ISSN 0374-0641
Том 60, Номер 10
Октябрь 2024

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЖУРНАЛ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

300 лет Российская Академия Наук

НАУКА
1727

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 10, 2024

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1299–1311

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.957

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. М. В. Артемьева[1], М. О. Корпусов[2]

[1,2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
[2]Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва
e-mail: [1]artemeva.mv14@physics.msu.ru, [2]korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 21.01.2024 г., после доработки 23.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Рассмотрена теплоэлектрическая $(1+1)$-мерная модель нагрева полупроводника в электрическом поле. Для соответствующей задачи Коши доказано существование непродолжаемого во времени классического решения, получена глобальная во времени априорная оценка, обосновано отсутствие даже локального во времени классического решения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение соболевского типа, задача Коши в полосе, локальная разрешимость, классическое решение

DOI: 10.31857/S0374064124100014, EDN: JUDMOQ

ВВЕДЕНИЕ

Современные радиоинформационные системы (РИС), решающие задачи мониторинга космического пространства, характеризуются бóльшим числом плотно расположенной радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), непрерывно функционируют в течение длительного времени и имеют высокие требования к надёжности. При работе структурно-сложной РИС в теплонапряжённых режимах резко возрастает тепловыделение в РЭА за счёт высокой токовой нагрузки. Повышение тепловыделения влечёт за собой перегрев аппаратуры, что, как следствие, увеличивает вероятность её отказов и снижает надёжность изделия [1]. Данные обстоятельства обуславливают необходимость исследования нелинейных тепловых процессов в полупроводнике, а также построения и изучения теплоэлектрической модели полупроводника.

В настоящей работе, продолжающей исследования [2–6], рассматривается следующая задача Коши для модельного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v_x+\frac{\gamma}{2}v^2\right)+\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}v_x=0, \quad v(x,0)=v_0(x), \tag{1}$$

причём функция $v=\phi_x$, где ϕ — потенциал электрического поля. Уравнение (1) возникло в [6] при рассмотрении одной теплоэлектрической модели, потенциал электрического поля ϕ в которой был связан с температурой ψ соотношением

$$-\psi_{xx}=\gamma_0|\phi_x|^2.$$

Начальную функцию $v_0(x)$ выбираем такой, что при $x\to-\infty$ она убывает как $(1-x)^{-\alpha}$ при $\alpha>1$ и существует такое число $b>0$, что при $x\geqslant b$ имеем $v_0(x)\geqslant a>0$.

В статье доказано существование классического непродолжаемого во времени решения задачи в весовых пространствах и получен результат об отсутствии даже локального во времени классического решения.

1. ЗАДАЧА КОШИ

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_x+v^2)+v_x=0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^1\times[0,T], \tag{2}$$

$$v(x,0)=v_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^1. \tag{3}$$

Пусть $x^- := \min\{x,0\}$, $\tau(x) := 1-x^-$. Через $C_b^{(k)}(\mathbb{R}^1)$ при $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ будем обозначать линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций до порядка k включительно, причём все частные производные до порядка k являются ограниченными. Это линейное пространство является банаховым относительно стандартной нормы.

Определение 1. Функция $w\in C_b(\tau^\mu;\mathbb{R}^1)$ при $\mu>0$, если $w\in C_b(\mathbb{R}^1)$ и конечна норма:

$$\|w\|_\mu := \sup_{x\in\mathbb{R}^1}\tau^\mu(x)|w(x)|<+\infty. \tag{4}$$

Определение 2. Функция $w\in C_b^{(1)}(\tau^\mu,\tau^\nu;\mathbb{R}^1)$ при $\mu>0$ и $\nu>0$, если $w\in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ и конечна норма:

$$\|w\|_{\mu,\nu} := \sup_{x\in\mathbb{R}^1}\tau^\mu(x)|w(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}^1}\tau^\nu(x)\left|\frac{dw(x)}{dx}\right|<+\infty. \tag{5}$$

Определение 3. *Классическим решением задачи Коши* (2), (3) называется функция класса $v\in C^{(1)}([0,T];C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1))$ при $\alpha>1$, удовлетворяющая равенствам (2) и (3) поточечно.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Линейные пространства $C_b(\tau^\mu;\mathbb{R}^1)$ и $C_b^{(1)}(\tau^\mu,\tau^\nu;\mathbb{R}^1)$ являются банаховыми относительно норм (4) и (5).*

Пусть функция $v\in C_b(\tau^\alpha;\mathbb{R}^1)$ при $\alpha>1$ удовлетворяет следующему условию: найдутся такие числа $a>0$ и $b>0$, что

$$v(x)\geqslant a>0 \quad \text{при} \quad x\geqslant b>0. \tag{6}$$

Рассмотрим оператор

$$Q_2(v)h(x) := \frac{dh(x)}{dx}+2v(x)h(x). \tag{7}$$

Пусть

$$h\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1), \quad f\in C_b((1-x^-)^{2\alpha};\mathbb{R}^1), \quad \alpha>1. \tag{8}$$

Запишем уравнение

$$\frac{dh(x)}{dx}+2v(x)h(x)=f(x). \tag{9}$$

Очевидно, что $Q_2(v)\colon C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)\to C_b(\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$.

Введём функцию $q(x) := \int_0^x v(z)\,dz$. Заметим, что $q\in C^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ и $q'(x)=v(x)$, а также справедливы равенства

$$\exp\{-2q(x)\}\frac{d}{dx}\big(\exp\{2q(x)\}h(x)\big)=f(x), \quad \frac{d}{dx}\big(\exp\{2q(x)\}h(x)\big)=\exp\{2q(x)\}f(x). \tag{10}$$

Проинтегрировав второе равенство в (10) по x в пределах от $-\infty$ до x, с учётом (8) получим

$$h(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\{-2I(x,y)\}f(y)\,dy, \quad I(x,y) := q(x)-q(y). \tag{11}$$

Справедливо равенство

$$I(x,y)=\int\limits_{y}^{x} v(z)\,dz. \tag{12}$$

Таким образом, из (11) и (12) имеем

$$h(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} \exp\biggl\{-2\int\limits_{y}^{x} v(z)\,dz\biggr\} f(y)\,dy.$$

Получим оценку для функции $h(x)$, рассмотрев следующие случаи.

