1)^2+\ldots+(x_n-t_n)^2)}\varphi(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где $p>2$ — нечётное число. С помощью обозначения $f(x_1,\ldots,x_n)=\varphi^p(x_1,\ldots,x_n)$ данное уравнение сводится к многомерному уравнению вида (1) с вогнутой нелинейностью относительно искомой неотрицательной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Приведём также пример одномерного интегрального уравнения свёрточного типа с экспоненциальной нелинейностью, возникающего в математической теории географического распространения эпидемии:

$$f(x)=a\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x-t)(1-e^{-f(t)})\,dt,\quad x\in\mathbb{R},$$

где $a>1$ — числовой параметр, ядро $K(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,dx=1$ (см. [6, с. 318] в формулировке теоремы 1 $(f(x)=-\chi(x))$).

Авторы выражают благодарность рецензентам за полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер ; пер. с англ. С.П. Демушкина. — М. : Наука, 1973. — 280 с.
2. Владимиров, В.С. О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны / В.С. Владимиров, Я.И. Волович // Теор. мат. физика. — 2004. — Т. 138, № 3. — С. 355–368.
3. Хачатрян, Х.А. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны / Х.А. Хачатрян // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 2. — С. 172–193.
4. Арефьева, И.Я. Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в p-адических струнах / И.Я. Арефьева // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2004. — Т. 245. — С. 47–54.
5. Khachatryan, A.Kh. Solvability of a class of nonlinear pseudo-differential equations in $\mathbb{R}^n$ / A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. — 2018. — V. 10, № 2. — P. 90–99.
6. Atkinson, C. Deterministic epidemic waves / C. Atkinson, G.E.H. Reuter // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — V. 80. — P. 315–330.
7. Diekmann, O. Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection / O. Diekmann // J. Math. Biol. —1978. — V. 6, № 2. — P. 109–130.
8. Петросян, А.С. Единственность решения одной системы интегральных уравнений на полуоси с выпуклой нелинейностью / А.С. Петросян, Ц.Э. Терджян, Х.А. Хачатрян // Мат. тр. — 2020. — Т. 23, № 2. — С. 187–203.
9. Хачатрян, Х.А. О разрешимости одной системы сингулярных интегральных уравнений с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой / Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян // Изв. вузов. Математика. — 2021. — № 1. — С. 31–51.

10. Хачатрян, Х.А. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой / Х.А. Хачатрян // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 164–181.
11. Khachatryan, Kh.A. Alternating bounded solutions of a class of nonlinear two-dimensional convolution-type integral equations / Kh.A. Khachatryan, A.S. Petrosyan // Trans. Moscow Math. Soc. — 2021. — V. 82, № 2. — P. 259–271.
12. Khachatryan, Kh.A. On bounded solutions of a class of nonlinear integral equations in the plane and the Urysohn equation in a quadrant of the plane / Kh.A. Khachatryan, H.S. Petrosyan // Ukr. Math. J. — 2021. — V. 73, № 5. — P. 811–829.
13. Хачатрян, Х.А. Об одном классе многомерных интегральных уравнений типа свёртки с выпуклой нелинейностью / Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 686–695.
14. Арабаджян, Л.Г. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна / Л.Г. Арабаджян // Изв. НАН Армении. Сер. Математика. — 1997. — Т. 32, № 1. — С. 21–28.
15. Жуковская, Л.В. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн / Л.В. Жуковская // Теор. мат. физика. — 2006. — Т. 146, № 3. — С. 402–409.
16. Хачатрян, Х.А. Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью / Х.А. Хачатрян // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84, № 4. — С. 198–207.
17. Хачатрян, Х.А. О разрешимости некоторых нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки / Х.А. Хачатрян // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2020. — Т. 81, № 1. — С. 3–40.
18. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — 4-е изд., перераб. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

ON THE SOLVABILITY OF A SYSTEM OF MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS WITH CONCAVE NONLINEARITIES

© 2025 / **Kh. A. Khachatryan[1], H. S. Petrosyan[2]**

[1] *Yerevan State University, Armenia*
[2] *Armenian National Agrarian University, Yerevan, Armenia*
e-mail: [1] khachatur.khachatryan@ysu.am, [2] Haykuhi25@mail.ru

The work is devoted to the study of questions of existence and uniqueness of a continuous bounded and positive solution to one system of nonlinear multidimensional integral equations. The scalar analogue of the indicated system of integral equations, with different representations of the corresponding matrix kernel and nonlinearities, has important applied significance in a number of areas of physics and biology. This article proposes a special iterative approach for constructing a positive continuous and bounded solution to the system under study. It is possible to prove that the corresponding iterations uniformly converge to a continuous solution of the specified system. Using some a priori estimates for strictly concave functions, we also prove the uniqueness of the solution in a fairly wide subclass of continuous bounded and coordinately nonnegative vector functions. In the case when the integral of the matrix kernel has a unit spectral radius, it is proved that in a certain subclass of continuous bounded and coordinate-wise non-negative vector functions, this system has only a trivial solution, which is an eigenvector of the kernel integral matrix.

Keywords: nonlinear integral equation, system of integral equations, positive solution, continuous solution, limited solution, trivial solution, iterative process

FUNDING

The research of the first author was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia, scientific project no. 23RL-1A027.

REFERENCES

1. Lancaster, P., *Theory of Matrices*, New York; London: Academic Press, 1969.
2. Vladimirov, V.S. and Volovich, Ya.I., Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory, *Theor. Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309.
3. Khachatryan, Kh.A., On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory, *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427.
4. Aref'eva, I.Ya., Rolling tachyon on non-BPS branes and p-adic strings, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, vol. 245, pp. 40–47.
5. Khachatryan, A.Kh. and Khachatryan, Kh.A., Solvability of a class of nonlinear pseudo-differential equations in $\mathbb{R}^n$, *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 90–99.
6. Atkinson, C. and Reuter, G.E.H., Deterministic epidemic waves, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, vol. 80, pp. 315–330.
7. Diekmann, O., Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection, *J. Math. Biol.*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130.
8. Petrosyan, H.S., Terdzhyan, Ts.E., and Khachatryan, Kh.A., Uniqueness of the solution of one system of integral equations on the semi-axis with convex nonlinearity, *Matematicheskie Trudy*, 2020, vol. 23, no. 2, pp. 187–203.
9. Khachatryan, Kh.A. and Petrosyan, H.S., Solvability of a certain system of singular integral equations with convex nonlinearity on the positive half-line, *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 27–46.
10. Khachatryan, Kh.A., The solvability of a system of nonlinear integral equations of Hammerstein type on the whole line, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 164–181.
11. Khachatryan, Kh.A. and Petrosyan, A.S., Alternating bounded solutions of a class of nonlinear two-dimensional convolution-type integral equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2021, vol. 82, no. 2, pp. 259–271.
12. Khachatryan, Kh.A. and Petrosyan, H.S., On bounded solutions of a class of nonlinear integral equations in the plane and the Urysohn equation in a quadrant of the plane, *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 73, no. 5, pp. 811–829.
13. Khachatryan, Kh.A. and Petrosyan, H.S., On one class of multidimensional integral equations of convolution type with convex nonlinearity, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 680–690.
14. Arabadzhyan, L.G., Solutions of certain integral equations of the Hammerstein type, *J. Contemp. Math. Anal.*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 17–24.
15. Zhukovskaya, L.V., Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory, *Theor. Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342.
16. Khachatryan, Kh.A., Existence and uniqueness of solution of a certain boundary-value problem for a convolution integral equation with monotone non-linearity, *Izv. Math.*, 2020, vol. 84, no. 4, pp. 807–815.
17. Khachatryan, Kh.A., Solvability of some nonlinear boundary value problems for singular integral equations of convolution type, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2020, vol. 81, no. 1, pp. 1–31.
18. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Introductory Real Analysis*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 99–115

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СЛЕЖЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ В ДИСКРЕТНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

© 2025 г. **В. И. Максимов**

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 10.10.2024 г., после доработки 08.11.2024 г.; принята к публикации 03.12.2024 г.

Рассматриваются задачи динамической реконструкции входных воздействий системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также отслеживания траекторией одной системы траектории другой, подверженной влиянию неизвестного входного воздействия. Предполагается, что входное воздействие является неограниченной функцией, а именно — элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы. Предлагаются два устойчивых к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритма решения указанных задач, ориентированных на компьютерную реализацию. Устанавливаются оценки сверху скоростей их сходимости. Алгоритмы основаны на конструкциях теории управления по принципу обратной связи и функционируют в условиях измерения (с ошибками) в дискретные моменты времени фазовых состояний заданных систем.

Ключевые слова: задача слежения, реконструкция

DOI: 10.31857/S0374064125010084, EDN: HZSYGL

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) + Bu(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^r$ — входное воздействие, $f(t, y)$ — липшицевая (с константой Липшица L) по совокупности переменных векторная функция, B — стационарная матрица размерности $N \times r$, $n, r \in \mathbb{N}$.

Предполагается, что на систему (1) действует неизвестное входное воздействие $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=\overline{0,m}}$ ($\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$) измеряются фазовые состояния $y(\tau_i) = y(\tau_i; y_0, u(\cdot))$ системы (1). Состояния $y(\tau_i)$, $i = \overline{0, m-1}$, измеряются с ошибкой. Результатами измерений являются векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющие неравенствам

$$|y(\tau_i) - \xi_i^h|_N \leqslant h, \tag{3}$$

где $h\in(0,1)$ — уровень погрешности измерения, $|\cdot|_N$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^N$.

Требуется указать алгоритм приближённого восстановления входного воздействия по результатам неточных измерений $y(\tau_i)$. Для этого рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $y(\tau_i)$ в "реальном времени" формирует (по принципу обратной связи) функцию $u=u^h(\cdot)$, являющуюся приближением (в метрике пространства $L_2(T;\mathbb{R}^r)$) некоторого входного воздействия, порождающего решение $y(\cdot)$ уравнения (1).

Сформулированная задача является задачей динамического восстановления (реконструкции). Один из подходов к её решению был развит в исследованиях [1, с. 7–87; 2, с. 400–415; 3, с. 13–93; 4–12]. В работах [1–10] рассматривался случай наличия мгновенных ограничений на возмущения, случай отсутствия таких ограничений описан в [3, с. 41–64; 6; 11; 12]. Подход основан на комбинации методов теории позиционного управления [13], согласно которым для динамического, реализуемого в темпе "реального времени", восстановления возмущения, действующего на систему (1), поступают следующим образом: вводится некоторая управляемая система, довольно часто называемая моделью; после этого задача восстановления заменяется задачей формирования управления этой моделью по принципу обратной связи таким образом, что при подходящем согласовании погрешности измерения h, величины промежутка измерения δ (а также, возможно, и некоторых других параметров, например, параметра регуляризации) управление $u^h(\cdot)$ аппроксимирует в той или иной метрике некоторое входное воздействие, порождающее измеряемое решение $y(\cdot)$ системы (1). Обычно, говоря об аппроксимации, подразумевают равномерную (метрику пространства C) или среднеквадратичную (метрику пространства L_2) метрики. При реализации этого подхода во многих случаях правая часть модели имеет ту же структуру, что и реальная система (система (1)). Однако вместо фазового вектора модели в её правой части стоят величины ξ_i^h, т.е. результаты измерений фазовых состояний реальной системы, а не состояний модели. Довольно часто (см., например, [1, с. 23; 4; 5]) модель имеет следующий вид:

$$\dot{y}^h(t)=f(\tau_i,\xi_i^h)+Bu_i^h \quad \text{при п.в. } t\in\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1}), \quad i=\overline{0,m-1}. \tag{4}$$

При этом управление $u^h(\cdot)$ в модели формируется согласно некоторому правилу U в форме обратной связи:

$$u^h(t)=u_i^h=U(\tau_i,\xi_i^h,y^h(\tau_i)) \quad \text{при п.в. } t\in\delta_i, \quad i=\overline{0,m-1}. \tag{5}$$

В математической теории управления одной из "классических" задач является так называемая задача слежения, исследование которой началось в пятидесятые годы XX века и было вызвано практическими проблемами, возникающими в авиации и космонавтике. Не потеряла актуальность эта задача и в настоящее время, в частности, в связи с потребностями развития динамики полёта. Задача слежения является востребованной и при анализе процессов, возникающих в задачах управления механическими системами [14, 15], а также системами, функционирующими в условиях неопределённости [16]. Ей отводится важная роль и в рамках позиционных дифференциальных игр [13].

Суть задачи слежения в простейшем случае состоит в следующем. Имеется система (1) с неизвестным входным воздействием $u(\cdot)$, удовлетворяющим обычно мгновенному ограничению $u(t)\in P$ при п.в. $t\in T$, где $P\subset\mathbb{R}^r$ — компактное множество. Наряду с системой (1) имеется ещё одна система того же вида

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t))+Bv(t), \quad t\in T, \tag{6}$$

с начальным состоянием

$$x(0)=x_0$$

и управлением $v(\cdot)$, которое подчиняется тем же ограничениям, что и функция $u(\cdot)$. В моменты τ_i измеряются (с ошибкой) фазовые состояния систем (1) и (6) — $y(\tau_i)$ и $x(\tau_i)$ соответственно. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h\in\mathbb{R}^N$ и $\psi_i^h\in\mathbb{R}^N$, удовлетворяющие неравенствам

$$|\xi_i^h-y(\tau_i)|_N\leqslant h,\quad |\psi_i^h-x(\tau_i)|_N\leqslant h.$$

Суть задачи слежения состоит в конструировании такого алгоритма формирования управления $v=v^h(\cdot)$ системой (6) по принципу обратной связи

$$v^h(t)=v_i^h=V(\tau_i,\xi_i^h,\psi_i^h)\quad \text{при п.в. } t\in\delta_i,\quad i=\overline{0,m-1}, \tag{7}$$

что при соответствующем согласовании величин h и δ решения систем (1) и (6) будут близки, как правило в равномерной метрике (в случае близости начальных состояний этих систем), какова бы ни была допустимая реализация входного воздействия $v(\cdot)$. Таким образом, при решении задачи слежения необходимо сконструировать такой закон V формирования управления (7), что каково бы ни было число $\varepsilon>0$, по нему указываются числа h_* и δ_* такие, что при всех $h\in(0,h_*)$ и $\delta\in(0,\delta_*)$ справедливо неравенство

$$\sup_{t\in T}|x(t;x_0,v^h(\cdot))-y(t;y_0,u(\cdot))|_N\leqslant\varepsilon,$$

если величина $|x_0-y_0|_N$ достаточно мала. Здесь $x(\cdot;x_0,v^h(\cdot))$ — решение системы (6), порождённое управлением $v^h(\cdot)$ вида (7). Обратим внимание на тот факт, что как в задаче реконструкции, так и в задаче слежения входное воздействие заданной системы является неизвестным.

Если бы описанные в цитированных выше работах алгоритмы решения задачи реконструкции позволяли получать для произвольного измеримого входного воздействия $u(\cdot)$ (возможно, стеснённого некоторыми заданными мгновенными ограничениями) оценки скорости сходимости (к $u(\cdot)$) управлений $u^h(\cdot)$ (в модели (4) формируемым согласно правилу (5)) в равномерной или среднеквадратичной метрике, то, решая задачу реконструкции, мы одновременно решали бы и задачу слежения. Однако, к сожалению, такие оценки удаётся получить лишь для специальных классов $u(\cdot)$, например, для функций с ограниченной вариацией. В случае же когда $u(\cdot)$ не является такой функцией, алгоритмы из этих работ гарантируют лишь сходимость управлений $u^h(\cdot)$ к $u(\cdot)$.

Естественно возникает вопрос: можно ли в алгоритмах реконструкции в качестве модели выбрать не систему вида (4), а систему вида (6), т.е. полную копию системы (1)? Тогда, решая задачу реконструкции в соответствии с описанным подходом, мы одновременно решали бы и задачу слежения. К сожалению, для произвольных f и B, пусть даже достаточно гладких, дать положительный ответ на него не представляется возможным. Цель данной работы и состоит в том, чтобы указать два класса систем вида (1), для которых ответ на поставленный вопрос является положительным. При этом для каждого из этих двух классов будет указано своё правило формирования управлений. Первый класс — это линейная как по фазовым переменным, так и по возмущению система; второй — система с монотонной по фазовой переменной функцией f. Следует отметить, что развиваемый в настоящей работе подход к решению задач динамической реконструкции применялся при решении задач восстановления неизвестных структурных характеристик биореактора с подпиткой [3], задачи формирования телеметрии полёта по косвенным данным [3], задач моделирования процессов распространения загрязнений [17].

В дальнейшем для каждого $h\in(0,1)$ фиксируем семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h=\{\tau_{h,i}\}_{i=\overline{0,m_h}},\quad \tau_{h,0}=0,\quad \tau_{h,m_h}=\vartheta,\quad \tau_{h,i+1}=\tau_{h,i}+\delta(h),\quad \delta(h)\in(0,1). \tag{8}$$

Следует отметить, что одно и то же решение системы (1) может обуславливаться не единственным воздействием. Пусть $\mathcal{U}(y(\cdot))$ — множество всех входных воздействий из $L_2(T;\mathbb{R}^r)$, порождающих решение $y(\cdot)$ системы (1), т.е.

$$\mathcal{U}(y(\cdot))=\{\tilde u(\cdot)\in L_2(T;\mathbb{R}^r):\dot y(t)-f(t,y(t))=B\tilde u(t)\ \text{при п.в.}\ t\in T\}.$$

Символом $u_*(\cdot)$ обозначим минимальный по $L_2(T;\mathbb{R}^r)$-норме элемент множества $\mathcal{U}(y(\cdot))$, т.е.

$$u_*(\cdot)=\arg\min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(y(\cdot))}|u(\cdot)|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}.$$

Такой элемент существует и единственен. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу, мы будем восстанавливать $u_*(\cdot)$. В дальнейшем $c^{(0)}$, $c^{(1)}$, …, c_0, c_1, …, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, …, k_1, k_2, … означают положительные постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве, а $|\cdot|$ — модуль числа.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим случай, когда система (1) является линейной, т.е. имеет вид

$$\dot y(t)=Ay(t)+Bu(t)+f_1(t). \tag{9}$$

Здесь A и B — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $f_1(\cdot)\in L_2(T;\mathbb{R}^N)$ — заданная функция. Модель является копией системы (9):

$$\dot y^h(t)=Ay^h(t)+Bu^h(t)+f_1(t) \tag{10}$$

с начальным состоянием

$$y^h(0)=\xi_0^h.$$

Зафиксируем функцию $\alpha(h)\colon(0,1)\to(0,1)$. В дальнейшем нам понадобится следующее

Условие A. При $h\to0$ имеем $\alpha(h)\to0$, $\delta(h)\alpha^{-2}(h)\to0$, $h^2(\alpha(h)\delta(h))^{-1}\to0$.