1. Пусть $x\leqslant 0$, тогда

$$|h(x)|\leqslant\|f\|_{2\alpha}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\biggl\{2\|v\|_{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dz}{(1-z^-)^{\alpha}}\biggr\}\frac{1}{(1-y^-)^{2\alpha}}\,dy=\|f\|_{2\alpha}\exp\{2(\alpha-1)^{-1}\|v\|_{\alpha}\}\frac{1}{(1-x)^{2\alpha-1}}, \tag{13}$$

откуда получаем при $\alpha>1$ оценку

$$\sup_{-\infty<x\leqslant 0}|h(x)|(1-x^-)^{\alpha}\leqslant\|f\|_{2\alpha}\exp\{a_1(b,\alpha)\|v\|_{\alpha}\}. \tag{14}$$

2. Если $0<x\leqslant b$, то справедлива оценка

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b}|h(x)|\leqslant\|f\|_{2\alpha}\exp\biggl\{2\|v\|_{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{dz}{(1-z^-)^{\alpha}}\biggr\}\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{dy}{(1-y^-)^{2\alpha}}=A_1(b,\alpha)\|f\|_{2\alpha}\exp\{a_1(b,\alpha)\|v\|_{\alpha}\}. \tag{15}$$

3. При $x>b$ имеют место соотношения

$$|h(x)|\leqslant\|f\|_{2\alpha}\int\limits_{-\infty}^{b}\exp\biggl\{2\int\limits_{-\infty}^{b}|v(z)|\,dz\biggr\}\exp\biggl\{-2\int\limits_{b}^{x}v(z)\,dz\biggr\}\frac{1}{(1-y^-)^{2\alpha}}\,dy+$$

$$+\|f\|_{2\alpha}\int\limits_{b}^{x}\exp\biggl\{-2\int\limits_{y}^{x}v(z)\,dz\biggr\}\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_{2\alpha}\biggl[A_1(b,\alpha)\exp\{a_1(b,\alpha)\|v\|_{\alpha}\}+\int\limits_{b}^{x}\exp\{-2a(x-y)\}\,dy\biggr]\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_{2\alpha}\biggl[A_1(b,\alpha)\exp\{a_1(b,\alpha)\|v\|_{\alpha}\}+\frac{1}{2a}\biggr]. \tag{16}$$

Таким образом, из (13)–(16) получаем оценку

$$\|h\|_{\alpha}\leqslant A(b,\alpha)\biggl[\exp\{a_1(b,\alpha)\|v\|_{\alpha}\}+\frac{1}{a}\biggr]\|f\|_{2\alpha}. \tag{17}$$

Заметим, что функция $h(x)$ удовлетворяет равенству (9), из которого находим

$$\frac{dh(x)}{dx}=-2v(x)h(x)+f(x). \tag{18}$$

Следовательно,

$$\biggl\|\frac{dh(x)}{dx}\biggr\|_{2\alpha}\leqslant\|f\|_{2\alpha}+2\|v\|_{\alpha}\|h\|_{\alpha}\leqslant\bigl[1+2\|v\|_{\alpha}A(b,\alpha,\|v\|_{\alpha})\bigr]\|f\|_{2\alpha}. \tag{19}$$

Из (17)–(19) заключаем, что при $\alpha>1$

$$Q_2^{-1}(v)f=\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v(z)\,dz\right\}f(y)\,dy,\quad Q_2^{-1}(v)\colon C_b(\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)\to C_b^{(1)}(\tau^{\alpha},\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1).$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. *Оператор $Q_2(v)$, определённый равенством (7), действует на любую функцию $v\in C_b(\tau^{\alpha};\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющую условию (6), при $\alpha>1$ следующим образом:*

$$Q_2(v)\colon C_b^{(1)}(\tau^{\alpha},\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)\to C_b(\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1),$$

при этом существует обратный оператор

$$Q_2^{-1}(v)\colon C_b\left(\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1\right)\to C_b^{(1)}\left(\tau^{\alpha},\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1\right)$$

и справедливо равенство

$$Q_2^{-1}(v)f:=\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v(z)\,dz\right\}f(y)\,dy.$$

Распространим результат леммы 2 на случай функций, зависящих от переменной $t\in[0,T]$ как от параметра. Для этого предположим, что функция $v\in C([0,T];C_b(\tau^{\alpha};\mathbb{R}^1))$ удовлетворяет условию

$$v(x,t)\geqslant ae^{-T}>0\quad\text{для всех}\quad x\geqslant b>0,\quad t\in[0,T].\tag{20}$$

Справедлива следующая

Лемма 3. *Оператор $Q_2(v)$, определённый равенством*

$$Q_2(v)h(x,t):=\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}+v(x,t)h(x,t)$$

для любой функции $v\in C([0,T];C_b(\tau^{\alpha};\mathbb{R}^1))$, удовлетворяющей условию (20), действует при $\alpha>1$ следующим образом:

$$Q_2(v)\colon C\big([0,T];C_b^{(1)}(\tau^{\alpha},\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)\big)\to C\big([0,T];C_b(\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)\big),$$

при этом существует обратный оператор

$$Q_2^{-1}(v)\colon C\big([0,T];C_b(\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)\big)\to C\big([0,T];C_b^{(1)}(\tau^{\alpha},\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)\big)$$

и справедливо равенство

$$Q_2^{-1}(v)f:=\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v(z,t)\,dz\right\}f(y,t)\,dy.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x,t):=\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v(z,t)\,dz\right\}f(y,t)\,dy.$$

Прежде всего точно так же, как и при доказательстве результата (17) (см. (13)–(16)), можно показать, что для любого $t\in[0,T]$ функция $h\in C_b^{(1)}(\tau^{\alpha},\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$.

Для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ справедливо равенство

$$h(x,t_1) - h(x,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left[\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v(z,t_1)\,dz\right\} - \exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v(z,t_2)\,dz\right\}\right] f(y,t_1)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v(z,t_2)\,dz\right\}[f(y,t_1) - f(y,t_2)]\,dy =: h_1(x) + h_2(x). \tag{21}$$

Заметим, что имеют место соотношения

$$\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v(z,t_1)\,dz\right\} - \exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v(z,t_2)\,dz\right\} = \int\limits_{0}^{1} \frac{d}{ds}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v_s(z)\,dz\right\} ds =$$

$$= -2\int\limits_{0}^{1} \exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v_s(z)\,dz\right\} ds \int\limits_{y}^{x} [v(z,t_1) - v(z,t_2)]\,dz,$$

где $v_s(z) := sv(z,t_1) + (1-s)v(z,t_2)$. Тогда для $h_1(x)$ и $h_2(x)$ получаем следующие выражения:

$$h_1(x) = -2\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{0}^{1} \exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v_s(z)\,dz\right\} ds\right)\left(\int\limits_{y}^{x} [v(z,t_1) - v(z,t_2)]\,dz\right) f(y,t_1)\,dy,$$

$$h_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v(z,t_2)\,dz\right\}[f(y,t_1) - f(y,t_2)]\,dy.$$

В силу того, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет условию (20), имеем

$$v_s(x) = sv(x,t_1) + (1-s)v(x,t_2) \geqslant (sa + (1-s)a)e^{-T} = ae^{-T} > 0$$

для всех $x \geqslant b > 0$ и $t \in [0,T]$. Для функции $h_2(x)$ получаем сразу же оценку

$$|h_2(x)| \leqslant \|f(t_1) - f(t_2)\|_{2\alpha} \int\limits_{\infty}^{x} \exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x} v(z,t_2)\,dz\right\} \frac{1}{(1-y-)^{2\alpha}}\,dy,$$

причём для дальнейших оценок в точности повторяются рассуждения, приведённые при выводе (17), и в результате можем записать

$$\|h_2\|_\alpha \leqslant A\big(ae^{-T}, b, \alpha, \|v(t_2)\|_\alpha\big)\|f(t_1) - f(t_2)\|_{2\alpha}, \tag{22}$$

где функция $A = A(ae^{-T}, b, \alpha, \|v(t_2)\|_\alpha)$ ограничена на любом компакте по $\|v(t_2)\|_\alpha$ и монотонно не убывает по этой же переменной.

Оценим теперь функцию $h_1(x)$, рассмотрев три случая.

1. При $x \leqslant 0$ справедлива оценка

$$|h_1(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|f(t_1)\|_{2\alpha} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dy}{(1-y^-)^{2\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{du}{(1-u^-)^{\alpha}} \int\limits_{0}^{1} \exp\left\{2\|v_s\|_\alpha \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dz}{(1-z^-)^\alpha}\right\} ds \|v(t_1) - v(t_2)\|_\alpha, \tag{23}$$

из которой, в частности, при $\alpha > 1$ получаем

$$\sup_{-\infty < x \leqslant 0} (1-x^-)^\alpha |h_1(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\alpha-1)(\alpha-1)} \exp\big\{a_1(\alpha)\max\{\|v(t_1)\|_\alpha, \|v(t_2)\|_\alpha\}\big\}\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1) - v(t_2)\|_\alpha. \tag{24}$$

2. Пусть $0<x\leqslant b$, тогда

$$\sup_{x\in[0,b]}|h_1(x)|\leqslant 2\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{dy}{(1-y^-)^{2\alpha}}\exp\biggl\{2\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{1}{(1-z^-)^{\alpha}}\max\{\|v(t_1)\|_\alpha,\|v(t_2)\|_\alpha\}\biggr\}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{dz}{(1-z^-)^{\alpha}}\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha\leqslant$$

$$\leqslant A(\alpha,b)\exp\bigl\{a_1(\alpha)\max\{\|v(t_1)\|_\alpha,\|v(t_2)\|_\alpha\}\bigr\}\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha. \tag{25}$$

3. При $x>b$ имеет место неравенство

$$|h_1(x)|\leqslant 2\|f(t_1)\|_{2\alpha}\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{dy}{(1-y^-)^{2\alpha}}\biggl(\int\limits_0^1\exp\biggl\{2\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{dz}{(1-z^-)^{\alpha}}\|v_s\|_\alpha\biggr\}\exp\biggl\{-2\int\limits_b^x v_s(z)\,dz\biggr\}\biggr)\,ds\times$$

$$\times\biggl[\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{du}{(1-u^-)^{\alpha}}+x-b\biggr]\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha+$$

$$+2\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha\int\limits_b^x(x-y)\biggl(\int\limits_0^1\exp\biggl\{-2\int\limits_y^x v_s(z)\,dz\biggr\}\,ds\biggr)\,dy=:h_{11}+h_{12}. \tag{26}$$

Для h_{11} справедлива оценка

$$h_{11}\leqslant A(b,\alpha)\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha\times$$

$$\times\exp\bigl\{a_1(\alpha)\max\{\|v(t_1)\|_\alpha,\|v(t_2)\|_\alpha\}\bigr\}(b_1+x-b)\exp\{-2ae^{-T}(x-b)\}\leqslant$$

$$\leqslant A_1(ae^{-T},b,\alpha)\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha\exp\bigl\{a_1(\alpha)\max\{\|v(t_1)\|_\alpha,\|v(t_2)\|_\alpha\}\bigr\}, \tag{27}$$

для h_{12} — оценка

$$h_{12}\leqslant 2\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha\int\limits_b^x(x-y)\exp\{-2ae^{-T}(x-y)\}\,dy\leqslant$$

$$\leqslant 2A_2(ae^{-T},b)\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha. \tag{28}$$