Обозначим через $\mathcal{Y}(t)$ фундаментальную матрицу системы уравнений $\dot y(t)=Ay(t)$. Справедливо неравенство

$$\|\mathcal{Y}(t)\|\leqslant\exp\{\chi t\},\quad t\geqslant0,$$

где $\chi=\|A\|$, $\|A\|$ — евклидова норма матрицы A.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h\in(0,1)$, разбиение $\Delta_h=\{\tau_{h,i}\}_{i=\overline{0,m_h}}$ вида (8) и число $\alpha=\alpha(h)$. Работу алгоритма разобьём на конечное число однотипных шагов. На i-м шаге, осуществляемом на промежутке времени $\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1})$, $\tau_i=\tau_{h,i}$, выполняются следующие операции: в момент τ_i вычисляется вектор u_i^h по формуле (5), в которой

$$U(\tau_i,\xi_i^h,y^h(\tau_i))=\alpha^{-1}\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}B'(\xi_i^h-y^h(\tau_i)) \tag{11}$$

(здесь штрих означает транспонирование); затем на вход системы (10) при всех $t\in\delta_i$ подаётся управление $u^h(t)$ вида (5), (11), под действием которого система (10) переходит из состояния $y^h(\tau_i)$ в состояние $y^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Введём функционал
$$\lambda(t)=\exp\{-2\chi t\}|y^h(t)-y(t)|_N^2.$$
В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 1 (дискретное неравенство Гронуолла [18, с. 311]). *Пусть* $\phi_j\geqslant 0$, $f_j\geqslant 0$ *при* $j=\overline{0,m}$ *и* $f_j\leqslant f_{j+1}$ *при* $j=\overline{0,m-1}$. *Тогда из неравенств*
$$\phi_{j+1}\leqslant c_0\delta\sum_{i=1}^{j}\phi_i+f_j,\quad j=\overline{1,m-1},$$
вытекают неравенства
$$\phi_{j+1}\leqslant f_j\exp\{c_0 j\delta\},\quad j=\overline{0,m-1},$$
если $c_0=\mathrm{const}>0$, $\phi_1\leqslant f_0$.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* A. *Тогда можно указать такое число* $h_*\in(0,1)$, *что при всех* $h\in(0,h_*)$ *справедливы неравенства*
$$\max_{i\in\overline{0,m_h-1}}\lambda(\tau_{i+1})\leqslant d_1\{\alpha+\delta+h^2\delta^{-1}\},\tag{12}$$
$$\int_0^{\vartheta}|u^h(s)|_r^2\,ds\leqslant(1+d_2\delta\alpha^{-2})\int_0^{\vartheta}|u_*(s)|_r^2\,ds+d_3h^2(\alpha\delta)^{-1},\tag{13}$$
где d_j, $j=1,2,3$, — *положительные постоянные, не зависящие от* h, δ *и* α.

Доказательство. Оценим изменение величины
$$\varepsilon(t)=\lambda(t)+\alpha\int_0^t\bigl(|u^h(\tau)|_r^2-|u_*(\tau)|_r^2\bigr)\,d\tau.$$
Здесь $\alpha=\alpha(h)$, $\delta=\delta(h)$. Нетрудно видеть, что справедливо неравенство
$$\varepsilon(\tau_{i+1})\leqslant\varepsilon(\tau_i)+\lambda_{1i}+\mu_{1i}+\alpha\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\bigl(|u^h(\tau)|_r^2-|u_*(\tau)|_r^2\bigr)\,d\tau,\tag{14}$$
где
$$\lambda_{1i}=2\left(S_i^h,\ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\mathcal{Y}(\tau_{i+1}-\tau)B(u^h(\tau)-u_*(\tau))\,d\tau\right),$$
$$\mu_{1i}=\delta\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\mathcal{Y}(\tau_{i+1}-\tau)B(u^h(\tau)-u_*(\tau))|_N^2\,d\tau,$$
$$S_i^h=\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\mathcal{Y}(\delta)s_i^h,\quad s_i^h=y^h(\tau_i)-y(\tau_i).$$
Заметим, что при $t\in[0,\delta_*]$, $\delta_*\in(0,1)$,
$$\|\mathcal{Y}(t)-I\|\leqslant c_*t,\quad c_*=c_*(\delta_*),$$

где I — единичная матрица размерности $N\times N$. Поэтому

$$|S_i^h-\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}s_i^h|_N\leqslant\delta c_*\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}|s_i^h|_N\leqslant\delta c_*|s_i^h|_N. \tag{15}$$

В этом случае, учитывая (15), а также неравенство $|S_i^h|_N\leqslant|s_i^h|_N$, имеем

$$|(S_i^h,\mathcal{Y}(\delta)Bu)-\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}(s_i^h,Bu)|\leqslant$$

$$\leqslant|S_i^h|_N|\mathcal{Y}(\delta)-I|_N|Bu|_N+|(S_i^h,Bu)-\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}(s_i^h,Bu)|\leqslant 2\delta c^{(0)}|s_i^h|_N|Bu|_N. \tag{16}$$

Далее, в силу (16) справедливо неравенство

$$\lambda_{1i}\leqslant 2\exp\{-2\chi\tau_{i+1}\}\left(y^h(\tau_i)-y(\tau_i),\ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}B\{u_i^h-u_*(\tau)\}\,d\tau\right)+I_{1i},$$

где

$$I_{1i}=\delta c^{(1)}|s_i^h|_N\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|u_i^h-u_*(\tau)|_r\,d\tau.$$

Нетрудно видеть, что имеет место оценка

$$I_{1i}\leqslant\delta^2\lambda(\tau_i)+c^{(2)}\delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u_i^h|_r^2+|u_*(\tau)|_r^2\big)\,d\tau. \tag{17}$$

Учитывая (17), а также правило выбора управления $u^h(\cdot)$ (см. (5), (11)), получаем

$$\lambda_{1i}+\alpha\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u^h(s)|_r^2-|u_*(s)|_r^2\big)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\delta^2\lambda(\tau_i)c^{(3)}h\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u_i^h|_r+|u_*(s)|_r\big)\,ds+c^{(2)}\delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u_i^h|_r^2+|u_*(s)|_r^2\big)\,ds. \tag{18}$$

Кроме того, верны оценки

$$\mu_{1i}\leqslant\delta c^{(4)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u_i^h|_r^2+|u_*(\tau)|_r^2\big)\,d\tau,$$

$$c^{(3)}h\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u_i^h|_r+|u_*(s)|_r\big)\,ds\leqslant\delta c^{(5)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u_i^h|_r^2+|u_*(s)|_r^2\big)\,ds+c^{(6)}h^2. \tag{19}$$

Из (14), воспользовавшись (18), (19), устанавливаем справедливость неравенства

$$\gamma(\tau_{i+1})=\lambda(\tau_{i+1})+\alpha\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|u^h(s)|_r^2\,ds\leqslant$$

$$\leqslant(1+\delta^2)\lambda(\tau_i)+\alpha\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|u_*(\tau)|_r^2\,d\tau+\delta c^{(7)}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u_*(\tau)|_r^2+|u_i^h|_r^2\big)\,d\tau+c^{(6)}h^2. \tag{20}$$

В свою очередь, в силу (3), (11) имеем

$$|u_i^h|_r^2 \leqslant \alpha^{-2} c^{(8)} (h^2 + |y^h(\tau_i) - y(\tau_i)|_N^2)^2 \leqslant \alpha^{-2} c^{(9)} (\lambda(\tau_i) + h^2) \leqslant \alpha^{-2} c^{(9)} (\gamma(\tau_i) + h^2). \tag{21}$$

Из (20), (21) следует оценка

$$\gamma(\tau_{i+1}) \leqslant (1+\delta^2)\gamma(\tau_i) + (\alpha + c^{(7)}\delta) \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_*(s)|_r^2 ds + c^{(6)} h^2 + c^{(9)} \delta^2 \alpha^{-2} (\gamma(\tau_i) + h^2). \tag{22}$$

Учитывая условие A, заключаем, что можно указать число $h_1 \in (0,1)$ такое, что имеет место неравенство

$$\sup_{h \in (0,h_1)} \delta(h)\alpha^{-2}(h) \leqslant 1.$$

Из (22) стандартным образом (см., например, [13, с. 59–64]) выводим соотношение

$$\gamma(\tau_{i+1}) \leqslant \left((\alpha + c^{(7)}\delta) \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_*(s)|_r^2 \, ds + c^{(6)} h^2 \delta^{-1} + c^{(9)} h^2 \right) \exp\{\delta(1 + c^{(9)}\alpha^{-2})\tau_{i+1}\}. \tag{23}$$

Заметим, что $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \to 0$ при $h \to 0$. Поэтому можно указать число $c^{(10)} > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_1)$ справедливо неравенство

$$\exp\{\delta(1 + c^{(9)}\alpha^{-2})\vartheta\} \leqslant 1 + \delta c^{(10)} (1 + \alpha^{-2}).$$

Тогда из (23) вытекает соотношение

$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(s)|_r^2 ds \leqslant (1 + c^{(7)}\delta\alpha^{-1})(1 + c^{(10)}\delta\alpha(1+\alpha^{-2})) \int\limits_0^\vartheta |u_*(s)|_r^2 ds + c^{(11)} h^2 (\delta\alpha)^{-1}. \tag{24}$$

В силу условия A найдётся такое число $h_* \in (0, h_1)$, что при всех $h \in (0, h_*)$

$$(1 + c^{(7)}\delta\alpha^{-1})(1 + c^{(10)}\delta(1 + \alpha^{-2})) \leqslant 1 + d_2 \delta \alpha^{-2}. \tag{25}$$

Неравенство (13) следует из (24) и (25). В свою очередь неравенство (12) следует из (23). Лемма доказана.

Замечание. Если $\delta(h) = d_4 h$, $\alpha(h) = d_5 h^{1/2-\varepsilon}$, где d_4 и d_5 — положительные постоянные, $\varepsilon = \mathrm{const} \in (0, 1/2)$, то имеют место неравенства

$$\max_{i=\overline{0,m_h-1}} \lambda(\tau_{i+1}) \leqslant d_6 h^{1/2-\varepsilon},$$

$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(s)|_r^2 \, ds \leqslant (1 + d_7 h^{2\varepsilon}) \int\limits_0^\vartheta |u_*(s)|_r^2 \, ds + d_8 h^{1/2+\varepsilon}.$$

Из леммы 2 вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда имеет место сходимость $u^h(\cdot) \to u_*(\cdot)$ при $h \to 0$.*

Доказательство этой теоремы проводится по стандартной схеме (см., например, доказательство теоремы 1.2.3 в [3, с. 21–27]).

При некоторых дополнительных условиях может быть получена оценка скорости сходимости алгоритма. Для её обоснования нам потребуется следующая

Лемма 3 [3, с. 29]. *Пусть* $x_1(\cdot)\in L_\infty(T_*;\mathbb{R}^n)$, $y_1(\cdot)\in W(T_*;\mathbb{R}^n)$, $T_*=[a,b]$, $-\infty< a<b<+\infty$,

$$\left|\int\limits_a^t x_1(\tau)\,d\tau\right|_n \leqslant \varepsilon, \quad |y_1(t)|_n\leqslant K, \quad t\in T_*.$$

Тогда при всех $t\in T_*$ *верно неравенство*

$$\left|\int\limits_a^t (x_1(\tau),y_1(\tau))\,d\tau\right| \leqslant \varepsilon(K+\operatorname{var}(T_*;y_1(\cdot))).$$

Здесь $\operatorname{var}(T_*;y_1(\cdot))$ означает вариацию функции $y_1(\cdot)$ на отрезке T_*, а $W(T_*;\mathbb{R}^n)$ — множество функций $y(\cdot)\colon T_*\to\mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Лемма 4. *Пусть* $u_*(\cdot)$ — *функция ограниченной вариации,* B — *не зависящая от* t *и* y (*стационарная*) *матрица,* $N\geqslant r$, $\operatorname{rank}B=r$. *Пусть также выполнены условия леммы* 2. *Тогда можно указать число* $d_9>0$ *такое, что при всех* $h\in(0,h_*)$ *верно неравенство*

$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(\tau)-u_*(\tau)|_r^2\,d\tau \leqslant d_9\big(\alpha^{1/2}+h^2(\alpha\delta)^{-1}+\delta\alpha^{-2}+h^{1/2}+h\delta^{-1/2}\big). \tag{26}$$

Доказательство. Заметим, что для любых $t_1,t_2\in T$, $t_1<t_2$, справедливо соотношение

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} B\{u^h(t)-u_*(t)\}\,dt\right|_N = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2}[\dot y^h(\tau)-\dot y(\tau)-A(y^h(\tau)-y(\tau))]\,d\tau\right|_N \leqslant$$

$$\leqslant |\mu_h(t_2)-\mu_h(t_1)|_N + k^{(1)}\int\limits_{t_1}^{t_2}|\mu_h(\tau)|_N\,d\tau,$$

где $\mu_h(t)=y^h(t)-y(t)$. Нетрудно видеть, что при $t\in\delta_i$ верны неравенства

$$|\mu_h(t)|_N^2 \leqslant k^{(2)}\lambda(\tau_i)+k^{(3)}\left|\int\limits_{\tau_i}^t \mathcal{Y}(t-s)B(u^h(s)-u_*(s))\,ds\right|_N \leqslant$$

$$\leqslant k^{(2)}\lambda(\tau_i)+k^{(4)}\int\limits_{\tau_i}^t\big(|u^h(s)|_r+|u_*(s)|_r\big)\,ds. \tag{27}$$

В свою очередь, в силу (12) и (21) при $t\in\delta_i$ имеем

$$\int\limits_{\tau_i}^t |u^h(s)|_r\,ds \leqslant k^{(5)}\delta\alpha^{-1}(\lambda^{1/2}(\tau_i)+h) \leqslant k^{(6)}\delta\alpha^{-1}(\alpha^{1/2}+\delta^{1/2}+h\delta^{-1/2}). \tag{28}$$

Учитывая сходимость $\delta(h)\alpha^{-2}(h)\to 0$ при $h\to 0$, заключаем, что при $h\in(0,h_*)$ справедливы оценки

$$\delta\alpha^{-1/2}\leqslant k^{(7)}\alpha^{3/2}, \quad \delta^{3/2}\alpha^{-1}\leqslant k^{(8)}\alpha^2, \quad h\delta^{1/2}\alpha^{-1}\leqslant k^{(9)}h. \tag{29}$$

Кроме того, ввиду (28) и (29) при $t \in \delta_i$ верны оценки

$$\int_{\tau_i}^{t} |u^h(s)|_r ds \leqslant k^{(10)}(h+\alpha^{3/2}), \quad \int_{\tau_i}^{t} |u_*(s)|_r ds \leqslant k^{(11)}\delta^{1/2} \leqslant k^{(12)}\alpha. \tag{30}$$

Из (27), учитывая (30), выводим справедливое при $t \in \delta_i$ соотношение

$$|\mu_h(t)|_N^2 \leqslant k^{(2)}\lambda(\tau_i) + k^{(13)}(h+\alpha). \tag{31}$$

В таком случае в силу (12) из (31) получаем

$$\sup_{t\in T} |\mu_h(t)|_N \leqslant k^{(14)}(\alpha + h + h^2\delta^{-1})^{1/2}.$$

Отсюда выводим

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} (u^h(t) - u_*(t))\, dt\right|_r \leqslant k^{(15)} \left|\int_{t_1}^{t_2} B(u^h(t) - u_*(t))\, dt\right|_N \leqslant k^{(16)}(\alpha^{1/2} + h^{1/2} + h\delta^{-1/2}). \tag{32}$$

Снова воспользовавшись леммой 2 (см. (13)), устанавливаем

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u_*(\tau)|_r^2\, d\tau = \int_0^{\vartheta} |u^h(\tau)|_r^2\, d\tau - 2\int_0^{\vartheta} (u^h(\tau), u_*(\tau))\, d\tau + \int_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_r^2\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant (2 + d_2\alpha^{-2}\delta)\int_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_r^2\, d\tau - \int_0^{\vartheta} (u^h(\tau), u_*(\tau))\, d\tau + d_3h^2(\alpha\delta)^{-1} =$$

$$= 2\int_0^{\vartheta} (u_*(\tau) - u^h(\tau), u_*(\tau))\, d\tau + d_2\alpha^{-2}\delta \int_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_r^2\, d\tau + d_3h^2(\alpha\delta)^{-1}. \tag{33}$$

Учитывая лемму 3, а также (32), получаем

$$\sup_{t\in T}\left|\int_0^{t} (u_*(\tau) - u^h(\tau), u_*(\tau))\, d\tau\right| \leqslant k^{(17)}(\alpha^{1/2} + h^{1/2} + h\delta^{-1/2}). \tag{34}$$

Таким образом, при всех $h \in (0, h_*)$, $t \in T$, в силу (33), (34) верно неравенство (26). Лемма доказана.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи в случае, когда система нелинейна по фазовой переменной. Пусть система (1) имеет следующий вид:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) + Bu(t), \tag{35}$$

где B — постоянная матрица размерности $N \times r$. Будем полагать, что функция f непрерывна по t, монотонна по x, т.е. при некотором $\omega \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$(f(t,x) - f(t,y), x - y) \leqslant -\omega|x-y|_N^2, \quad t \in T, \ \ x, y \in \mathbb{R}^N,$$

и удовлетворяет условию роста

$$|f(t,x)|_N \leqslant c(1+|x|_N), \quad t\in T, \ x\in \mathbb{R}^N,$$

где $c=\text{const}>0$. При выполнении этих условий, как известно, при любом $u(\cdot)\in L_2(T;\mathbb{R}^r)$ существует единственное решение системы (35), понимаемое в смысле Каратеодори. В качестве модели возьмём копию (35), а именно систему

$$\dot y^h(t)=f(t,y^h(t))+Bu^h(t) \tag{36}$$

с начальным состоянием

$$y^h(0)=\xi_0^h.$$

Алгоритм решения задачи в данном случае аналогичен алгоритму, описанному выше для линейной системы. Прежде всего выбираются некоторые семейство Δ_h (8) разбиений отрезка T, а также функция $\alpha(h)\colon (0,1)\to(0,1)$.

До начала работы алгоритма фиксируются величины $h\in(0,1)$, $\alpha=\alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h=\{\tau_{h,i}\}_{i=\overline{0,m_h}}$ вида (8). Работа алгоритма разбивается на $m-1$, $m=m_h$, однотипных шагов. На i-м шаге, осуществляемом на промежутке времени $\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1})$, $\tau_i=\tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала (в момент τ_i) вычисляется вектор u_i^h по формуле (5), в которой

$$U(\tau_i,\xi_i^h,y^h(\tau_i))=\alpha^{-1}B'(\xi_i^h-y^h(\tau_i)). \tag{37}$$

Затем на вход системы (36) подаётся управление $u^h(t)$ вида (5), (37). Под действием этого управления система (36) переходит из состояния $y^h(\tau_i)$ в состояние $y^h(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Как и в линейном случае, оказывается, что при определённом согласовании величин h, $\delta(h)$ и $\alpha(h)$ функция $u^h(\cdot)$ является аппроксимацией $u_*(\cdot)$. Прежде чем перейти к доказательству этого факта, приведём лемму, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 5. *Можно указать такое число $d_{10}>0$, что равномерно по всем $t\in T$, $y_0\in\mathbb{R}^N$, $u(\cdot)\in L_2(T;\mathbb{R}^r)$ выполняется неравенство*

$$\int_0^t |\dot y(s;y_0,u(\cdot))|_N^2\,ds\leqslant d_{10}\left(|y_0|_N^2+\int_0^t|u(s)|_r^2\,ds\right).$$

Здесь $y(\cdot;y_0,u(\cdot))$ — решение системы (1) с начальным состоянием (2), порождённое $u(\cdot)\in L_2(T;\mathbb{R}^r)$.