Из (23)–(28) вытекает, что

$$\|h_1\|_\alpha\leqslant A(ae^{-T},b,\alpha)\exp\bigl\{a_1(\alpha)\max\{\|v(t_1)\|_\alpha,\|v(t_2)\|_\alpha\}\bigr\}\times\|f(t_1)\|_{2\alpha}\|v(t_1)-v(t_2)\|_\alpha. \tag{29}$$

Ввиду оценок (22) и (29) из (21) получаем предельное свойство

$$\|h(x,t_1)-h(x,t_2)\|_\alpha\to+0\quad\text{при}\quad|t_1-t_2|\to+0. \tag{30}$$

Для производных функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$ справедливы равенства

$$\frac{\partial h_1(x)}{\partial x}=4\int\limits_{-\infty}^{x}\biggl(\int\limits_0^1\exp\biggl\{-2\int\limits_y^x v_s(z)\,dz\biggr\}v_s(x)\,ds\biggr)\biggl(\int\limits_y^x[v(z,t_1)-v(z,t_2)]\,dz\biggr)f(y,t_1)\,dy-$$

$$-2\int\limits_{-\infty}^{x}\biggl(\int\limits_0^1\exp\biggl\{-2\int\limits_y^x v_s(z)\,dz\biggr\}\,ds\biggr)[v(x,t_1)-v(x,t_2)]f(y,t_1)\,dy,$$

$$\frac{\partial h_2(x)}{\partial x}=f(x,t_1)-f(x,t_2)-2v(x,t_2)h_2(x).$$

Повторяя те же рассуждения, что и при получении неравенств (22) и (29), будем иметь оценки, из которых следует

$$\left\|\frac{\partial h_k(x,t_1)}{\partial x}-\frac{\partial h_k(x,t_2)}{\partial x}\right\|_{2\alpha}\to +0 \quad \text{при} \quad |t_1-t_2|\to +0, \quad k=1,2. \tag{31}$$

Из (30) и (31) заключаем

$$\|h(x,t_1)-h(x,t_2)\|_{\alpha,2\alpha}\to +0 \quad \text{при} \quad |t_1-t_2|\to +0,$$

что завершает доказательство леммы.

Пусть v — классическое решение задачи Коши (2), (3), тогда её можно переписать в абстрактной форме:

$$Q_2(v)\frac{dv}{dt}+Q_2(v)v=2v^2, \quad v(0)=v_0. \tag{32}$$

В классе $v\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1))$ при $\alpha>1$ абстрактная задача Коши (32) эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{dv}{dt}+v=2Q_2^{-1}(v)v^2, \quad v(0)=v_0,$$

из которой, в свою очередь, получаем интегральное уравнение

$$v(t)=v_0e^{-t}+2\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}Q_2^{-1}(v(\tau))v^2(\tau)\,d\tau. \tag{33}$$

Введём оператор

$$Q(v)(t):=v_0e^{-t}+2\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}Q_2^{-1}(v(\tau))v^2(\tau)\,d\tau. \tag{34}$$

Справедлива следующая

Лемма 4. *Оператор (34) действует на любую функцию* $v_0\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$ *при* $\alpha>1$ *следующим образом:*

$$Q\colon C([0,T];C_b(\tau^\alpha;\mathbb{R}^1))\to C^{(1)}([0,T];C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)). \tag{35}$$

Кроме того, справедливо неравенство $Q(v)(t)\geqslant v_0e^{-t}$ *для всех* $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times[0,T]$.

Доказательство. Заметим, что оператор

$$S\phi:=2\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\phi(\tau)\,d\tau$$

действует следующим образом:

$$S\colon C([0,T];C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1))\to C^{(1)}([0,T];C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)). \tag{36}$$

Оператор (34) можно представить в виде

$$Q(\phi)=v_0e^{-t}+SQ_2^{-1}(\phi)\phi^2,$$

откуда с учётом (36) и леммы 3 получаем (35). Лемма доказана.

Замечание. Из (35) получаем, что $Q\colon C\big([0,T];C_b(\tau^\alpha;\mathbb{R}^1)\big)\to C\big([0,T];C_b(\tau^\alpha;\mathbb{R}^1)\big)$. Кроме того, если $v_0\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$ и выполнено неравенство $v_0\geqslant a>0$ для всех $x\geqslant b>0$, то для решений $v(t)$ интегрального уравнения (33) справедлива оценка $v(t)\geqslant v_0e^{-t}\geqslant ae^{-T}>0$ для всех $x\geqslant b>0$, $t\in[0,T]$.

В связи с этим замечанием рассмотрим полное метрическое пространство

$$B[0,T]:=\bigl\{v(t)\in C\bigl([0,T];C_b(\tau^\alpha;\mathbb{R}^1)\bigr)\colon v(t)\geqslant v_0e^{-t}\bigr\},\quad v_0(x)\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1),\quad \alpha>1,$$

относительно метрики, порождённой в $C\bigl([0,T];C_b(\tau^\alpha;\mathbb{R}^1)\bigr)$ нормой $\|v\|_B:=\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_\alpha$.

Из леммы 4 и замечания вытекает

Лемма 5. *Оператор (34) действует следующим образом:* $Q\colon B[0,T]\to B[0,T]$.

Теперь рассмотрим полное метрическое пространство

$$B_R:=\{v(t)\in B[0,T]\colon \|v\|_B\leqslant R,\ \ R>0\}.$$

Справедлива следующая

Лемма 6. *Если* $v_0\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$ *при* $\alpha>1$ *и найдутся такие числа* $a>0$ *и* $b>0$, *что* $v_0(x)\geqslant a$ *для всех* $x\geqslant b$, *то при достаточно большом* $R=R(v_0)>0$ *и достаточно малом* $T>0$ *оператор (34) действует следующим образом:* $Q\colon B_R\to B_R$.