Лемма 6. *Пусть $\alpha(h)\to 0$, $\delta(h)\alpha^{-2}(h)\to 0$ при $h\to 0$. Тогда можно указать такое число $h_1\in(0,1)$, что при всех $h\in(0,h_1)$, $t\in T$ для некоторых положительных d_{11}, d_{12}, d_{13} справедливы неравенства*

$$\max_{i=\overline{0,m_h-1}}\varepsilon_1(\tau_i)\leqslant d_{11}(\alpha+\delta+h^2\delta^{-1}), \tag{38}$$

$$\int_0^\vartheta |u^h(\tau)|_r^2\,d\tau\leqslant(1+d_{12}\delta\alpha^{-2})\int_0^\vartheta|u_*(\tau)|_r^2\,d\tau+d_{13}(h^2(\alpha\delta)^{-1}+\delta\alpha^{-1}), \tag{39}$$

где $\varepsilon_1(t)=|y^h(t)-y(t)|_N^2$, $\alpha=\alpha(h)$, $\delta=\delta(h)$.

Доказательство. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon_1(t)$ при $t\in T$. Для $t\in\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1})$, $i=\overline{0,m-1}$, имеем

$$\frac{d\varepsilon_1(t)}{dt}=2(y^h(t)-y(t),f(t,y^h(t))-f(t,y(t))+B(u_i^h-u_*(t)))\leqslant$$

$$\leqslant -2\omega\varepsilon_1(t)+2(y^h(t)-y(t),B(u_i^h-u_*(t)))\leqslant -2\omega\varepsilon_1(t)+\sum_{j=1}^{3}I_{ji}(t), \tag{40}$$

где

$$I_{1i}(t)=2(y^h(\tau_i)-\xi_i^h,B(u_i^h-u_*(t))),$$

$$I_{2i}(t)=2\|B\|h(|u_i^h|_r+|u_*(t)|_r),$$

$$I_{3i}(t)=2\|B\|(|u_i^h|_N+|u_*(t)|_N)\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\dot y^h(s)-\dot y(s)|_N\,ds.$$

Из (40) следует неравенство

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1})\leqslant\varepsilon_1(\tau_i)-2\omega\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\varepsilon_1(s)\,ds+\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{j=1}^{3}I_{ji}(s)\,ds. \tag{41}$$

Далее, при $t\in\delta_i$ имеем

$$\varepsilon_1(\tau_i)=\left|y^h(t)-y(t)-\int\limits_{\tau_i}^{t}(\dot y^h(s)-\dot y(s))\,ds\right|_N^2\leqslant 2\varepsilon_1(t)+2\delta\int\limits_{\tau_i}^{t}|\dot y^h(s)-\dot y(s)|_N^2\,ds,$$

поэтому

$$-\omega\varepsilon_1(\tau_i)\geqslant -2\omega\varepsilon_1(t)-2\omega\delta\int\limits_{\tau_i}^{t}|\dot y^h(s)-\dot y(s)|_N^2ds.$$

Таким образом, при $t\in\delta_i$ справедливо неравенство

$$-2\omega\varepsilon_1(t)\leqslant -\omega\varepsilon(\tau_i)+2\omega\delta\int\limits_{\tau_i}^{t}|\dot y^h(s)-\dot y(t)|_N^2ds.$$

Отсюда после интегрирования при $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$ получаем

$$-2\omega\int\limits_{\tau_i}^{t}\varepsilon_1(s)ds\leqslant -\omega\delta\varepsilon_1(\tau_i)+2\omega\delta^2\int\limits_{\tau_i}^{t}|\dot y^h(s)-\dot y(s)|_N^2ds. \tag{42}$$

Из (41), (42), считая в (42) $t=\tau_{i+1}$, выводим

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1})\leqslant(1-\omega\delta)\varepsilon_1(\tau_i)+\tilde I_{1i}+\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}I_{ji}(s)ds, \tag{43}$$

где

$$\tilde I_{1i}=4\omega\delta^2\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|\dot y^h(s)|_N^2+|\dot y(s)|_N^2)\,ds.$$

Далее, учитывая определение u_i^h (см. (5), (37)), заключаем, что имеет место неравенство

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \big(I_{1i}(t)+\alpha(|u_i^h|_r^2-|u_*(t)|_r^2)\big)\,dt\leqslant 0. \tag{44}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_{2i}(t)\,dt\leqslant c_0h^2+\tilde I_{2i}, \tag{45}$$

где

$$\tilde I_{2i}=\delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u_i^h|_r^2+|u_*(t)|_r^2\big)\,dt.$$

В свою очередь, в силу (5), (37) и (3) верно неравенство

$$|u_i^h|_r\leqslant\alpha^{-1}c_1(h+\varepsilon_1(\tau_i)),$$

поэтому

$$\delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|u^h(s)|_r^2\,ds\leqslant 2\delta^2\alpha^{-2}c_1^2(h^2+\varepsilon_1(\tau_i)), \tag{46}$$

следовательно,

$$\delta\int\limits_{0}^{\tau_{i+1}}|u^h(s)|_r^2\,ds\leqslant 2\delta^2\alpha^{-2}c_1^2\Bigg(\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_1(\tau_j)+\vartheta h^2\delta^{-1}\Bigg). \tag{47}$$

Учитывая (47), получаем

$$\sum_{j=0}^{i}\tilde I_{2j}\leqslant\delta\int\limits_{0}^{\tau_{i+1}}|u_*(s)|_r^2\,ds+2\vartheta c_1^2\delta h^2\alpha^{-2}+2c_1^2\delta^2\alpha^{-2}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_1(\tau_j). \tag{48}$$

Далее имеем

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_{3i}(t)\,dt\leqslant\tilde I_{3i}+\tilde I_{2i}, \tag{49}$$

где

$$\tilde I_{3i}=\|B\|^2\delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|\dot y^h(s)|_N^2+|\dot y(s)|_N^2\big)\,ds.$$

В силу леммы 5 при всех $i=\overline{1,m}$ верно соотношение

$$\int\limits_{0}^{\tau_i}\big(|\dot y^h(s)|_N^2+|\dot y(s)|_N^2\big)\,ds\leqslant c_2\Bigg(1+\int\limits_{0}^{\tau_i}\big(|u^h(s)|_r^2+|u_*(s)|_r^2\big)\,ds\Bigg). \tag{50}$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{i}\tilde I_{1j}\leqslant c_3\delta\Bigg(1+\sum_{j=0}^{i}\tilde I_{2j}\Bigg),\quad \sum_{j=0}^{i}\tilde I_{3j}\leqslant c_4\Bigg(\delta+\sum_{j=0}^{i}\tilde I_{2j}\Bigg).$$

В таком случае, учитывая (49), заключаем, что имеет место неравенство

$$\sum_{j=0}^{i}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} I_{3j}(s)ds \leqslant c_5\delta + c_6\sum_{j=0}^{i}\tilde{I}_{2j}. \tag{51}$$

Далее из (45), (47), (48) и (51) получаем

$$\sum_{j=0}^{i}\Bigg(\tilde{I}_{1j} + \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (I_{2j}(t) + I_{3j}(t))\,dt\Bigg) \leqslant c_7h^2\delta^{-1} + c_8\delta + c_9\Bigg(\delta^2\alpha^{-2}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_1(\tau_j) + \delta h^2\alpha^{-2}\Bigg). \tag{52}$$

В свою очередь, из (43), воспользовавшись (44) и (52), выводим оценку

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) + \alpha\int\limits_0^{\tau_{i+1}} \big(|u^h(s)|_r^2 - |u_*(s)|_r^2\big)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1(0) + c_7h^2\delta^{-1} + c_8\delta + c_9\delta h^2\alpha^{-2} + c_9\delta^2\alpha^{-2}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_1(\tau_j). \tag{53}$$

В силу дискретного неравенства Гронуолла (см. лемму 1) из (53) имеем

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) + \alpha\int\limits_0^{\tau_{i+1}} |u^h(s)|_r^2\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg(\varepsilon_0(0) + c_7h^2\delta^{-1} + c_8\delta + c_9\delta h^2\alpha^{-2} + \alpha\int\limits_0^{\tau_{i+1}} |u_*(s)|_r^2\,ds\Bigg)\exp\{c_9(i+1)\delta^2\alpha^{-2}\}. \tag{54}$$

Заметим, что

$$\varepsilon_1(0) \leqslant h^2, \quad \exp\{c_9(i+1)\delta^2\alpha^{-2}\} \leqslant \exp\{c_9\vartheta\delta\alpha^{-2}\}.$$

Кроме того, если $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \to 0$ при $h \to 0$, то при $h \in (0, h_1)$, $h_1 \in (0,1)$ выполняются неравенства

$$\exp\{c_9\vartheta\delta\alpha^{-2}\} \leqslant 1 + c_{10}\delta\alpha^{-2}, \quad \delta\alpha^{-2} \leqslant c_{11},$$

где $c_{10} = c_{10}(h_1) > 0$, $c_{11} = c_{11}(h_1) > 0$.

Таким образом, ввиду (54) при $h \in (0, h_1)$, $i = \overline{0, m-1}$ справедливо неравенство

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) + \alpha\int\limits_0^{\tau_{i+1}} |u^h(s)|_r^2\,ds \leqslant \alpha(1 + c_{12}\delta\alpha^{-2})\int\limits_0^{\tau_{i+1}} |u_*(s)|_r^2\,ds + c_{13}(h^2\delta^{-1} + \delta),$$

из которого вытекают неравенства (38) и (39). Лемма доказана.

С помощью леммы 6 может быть доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 6. *Пусть также* $h^2(\alpha(h)\delta(h))^{-1} \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда имеет место сходимость* $u^h(\cdot) \to u_*(\cdot)$ *при* $h \to 0$.

Как и в случае линейной системы, можем выписать оценку скорости сходимости алгоритма.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Пусть также функция* $y \to f(t,y)$ *липшицева*, $r \leqslant N$, $\operatorname{rank} B = r$. *Тогда при* $h \in (0, h_1)$ *имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма*:

$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(s) - u_*(s)|_r^2\, ds \leqslant d_{14}\bigl(\alpha^{1/2} + \delta^{1/2} + h\delta^{-1/2} + h\alpha^{-1/2} + \delta\alpha^{-2} + h^2(\alpha\delta)^{-1}\bigr). \tag{55}$$

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 4. Действительно, пусть L — постоянная Липшица функции f. Нетрудно видеть, что при п.в. $t \in \delta_i$ справедливо соотношение

$$\dot\varepsilon_1(t) \leqslant -2\omega\varepsilon_1(t) + I_{4i}(t) + I_{3i}(t) \leqslant I_{4i}(t) + I_{3i}(t), \tag{56}$$

где
$$I_{4i}(t) = 2(y^h(\tau_i) - y(\tau_i), B(u_i^h - u_*(t))).$$

Заметим, что при $t \in \delta_i$ верно неравенство

$$\left|\int\limits_{\tau_i}^t I_{4i}(s)\, ds\right|_N \leqslant \varepsilon_1(\tau_i) + 2\|B\|^2 \tilde I_{2i},$$

поэтому (см. (49)) при всех $t \in \delta_i$ справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{\tau_i}^t (I_{4i}(s) + I_{3i}(s))\, ds\right|_N \leqslant \varepsilon_1(\tau_i) + \tilde I_{3i} + (1 + 2\|B\|^2)\tilde I_{2i}. \tag{57}$$

В условиях теоремы 2 можно считать, что при $h \in (0, h_1)$ имеют место соотношения

$$\max_{i=\overline{0,m_h}} \varepsilon_1(\tau_i) \leqslant k_1, \quad \delta\alpha^{-2} \leqslant k_2. \tag{58}$$

Воспользовавшись (39), получаем

$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(s)|_N^2 ds \leqslant k_3(1 + \delta\alpha^{-2} + h^2\delta^{-1}\alpha^{-1}). \tag{59}$$

В свою очередь, в силу (46), (50), (58), (59) и леммы 6 при $h \in (0, h_1)$ верны неравенства

$$\tilde I_{2i} \leqslant k_4\delta + k_5\delta^2\alpha^{-2}(h^2 + \varepsilon_1(\tau_i)) \leqslant k_6\delta, \tag{60}$$

$$\tilde I_{3i} \leqslant k_7\delta + k_8\delta \int\limits_0^{\tau_i} |u^h(s)|_r^2 ds \leqslant k_9\delta + k_{10}(h^2\alpha^{-1} + \delta^2\alpha^{-2}) \leqslant k_{11}(\delta + h^2\alpha^{-1}). \tag{61}$$

Ввиду (58)
$$\alpha^{-1} \leqslant k_{12}\delta^{-1/2} \leqslant k_{13}\delta^{-1}.$$

В таком случае, учитывая (57), (60), (61), из (56) получаем справедливые при $t \in \delta_i$ соотношения
$$\varepsilon_1(t) \leqslant 2\varepsilon_1(\tau_i) + k_{11}(\delta + h^2\alpha^{-1}) \leqslant 2\varepsilon(\tau_i) + k_{14}(\delta + h^2\delta^{-1}). \tag{62}$$

Следовательно, в силу (38) и (62) при $t\in\delta_i$ имеет место цепочка неравенств

$$\left|\int_0^t (u^h(s)-u_*(s))\,ds\right|_r \leqslant k_{15}\left|\int_0^t \big(\dot y^h(s)-\dot y(s)-f(s,y^h(s))+f(s,y(s))\big)\,ds\right|_N \leqslant$$

$$\leqslant k_{15}\left(\varepsilon_1^{1/2}(t)+\varepsilon_1^{1/2}(0)+L\int_0^t \varepsilon_1^{1/2}(s)\,ds\right)\leqslant k_{16}(\alpha+\delta+h^2\delta^{-1}+h^2\alpha^{-1})^{1/2}.$$

Кроме того, аналогично (33), (34) устанавливаются оценки

$$\int_0^\vartheta |u^h(s)-u_*(s)|_r^2\,ds\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\vartheta (u_*(s)-u^h(s),u_*(s))ds+d_{12}\delta\alpha^{-2}\int_0^\vartheta |u_*(s)|_r^2\,ds+d_{13}(h^2(\alpha\delta)^{-1}+\delta\alpha^{-1}), \tag{63}$$

$$\sup_{t\in T}\left|\int_0^t (u^h(s)-u_*(s),u_*(s))\,ds\right|\leqslant k_{18}(\alpha+\delta+h^2\delta^{-1}+h^2\alpha^{-1})^{1/2}. \tag{64}$$

При выводе неравенства (64) используется лемма 3. Неравенство (55) следует из неравенств (63) и (64). Лемма доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов, Ю.С. Основы метода динамической регуляризации / Ю.С. Осипов, Ф.П. Васильев, М.М. Потапов. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 238 с.
2. Osipov, Yu.S. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions / Yu.S. Osipov, A.V. Kryazhimskii. — Basel : Gordon and Breach, 1995. — 625 p.
3. Осипов, Ю.С. Методы динамического восстановления входов управляемых систем / Ю.С. Осипов, А.В. Кряжимский, В.И. Максимов. — Екатеринбург : УрО РАН, 2011. — 291 с.
4. Кряжимский, А.В. О моделировании управления в динамической системе / А.В. Кряжимский, Ю.С. Осипов // Изв. РАН. Техническая кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 51–68.
5. Кряжимский, А.В. Устойчивое решение обратных задач динамики управляемых систем / А.В. Кряжимский, Ю.С. Осипов // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1988. — Т. 185. — С. 126–146.
6. Максимов, В.И. О динамической реконструкции возмущений системы по неточным дискретным измерениям части фазовых координат / В.И. Максимов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2018. — № 3. — С. 15–32.
7. Maksimov, V.I. The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations / V.I. Maksimov // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2021. — V. 29, № 1. — P. 125–156.
8. Сурков, П.Г. Задача динамического восстановления правой части системы дифференциальных уравнений нецелого порядка / П.Г. Сурков // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 6. — С. 865–874.
9. Близорукова, М.С. О динамической реконструкции входа управляемой системы / М.С. Близорукова // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 7. — С. 859–864.

10. Розенберг, В.Л. Восстановление внешних воздействий при дефиците информации в линейном стохастическом уравнении / В.Л. Розенберг // Тр. Ин-та матем. и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 236–244.
11. Maksimov, V. On a stable solution of the dynamical reconstruction and tracking control problems for coupled ordinary differential equation-heat equation / V. Maksimov // Math. Contr. Related Fields. — 2024. — V. 14, № 1. — P. 322–345.
12. Максимов, В.И. Реконструкция возмущения нелинейной системы при измерении части координат фазового вектора / В.И. Максимов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2019. — Т. 59, № 11. — С. 1836–1845.
13. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М. : Наука, 1974. — 456 с.
14. Черноусько, Ф.Л. Методы управления нелинейными механическими системами / Ф.Л. Черноусько, И.М. Ананьевский, С.А. Решмин. — М. : Физматлит, 2006. — 328 с.
15. Ананьевский, И.М. Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем / И.М. Ананьевский, С.А. Решмин // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 5. — С. 25–32.
16. Уткин, В.А. Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределённостями при неустойчивой нулевой динамике / В.А. Уткин, А.В. Уткин // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 9. — С. 45–64.
17. Кряжимский, А.В. О реконструкции входов в параболических системах / А.В. Кряжимский, В.И. Максимов, Е.А. Самарская // Мат. моделирование. — 1997. — Т. 9, № 3. — С. 51–72.
18. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1971. — 540 с.

STABLE SOLUTION OF PROBLEMS OF TRACKING AND DYNAMICAL RECONSTRUCTION UNDER MEASURING PHASE COORDINATES AT DISCRETE TIME MOMENTS

 V. I. Maksimov

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS, Yekaterinburg, Russia
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

The problem of dynamic reconstruction of input actions in a system of ordinary differential equations and the problem of tracking a trajectory of a system by some trajectory of another one influenced by an unknown disturbance are under consideration. An input action is assumed to be an unbounded function, namely, an element of the space of square integrable functions. Two solving algorithms, which are stable with respect to informational noises and computational errors and oriented to program realization, are designed. Upper estimates of their convergence rates are established. The algorithms are based on constructions from feedback control theory. They operate under conditions of (inaccurate) measuring the phase states of the given systems at discrete times.

Keywords: problem of tracking, reconstruction

REFERENCES

1. Osipov, Yu.S., Vasiliev, F.P., and Potapov, M.M., *Osnovy metoda dinamicheskoy regulyarizatsii* (Basics of the Dynamic Regularization Method), Moscow: MSU Press, 1999.
2. Osipov, Yu.S. and Kryazhimskii, A.V., *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*, Basel: Gordon and Breach, 1995.
3. Osipov, Yu.S., Kryazhimskii, A.V., and Maksimov, V.I., *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyayemykh sistem* (Methods of Dynamic Restoration of Inputs of Controlled Systems), Yekaterinburg: Izd-vo Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2011.
4. Kryazhimskii, A.V. and Osipov, Yu.S., On modeling control in a dynamic system, *Izv. RAS. Technicheskaya kibernetika*, 1983, no. 2, pp. 51–68.

5. Kryazhimskii, A.V. and Osipov, Yu.S., Stable solutions of inverse problems of the dynamics of controllable systems, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 185, pp. 143–164.
6. Maksimov, V.I., Dynamic reconstruction of system disturbances using inaccurate discrete measurements of phase coordinates, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2018, vol. 57, no. 3, pp. 358–373.
7. Maksimov, V.I., The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2021, vol. 29, no. 1, pp. 125–156.
8. Surkov, P.G., Dynamic right-hand side reconstruction problem for a system of fractional differential equations, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 849–858.
9. Blizorukova, M.S., On the dynamic reconstruction of the input of a control system, *Differ. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 7, pp. 847–853.
10. Rozenberg, V.L., Reconstruction of external actions under incomplete information in a linear stochastic equation, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. 196–205.
11. Maksimov, V., On a stable solution of the dynamical reconstruction and tracking control problems for coupled ordinary differential equation-heat equation, *Math. Contr. Related Fields*, 2024, vol. 14, no. 1, pp. 322–345.
12. Maksimov, V., Reconstruction of disturbances in a nonlinear system from measurements of some of the state-vector coordinates, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 11, pp. 1771–1780.
13. Krasovskii, N.N. and Subbotin, A.I., *Game-Theoretical Control Problems*, New York; Berlin: Springer Verlag, 1988.
14. Chernousko, F.L., Ananievski, I.M., and Reshmin, S.A., *Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications*, Berlin; Heidelberg: Springer, 2008.
15. Ananevsky, I.M. and Reshmin, S.A., The method of decomposition in the problem of tracking the trajectories of mechanical systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2002, vol. 41, no. 5, pp. 695–702.
16. Utkin, V.A. and Utkin, A.V., Problem of tracking in linear systems with parametric uncertainties under unstable zero dynamics, *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, pp. 1577–1592.
17. Kryazhimskii, A.V., Maksimov, V.I., and Samarskai, E.A., On reconstruction inputs in parabolic systems, *Math. Model.*, 1997, vol. 9, no. 3, pp. 51–72.
18. Samarskii, A.A., *The Theory of Difference Schemes*, New York: CRC Press, 2001.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 116–132

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ГРУППЫ СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ИГРЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Н. Н. Петров[1], А. И. Мачтакова[2]

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

e-mail: [1]kma3@list.ru, [2]bichurina.alyona@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.05.2024 г., после доработки 09.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

В конечномерном евклидовом пространстве рассмотрена задача преследования группой преследователей группы убегающих, описываемая линейной нестационарной системой дифференциальных уравнений с дробными по Капуто производными. Множества допустимых управлений игроков — компакты, целевые множества — начало координат. При условии, что убегающие используют одно и то же управление, получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего и всех убегающих. При исследовании в качестве базового используется метод матричных и скалярных разрешающих функций. Показано, что дифференциальные игры, описываемые уравнениями с дробными производными, обладают свойствами, которыми не обладают дифференциальные игры, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, дробная производная

DOI: 10.31857/S0374064125010097, EDN: HZRDZX

ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений развития современной теории дифференциальных игр является исследование задач преследования–уклонения с участием группы участников [1–4], причём кроме углубления классических методов исследования активно ведётся поиск игровых задач, к которым применимы ранее разработанные методы.

Впервые дифференциальные игры с дробными производными были рассмотрены в работе [5], где для исследования применялся метод скалярных разрешающих функций. Дифференциальные игры с дробной производной на основе уравнения Гамильтона–Якоби изучались в статье [6]. В [7] рассматривалась задача преследования группой преследователей одного убегающего в дифференциальных играх, описываемых уравнениями с дробными производными. Задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих в играх с дробной динамикой рассматривалась в [8], для анализа использовались скалярные разрешающие функции. А.А. Чикрий в своей работе [9] отмечает, что скалярные разрешающие функции осуществляют притяжение терминального множества с образами некоторых многозначных отображений, которые происходят в конусе, натянутом на данное множество, что ограничивает возможности для манёвра преследователя, а также предлагает использовать матричные разрешающие функции для анализа игр преследования двух лиц. Для исследования задачи преследования группой преследователей одного убегающего, описываемой стационарной линейной системой с дробными по Капуто производными, в статье [10] были применены матричные разрешающие функции.

В работе [11] была рассмотрена задача преследования группой преследователей группы убегающих в линейных стационарных дифференциальных играх с простыми матрицами при условии, что все убегающие используют одно и то же управление. Были получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего. Задачу преследования, в которой все убегающие используют одно и то же управление, в дальнейшем будем называть *задачей о преследовании скоординированных убегающих*.

В данной работе рассматривается задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих в дифференциальной игре, описываемой нестационарной линейной системой дифференциальных уравнений с дробными производными по Капуто. При условии, что убегающие используют одно и то же управление, получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего, при этом используются матричные или скалярные разрешающие функции. Исследование нестационарного случая дополнено некоторыми результатами для игр, описываемых линейными стационарными системами с простой матрицей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В пространстве $\mathbb{R}^k\,(k\geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1,\ \ldots,\ P_n$ и m убегающих $E_1,\ \ldots,\ E_m$, описываемая системой вида

$$\big(D^{(\alpha)}\big)z_{ij}=A_{ij}(t)z_{ij}+u_i-v,\quad z_{ij}(t_0)=z_{ij}^0,\quad u_i\in U_i,\ \ v\in V. \tag{1}$$

Здесь $i\in I=\{1,\ldots,n\}$, $j\in J=\{1,\ldots,m\}$, $z_{ij},u_i,v\in\mathbb{R}^k$, U_i, V — компакты $\mathbb{R}^k$, $\alpha\in(0,1)$, $D^{(\alpha)}x$ — производная по Капуто функции x порядка α [12], $A_{ij}(t)$ — непрерывные матричные функции порядка $k\times k$. Заданы терминальные множества M_{ij}^* вида

$$M_{ij}^*=M_{ij}+M_{ij}^0,$$

где M_{ij} — линейное подпространство $\mathbb{R}^k$, M_{ij}^0 — выпуклые компакты из L_{ij} — ортогонального дополнения к M_{ij} в $\mathbb{R}^k$. Считаем, что $z_{ij}^0\notin M_{ij}^*$ для всех $i\in I$, $j\in J$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих $E_1,\ \ldots,\ E_m$ выбирает одно и то же управление $v(\cdot)$.

Пусть $v\colon[t_0,+\infty)\to V$ — измеримая функция, которую будем называть *допустимой*. *Предысторией* $v_t(\cdot)$ в момент t функции $v(\cdot)$ будем называть сужение функции v на $[t_0,t]$.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОИМКИ

Определение 1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям $z^0=(z_{ij}^0,\,i\in I,\,j\in J)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_j, $j\in J$, измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в U_i.

Обозначим данную игру $G(n,m,z^0)$.

Определение 2. В игре $G(n,m,z^0)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего, если существуют момент $T>0$, квазистратегии $\mathcal{U}_1,\ \ldots,\ \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1,\ \ldots,\ P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t)\in V$, $t\in[t_0,T]$, существуют момент $\tau\in[t_0,T]$ и номера $p\in I$, $q\in J$, для которых $z_{pq}(\tau)\in M_{pq}$.

Введём следующие обозначения: E^0 — единичная матрица порядка $k\times k$, $\pi_{ij}\colon \mathbb{R}^k\to L_{ij}$ — оператор ортогонального проектирования,

$$\Gamma(\beta)=\int\limits_0^{+\infty} s^{\beta-1}e^{-s}\,ds,\quad {}_\tau J_t f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds,\quad G_{ij}^0(t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}E^0,$$

$$G_{ij}^{l+1}(t,\tau)={}_\tau J_t\big(A_{ij}(t)G_{ij}^l(t,\tau)\big),\quad l=0,1,\ldots,\quad \Phi_{ij}(t,\tau)=\sum_{l=0}^{+\infty}G_{ij}^l(t,\tau),$$

$$\tilde G_{ij}^0(t,\tau)=E^0,\quad \tilde G_{ij}^{l+1}(t,\tau)={}_\tau J_t\big(A_{ij}(t)\tilde G_{ij}^l(t,\tau)\big),\quad l=0,1,\ldots,\quad \Psi_{ij}(t,\tau)=\sum_{l=0}^{+\infty}\tilde G_{ij}^l(t,\tau),$$

$$W_{ij}(t,\tau,v)=\pi_{ij}\Phi_{ij}(t,\tau)\big(U_i-v\big),\quad W_{ij}(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}W_{ij}(t,\tau,v),$$

$\operatorname{Int}A$, $\operatorname{co}A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A.

Предположение 1. *Существует отображение $q\colon I\to J$ такое, что для всех $i\in I$, $t\geqslant t_0$, $\tau\in[t_0,t]$ выполнено условие*

$$W_{iq(i)}(t,\tau)\neq\varnothing.$$

Замечание 1. Выполнение предположения 1 позволит в дальнейшем организовать преследование убегающих так, что каждый преследователь будет осуществлять поимку “своего” убегающего.

Из теоремы об измеримом выборе [13, теорема 8.1.3] следует, что для каждого $i\in I$ при любом $t\geqslant t_0$ существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_{iq(i)}(t,\tau)\in W_{iq(i)}(t,\tau)$ для всех $t\geqslant t_0$, $\tau\in[t_0,t]$. Выберем произвольные измеримые селекторы $\gamma_{iq(i)}(t,\tau)$, зафиксируем их и обозначим

$$\xi_{iq(i)}(t)=\pi_{iq(i)}\Psi_{iq(i)}(t,t_0)z^0_{iq(i)}+\int\limits_{t_0}^t\gamma_{iq(i)}(t,\tau)\,d\tau.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1 *и существуют $T>t_0$, $l\in I$ такие, что $\xi_{lq(l)}(T)\in M^0_{lq(l)}$. Тогда в игре $G(n,m,z^0)$ происходит поимка.*

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $(\tau\in[t_0,T],\ v\in V)$

$$U_l(T,\tau,v)=\big\{u_l\in U_l\colon \pi_{lq(l)}\Phi_{lq(l)}(T,\tau)(u-v)-\gamma_{lq(l)}(T,\tau)=0\big\}.$$

В силу предположения 1 $U_l(T,\tau,v)\neq\varnothing$ для всех $\tau\in[t_0,T]$, $v\in V$. Из теоремы измеримого выбора [13, теорема 8.1.3] следует, что существует измеримый селектор $u_l^*(\tau,v)\in U_l(T,\tau,v)$. Полагаем управление преследователя P_l равным

$$u_l(\tau)=u_l^*(\tau,v(\tau)),\ \ \tau\in[t_0,T].$$

Управления остальных преследователей задаём произвольным образом. Решение задачи Коши для системы (1) представимо в виде [14]

$$z_{lq(l)}(T)=\Psi_{lq(l)}(T,t_0)z^0_{lq(l)}+\int\limits_{t_0}^T\Phi_{lq(l)}(T,s)(u_l(s)-v(s))\,ds,$$

поэтому

$$\pi_{lq(l)}z_{lq(l)}(T)=\xi_{lq(l)}(T)+\int\limits_{t_0}^T\big(\pi_{lq(l)}\Phi_{lq(l)}(T,s)(u_l(s)-v(s))-\gamma_{lq(l)}(T,s)\big)\,ds=\xi_{lq(l)}(T)\in M^0_{lq(l)}.$$

Это и означает, что в игре $G(n,m,z^0)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего. Теорема доказана.

В дальнейшем будем считать, что $\xi_{iq(i)}(t)\notin M^0_{iq(i)}$ для всех $i\in I,\ t\geqslant t_0$.

Рассмотрим произвольную диагональную квадратную матрицу Λ_i порядка $k_i\times k_i$, где k_i — размерность $L_{iq(i)}$, вида

$$\Lambda_i=\begin{pmatrix}\lambda_{i1} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_{i2} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{ik_i}\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(\lambda_{i1},\lambda_{i2},\ldots,\lambda_{ik_i}).$$

Будем отождествлять матрицу Λ_i с вектором $(\lambda_{i1},\ldots,\lambda_{ik_i})$. Неравенство $\Lambda_i\geqslant 0$ будем понимать покоординатно. Введём многозначные отображения

$$\mathcal{M}_i(t,\tau,v)=\big\{\Lambda_i\colon \Lambda_i\geqslant 0,\ \ \Lambda_i\big(M^0_{iq(i)}-\xi_{iq(i)}(t)\big)\cap\big(W_{iq(i)}(t,\tau,v)-\gamma_{iq(i)}(t,\tau)\big)\neq\varnothing\big\}.$$

В силу свойств параметров конфликтно-управляемого процесса отображения $\mathcal{M}_i(t,\tau,v)$ являются измеримыми по (τ,v) отображениями [15]. Определим скалярные функции

$$\lambda_i^0(t,\tau,v)=\sup_{\Lambda_i\in\mathcal{M}_i(t,\tau,v)}\min_{l\in J_i}\lambda_{il}(t,\tau,v),\qquad J_i=\{1,\ldots,k_i\}. \tag{2}$$

Предположение 2. *Для всех $t\geqslant t_0$, $\tau\in[t_0,t]$, $v\in V$ в* (2) *достигается точная верхняя грань.*

Считаем данное предположение выполненным. Определим множество

$$\mathcal{M}_i^*(t,\tau,v)=\Big\{\Lambda_i(t,\tau,v)\in\mathcal{M}_i(t,\tau,v)\colon \lambda_i^0(t,\tau,v)=\min_{l\in J_i}\lambda_{il}(t,\tau,v)\Big\}.$$

Из [15] следует, что при сделанных предположениях $\mathcal{M}_i^*(t,\tau,v)$ измеримы по (τ,v) и замкнутозначны при любом $t\geqslant 0$. По теореме измеримого выбора [13, теорема 8.1.3] для каждого $i\in I$ в $\mathcal{M}_i^*(t,\tau,v)$ существует хотя бы один измеримый по (τ,v) селектор при любом $t\geqslant 0$. Зафиксируем эти селекторы и обозначим их $\Lambda_i^*(t,\tau,v)=\operatorname{diag}(\lambda_{i1}^*(t,\tau,v),\ldots,\lambda_{ik_i}^*(t,\tau,v))$. Пусть далее

$$\delta(t,\tau)=\inf_{v\in V}\max_{i\in I}\min_{l\in J_i}\lambda_{il}^*(t,\tau,v).$$

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2,

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\delta(t,s)\,ds=+\infty. \tag{3}$$

Тогда существует такой момент $T>t_0$, что для каждой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t)\in V$, $t\in[t_0,T]$, найдётся номер $l\in I$ такой, что для всех $p\in J_l$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{t_0}^{T}\lambda_{lp}^*(T,s,v(s))ds\geqslant 1.$$

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Тогда для всех $t\geqslant t_0$, $s\in[t_0,t]$, $l\in I$, $p\in J_l$ справедливы неравенства

$$\lambda_{lp}^*(t,s,v(s))\geqslant\lambda_l^*(t,s,v(s)). \tag{4}$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\max_{l\in I}\int_{t_0}^{t}\lambda_l^*(t,s,v(s))\,ds\geqslant\frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\sum_{l\in I}\lambda_l^*(t,s,v(s))\,ds\geqslant\frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\max_{l\in I}\lambda_l^*(t,s,v(s))\,ds\geqslant\frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\delta(t,s)\,ds.$$

Из условия (3) следует, что существует число $T>t_0$, для которого

$$\frac{1}{n}\int_{t_0}^{T}\delta(T,s)\,ds\geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\max_{l\in I}\int_{t_0}^{T}\lambda_l^*(T,s,v(s))\,ds\geqslant 1,$$

поэтому найдётся номер $l\in I$, для которого

$$\int_{t_0}^{T}\lambda_l^*(T,s,v(s))\,ds\geqslant 1.$$

Из последнего неравенства и неравенства (4) вытекает справедливость утверждения леммы.

Найдём число

$$T_0=\inf\Big\{t\geqslant t_0\colon\ \inf_{v(\cdot)}\max_{l\in I}\min_{p\in J_l}\int_{t_0}^{t}\lambda_{lp}^*(t,s,v(s))\,ds\geqslant 1\Big\}.$$

Рассмотрим множества $(i\in I,\ \ p\in J_l)$

$$T_{ip}\big(v(\cdot)\big)=\Big\{t\geqslant t_0\colon\int_{t_0}^{t}\lambda_{ip}^*(T_0,s,v(s))\,ds\geqslant 1\Big\}.$$

Определим величины

$$t_{ip}^*(v(\cdot))=\begin{cases}\inf\big\{t\colon\ t\in T_{ip}\big(v(\cdot)\big)\big\}, & \text{если } T_{ip}\big(v(\cdot)\big)\neq\varnothing,\\ +\infty, & \text{если } T_{ip}\big(v(\cdot)\big)=\varnothing.\end{cases}$$

Предположение 3. 1. *Для всех* $\tau\in[t_0,T_0]$, $v\in V$, $l\in I$, $J_l^0\subset J_l$ *селекторы* $B_l(T_0,\tau,v)=\operatorname{diag}(\beta_{l1}(T_0,\tau,v),\ldots,\beta_{lk_l}(T_0,\tau,v))$, *где*

$$\beta_{lp}(T_0,\tau,v)=\begin{cases}\lambda_{lp}^*(T_0,\tau,v), & \textit{если } p\in J_l^0,\\ 0, & \textit{если } p\notin J_l^0,\end{cases}$$

удовлетворяют условию $B_l(T_0,\tau,v)\subset\mathcal{M}_l(T_0,\tau,v)$.

2. $\int_{t_0}^{T_0}B_l(T_0,s,v(s))M_{lq(l)}^0\,ds\subset M_{lq(l)}^0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1–3 *и условие* (3). *Тогда в игре* $G(n,m,z^0)$ *происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $T_0 < +\infty$. Пусть $v\colon [t_0, T_0] \to V$ — произвольная допустимая функция. Введём функции $B_l^*(T_0, t, v) = \operatorname{diag}\big(\beta_{l1}^*(T_0, t, v), \ldots, \beta_{lk_l}^*(T_0, t, v)\big)$, где

$$\beta_{lp}^*(T_0, t, v) = \begin{cases} \lambda_{lp}^*(T_0, t, v), & \text{если } t \in [t_0, t_{lp}^*(v(\cdot))\big), \\ 0, & \text{если } t \in [t_{lp}^*(v(\cdot)), T_0]. \end{cases}$$

В силу предположения 3 $B_i^*(T_0, t, v)$ является измеримым селектором $\mathcal{M}_i(T_0, t, v)$. Рассмотрим многозначные отображения

$$U_i(T_0, t, v) = \big\{u_i \in U_i\colon \pi_{iq(i)}\Phi_{iq(i)}(T_0, t)(u_i - v) - \gamma_{iq(i)}(T_0, t) \in B_i^*(T_0, t, v)(M_{iq(i)}^0 - \xi_{iq(i)}(T_0))\big\}.$$

Тогда $U_i(T_0, t, v) \neq \varnothing$ для всех $i \in I$, $t \in [t_0, T_0]$, $v \in V$ и, следовательно, по теореме измеримого выбора [13, теорема 8.1.3] у $U_i(T_0, t, v)$ существует хотя бы один измеримый селектор $u_i^*(T_0, t, v)$. Задаём управления преследователей, полагая $u_i(t) = u_i^*(T_0, t, v(t))$. Покажем, что данное управление преследователей гарантирует поимку хотя бы одного убегающего.