Доказательство. Пусть $v_0(x)\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$ — фиксированная функция. Выберем число $R>0$ настолько большим, чтобы

$$\|v_0\|_B\leqslant R/2, \tag{37}$$

и зафиксируем его. Согласно условию леммы для любой функции $v(t)\in B_R\subset B[0,T]$ выполнено неравенство

$$v(t)\geqslant ae^{-t}\quad \text{для всех}\quad t\in[0,T],\quad x\geqslant b>0.$$

Точно так же, как и при выводе (17), получаем соотношение

$$0\leqslant (Q_2^{-1}(v)v^2)(x,t)\leqslant A(b,\alpha)\biggl[\exp\{a_1(b,\alpha)\|v(t)\|_\alpha\}+\frac{e^t}{a}\biggr]\|v(t)\|_\alpha^2,$$

из которого имеем искомую оценку

$$\|Q(v)\|_B\leqslant TA(b,\alpha)\biggl[\exp\{a_1(b,\alpha)\|v\|_B\}+\frac{e^T}{a}\biggr]\|v\|_B^2\leqslant TA(b,\alpha)\biggl[\exp\{a_1(b,\alpha)R\}+\frac{e^T}{a}\biggr]R^2\leqslant\frac{R}{2} \tag{38}$$

при достаточно малом $T>0$ таком, что

$$TA(b,\alpha)\biggl[\exp\{a_1(b,\alpha)R\}+\frac{e^T}{a}\biggr]R\leqslant\frac{1}{2}.$$

Из (37) и (38) приходим к утверждению леммы.

Докажем теперь сжимаемость оператора Q на множестве B_R.

Лемма 7. *Если* $v_0\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$ *и найдутся такие числа* $a>0$ *и* $b>0$, *что* $v_0(x)\geqslant a>0$ *для всех* $x\geqslant b>0$, *то при достаточно малом* $T>0$ *оператор (34) сжимающий на* B_R:

$$\|Q(v_1)(x,t)-Q(v_2)(x,t)\|_B\leqslant\frac{1}{2}\|v_1-v_2\|_B \tag{39}$$

для всех $v_1,v_2\in B_R$.

Доказательство. Пусть $v_k(t)\in B_R$ при $k=1,2$. Введём функции

$$g_k(x,t):=\bigl(Q_2^{-1}(v_k)v_k^2\bigr)(x,t),\quad k=1,2,$$

и рассмотрим

$$g_1(x,t)-g_2(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{x}\left[\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_1(z,t)\,dz\right\}-\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_2(z,t)\,dz\right\}\right]v_1^2(y,t)\,dy+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_2(z,t)\,dz\right\}[v_1^2(y,t)-v_2^2(y,t)]\,dy. \tag{40}$$

Справедливо равенство

$$\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_1(z,t)\,dz\right\}-\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_2(z,t)\,dz\right\}=\int\limits_{0}^{1}\frac{d}{ds}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_s(z,t)\,dz\right\}ds=$$
$$=-2\int\limits_{0}^{1}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_s(z,t)\,dz\right\}ds\int\limits_{y}^{x}[v_1(z,t)-v_2(z,t)]\,dz, \tag{41}$$

где $v_s(z,t)=sv_1(z,t)+(1-s)v_2(z,t)$, при этом

$$v_s(x,t)=sv_1(x,t)+(1-s)v_2(x,t)\geqslant sv_0(x)e^{-t}+(1-s)v_0(x)e^{-t}=v_0(x)e^{-t}\geqslant ae^{-t}.$$

С учётом (40) и (41) имеем

$$g_1(x,t)-g_2(x,t)=h_1(x,t)+h_2(x,t), \tag{42}$$

$$h_1(x,t):=-2\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{0}^{1}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_s(z,t)\,dz\right\}ds\left(\int\limits_{y}^{x}[v_1(z,t)-v_2(z,t)]\,dz\right)v_1^2(y,t)\,dy,$$

$$h_2(x,t):=\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-2\int\limits_{y}^{x}v_2(z,t)\,dz\right\}[v_1^2(y,t)-v_2^2(y,t)]\,dy.$$

В точности повторяя рассуждения из доказательства леммы 3, приходим к следующим аналогичным (22) и (29) оценкам:

$$\|h_2\|_\alpha\leqslant A\left(ae^{-T},b,\alpha,\|v_2\|_\alpha\right)\|v_1^2(t)-v_2^2(t)\|_{2\alpha},$$

где функция $A=A(ae^{-T},b,\alpha,\|v_2\|_\alpha)>0$ ограничена на любом компакте и монотонно не убывает по переменной $\|v_2\|_\alpha$;

$$\|h_1\|_\alpha\leqslant A(ae^{-T},b,\alpha)\exp\bigl\{a_1(\alpha)\max\{\|v_1(t)\|_\alpha,\|v_2(t)\|_\alpha\}\bigr\}\|v^2(t_1)\|_{2\alpha}\|v_1(t)-v_2(t)\|_\alpha.$$

После очевидных преобразований будем иметь

$$\|h_2\|_B\leqslant 2RA\left(ae^{-T},b,\alpha,R\right)\|v_1-v_2\|_B, \tag{43}$$

$$\|h_1\|_B\leqslant R^2A(ae^{-T},b,\alpha)\exp\left(a_1(\alpha)R\right)\|v_1-v_2\|_B. \tag{44}$$

Из (40) и (42) с учётом оценок (43) и (44) приходим к соотношению

$$\|g_1(x,t)-g_2(x,t)\|_B \leqslant \mu(R,T)\|v_1-v_2\|_B, \tag{45}$$

где функция $\mu=\mu(R,T)>0$ является ограниченной на всяком компакте и неубывающей по каждой переменной в отдельности. Осталось заметить, что в силу (45) справедлива оценка

$$\|Q(v_1)-Q(v_2)\|_B \leqslant T\mu(R,T)\|v_1-v_2\|_B,$$

из которой при достаточно малом $T>0$ и получаем (39). Лемма доказана.