Решение задачи Коши системы (1) имеет вид [14]

$$z_{iq(i)}(t) = \Psi_{iq(i)}(t, t_0)z_{iq(i)}^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_{iq(i)}(t, s)\big(u_i(s) - v(s)\big)\, ds,$$

поэтому

$$\begin{gathered} \pi_{iq(i)}z_{iq(i)}(T_0) = \\ = \pi_{iq(i)}\Psi_{iq(i)}(T_0, t_0)z_{iq(i)}^0 + \int_{t_0}^{T_0} \gamma_{iq(i)}(T_0, s)\, ds + \int_{t_0}^{T_0} \big(\pi_{iq(i)}\Phi_{iq(i)}(T_0, s)(u_i(s) - v(s)) - \gamma_{iq(i)}(T_0, s)\big)\, ds = \\ = \xi_{iq(i)}(T_0) + \int_{t_0}^{T_0} \big(\pi_{iq(i)}\Phi_{iq(i)}(T_0, s)(u_i(s) - v(s)) - \gamma_{iq(i)}(T_0, s)\big)\, ds \in \\ \in \xi_{iq(i)}(T_0) + \int_{t_0}^{T_0} B_i^*(T_0, s, v(s))\big(M_{iq(i)}^0 - \xi_{iq(i)}(T_0)\big)\, ds = \\ = \xi_{iq(i)}(T_0)\left(E^0 - \int_{t_0}^{T_0} B_i^*(T_0, s, v(s))\, ds\right) + \int_{t_0}^{T_0} B_i^*(T_0, s, v(s))M_{iq(i)}^0\, ds. \end{gathered}$$

Из определения $B_i^*(T_0, s, v)$ и леммы 1 следует, что существует номер $l \in I$, для которого $\int_{t_0}^{T_0} B_l^*(T_0, s, v(s))\, ds = E^0$. Значит,

$$\pi_{lq(l)}z_{lq(l)}(T_0) = \int_{t_0}^{T_0} B_l^*(T_0, s, v(s))M_{lq(l)}^0\, ds \subset M_{lq(l)}^0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Скалярные разрешающие функции являются частным случаем матричных разрешающих функций, так как представимы в виде λE^0, где λ — неотрицательное вещественное число.

Пример 1. Пусть в системе (1) $k{=}2$, $n{=}m{=}1$, $t_0{=}0$, $A_{11}(t){=}0$ для всех t, $V{=}\{0\}$, $z_{11}^0{=}(2{,}1)$, $M_{11}^*{=}\{0\}$, $U_1{=}\{(u_1{,}u_2)\colon u_1{=}0,\ u_2{\in}[-1{,}1]\}{\cup}\{(u_1{,}u_2)\colon u_2{=}0,\ u_1{\in}[-1{,}1]\}{\cup}\{(u_1{,}u_2)\colon u_1{=}u_2{\in}[-1{,}1]\}$. Тогда

$$\Psi_{11}(t,t_0)=E^0,\quad \Phi_{11}(t,s)=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\quad W_{11}(t,s,v)=W_{11}(t,s)=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}U_1.$$

Возьмём $\gamma_{11}(t,s)=0$ для всех (t,s), тогда $\xi_{11}(t)=z_{11}^0$,

$$\mathcal{M}_1(t,s,v)=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\ \lambda_2=\frac{\lambda(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\ \lambda\in[0,1]\right\}\cup$$

$$\cup\left\{\begin{pmatrix}\lambda_2/2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \lambda_2=\frac{\lambda(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\ \lambda\in[0,1]\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}\lambda_2/2 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\ \lambda_2=\frac{\lambda(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\ \lambda\in[0,1]\right\},$$

$$\lambda_1^*(t,s,v)=\sup_{\Lambda\in\mathcal{M}_1(t,s,v)}\min_{l\in J_1}\lambda_{1l}(t,s,v)=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{M}_1^*(t,s,v)=\operatorname{diag}\left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)},\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right),\quad \delta(t,s)=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)}.$$

Имеем $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\delta(t,s)\,ds=+\infty$, значит $T_0=(2\Gamma(\alpha+1))^{1/\alpha}$. Пусть $T_1=T_0-(\Gamma(\alpha+1))^{1/\alpha}$. Управление преследователя P_1 имеет вид

$$u_1(t)=\begin{cases}(-1,-1), & t\in[0,T_1),\\ (-1,0), & t\in[T_1,T_0],\end{cases}$$

тогда [14]

$$z_{11}(T_0)=z_{11}^0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{T_0}(T_0-s)^{\alpha-1}u_1(s)\,ds=0.$$

Отметим, что использование скалярных разрешающих функций, т.е. функций вида

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

не позволяет доказать разрешимость задачи преследования, так как в этом случае условие $-\Lambda z_{11}^0\in U_1-v$ выполнено только для нулевой матрицы Λ.

Пример 2. Рассмотрим игру $G(n,1,z^0)$, в которой система (1) имеет вид

$$\begin{cases}\big(D^{(\alpha)}\big)z_{i1}=tz_{i2},\\ \big(D^{(\alpha)}\big)z_{i2}=u_i-v,\end{cases}\qquad z_i(0)=z_i^0. \tag{5}$$

Здесь $z_i=(z_{i1},z_{i2})\in\mathbb{R}^{2k}$, $U_i=V=\{v\in\mathbb{R}^k\colon \|v\|\leqslant1\}$, $M_{i1}^*=\{(z_{i1},z_{i2})\in\mathbb{R}^{2k}\colon z_{i1}=0\}$, поэтому $(i\in I)$

$$M_{i1}^0=\big\{(z_{i1},z_{i2})\in\mathbb{R}^{2k}\colon z_{i1}=z_{i2}=0\big\},\quad M_{i1}=\big\{(z_{i1},z_{i2})\in\mathbb{R}^{2k}\colon z_{i1}=0\big\},$$

$$L_{i1}=\big\{(z_{i1},z_{i2})\in\mathbb{R}^{2k}\colon z_{i2}=0\big\},\quad \pi_{i1}=\begin{pmatrix}E^0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$p(t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\quad q(t,\tau)=\frac{\alpha(t-\tau)^{2\alpha-1}(t+\tau)}{\Gamma(2\alpha+1)},\quad r(t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{\alpha}(t+\alpha\tau)}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Тогда [14]

$$\Psi_i(t,\tau)=\begin{pmatrix}E^0 & r(t,\tau)E^0\\ 0 & E^0\end{pmatrix},\quad \Phi_i(t,\tau)=\begin{pmatrix}p(t,\tau)E^0 & q(t,\tau)E^0\\ 0 & p(t,\tau)E^0\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$W_i(t,\tau,v)=q(t,\tau)(V-v),\ \ W_i(t,\tau)=\{0\},\quad \gamma_i(t,\tau)=0,\ \ \xi_i(t)=\pi_i\Psi_i(t,0)z_i^0=z_{i1}^0+r(t,0)z_{i2}^0,$$

$$\lambda_i(t,\tau,v)=q(t,\tau)\frac{(\xi_i(t),v)+\sqrt{(\xi_i(t),v)^2+\|\xi_i(t)\|^2(1-\|v\|^2)}}{\|\xi_i(t)\|^2}.$$

Утверждение. *Пусть $z_{i2}^0=0$ для всех $i\in I$ и $0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{i1}^0,\ i\in I\}$. Тогда в игре $G(n,1,z^0)$ происходит поимка.*

Доказательство. В данном случае $\xi_{i1}(t)=z_{i1}^0$ для всех $t>0$. Из [16] следует, что

$$\delta(t,\tau)=\min_v\max_i\lambda_i(t,\tau,v)\geqslant q(t,\tau)\delta_0$$

для всех t, τ при некотором $\delta_0>0$. Поэтому выполнены все условия теоремы 2 и, значит, в игре $G(n,1,z^0)$ происходит поимка. Утверждение доказано.

Отметим, что в работе [14] в пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривалась задача преследования одним преследователем одного убегающего, описываемая системой (5), в которой преследователь имеет преимущество над убегающим.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОИМКИ В ЛИНЕЙНОМ СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ С ПРОСТЫМИ МАТРИЦАМИ

Теорема 3. *Пусть в системе (1) для всех i, j $A_{ij}(t)=a_{ij}E^0$ при любом t, $M_{ij}^*=\{0\}$, $t_0=0$, $U_i=V=\{v\colon \|v\|\leqslant 1\}$, существует отображение $q\colon I\to J$ такое, что $a_{iq(i)}<0$ для всех $i\in I$ и*

$$0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{iq(i)}^0, i\in I\}.\tag{6}$$

Тогда в игре $G(n,m,z^0)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Доказательство. В данном случае

$$\Psi_{iq(i)}(t,t_0)=E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}t^{\alpha},1),\quad \Phi_{iq(i)}(t,\tau)=(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(t-\tau)^{\alpha},\alpha),$$

где $E_\rho(z,\mu)=\sum_{l=0}^{\infty}z^l/\Gamma(l\rho^{-1}+\mu)$ — функция Миттаг-Леффлера. Предположение 1 выполнено.

Возьмём в качестве селекторов $\gamma_{iq(i)}(t,\tau)=0$ для всех $i\in I$, $t\geqslant 0$, $\tau\in[0,t]$. Тогда $\xi_{iq(i)}(t)=\pi_{iq(i)}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}t^{\alpha},1)z_{iq(i)}^0$. Пусть

$$\lambda(z,v)=\sup\{\lambda\geqslant 0\colon -\lambda z\in V-v\},\quad \delta=\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(z_{iq(i)}^0,v),\quad a=\min_{i\in I}a_{iq(i)}.$$

Из условия (6) и из [16] следует, что $\delta>0$. Покажем, что существует $T>0$ такое, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдётся $l\in I$, для которого

$$E_{1/\alpha}(a_{lq(l)}T^{\alpha},1)-\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{lq(l)}(T-s)^{\alpha},\alpha)\lambda(z_{lq(l)}^0,v(s))\,ds\leqslant 0.\tag{7}$$

Рассмотрим функции

$$h_i(t,v(\cdot))=E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}t^\alpha,1)-\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(t-s)^\alpha,\alpha)\lambda(z^0_{iq(i)},v(s))\,ds.$$

Из [17] следует, что для всех $t\geqslant 0$, $\tau\in[0,t]$, $i\in I$ имеют место неравенства

$$E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(t-\tau)^\alpha,\alpha)\geqslant E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha).$$

Из теоремы 4.1.1 работы [18] вытекает, что для всех $t\geqslant 0$, $\tau\in[0,t]$ справедливо неравенство $E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)\geqslant 0$. Из последних двух неравенств получаем

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(t-s)^\alpha,\alpha)\lambda(z_{iq(i)},v(s))\,ds\geqslant\\ \geqslant\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\max_{i\in I}\lambda(z_{iq(i)},v(s))\,ds\geqslant\\ \geqslant\delta\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\,ds=\delta t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1),\end{gathered}$$

значит

$$F(t)=\sum_{i=1}^n h_i(t,v(\cdot))\leqslant\sum_{i=1}^n E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}t^\alpha,1)-\delta t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1).$$

Так как $a_{iq(i)}<0$ для всех $i\in I$, то из [18] следует, что при $t\to+\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}t^\alpha,1)=-\frac{1}{a_{iq(i)}t^\alpha\Gamma(\alpha+1)}+O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right),\quad E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1)=-\frac{1}{at^\alpha}+O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right),$$

$$F(t)=-\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_{iq(i)}t^\alpha\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{a}+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),$$

поэтому $\lim_{t\to+\infty}F(t)<0$. Значит $\lim_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^n h_i(t,v(\cdot))<0$. Так как $\sum_{i=1}^n h_i(0,v(\cdot))>0$, то существует $T>0$, для которого при любой допустимой функции $v(\cdot)$ справедливо неравенство $\sum_{i=1}^n h_i(T,v(\cdot))<0$. Тем самым неравенство (7) доказано.

Пусть

$$T_0=\min\left\{t:\ \inf_{v(\cdot)}\min_{i\in I}\left(E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}t^\alpha,1)-\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(t-s)^\alpha,\alpha)\lambda(z^0_{iq(i)},v(s))\,ds\right)\leqslant 0\right\}.$$

Из неравенства (7) следует, что $T_0<+\infty$. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающих. Рассмотрим множества

$$T_i(v(\cdot))=\left\{t\geqslant 0:\ E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}T_0^\alpha,1)-\int\limits_0^t(T_0-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(T_0-s)^\alpha,\alpha)\lambda(z^0_{iq(i)},v(s))\,ds\leqslant 0\right\}.$$

Пусть далее

$$t_i(v(\cdot))=\begin{cases}\inf\{t\colon t\in T_i(v(\cdot))\}, & \text{если } T_i(v(\cdot))\neq\varnothing,\\ +\infty, & \text{если } T_i(v(\cdot))=\varnothing,\end{cases}$$

$$\beta_i(t,v(\cdot))=\begin{cases}\lambda(z_{iq(i)},v(t)), & t\in[0,t_i(v(\cdot))),\\ 0, & t\in[t_i(v(\cdot)),T_0].\end{cases}$$

Зададим управления преследователей $P_i,\ i\in I$, полагая

$$u_i(t)=v(t)-\beta_i(t,v(\cdot))z^0_{iq(i)}.$$

Решение задачи Коши системы (1) представимо в виде [19]

$$z_{iq(i)}(T_0)=E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}T_0^\alpha,1)z^0_{iq(i)}+\int\limits_0^{T_0}(T_0-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(T_0-s)^\alpha,\alpha)(u_i(s)-v(s))\,ds=$$

$$=\left(E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}T_0^\alpha,1)-\int\limits_0^{T_0}(T_0-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(T_0-s)^\alpha,\alpha)\beta_i(s,v(s))\,ds\right)z^0_{iq(i)}=$$

$$=\left(E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}T_0^\alpha,1)-\int\limits_0^{t_i(v(\cdot))}(T_0-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a_{iq(i)}(T_0-s)^\alpha,\alpha)\beta_i(s,v(s))\,ds\right)z^0_{iq(i)}.$$

Из ранее доказанного следует, что существует номер $l\in I$, для которого $z_{lq(l)}(T_0)=0$. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть $k=2,\ I=\{1,2,3,4\},\ J=\{1,2\},\ A_{ij}(t)=a_{ij}E^0,\ a_{ij}<0,\ U_i=V=\{v\colon \|v\|\leqslant 1\}$, $z^0_{11}=(1,3),\ z^0_{21}=(-1,3),\ z^0_{31}=(-1,1),\ z^0_{41}=(1,1),\ z^0_{12}=(0,-1),\ z^0_{22}=(-2,-1),\ z^0_{32}=(-2,-3)$, $z^0_{42}=(0,-3)$. Зададим отображение $q\colon I\to J$ следующим образом: $q(1)=2,\ q(2)=q(3)=q(4)=1$. Условия теоремы 3 выполнены, и поэтому в игре $G(4,2,z^0)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего. Отметим, что $0\notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z^0_{i1},i\in I\}$ и $0\notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z^0_{i2},i\in I\}$.

Покажем, что если $a_{iq(i)}>0$, то условие (6) в теореме 3 не гарантирует поимку.

Пример 4. Пусть $k=2,\ n=3,\ m=1,\ I=\{1,2,3\},\ M^*_{i1}=\{0\},\ t_0=0,\ z^0_{11}=(0,1),\ z^0_{21}=$ $=(1/2,-\sqrt{3}/2),\ z^0_{31}=(-1/2,-\sqrt{3}/2),\ U_i=V=\{v\colon \|v\|\leqslant 1\}$. Система (1) имеет вид

$$\bigl(D^{(1/2)}\bigr)z_{i1}=z_{i1}+u_i-v.$$

Возьмём $v(t)=0$ для всех $t\geqslant 0$. Тогда будем иметь

$$z_{i1}(t)=E_2(\sqrt{t},1)z^0_{i1}+\int\limits_0^t(t-s)^{-1/2}E_2\bigl((t-s)^{1/2},1/2\bigr)u_i(s)\,ds.$$

Предположим, что существуют $T>0$, функция $u_l(\cdot),\ l\in\{1,2,3\}$, для которых $z_{l1}(T)=0$. Тогда [20, с. 120, формула (1.15)]

$$E_2(\sqrt{T},1)=\|E_2(\sqrt{T},1)z^0_{l1}\|=\left\|\int\limits_0^T(T-s)^{-1/2}E_2\bigl((T-s)^{1/2},1/2\bigr)u_l(s)\,ds\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T(T-s)^{-1/2}E_2\bigl((T-s)^{1/2},1/2\bigr)\,ds=\sqrt{T}E_2(\sqrt{T},3/2).$$

В силу [20, с. 118, формула (1.4)]

$$E_2(\sqrt{T}, 3/2) = \frac{1}{\sqrt{T}}(E_2(\sqrt{T}, 1) - 1).$$

Из (7) вытекает неравенство

$$E_2(\sqrt{T}, 1) \leqslant E_2(\sqrt{T}, 1) - 1,$$

которое невозможно. Следовательно, в данной игре $G(3, 1, z^0)$ поимка не происходит.

4. ПОИМКА ВСЕХ УБЕГАЮЩИХ

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(1, m, z^0)$ с участием $1 + m$ лиц: одного преследователя P_1 и m убегающих E_1, ..., E_m. Закон движения преследователя P_1 имеет вид

$$\big(D^{(\alpha)}\big)x_1 = ax_1 + u, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad u \in V;$$

закон движения каждого из убегающих E_j — вид

$$\big(D^{(\alpha)}\big)y_j = ay_j + v_j, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v_j \in V.$$

Здесь $V = \{v\colon \|v\| \leqslant 1\}$, $\alpha \in (0, 1)$, $a \in \mathbb{R}^1$, $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто функции f порядка α, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$. Считаем, что $x_1^0 \neq y_j^0$ для всех $j \in J$.

Обозначим

$$f(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1), \quad F(t) = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1), \quad z_j^0 = y_j^0 - x_1^0.$$

Лемма 2. *Пусть* $a < 0$, $T_2 > T_1 \geqslant 0$,

$$h(t) = \int\limits_{T_1}^{T_2} (t - s)^{\alpha - 1} E_{1/\alpha}(a(t - s)^\alpha, \alpha)\, ds.$$

Тогда $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha h(t) = 0$.

Доказательство. Сделав замену $t - s = \tau$, получим

$$h(t) = \int\limits_{t-T_2}^{t-T_1} \tau^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a\tau^\alpha, \alpha)\, d\tau.$$

В силу формулы (2.32) из [20, с. 136] для всех $t > T_2$ справедливо неравенство

$$|E_{1/\alpha}(a\tau^\alpha, \alpha)| \leqslant \frac{M}{\tau^\alpha}, \quad M > 0,$$

поэтому

$$|h(t)| = \left|\int\limits_{t-T_2}^{t-T_1} \tau^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a\tau^\alpha, \alpha)\, d\tau\right| \leqslant \int\limits_{t-T_2}^{t-T_1} \frac{M\tau^{\alpha-1}}{\tau^\alpha}\, d\tau = M(\ln(t - T_1) - \ln(t - T_2)).$$

Тогда

$$|t^\alpha h(t)| \leqslant Mt^\alpha(\ln(t - T_1) - \ln(t - T_2)) = Mt^\alpha \ln\left(1 + \frac{T_2 - T_1}{t - T_2}\right) \leqslant \frac{Mt^\alpha(T_2 - T_1)}{t - T_2}.$$

Так как $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha/(t - T_2) = 0$, то $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha h(t) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $a<0$, $M_{1j}^*=\{0\}$ *для всех* $j\in J$, *существует* $v_0\in V$, $\|v_0\|=1$, *такой, что* $(y_j^0-x_1^0,v_0)<0$ *для всех* $j\in J$. *Все убегающие используют постоянное управление* v_0, *преследователь* P_1 *знает* v_0. *Тогда в игре* $G(1,m,z^0)$ *происходит поимка всех убегающих.*

Доказательство. 1. Покажем, что существуют момент T_m и вектор u_m, $\|u_m\|=1$, для которых будет выполнено равенство $x_1(T_m)=y_m(T_m)$, где $x_1(t)$ — траектория преследователя P_1, использующего постоянное управление u_m.