С учётом лемм 6, 7 и принципа сжимающих отображений заключаем, что при достаточно малом $T>0$ существует единственное решение $v\in C([0,T];C_b(\tau^\alpha;\mathbb{R}^1))$ при $\alpha>1$ интегрального уравнения (34). Использовав стандартный алгоритм продолжения решения (34) во времени (см. [7]), обосновано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой функции $v_0\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$ при $\alpha>1$ такой, что*

$$v_0(x)\geqslant a>0 \quad \text{для всех} \quad x\geqslant b>0$$

при некоторых a и b, найдётся такое максимальное $T_0=T_0(v_0)>0$, что для любого $T\in(0,T_0)$ существует единственное решение $v\in C([0,T];C_b(\tau^\alpha;\mathbb{R}^1))$ интегрального уравнения (34), причём либо $T_0=+\infty$, либо $T_0<+\infty$, и в последнем случае справедливо предельное свойство

$$\lim_{T\uparrow T_0}\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_\alpha=+\infty.$$

Из теоремы 1, леммы 4 и равенства (33) вытекает основной результат работы.

Теорема 2. *Для любой функции $v_0\in C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1)$ при $\alpha>1$ такой, что*

$$v_0(x)\geqslant a>0 \quad \text{для всех} \quad x\geqslant b>0$$

при некоторых a и b, найдётся такое максимальное $T_0=T_0(v_0)>0$, что для любого $T\in(0,T_0)$ существует единственное классическое решение $v\in C^{(1)}([0,T];C_b^{(1)}(\tau^\alpha,\tau^{2\alpha};\mathbb{R}^1))$ задачи Коши (2), (3), причём либо $T_0=+\infty$, либо $T_0<+\infty$, и в последнем случае справедливо предельное свойство

$$\lim_{T\uparrow T_0}\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_\alpha=+\infty.$$

2. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

В этом пункте будем использовать обозначение $f'(x,t)$ для производной по переменной t. Пусть функция $\phi(x,t)=\phi_1(x)\phi_2(t)\geqslant 0$, причём

$$\phi_1(x):=\phi_0\left(\frac{x^2}{R^2}\right), \quad \phi_2(t):=\left(1-\frac{t}{T}\right)^n, \quad n\in\mathbb{N}, \quad R>0, \quad \phi_0(s):=\begin{cases}1, & s\in[0,1];\\ 0, & s\geqslant 2.\end{cases}$$

Справедливы следующие формулы интегрирования по частям:

$$\int\limits_{L_1}^{L_2}\int\limits_0^T \phi(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\big(v_x(x,t)+v^2(x,t)\big)\,dt\,dx=$$

$$=-\int\limits_{L_1}^{L_2}\phi_1(x)[v_{0x}(x)+v_0^2(x)]\,dx-\int\limits_0^T\int\limits_{L_1}^{L_2}[v_x(x,t)+v^2(x,t)]\phi'(x,t)\,dx\,dt=$$

$$= -\int\limits_{L_1}^{L_2} \phi_1(x)[v_{0x}(x) + v_0^2(x)]\,dx - \int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} v^2(x,t)\phi'(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int\limits_0^T v(x,t)\phi'(x,t)\Big|_{x=L_1}^{x=L_2} dt + \int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} v(x,t)\phi'_x(x,t)\,dx\,dt, \tag{46}$$

$$\int\limits_{L_1}^{L_2} \int\limits_0^T \phi(x,t)v_x(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_0^T \phi(x,t)v(x,t)\Big|_{x=L_1}^{x=L_2} dt - \int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} \phi_x(x,t)v(x,t)\,dx\,dt. \tag{47}$$

Умножим обе части уравнения (2) на функцию $\phi(x,t)$ и проинтегрируем по области $(x,t) \in \in [L_1, L_2] \times [0,T]$. Тогда с учётом начального условия (3) и равенств (46), (47) получим соотношение

$$\int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} v(x,t)[-\phi'_x(x,t) + \phi_x(x,t)]\,dx\,dt + \int\limits_0^T v(x,t)[\phi'(x,t) - \phi(x,t)]\Big|_{x=L_1}^{x=L_2} dt +$$

$$+ \int\limits_{L_1}^{L_2} \phi_1(x)[v_{0x}(x) + v_0^2(x)]\,dx = -\int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} \phi'(x,t)v^2(x,t)\,dx\,dt. \tag{48}$$

Справедлива следующая оценка:

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} v(x,t)[-\phi'_x(x,t) + \phi_x(x,t)]\,dx\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} \frac{|-\phi'_x(x,t) + \phi_x(x,t)|^2}{-\phi'(x,t)}\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} \big(-\phi'(x,t)\big)v^2(x,t)\,dx\,dt. \tag{49}$$

Из равенства (48) с учётом (49) имеем

$$\frac{1}{4} \int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} \frac{|-\phi'_x(x,t) + \phi_x(x,t)|^2}{-\phi'(x,t)}\,dx\,dt + \int\limits_0^T v(x,t)[\phi'(x,t) - \phi(x,t)]\Big|_{x=L_1}^{x=L_2} dt +$$

$$+ \int\limits_{L_1}^{L_2} \phi_1(x)[v_{0x}(x) + v_0^2(x)]\,dx \geqslant 0. \tag{50}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_{L_1}^{L_2} \frac{|-\phi'_x(x,t) + \phi_x(x,t)|^2}{-\phi'(x,t)}\,dx\,dt = \int\limits_{L_1}^{L_2} \frac{|\phi_{1x}(x)|^2}{\phi_1(x)}\,dx \int\limits_0^T \frac{|-\phi'_2(t) + \phi_2(t)|^2}{-\phi'_2(t)}\,dt. \tag{51}$$

Положив $L_1 = -\sqrt{2}R$ и $L_2 = \sqrt{2}R$, из (50) ввиду (51) получим неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\phi_{1x}(x)|^2}{\phi_1(x)}\,dx \int\limits_0^T \frac{|-\phi'_2(t) + \phi_2(t)|^2}{-\phi'_2(t)}\,dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x)[v_{0x}(x) + v_0^2(x)]\,dx \geqslant 0, \tag{52}$$