Пусть преследователь P_1 использует постоянное управление u на отрезке $[0,T_m]$. Тогда, в силу формулы Коши [19] и формулы (1.15) из [20, с. 120], имеем

$$x_1(t)=f(t)x_1^0+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\,ds\cdot u=f(t)x_1^0+F(t)u,$$

$$y_m(t)=f(t)y_m^0+F(t)v_0.$$

Равенство $x_1(t)=y_m(t)$ представимо в виде

$$F(t)u=f(t)z_m^0+F(t)v_0.$$

Потребуем, чтобы $\|u\|=1$. Для этого рассмотрим функцию

$$g_m(t)=\|f(t)z_m^0+F(t)v_0\|^2-F^2(t)=f^2(t)\|z_m^0\|^2+2f(t)F(t)(z_m^0,v_0),$$

где (a,b) — скалярное произведение векторов a и b. Из теоремы 4.1.1 [18] следует, что $f(t)>0$, $F(t)>0$ для всех $t>0$. Поэтому уравнение $g_m(t)=0$ равносильно уравнению

$$\frac{f(t)}{F(t)}=-\frac{2(z_m^0,v_0)}{\|z_m\|^2}. \tag{8}$$

Отметим, что $\lim_{t\to+0}f(t)/F(t)=+\infty$. В силу теоремы 1.2.1 из [18] справедливы асимптотические оценки

$$f(t)=-\frac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)}+O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right),\quad F(t)=-\frac{1}{a}+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \tag{9}$$

поэтому $\lim_{t\to+\infty}f(t)/F(t)=0$. Следовательно, уравнение (8) имеет хотя бы один положительный корень T_m. Полагаем теперь управление преследователя P_1 на отрезке $[0,T_m]$ равным

$$u_m=\frac{f(T_m)}{F(T_m)}z_m^0+v_0.$$

Получим, что в момент T_m преследователь P_1 осуществит поимку убегающего E_m.

2. Построим далее управление преследователя P_1, гарантирующее поимку E_{m-1}. Пусть на $[T_m,T_{m-1}]$ преследователь P_1 использует постоянное управление u (момент T_{m-1} будет определён ниже). Тогда, в силу формулы Коши [19] $(t>T_m)$,

$$x_1(t)=f(t)x_1^0+\int_0^{T_m}(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\,ds\cdot u_m+\int_{T_m}^t(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\,ds\cdot u,$$

$$y_{m-1}(t)=f(t)y_{m-1}^0+F(t)v_0.$$

Обозначим

$$H_m(t)=\int_{T_m}^t(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\,ds,\quad h_m(t)=\int_0^{T_m}(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\,ds.$$

Отметим, что $H_m(t)+h_m(t)=F(t)$. Тогда равенство $x_1(t)=y_{m-1}(t)$ представимо в виде

$$f(t)x_1^0+h_m(t)u_m+H_m(t)u=f(t)y_{m-1}^0+F(t)v_0$$

или

$$H_m(t)u=f(t)z_{m-1}^0+F(t)v_0-h_m(t)u_m.$$

Рассмотрим функцию

$$g_{m-1}(t)=\|f(t)z_{m-1}^0+F(t)v_0-h_m(t)u_m\|^2-H_m^2(t).$$

Тогда

$$g_{m-1}(T_m)=\|f(T_m)z_{m-1}^0+F(T_m)v_0-h_m(T_m)u_m\|^2.$$

Так как $F(T_m)=h_m(T_m)$ и $F(T_m)(v_0-u_m)=-f(T_m)z_m^0$, то

$$g_{m-1}(T_m)=\|f(T_m)z_{m-1}^0-f(T_m)z_m^0\|^2=f^2(T_m)\|z_{m-1}^0-z_m^0\|^2>0.$$

Функцию $t^\alpha g_{m-1}(t)$ можно записать как

$$t^\alpha g_{m-1}(t)=t^\alpha f^2(t)\|z_{m-1}^0\|^2+2t^\alpha f(t)F(t)(z_{m-1}^0,v_0)-$$
$$-2t^\alpha f(t)h_m(t)(z_{m-1}^0,u_m)-2t^\alpha F(t)h_m(t)(v_0,u_m)+2t^\alpha F(t)h_m(t).$$

В силу асимптотических оценок (9) и леммы 2 получаем, что справедливы соотношения

$$\lim_{t\to+\infty}t^\alpha f(t)F(t)=\frac{1}{a^2\Gamma(1-\alpha)},\quad \lim_{t\to+\infty}t^\alpha f^2(t)=0,$$
$$\lim_{t\to+\infty}t^\alpha f(t)h_m(t)=0,\quad \lim_{t\to+\infty}t^\alpha F(t)h_m(t)=0,$$

поэтому из неравенства $(z_{m-1}^0,v_0)<0$ следует, что $\lim_{t\to+\infty}t^\alpha g_{m-1}(t)=-\infty$, а значит, существует момент $T_{m-1}>T_m$, для которого $g_{m-1}(T_{m-1})=0$.

Выбирая теперь на отрезке $[T_m,T_{m-1}]$ управление u_{m-1} вида

$$u_{m-1}=\big(f(T_{m-1})z_{m-1}^0+F(T_{m-1})v_0-h_m(T_{m-1})u_m\big)/H_m(T_{m-1}),$$

преследователь P_1 в момент T_{m-1} осуществит поимку убегающего E_{m-1}.

3. Обозначим

$$h_l(t)=\int\limits_{T_{l+1}}^{T_l}(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\,ds,\quad H_{k+1}(t)=\int\limits_{T_{k+1}}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\,ds,$$
$$s_l(t)=h_m(t)u_m+\ldots+h_l(t)u_l,\quad \hat{s}_l(t)=h_m(t)+\ldots+h_l(t),\quad l=m-1,\ldots,k+1.$$

Предположим, что определены векторы $u_m,\ \ldots,\ u_{k+1}$ и моменты времени $T_m<T_{m-1}<\ldots$ $\ldots<T_{k+1}$, гарантирующие преследователю P_1 поимку убегающих $E_m,\ \ldots,\ E_{k+1}$, причём на отрезке $[T_{k+2},T_{k+1}]$ вектор u_{k+1} равен

$$u_{k+1}=\big(f(T_{k+1})z_{k+1}^0+F(T_{k+1})v_0-s_{k+2}(T_{k+1})\big)/H_{k+2}(T_{k+1}).\tag{10}$$

Построим далее управление преследователя P_1, гарантирующее ему поимку убегающего E_k. Пусть на $[T_{k+1}, T_k]$ преследователь P_1 использует постоянное управление u (момент T_k будет определён ниже). Тогда для $t > T_{k+1}$, в силу формулы Коши [19], имеем

$$x_1(t) = f(t)x_1^0 + \int\limits_0^{T_m} (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha, \alpha)\, ds \cdot u_m + \int\limits_{T_m}^{T_{m-1}} (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha, \alpha)\, ds \cdot u_{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + \int\limits_{T_{k+2}}^{T_{k+1}} (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha, \alpha)\, ds \cdot u_{k+1} + \int\limits_{T_{k+1}}^{t} (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha, \alpha)\, ds \cdot u,$$
$$y_k(t) = f(t)y_k^0 + F(t)v_0.$$

Равенство $x_1(t) = y_k(t)$ представимо в виде

$$f(t)x_1^0 + s_{k+1}(t) + H_{k+1}(t)u = f(t)y_k^0 + F(t)v_0 \quad \text{или} \quad H_{k+1}(t)u = f(t)z_k^0 - s_{k+1}(t) + F(t)v_0.$$

Рассмотрим функцию

$$g_k(t) = \|f(t)z_k^0 - s_{k+1}(t) + F(t)v_0\|^2 - H_{k+1}^2(t),$$

тогда

$$g_k(T_{k+1}) = \|f(T_{k+1})z_k^0 - s_{k+1}(T_{k+1}) + F(T_{k+1})v_0\|^2.$$

Из определения функций $H_{k+2}(\cdot)$ и $h_{k+2}(\cdot)$ следует, что $H_{k+2}(T_{k+1}) = h_{k+1}(T_{k+1})$. Так как $s_{k+1}(T_{k+1}) = s_{k+2}(T_{k+1}) + h_{k+1}(T_{k+1})u_{k+1}$, то

$$s_{k+1}(T_{k+1}) = s_{k+2}(T_{k+1}) + H_{k+2}(T_{k+1})u_{k+1}. \tag{11}$$

Используя формулу (10), запишем равенство (11) как

$$s_{k+1}(T_{k+1}) = f(T_{k+1})z_{k+1}^0 + F(T_{k+1})v_0.$$

Тогда
$$g_k(T_{k+1}) = \|f(T_{k+1})z_k^0 - f(T_{k+1})z_{k+1}^0\|^2 = f^2(T_{k+1})\|z_k^0 - z_{k+1}^0\|^2 > 0.$$
Так как $H_{k+1}(t) = F(t) - \hat{s}_{k+1}(t)$, то функция $t^\alpha g_k(t)$ представима в виде

$$t^\alpha g_k(t) = t^\alpha f^2(t)\|z_k^0\|^2 + 2t^\alpha f(t)F(t)(z_k^0, v_0) + t^\alpha\|s_{k+1}(t)\|^2 -$$
$$-2t^\alpha F(t)(s_{k+1}(t), v_0) - 2t^\alpha f(t)(s_{k+1}(t), z_k^0) + 2t^\alpha F(t)\hat{s}_{k+1}(t) - t^\alpha \hat{s}_{k+1}^2(t).$$

Из леммы 2 следует, что для любых l и p

$$\lim_{t\to+\infty} t^\alpha h_l(t)h_p(t) = 0,$$

поэтому

$$\lim_{t\to+\infty} t^\alpha\|s_{k+1}(t)\|^2 = \lim_{t\to+\infty} t^\alpha \hat{s}_{k+1}^2(t) = \lim_{t\to+\infty} t^\alpha f^2(t) = 0,$$

а значит, $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha g_k(t) = -\infty$. Поэтому существует момент $T_k > T_{k+1}$, для которого $g_k(T_k) = 0$. Выбирая своё управление u_k на отрезке $[T_{k+1}, T_k]$ в виде

$$u_k = \big(f(T_k)z_k^0 + F(T_k)v_0 - s_{k+1}(T_k)\big)/H_{k+1}(T_k),$$

преследователь P_1 в момент T_k осуществит поимку убегающего E_k. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $a<0$, *существует гиперплоскость* H *такая, что* $y_j^0 \in H$ *для всех* $j \in J$, $x_1^0 \notin H$, v_0 — *единичный вектор нормали гиперплоскости* H, *направленный в полупространство, содержащее* x_1^0. *Убегающие используют постоянное управление* v_0. *Тогда в игре* $G(1,m,z^0)$ *происходит поимка всех убегающих.*

Справедливость данного утверждения непосредственно следует из теоремы 4, так как $(y_j^0 - x_1^0, v_0) < 0$ для всех $j \in J$.

Замечание 3. Пусть выполнены условия следствия и законы движения каждого участника имеют вид

$$\dot{x}_1 = ax_1 + u, \quad \dot{y}_j = ay_j + v_j, \quad u, v_j \in V, \quad j \in J. \tag{12}$$

В работе [2] рассматривалась задача уклонения группы убегающих от группы преследователей, описываемая системой (12), где было показано, что в игре $G(1,m,z^0)$ преследователь P_1 осуществит поимку не более одного убегающего [2, следствие 6.3.3, с. 333].

Тем самым приведённая теорема 4 показывает, что дифференциальные игры, описываемые уравнениями с дробными производными, обладают свойствами, которыми не обладают дифференциальные игры, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FEWS-2024-0009).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М. : Наука, 1974. — 456 с.
2. Чикрий, А.А. Конфликтно управляемые процессы / А.А. Чикрий. — Киев : Наукова думка, 1992. — 383 с.
3. Григоренко, Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами / Н.Л. Григоренко. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 197 с.
4. Благодатских, А.И. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов / А.И. Благодатских, Н.Н. Петров. — Ижевск : Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. — 266 с.
5. Чикрий, А.А. Обобщённые матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка / А.А. Чикрий, С.Д. Эйдельман // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
6. Gomoyunov, M.I. Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems / M.I. Gomoyunov // SIAM J. Control Optim. — 2020. — V. 58, № 6. — P. 3185–3211.
7. Петров, Н.Н. Линейная задача группового преследования с дробными производными, простыми матрицами и разными возможностями игроков / Н.Н. Петров, А.И. Мачтакова // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 933–943.
8. Мачтакова, А.И. О двух задачах преследования группы убегающих в дифференциальных играх с дробными производными / А.И. Мачтакова, Н.Н. Петров // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2024. — Т. 34, № 1. — С. 65–79.
9. Чикрий, А.А. Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики / А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 324–333.
10. Machtakova, A.I. Matrix resolving functions in the linear group pursuit problem with fractional derivatives / A.I. Machtakova, N.N. Petrov // Ural Math. J. — 2022. — V. 8, № 1. — P. 76–89.

11. Сатимов, Н. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих / Н. Сатимов, М.Ш. Маматов // Докл. АН УзССР. — 1983. — № 4. — С. 3–6.
12. Caputo, M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II / M. Caputo // Geophys. R. Astr. Soc. — 1967. — № 13. — P. 529–539.
13. Aubin, J.P. Set-Valued Analysis / J.P. Aubin, H. Frankowska. — Boston : Birkhäuser, 1990. — 461 p.
14. Matychyn, I. Game-theoretical problems for fractional-order nonstationary systems / I. Matychyn, V. Onyshchenko // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2023. — V. 26. — P. 1031–1051.
15. Чикрий, А.А. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов / А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 4. — С. 40–64.
16. Петров, Н.Н. Об управляемости автономных систем / Н.Н. Петров // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 4. — С. 606–617.
17. Pollard, H. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_a(-x)$ / H. Pollard // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — V. 54, № 12. — P. 1115–1116.
18. Попов, А.Ю. Распределение корней функции Миттаг-Леффлера / А.Ю. Попов, А.М. Седлецкий // Совр. математика. Фунд. направления. — 2011. — Т. 40. — С. 3–171.
19. Чикрий, А.А. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка / А.А. Чикрий, И.И. Матичин // Доповiдi Нацiональноi академii наук Украiни. — 2007. — № 1. — С. 50–55.
20. Джарбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джарбашян. — М. : Наука, 1966. — 671 с.

ON THE PROBLEM OF PURSUING A GROUP OF COORDINATED EVADERS IN A GAME WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

 N. N. Petrov[1], A. I. Machtakova[2]

Udmurt State University, Izhevsk, Russia
e-mail: [1]kma3@list.ru, [2]bichurina.alyona@yandex.ru

In a finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuing of a group of evaders by a group of pursuers is considered, described by a linear non-stationary system of differential equations with fractional Caputo derivatives. Sets of admissible players' controls — compacts, terminal sets — origin of coordinates. Sufficient conditions have been obtained for the capture of at least one evader and all evaders under the condition that the evaders use the same control. In the study, the method of matrix and scalar resolving functions is used as a basic one. It is shown that differential games described by equations with fractional derivatives have properties that are different from those of differential games described by ordinary differential equations.

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader, fractional derivative

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FEWS-2024-0009).

REFERENCES

1. Krasovskii, N.N. and Subbotin, A.I., *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional Differential Games), Moscow: Nauka, 1974.
2. Chikrii, A.A., *Conflict-Controlled Processes*, Dordrecht: Springer, 1997.
3. Grigorenko, N.L., *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical Methods for Control of Several Dynamic Processes), Moscow: MSU Press, 1990.

4. Blagodatskikh, A.I. and Petrov, N.N., *Konfliktnoye vzaimodeystviye grupp upravlyayemykh ob'yektov* (Conflicting Interaction of Groups of Controlled Objects), Izhevsk: Izd-vo Udmurt. univ., 2009.
5. Chikrii, A. and Eidelman, S., Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2000, vol. 36, no. 3, pp. 315–338.
6. Gomoyunov, M.I., Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems, *SIAM J. Control Optim.*, 2020, vol. 58, no. 6, pp. 3185–3211.
7. Petrov, N.N., A linear group pursuit problem with fractional derivatives, simple matrices and different player capabilities, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 933–943.
8. Machtakova, A.I. and Petrov, N.N., On two problems of pursuit of a group of evaders in differential games with fractional derivatives, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, no. 1, pp. 65–79.
9. Chikrii, A.A. and Chikrii, G.Ts., Matrix resolving functions in game problems of dynamics, *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2014, vol. 291, suppl. 1, pp. 56–65.
10. Machtakova, A.I. and Petrov, N.N., Matrix resolving functions in the linear group pursuit problem with fractional derivatives, *Ural Math. J.*, 2022, vol. 8, no. 1, pp. 76–89.
11. Satimov, N. and Mamatov, M.Sh., On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between groups of pursuers and evaders, *Doklady Akademii Nauk UzSSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6.
12. Caputo, M., Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II, *Geophys. R. Astr. Soc.*, 1967, no. 13, pp. 529–539.
13. Aubin, J.P. and Frankowska, H., *Set-Valued Analysis*, Boston: Birkhäuser, 1990.
14. Matychyn, I. and Onyshchenko, V., Game-theoretical problems for fractional-order nonstationary systems, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2023, vol. 26, pp. 1031–1051.
15. Chikrii, A.A. and Rappoport, I.S., Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 512–531.
16. Petrov, N.N., Controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617.
17. Pollard, H., The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_a(-x)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 54, no. 12, pp. 1115–1116.
18. Popov, A.Yu. and Sedletskii, A.M., Distribution of roots of Mittag-Leffler functions, *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 190, no. 2, pp. 209–409.
19. Chikrii, A.A. and Matichin, I.I., On the analogue of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order, *Reports of the National Academy of Science of Ukrain*, 2007, no. 1, pp. 50–55.
20. Dzhrbashyan, M.M., *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* (Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain), Moscow: Nauka, 1966.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 133–138

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.935

ФОРМУЛА БАССА–ГУРА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ

 Е. А. Перепелкин

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
e-mail: eap@list.ru

Поступила в редакцию 01.02.2024 г., после доработки 08.11.2024 г.; принята к публикации 03.12.2024 г.

Исследована задача о назначении желаемого характеристического полинома линейной стационарной динамической системы с одним входом и динамической обратной связью по выходу в виде динамического компенсатора первого порядка. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи и явная формула для параметров компенсатора, аналогичная формуле Басса–Гура для системы с обратной связью по состоянию.

Ключевые слова: линейная система, обратная связь по выходу, формула Басса–Гура

DOI: 10.31857/S0374064125010104, EDN: HZNGAL

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Из математической теории управления известны формулы Аккермана и Басса–Гура [1, с. 360], применяемые для решения задачи о назначении желаемого характеристического полинома линейной стационарной системы с одним входом и обратной связью по состоянию, поведение которой описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad u = -f^{\mathrm{T}}x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ — скалярное управление, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$.

Характеристический полином системы (1) есть характеристический полином матрицы замкнутой системы $A - bf^{\mathrm{T}}$. Обозначим через

$$a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \quad d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_n$$

характеристический полином матрицы A и желаемый характеристический полином матрицы $A - bf^{\mathrm{T}}$. Предположим, что матрица

$$X(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \ldots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

невырождена, что соответствует условию управляемости системы (1).

Согласно формуле Аккермана искомый вектор f равен

$$f^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} X(A,b)^{-1} d(A).$$

По формуле Басса–Гура

$$f^{\mathrm{T}} = (\bar{d} - \bar{a})^{\mathrm{T}} H^{-1} X(A,b)^{-1},$$

где

$$H=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar a=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \bar d=\begin{bmatrix} d_n \\ d_{n-1} \\ \vdots \\ d_1 \end{bmatrix}.$$

В статьях [2, 3] формула Аккермана и формула Басса–Гура были обобщены для систем с несколькими входами и обратной связью по состоянию. Цель настоящей работы — получить обобщение формулы Басса–Гура для системы с динамической обратной связью по выходу в виде динамического компенсатора первого порядка.

Известно [4], что динамическая обратная связь существенно расширяет возможности обратной связи по выходу по сравнению со статической обратной связью. К динамической обратной связи по выходу можно отнести наблюдатели состояния, а также динамические компенсаторы общего вида. Согласно основополагающей работе [5] для полностью управляемой и полностью наблюдаемой системы можно построить динамический компенсатор порядка $\min\{p_{\mathrm{c}}, p_{\mathrm{o}}\}$, где p_{c} и p_{o} — соответственно индексы управляемости и наблюдаемости системы. В случае системы с одним входом минимальный порядок компенсатора равен индексу наблюдаемости p_{o}.

Будем рассматривать линейную стационарную систему с одним входом

$$\dot x = Ax + bu, \quad y = Cx,$$

где $x\in\mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y\in\mathbb{R}^l$ — вектор измерений, $u\in\mathbb{R}$ — скалярное управление, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$, $C\in\mathbb{R}^{l\times n}$, $l<n$.

Управление будем искать в виде динамического компенсатора первого порядка

$$u=-f^{\mathrm{T}}y-z, \quad \dot z+pz=q^{\mathrm{T}}y,$$

где $f\in\mathbb{R}^l$, $p\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^l$ — параметры компенсатора. Система с компенсатором описывается уравнениями

$$\dot x=(A-bf^{\mathrm{T}}C)x-bz, \quad \dot z=q^{\mathrm{T}}Cx-pz. \tag{2}$$

Характеристический полином системы (2) есть характеристический полином матрицы замкнутой системы

$$D=\begin{bmatrix} A-bf^{\mathrm{T}}C & -b \\ q^{\mathrm{T}}C & -p \end{bmatrix}.$$

Параметры компенсатора будем искать с учётом свойств заданного характеристического полинома матрицы D. Для этого необходимо получить явную формулу для параметров обратной связи, аналогичную формуле Басса–Гура.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через

$$a(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$$

характеристический полином матрицы A. Введём вектор-столбец $g(\lambda)=C(\lambda E-A)^*b$, где $(\lambda E-A)^*$ — присоединённая к $\lambda E-A$ матрица.

Лемма. *Характеристический полином матрицы D равен*

$$\det(\lambda E-D)=(\lambda+p)a(\lambda)+\big(f^{\mathrm{T}}(\lambda+p)+q^{\mathrm{T}}\big)g(\lambda). \tag{3}$$

Доказательство. Выполнив несложные преобразования в определителе матрицы $\lambda E-D$, получим

$$\det(\lambda E-D)=\det\begin{bmatrix}\lambda E-A+bf^{\mathrm{т}}C & b\\ -q^{\mathrm{т}}C & \lambda+p\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\lambda E-A+b\bigl(f^{\mathrm{т}}+(\lambda+p)^{-1}q^{\mathrm{т}}\bigr)C & b\\ 0 & \lambda+p\end{bmatrix}=$$
$$=(\lambda+p)a(\lambda)+\bigl(f^{\mathrm{т}}(\lambda+p)+q^{\mathrm{т}}\bigr)C(\lambda E-A)^{*}b=(\lambda+p)a(\lambda)+\bigl(f^{\mathrm{т}}(\lambda+p)+q^{\mathrm{т}}\bigr)g(\lambda).$$

Здесь применено равенство $\det(A+bc^{\mathrm{т}})=\det A+c^{\mathrm{т}}A^{*}b$, где A — квадратная матрица, A^{*} — присоединённая к A матрица, b — вектор-столбец, $c^{\mathrm{т}}$ — вектор-строка [6, с. 133]. Лемма доказана.

В следующей теореме формулируются необходимые и достаточные условия существования решения задачи и одновременно описывается алгоритм расчёта параметров компенсатора.

Теорема. *Характеристический полином матрицы D можно произвольно задать, выбирая параметры компенсатора f, p, q, тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{rank}X(A,b)=n,\quad \mathrm{rank}Y(A,C)=n,$$

где

$$X(A,b)=\begin{bmatrix}b & Ab & \ldots & A^{n-1}b\end{bmatrix},\quad Y(A,C)=\begin{bmatrix}C & CA\end{bmatrix}^{\mathrm{т}}.$$

Доказательство. Обозначим через

$$d(\lambda)=\lambda^{n+1}+d_1\lambda^{n}+\ldots+d_{n+1} \tag{4}$$

желаемый характеристический полином матрицы D. Параметры компенсатора будем искать из условия совпадения полиномов (3) и (4).

Обозначим

$$\pi_k(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^{k} & \lambda^{k-1} & \ldots & \lambda & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{т}},\quad \bar a=\begin{bmatrix}a_2 & a_3 & \ldots & a_n\end{bmatrix},\quad \bar d=\begin{bmatrix}d_2 & d_3 & \ldots & d_{n+1}\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$a(\lambda)=\lambda^{n}+\begin{bmatrix}a_1 & \bar a\end{bmatrix}\pi_{n-1}(\lambda),\quad \lambda a(\lambda)=\lambda^{n+1}+a_1\lambda^{n}+\begin{bmatrix}\bar a & 0\end{bmatrix}\pi_{n-1}(\lambda),$$
$$d(\lambda)=\lambda^{n+1}+d_1\lambda^{n}+\bar d\pi_{n-1}(\lambda).$$

Матрицу $(\lambda E-A)^{*}$ запишем в виде матричного полинома [7, с. 91]

$$(\lambda E-A)^{*}=E\lambda^{n-1}+A_1\lambda^{n-2}+\ldots+A_{n-1},$$

где

$$A_1=A+a_1E,\quad A_2=A^2+a_1A+a_2E=AA_1+a_2E,\quad \ldots$$
$$\ldots,\quad A_{n-1}=A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\ldots+a_{n-1}E=AA_{n-2}+a_{n-1}E.$$

Заметим, что по теореме Кэли–Гамильтона

$$A_n=A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_nE=AA_{n-1}+a_nE=0.$$

Введём матрицу

$$G=\begin{bmatrix}1 & a_1 & \ldots & a_{n-1}\\ 0 & 1 & \ldots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}.$$

Векторы $g(\lambda)$ и $\lambda g(\lambda)$ можно записать в виде

$$g(\lambda) = C(\lambda E - A)^* b = C \begin{bmatrix} b & A_1 b & \ldots & A_{n-1} b \end{bmatrix} \pi_{n-1}(\lambda) = CX(A,b)G\pi_{n-1}(\lambda),$$
$$\lambda g(\lambda) = Cb\lambda^n + C \begin{bmatrix} A_1 b & A_2 b & \ldots & A_n b \end{bmatrix} \pi_{n-1}(\lambda) =$$
$$= Cb\lambda^n + CAX(a,b)G\pi_{n-1}(\lambda) + Cb \begin{bmatrix} a_1 & \bar{a} \end{bmatrix} \pi_{n-1}(\lambda).$$

Характеристический полином (3) матрицы D равен

$$\det(\lambda E - D) = \lambda^{n+1} + a_1\lambda^n + \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix} \pi_{n-1}(\lambda) + p\lambda^n + p \begin{bmatrix} a_1 & \bar{a} \end{bmatrix} \pi_{n-1}(\lambda) +$$
$$+ f^{\mathrm{т}} Cb\lambda^n + f^{\mathrm{т}} CAX(A,b)G\pi_{n-1}(\lambda) + f^{\mathrm{т}} Cb \begin{bmatrix} a_1 & \bar{a} \end{bmatrix} \pi_{n-1} + (fp+q)^{\mathrm{т}} CX(A,b)G\pi_{n-1}(\lambda). \quad (5)$$

Заданный полином (4) и полином (5) совпадают тогда и только тогда, когда

$$a_1 + p + f^{\mathrm{т}} Cb = d_1, \quad (6)$$
$$\begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} a_1 & \bar{a} \end{bmatrix} + f^{\mathrm{т}} CAX(A,b)G + f^{\mathrm{т}} Cb \begin{bmatrix} a_1 & \bar{a} \end{bmatrix} + (fp+q)^{\mathrm{т}} CX(A,b)G = \bar{d}. \quad (7)$$

Обозначим $r = fp + q$. Из уравнения (6) выразим p и подставим в (7). Тогда (7) примет вид

$$\begin{bmatrix} r^{\mathrm{т}} & f^{\mathrm{т}} \end{bmatrix} Y(A,C)X(A,b)G = \bar{d} - \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix} - (d_1 - a_1) \begin{bmatrix} a_1 & \bar{a} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Пусть f и r — решение уравнения (8). Тогда из соотношения (6) получим $p = d_1 - a_1 - fCb$, при этом $q = r - fp$.

Уравнение (8) имеет решение относительно неизвестных f и r при любом векторе $\bar{d}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank} Y(A,C)X(A,b)G = n$. Матрица G невырожденная. Матрицы $X(A,b)$ и $Y(A,C)$ имеют соответственно размерности $n \times n$ и $2l \times n$. Следовательно, $\mathrm{rank} Y(A,C)X(A,b)G = n$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank} X(A,b) = n$ и $\mathrm{rank} Y(A,C) = n$. Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы вытекает, что необходимым условием существования решения задачи является условие $2l \geqslant n$. Следовательно, задача имеет решение при достаточно большом числе переменных выхода. Например, при $n = 5$ число переменных выхода должно быть не меньше 3. Это существенное ограничение рассматриваемой обратной связи по выходу.

Если условия теоремы выполняются и $2l = n$, то решение уравнения (8) является единственным. Если $2l > n$, то уравнение (8) имеет бесконечно много решений.

В случае единственного решения

$$\begin{bmatrix} r^{\mathrm{т}} & f^{\mathrm{т}} \end{bmatrix} = \left(\bar{d} - \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix} - (d_1 - a_1) \begin{bmatrix} a_1 & \bar{a} \end{bmatrix} \right) G^{-1} X(A,b)^{-1} Y(A,C)^{-1}. \quad (9)$$

Формулу (9) можно рассматривать как аналог формулы Басса–Гура для системы с обратной связью по состоянию.

Пусть условия теоремы выполняются и $2l > n$. Тогда можно найти частное решение уравнения (8):

$$\begin{bmatrix} r^{\mathrm{т}} & f^{\mathrm{т}} \end{bmatrix} = \left(\bar{d} - \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix} - (d_1 - a_1) \begin{bmatrix} a_1 & \bar{a} \end{bmatrix} \right) G^{-1} X(A,b)^{-1} \left(Y(A,C)^{\mathrm{т}} Y(A,C) \right)^{-1} Y(A,C)^{\mathrm{т}}.$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Пусть $n=6$, $l=3$,

$$A=\begin{bmatrix}-1{,}68 & 0{,}64 & 1{,}53 & -1{,}5 & -1{,}45 & -0{,}22\\ 0{,}89 & 1{,}48 & 2{,}35 & 0{,}78 & -2{,}21 & -0{,}08\\ -0{,}74 & 0{,}96 & 1{,}28 & -2{,}04 & 1{,}61 & 1{,}6\\ 0{,}35 & -1{,}78 & 0{,}74 & -1{,}54 & -0{,}16 & -0{,}06\\ 0{,}15 & -1{,}05 & -1{,}19 & 0{,}65 & -0{,}22 & -0{,}54\\ -0{,}53 & 0{,}37 & 0{,}7 & -0{,}09 & 0{,}15 & -0{,}41\end{bmatrix},$$

$$b=\begin{bmatrix}-0{,}47\\ -0{,}53\\ 1{,}87\\ 0{,}79\\ -0{,}56\\ 0{,}46\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Зададим желаемый характеристический полином системы (2):

$$d(\lambda)=(\lambda+0{,}3)(\lambda+0{,}4)(\lambda+0{,}5)(\lambda+0{,}2+0{,}7i)(\lambda+0{,}2-0{,}7i)(\lambda+0{,}1+0{,}3i)(\lambda+0{,}1-0{,}3i)=$$
$$=\lambda^7+1{,}8\lambda^6+1{,}9\lambda^5+1{,}34\lambda^4+0{,}5979\lambda^3+0{,}17482\lambda^2+0{,}03367\lambda+0{,}00318.$$

Условия теоремы выполняются. Параметры компенсатора определяются однозначно:

$$f^{\text{т}}=\begin{bmatrix}0{,}0891861 & -1{,}5061263 & 14{,}434942\end{bmatrix},$$
$$q^{\text{т}}=\begin{bmatrix}7{,}3744718 & -10{,}250088 & 53{,}52229\end{bmatrix},\quad p=-3,0716998.$$

Проверка показывает, что характеристический полином матрицы D совпадает с заданным.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Datta, B. Numerical Methods for Linear Control Systems / B. Datta. — Boston : Elsevier Academic Press, 2004. — 640 p.
2. Лапин, А.В. Обобщение формулы Аккермана для некоторого класса многомерных динамических систем с векторным входом / А.В. Лапин, Н.Е. Зубов, А.В. Пролетарский // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2023. — № 4. — С. 18–38.
3. Lapin, A.V. Generalization of Bass–Gura formula for linear dynamic systems with vector control / A.V. Lapin, N.E. Zubov // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. — 2020. — V. 89, № 2. — P. 41–64.
4. Буков, В.Н. Анализ и синтез матричных линейных систем. Сравнение подходов / В.Н. Буков, С.В. Горюнов, В.Н. Рябченко // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 11. — С. 3–43.
5. Brash, F.M. Pole placement using dynamic compensators / F.M. Brash, J.B. Pearson // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1970. — V. AC-15. — P. 34–43.
6. Bernstein, D.S. Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas / D.S. Bernstein. — Second Ed. — Princeton Univ. Press, 2009. — 1184 p.
7. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — 5-е изд. — М. : Физматлит, 2010. — 560 с.

BASS–GURA FORMULA FOR LINEAR SYSTEM WITH DYNAMIC OUTPUT FEEDBACK

 E. A. Perepelkin

Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Russia
e-mail: eap@list.ru

In this paper we solve the problem of assigning the desired characteristic polynomial of a linear stationary dynamic system with one input and output dynamic feedback in the form of a first-order dynamic compensator. Necessary and sufficient conditions for the existence of the solution of the problem are considered. An explicit formula for the compensator parameters, analogous to the Bass–Gura formula for a state feedback system, is derived.

Keywords: linear system, output feedback, Bass–Gura formula

REFERENCES

1. Datta, B., *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Boston: Elsevier Academic Press, 2004.
2. Lapin, A.V., Zubov, N.E., and Proletarskii, A.V., Generalization of ackermann formula for a certain class of multidimensional dynamic systems with vector input, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, vol. 109, no. 4, pp. 18–38.
3. Lapin, A.V. and Zubov, N.E., Generalization of Bass–Gura formula for linear dynamic systems with vector control, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, vol. 89, no. 2, pp. 41–64.
4. Bukov, V.N., Goryunov, S.V., and Ryabchenko, V.N., Matrix linear systems: a comparative review of the approaches to their analysis and synthesis, *Automation and Remote Control*, 2000, vol. 61 (1), no. 11, pp. 1759–1795.
5. Brash, F.M. and Pearson, J.B., Pole placement using dynamic compensators, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1970, vol. AC-15, pp. 34–43.
6. Bernstein, D.S., *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, Second Ed., Princeton Univ. Press, 2009.
7. Gantmacher, F.R., *The Theory of Matrices*, American Mathematical Society, 1998.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 139–144

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В α-ПЛОСКОСТИ ГРУШИНА

© 2025 г. **Ю. Л. Сачков[1], Е. Ф. Сачкова[2]**

[1,2]*Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский*
[1]*Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва*
e-mail: [1]yusachkov@gmail.com, [2]efsachkova@mail.ru

Поступила в редакцию 01.06.2024 г., после доработки 24.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Для α-плоскости Грушина описаны оптимальные траектории, время разреза и множество разреза.

Ключевые слова: α-плоскость Грушина, оптимальный синтез

DOI: 10.31857/S0374064125010119, EDN: HZJTBE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В субримановой геометрии [1, § 9.2] хорошо известна плоскость Грушина, представляющая простейший пример почти риманова многообразия (такое многообразие риманово в дополнении к особому подмногообразию коразмерности один). Естественным обобщением этого примера является α-плоскость Грушина, когда вырождение на особом множестве имеет порядок $\alpha \geqslant 1$. Экстремальные траектории для такого случая были параметризованы в статье [2], и на основе этого исследована их оптимальность в [3]. В данной работе проведено независимое исследование оптимальности экстремальных траекторий с помощью качественного подхода, не использующего параметризацию этих траекторий.

Задача оптимального управления для классической плоскости Грушина ставится следующим образом [1, § 9.2]:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y) \in M = \mathbb{R}^2, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} dt \to \min, \tag{2}$$

где $X_1 = \partial/\partial x,\ X_2 = x\partial/\partial y$.

Естественное обобщение этой задачи (α-плоскость Грушина) [2, 3] ставится аналогично, но для векторных полей:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = |x|^\alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geqslant 1. \tag{3}$$

Задача (1)–(3) называется *почти римановой задачей на α-плоскости Грушина.*

Обозначим функцию цены в этой задаче — почти риманово расстояние — как $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \colon q(\cdot)$ траектория системы (1), (2)$\}$. *Особым множеством* называется множество точек $q \in M$, в которых множество допустимых скоростей $\{\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2\}$ неполномерно: $Z = \{q = (x, y) \in M \colon x = 0\}$. Если $q_0 \in M \setminus Z$, то задача локально превращается в риманову, поэтому особый интерес представляет случай $q_0 \in Z$, который и рассматривается в данной работе.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

2.1. СИММЕТРИИ

Задача (1)–(3) имеет очевидные симметрии — отражения

$$(x,y)\mapsto(-x,y),\quad (x,y)\mapsto(x,-y),\quad (x,y)\mapsto(-x,-y). \tag{4}$$

Векторные поля X_1, X_2 не зависят от y, поэтому симметриями являются также параллельные переносы

$$(x,y)\mapsto(x,y+a),\quad a\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Другая однопараметрическая группа симметрий даётся потоком векторного поля

$$V=x\frac{\partial}{\partial x}+(1+\alpha)y\frac{\partial}{\partial y},\quad (x,y)\mapsto e^{tV}(x,y)=(e^tx,e^{(1+\alpha)t}y),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

так как $[V,X_1]=-X_1,\ [V,X_2]=-X_2$. Значит оптимальный синтез и, в частности, расстояние d инвариантны относительно симметрий (4), (5) и однородны порядка 1 относительно симметрии (6): $d(e^{tV}(q_0),e^{tV}(q_1))=e^td(q_0,q_1),\ q_i\in M,\ t\in\mathbb{R}$. Учитывая симметрию (5), будем далее полагать $q_0=(0,0)$.

2.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Система (1) вполне управляема в каждой из римановых полуплоскостей $\{q\in M: \operatorname{sign}x=\pm1\}$, так как в них множество допустимых скоростей полномерно. Переместиться между этими полуплоскостями можно вдоль полей $\pm X_1$, поэтому система (1) вполне управляема. Отметим, что в точках $q\in Z$ условие теоремы Рашевского–Чжоу [4, § 5.3; 5, § 2.2.4] выполнено только при $\alpha\in 2\mathbb{N}$. Все условия теоремы Филиппова [4, § 10.3; 5, § 3.1.2] выполнены, поэтому оптимальные траектории существуют.

2.3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Как обычно в субримановой геометрии, перейдём от минимизации длины (2) к минимизации энергии $J=0{,}5\int_0^{t_1}(u_1^2+u_2^2)\,dt$. Применим к полученной задаче принцип максимума Понтрягина [4, § 3; 5, § 5.2; 6, § 12.4; 7, § 3.2.2]. Анормальные траектории постоянны и нестрого анормальны. Для параметризации нормальных экстремальных траекторий положим $X_3=\partial/\partial y$ и обозначим линейные на слоях кокасательного расслоения T^*M гамильтонианы: $h_i(\lambda)=\langle\lambda,X_i\rangle,\ i=1,3,\ \lambda\in T^*M$. Тогда максимизированный гамильтониан принципа максимума Понтрягина равен $H=h_1^2+|x|^{2\alpha}h_3^2\equiv1$ и гамильтонова система для нормальных экстремалей имеет вид

$$\dot h_1=-\alpha\operatorname{sign}x\,|x|^{2\alpha-1}h_3^2,\quad \dot h_3=0,\quad \dot x=h_1,\quad \dot y=|x|^{2\alpha}h_3. \tag{7}$$

Гамильтониан H есть первый интеграл, поэтому при каждом $h_3\neq0$ независимая подсистема уравнений (7) для переменных h_1 и x имеет фазовый портрет типа центр.

Если $h_3=0$, то $h_1\equiv\mathrm{const}\neq0$, $x=h_1t$, $y=0$. Пусть $h_3\neq0$. При интегрировании системы (7) методом разделения переменных получаем уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{H-h_3^2|x|^{2\alpha}}}=\pm dt,$$

в котором левая часть интегрируется в общем случае в гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$. С другой стороны, в работе [2] система (7) проинтегрирована в терминах некоторых обобщений тригонометрических функций. Однако мы не будем использовать явную параметризацию экстремальных траекторий и исследуем оптимальность экстремальных траекторий, опираясь только на качественные методы.

Учитывая симметрию $(h_3, y) \mapsto (-h_3, -y)$ системы (7), далее считаем, что $h_3 > 0$. После замены переменных $X = xh_3^{1/\alpha}$, $Y = yh_3^{1+1/\alpha}$, $H_1 = h_1$, $s = th_3^{1/\alpha}$ гамильтонова система (7) примет вид

$$H_1' = -\alpha \operatorname{sign} X\, |X|^{2\alpha-1}, \quad X' = H_1, \quad Y' = |X|^{2\alpha} \tag{8}$$

с первым интегралом $H = H_1^2 + |X|^{2\alpha} \equiv 1$. Так как $H = 1$, то имеем $H_1(0) = H_1^0 = \pm 1$. Воспользовавшись симметрией $(H_1, X) \mapsto (-H_1, -X)$, получаем $H_1^0 = 1$. Первые два уравнения системы (8) имеют в плоскости (H_1, X) фазовый портрет типа центр, поэтому для любого $\alpha \geqslant 1$ существует единственное число $s_* = s_*(\alpha) > 0$ такое, что

$$X(s) > 0 \quad \text{при } s \in (0, s_*), \quad X(s_*) = 0. \tag{9}$$

Тогда первый положительный корень функции $x(t)$ равен $t_* = s_* h_3^{-1/\alpha}$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. 1. *Если $h_3 = 0$, то экстремальная траектория $q(t)$ оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$.*

2. *Если $h_3 \neq 0$, то экстремальная траектория $q(t)$ оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 \in (0, t_*]$, и неоптимальна при $t_1 > t_*$, где $t_* = s_*|h_3|^{-1/\alpha}$.*

Доказательство. Сначала исследуем случай 2. Пусть $h_3 \neq 0$. Рассмотрим экспоненциальное отображение

$$\operatorname{Exp}\colon (\lambda, t) \mapsto q(t), \quad \operatorname{Exp}\colon \tilde{N} \to M, \quad \tilde{N} = (T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}) \times \mathbb{R}_+,$$
$$\lambda = (h_3, h_1^0), \quad h_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ h_1^0 = \pm 1.$$

При любом $h_3 \neq 0$ экстремальные траектории $\operatorname{Exp}(h_3, 1, t)$ и $\operatorname{Exp}(h_3, -1, t)$ симметричны относительно оси y и пересекаются на этой оси при $t = t_*$. Поэтому точка пересечения $\operatorname{Exp}(h_3, 1, t_*)$ является точкой Максвелла [5, § 3.3.5] и эти траектории неоптимальны при условии $t > t_*$.

Докажем теперь, что любая траектория $\operatorname{Exp}(h_3, 1, t)$ оптимальна при $t \in [0, t_1]$, $t_1 \in (0, t_*)$. Учитывая симметрии задачи, будем считать, что $h_1^0 = 1$ и $h_3 > 0$, и будем обозначать $\operatorname{Exp}(h_3, t) := \operatorname{Exp}(h_3, 1, t)$. Пусть $N = \{(h_3, t) \in \mathbb{R}^2 \colon h_3 > 0, \ t \in (0, t_*)\}$, $D = \{(x, y) \in M \colon x, \ y > 0\}$. Покажем, что $\operatorname{Exp}\colon N \to D$ есть диффеоморфизм, для этого воспользуемся следующей теоремой Адамара о глобальном диффеоморфизме.

Теорема 2 [8; 9, § 6.2]. *Пусть $F\colon X \to Y$ — гладкое отображение между гладкими многообразиями одинаковой размерности такое, что X, Y связны, Y односвязно, F невырождено и собственное. Тогда F — диффеоморфизм.*

Сначала докажем, что $\operatorname{Exp}(N) \subset D$. Так как $h_3 > 0$ и $t \in (0, t_*)$, то $x(t) > 0$ в силу неравенства (9). Из обыкновенного дифференциального уравнения (8) следует, что $y(t) > 0$. Поэтому $\operatorname{Exp}(N) \subset D$.

Очевидно, что N и D связны, а D односвязно. Покажем, что $\operatorname{Exp}|_N$ невырождено, т.е. якобиан $\partial(x, y)/\partial(t, h_3)$ отличен от нуля в области N. Имеем $\partial x/\partial t = H_1$, $\partial y/\partial t = h_3^{-1} X^{2\alpha}$, $\partial x/\partial h_3 = -\alpha^{-1} h_3^{-1-1/\alpha} X + (\partial s/\partial h_3) H_1 h_3^{-1/\alpha}$, $\partial y/\partial h_3 = -(1 + 1/\alpha) h_3^{-2-1/\alpha} Y + (\partial s/\partial h_3) X^{2\alpha} h_3^{-1-1/\alpha}$, откуда $J = h_3^{-2-1/\alpha} \alpha^{-1} J_1$, $J_1 = X^{2\alpha+1} - (\alpha + 1) Y H_1$. Дифференцируя в силу (8), получаем

$J_1' = \alpha X^{2\alpha-1} J_2$, $J_2 = H_1 X + (\alpha+1)Y$. Дифференцируя ещё раз, имеем $J_2' = H_1^2 + X^{2\alpha} > 0$, поэтому $J|_N > 0$, т.е. $\operatorname{Exp}|_N$ невырождено.

Теперь покажем, что отображение $\operatorname{Exp}\colon N \to D$ собственное. Это равносильно следующему условию: если последовательность $\{(h_3^n, t^n)\colon n \in \mathbb{N}\} \subset N$ не содержится ни в каком компакте в N, то её образ $q^n = \operatorname{Exp}(h_3^n, t^n)$ не содержится ни в каком компакте в D. Пусть последовательность $\{(h_3^n, t^n)\colon n \in \mathbb{N}\} \subset N$ не содержится ни в каком компакте в N, обозначим $s^n = (h_3^n)^{1/\alpha} t^n \in (0, s_*)$. Тогда она содержит подпоследовательность, для которой выполнено одно из следующих условий: 1) $h_3^n \to \bar{h}_3 \in (0, +\infty)$, $s^n \to 0$; 2) $h_3^n \to 0$, $s^n \to 0$; 3) $h_3^n \to 0$, $s^n \to \bar{s} \in (0, s_*)$; 4) $h_3^n \to 0$, $s^n \to s_*$; 5) $h_3^n \to \bar{h}_3 \in (0, +\infty)$, $s^n \to s_*$; 6) $h_3^n \to +\infty$, $s^n \to s_*$; 7) $h_3^n \to +\infty$, $s^n \to \bar{s} \in (0, s_*)$; 8) $h_3^n \to +\infty$, $s^n \to 0$.

Покажем, что для каждого из них последовательность $q^n = (x^n, y^n)$ содержит подпоследовательность, на которой выполнено одно из следующих условий: $x^n \to 0$, $x^n \to +\infty$, $y^n \to 0$, $y^n \to +\infty$, т.е. q^n не содержится ни в каком компакте в D.

При условии 1) имеем $X(s^n) \to X(0) = 0$, поэтому $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to 0$.

При выполнении условия 2) последовательность $t^n = s^n/(h_3^n)^{1/\alpha} > 0$ содержит подпоследовательность одного из следующих видов: $t^n \to 0$, $t^n \to \bar{t} \in (0, +\infty)$, $t^n \to +\infty$. Если $t^n \to 0$, то $x^n = x(h_3^n, t^n) \to x(0,0) = 0$. Если $t^n \to \bar{t} \in (0, +\infty)$, то $y^n = y(h_3^n, t^n) \to y(0, \bar{t}) = 0$. Пусть $t^n \to +\infty$. При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{s^n\}$ убывает. Существует число $K \in \mathbb{N}$ такое, что $s^K < s_*/2$, поэтому $H_1(s) > 0$ для всех $s \in [0, s^K]$. Следовательно, $H_1|_{[0,s^K]} \geqslant \varepsilon := \min_{[0,s^K]} H_1 > 0$ и

$$X(s^n) = \int\limits_0^{s^n} H_1(s)\,ds \geqslant \varepsilon s^n = \varepsilon t^n (h_3^n)^{1/\alpha}, \quad x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \geqslant \varepsilon t^n \to +\infty.$$

Для остальных условий имеем: 3) $X(s^n) \to X(\bar{s}) \in (0, +\infty)$ и $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +\infty$; 4) $Y(s^n) \to Y(s_*) = \int_0^{s_*} |X(s)|^{2\alpha} ds \in (0, +\infty)$ и $y^n = Y(s^n)/(h_3^n)^{1+1/\alpha} \to +\infty$; 5) $X(s^n) \to X(s_*) = 0$, откуда $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +0$; 6) $X(s^n) \to X(s_*) = 0$, откуда $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +0$; 7) $X(s^n) \to X(\bar{s}) \in (0, +\infty)$, откуда $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +0$; 8) $X(s^n) \to X(0) = 0$, откуда $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +0$. Поэтому отображение $\operatorname{Exp}\colon N \to D$ собственное. По теореме 2 это отображение является диффеоморфизмом. В силу существования оптимальных траекторий любая траектория $\operatorname{Exp}(h_3, t)$, $h_3 \neq 0$, $t \in [0, t_1]$, оптимальна для любого $t_1 \in (0, t_*)$.

При $t = t_*$ в точку $\operatorname{Exp}(h_3, t_*)$ приходят две траектории, симметричные относительно оси y и с одинаковым значением функционала времени, поэтому обе они оптимальны.

Теперь рассмотрим случай 1. Если $h_3 = 0$, то экстремальная траектория — прямая $q(t) = (h_1^0 t, 0)$. Из доказанного выше включения $\operatorname{Exp}(N) \subset D$ следует, что при $h_3 \neq 0$ и $t > 0$ экстремальные траектории не пересекают координатную ось $y = 0$, поэтому в каждую точку этой оси приходит единственная (с точностью до перепараметризации) экстремальная траектория — прямая $q(t) = (h_1^0 t, 0)$. В силу существования оптимальной траектории она оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$. Теорема доказана.

Следствие. 1. *Для любой траектории* $\operatorname{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda = (h_3, h_1^0) \in T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}$, *время разреза (время потери оптимальности) равно* $t_{\mathrm{cut}} = t_* = |h_3|^{-1/\alpha} s_* \in (0, +\infty]$.

2. *Множество разреза*

$$\mathrm{Cut} = \{\operatorname{Exp}(\lambda, t_{\mathrm{cut}}(\lambda))\colon \lambda \in T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}\} = \{(x, y) \in M\colon x = 0,\ y \neq 0\}.$$

Замечание. Оптимальность экстремальных траекторий на α-плоскости Грушина впервые исследована в работе [3] на основе аналогичных рассуждений, но с использованием явной параметризации экстремальных траекторий, полученных в работе [2]. Новизна данного исследования состоит в качественном использовании лишь свойства гамильтоновой системы (7), но не её явного интегрирования.

Для 2-плоскости Грушина на рис. 1 приведена почти риманова сфера радиуса 2: $\{q \in M\colon d(q_0, q) = 2\}$ и её радиусы (оптимальные траектории, приходящие в точки этой сферы), а на рис. 2 — волновые фронты $\{\mathrm{Exp}(\lambda, R)\colon \lambda \in N\}$ для разных значений R.

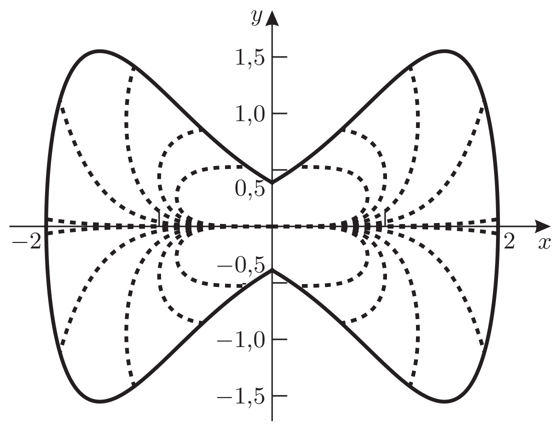


Рис. 1. Сфера радиуса 2 и её радиусы

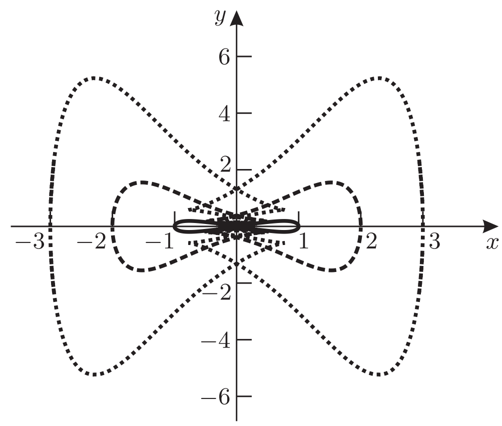


Рис. 2. Волновые фронты

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено качественное исследование оптимальных траекторий на α-плоскости Грушина, не использующее явное интегрирование гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина. Насколько нам известно, это первое такого рода исследование в теории оптимального управления. Например, даже в субримановой задаче на группе Гейзенберга оптимальность исследуется на основе явного интегрирования гамильтоновой системы [1, § 13.2]. Мы надеемся, что представленный в данной работе качественный подход к построению оптимального синтеза может быть полезен в других задачах оптимального управления, где явное интегрирование гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина затруднительно или вовсе невозможно. Этот подход может быть применён в задачах небольшой размерности и с большой группой симметрий.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00140).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agrachev, A. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian Viewpoint / A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. — Cambridge Univ. Press, 2019. — 745 p.
2. Chang, D.-C. SubRiemannian geodesics in the Grushin plane / D.-C. Chang, Y. Li // J. Geom. Anal. — 2012. — V. 22, № 3. — P. 800–826.

3. Borza, S. Distortion coefficients of the α-Grushin plane / S. Borza // J. Geom. Anal. — 2022. — V. 32, № 78. — P. 1–28.
4. Аграчев, А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. — М. : Физматлит, 2005. — 392 с.
5. Сачков, Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления / Ю.Л. Сачков. — М. : Ленанд, 2021. — 160 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М. : Наука, 1961. — 384 с.
7. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк ; пер. с англ. Ю.С. Ледяева ; под ред. В.И. Благодатских. — М. : Наука, 1988. — 279 с.
8. Hadamard, J. Les surfaces a courbures opposees et leurs lignes géodésique / J. Hadamard // J. Math. Pures Appl. — 1898. — № 4. — P. 27–73.
9. Krantz, S.G. The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications / S.G. Krantz, H.R. Parks. — Birkäuser, 2001. — 148 p.

OPTIMAL TRAJECTORIES IN THE GRUSHIN α-PLANE

© 2025 / Yu. L. Sachkov[1], E. F. Sachkova[2]

[1,2]Institute of Programm Systems named after A.K. Ailamazyan of RAS, Pereslavl-Zalessky, Russia
[1]Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia
e-mail: [1]yusachkov@gmail.com, [2]efsachkova@mail.ru

For the Grushin α-plane, optimal trajectories, cutting time, and cutting set are described.

Keywords: Grushin α-plane, optimal synthesis

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00140).

REFERENCES

1. Agrachev, A., Barilari, D., and Boscain, U., *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian Viewpoint*, Cambridge Univ. Press, 2019.
2. Chang, D.-C. and Li, Y., SubRiemannian geodesics in the Grushin plane, *J. Geom. Anal.*, 2012, vol. 22, no. 3, pp. 800–826.
3. Borza, S., Distortion coefficients of the α-Grushin plane, *J. Geom. Anal.*, 2022, vol. 32, no. 78, pp. 1–28.
4. Agrachev, A.A. and Sachkov, Yu.L., *Geometricheskaya teoriya upravleniya* (Geometric Control Theory), Moscow: Fizmatlit, 2005.
5. Sachkov, Yu.L., *Vvedeniye v geometricheskuyu teoriyu upravleniya* (Introduction to Geometric Control Theory), Moscow: URSS, 2021.
6. Pontryagin, L.S., Boltyansky, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko, E.F., *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical Theory of Optimal Processes), Moscow: Nauka, 1961.
7. Clark, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York: Wiley, 1983.
8. Hadamard, J., Les surfaces a courbures opposees et leurs lignes géodésique, *J. Math. Pures Appl.*, 1898, no. 4, pp. 27–73.
9. Krantz, S.G. and Parks, H.R., *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*, Birkäuser, 2001.