при этом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\phi_{1x}(x)|^2}{\phi_1(x)}\,dx = \frac{1}{R}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{|\phi_{0y}(y^2)|^2}{\phi_0(y^2)}\,dy \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Предположим, что $v_{0x}(x) + v_0^2(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда в пределе при $R \to +\infty$ из неравенства (52) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [v_{0x}(x) + v_0^2(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Если функция $v_0(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ такова, что $v_{0x}(x) + v_0^2(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и выполнено неравенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [v_{0x}(x) + v_0^2(x)]\,dx < 0,$$

то классического решения задачи Коши (2), (3) не существует ни для какого $T > 0$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00056).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сравнительный анализ аналитических и эмпирических методик оценки текущих параметров надёжности радиолокационных комплексов мониторинга / А.В. Тимошенко, Д.В. Калеев, А.Ю. Перлов [и др.] // Изв. вузов. Электроника. — 2020. — Т. 25, № 3. — С. 244–254.
2. Корпусов, М.О. О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Гамильтона–Якоби / М.О. Корпусов // Мат. заметки. — 2013. — Т. 93, № 1. — С. 81–95.
3. Корпусов, М.О. О разрушении решения нелокального уравнения с градиентной нелинейностью / М.О. Корпусов // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2012. — Т. 11. — С. 45–53.
4. Корпусов, М.О. О критическом показателе “мгновенное разрушение” versus “локальная разрешимость” в задаче Коши для модельного уравнения соболевского типа / М.О. Корпусов, А.А. Панин, А.Е. Шишков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2021. — Т. 85, № 1. — С. 118–153.
5. О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений теплоэлектрической модели / М.О. Корпусов, А.Ю. Перлов, А.В. Тимошенко, Р.С. Шафир // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 5. — С. 759–772.
6. О глобальной во времени разрешимости одной нелинейной системы уравнений теплоэлектрической модели с квадратичной нелинейностью / М.О. Корпусов, А.Ю. Перлов, А.В. Тимошенко, Р.С. Шафир // Теор. мат. физика. — 2023. — Т. 217, № 2. — С. 378–390.
7. Панин, А.А. О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра / А.А. Панин // Мат. заметки. — 2015. — Т. 97, № 6. — С. 884–903.

THE CAUCHY PROBLEM FOR AN NONLINEAR WAVE EQUATION

© 2024 / **M. V. Artemeva[1], M. O. Korpusov[2]**

[1,2]Lomonosov Moscow State University, Russia
[2]People Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Russia
e-mail: [1]artemeva.mv14@physics.msu.ru, [2]korpusov@gmail.com

A heat-electric $(1+1)$-dimensional model of semiconductor heating in an electric field is considered. For the corresponding Cauchy problem, the existence of a classical solution that is short-lived in time is proved, a global a priori estimate is obtained in time, and a result is obtained about the absence of even a classical solution local in time.

Keywords: nonlinear Sobolev type equation, Cauchy problem in stripe, local solvability, classical solution

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-11-00056).

REFERENCES

1. Tymoshenko, A.V., Kalyaev, D.V., Perlov, A.Yu. [et al.], Comparative analysis of analytical and empirical methods of assessment of radar monitoring systems current reliability parameters, *Proc. of univ. Electronics*, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 244–254.
2. Korpusov, M.O., On the blow-up of the solution of an equation related to the Hamilton–Jacobi equation, *Math. Notes*, 2013, vol. 93, pp. 90–101.
3. Korpusov, M.O., The destruction of the solution of the nonlocal equation with gradient nonlinearity, *Bull. South Ural State Univ. Ser. Math. Modelling, Programming & Comp. Software*, 2012, vol. 11, pp. 45–53.
4. Korpusov, M.O., Panin, A.A., and Shishkov, A.E., On the critical exponent "instantaneous blow-up" versus "local solubility" in the Cauchy problem for a model equation of Sobolev type, *Izvestiya: Mathematics*, 2021, vol. 85, no. 1, pp. 111–144.
5. Korpusov, M.O., Perlov, A.Yu., Tymoshenko, A.V., and Shafir, R.S., On the blow-up of the solution of a nonlinear system of equations of a thermal-electrical model, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 5, pp. 850–861.
6. Korpusov, M.O., Perlov, A.Yu., Tymoshenko, A.V., and Shafir, R.S., Global-in-time solvability of a nonlinear system of equations of a thermal–electrical model with quadratic nonlinearity, *Theor. Math. Phys.*, 2023, vol. 217, no. 2, pp. 1743–1754.
7. Panin, A.A., On local solvability and blow-up of solutions of an abstract nonlinear Volterra integral equation, *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 892–908.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1312–1324

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕЖАНДРА, СОДЕРЖАЩЕГО ДВА ПАРАМЕТРА

А. В. Глушак

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: aleglu@mail.ru

Поступила в редакцию 23.06.2024 г., после доработки 23.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

С помощью понятия дробного интеграла от функции по другой функции построены операторы преобразования, позволяющие доказать разрешимость начальных задач для абстрактного сингулярного уравнения Лежандра, содержащего два параметра. Приведены примеры.

Ключевые слова: начальная задача, сингулярное дифференциальное уравнение Лежандра, дробный интеграл от функции по другой функции, оператор движения по параметру, оператор преобразования, разрешимость

DOI: 10.31857/S0374064124100028, EDN: JTZRKD

ВВЕДЕНИЕ

Исследование ряда физических процессов опирается на решение уравнений, содержащих оператор Лапласа, которые путём разделения переменных в системах криволинейных координат приводят к дифференциальным уравнениям с сингулярностью. При наличии определённой симметрии эти уравнения превращаются в уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) или Лежандра.

Начальные задачи для классического уравнения ЭПД были исследованы во многих работах (см. введения в монографиях [1, 2]). В статьях [3, 4] автора получены результаты для абстрактных уравнений.

В настоящей работе в банаховом пространстве E при $t>0$ рассматривается уравнение Лежандра

$$u''(t)+\frac{(\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^q(2t))'}{\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^q(2t)}u'(t)+\left(\frac{k}{2}+q\right)^2u(t)=Au(t), \tag{1}$$

содержащее два действительных параметра $k,q\in\mathbb{R}$ и линейный замкнутый оператор A.

Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая этому уравнению на множестве $(0,\infty)$.

Дифференциальный оператор в левой части уравнения (1) представляет собой радиальную часть оператора Лапласа–Бельтрами в двухточечно-однородном пространстве и в симметрическом пространстве ранга, равного единице (см. [2, с. 111]). При $q=0$ уравнение (1) является уравнением Лежандра, содержащим один параметр k. Обзор публикаций и исследования ряда однозначно разрешимых задач для абстрактного уравнения Лежандра с одним параметром можно найти в работах [5–8] автора. Так называемая неполная задача Коши для такого уравнения, когда разыскивается решение, стремящееся к нулю при $t\to\infty$, а второе начальное условие при $t=0$ не задаётся, была рассмотрена в статье [8]. Ранее неполная задача Коши для абстрактного волнового уравнения изучалась в работах [9, 10], а для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу — в [11].

Уравнение (1) не входит в рассмотренное в [7] семейство сингулярных дифференциальных уравнений и поэтому требует отдельного изучения.

Одним из методов исследования дифференциальных уравнений является метод операторов преобразования. Напомним, что ненулевой оператор $\mathbb{T}$ называется *оператором преобразования*, сплетающим операторы L и M, если выполнено соотношение $\mathbb{T}\,L=M\,\mathbb{T}$. Подробный обзор теории операторов преобразования см. в [2, гл. 2; 12]. В настоящей работе применён метод операторов преобразования для установления разрешимости начальных задач для уравнения (1) и получены явные формулы их решений.

1. ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ПЕРВОМУ ИНДЕКСУ k ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ И ОПЕРАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЕЖАНДРА

В дальнейшем нам понадобятся понятия левостороннего дробного интеграла от функции $u(t)$ по выбираемой специальным образом функции $g(t)$:

$$I^{\alpha}_{0+,g}u(t)\equiv\left(\frac{d}{dg(t)}\right)^{-\alpha}_{+}u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(g(t)-g(s))^{\alpha-1}\,g'(s)u(s)\,ds,\quad \alpha>0, \tag{2}$$

и левосторонней дробной производной $(d/dg(t))^{\alpha}_{+}u(t)$ по функции $g(t)$ (см. [13, с. 248]).

Оператор в левой части уравнения (1) обозначим через

$$L_{k,q}u(t):=u''(t)+\frac{(\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^q 2t)'}{\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^q(2t)}u'(t)+\left(\frac{k}{2}+q\right)^2u(t). \tag{3}$$

Будем также использовать представления

$$L_{k,q}u(t)=u''(t)+\frac{(\operatorname{sh}^{k+q} t\operatorname{ch}^q t)'}{\operatorname{sh}^{k+q} t\operatorname{ch}^q t}u'(t)+\left(\frac{k}{2}+q\right)^2u(t)=$$

$$=u''(t)+\big((k+q)\operatorname{cth}t+q\operatorname{th}t\big)u'(t)+\left(\frac{k}{2}+q\right)^2u(t), \tag{4}$$

которые получаются из (3) после элементарных преобразований.

Введём в рассмотрение оператор

$$\Phi_k u(t)=\operatorname{sh}^{k-1}t\,u(t). \tag{5}$$

В статье [7] при $t>0$ для достаточно гладких функций $u(t)$ установлены равенства

$$L_{2-k,0}\Phi_k u(t)=\Phi_k L_{k,0}u(t), \tag{6}$$

$$L_{k+2\alpha,0}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}t}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}_{+}u(t)=\left(\frac{1}{\operatorname{sh}t}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}_{+}L_{k,0}u(t),\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Отметим, что в (7) используется формула (2) при $g(t)=\operatorname{ch}t$.

Равенство (7) справедливо для функций, удовлетворяющих условию $u(0)=0$, которое может быть снято при $\alpha\in\mathbb{N}$. Таким образом, операторы Φ_k и $(\operatorname{sh}^{-1}t\,d/dt)^{\alpha}_{+}$ осуществляют движение оператора $L_{k,0}$ по первому индексу. Пусть

$$\mathbb{T}_{k,0}\,u(t)=\frac{2^{k/2}\,\Gamma(k/2+1/2)}{\sqrt{\pi}}\Phi_{2-k}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}t}\frac{d}{dt}\right)^{-k/2}_{+}\frac{u(t)}{\operatorname{sh}t}, \tag{8}$$

тогда, как установлено в [8], при $k>0$ для функций, удовлетворяющих условию $u'(0)=0$, из соотношений (6), (7) вытекает равенство

$$L_{k,0}\,\mathbb{T}_{k,0}\,u(t)=\mathbb{T}_{k,0}\,u''(t), \tag{9}$$

при этом определяемый равенством (8) оператор преобразования $\mathbb{T}_{k,0}$ сохраняет начальные условия, т.е.

$$\mathbb{T}_{k,0}\,u(t)\big|_{t=0}=u(0), \quad \big(\mathbb{T}_{k,0}\,u(t)\big)'\big|_{t=0}=0. \tag{10}$$

Равенство (9) означает, что построен оператор преобразования $\mathbb{T}_{k,0}$, сплетающий операторы $L_{k,0}$ и d^2/dt^2.

При $k>0$, $q=0$ рассмотрим уравнение (1), где оператор A является генератором косинус-оператор-функции (КОФ) $C(t;A)$. Терминологию и примеры генераторов КОФ можно найти в [14, гл. 2.8; 15].

Равенства (9) и (10) фактически означают, что функция $u_{k,0}(t)=\mathbb{T}_{k,0}\,C(t;A)u_0$ удовлетворяет уравнению (1) при $q=0$ и начальным условиям

$$u(0)=u_0, \quad u'(0)=0. \tag{11}$$

Теорема 1 [7]. *Пусть $k>0$, $q=0$, $u_0\in D(A)$ и оператор A является генератором КОФ $C(t;A)$. Тогда функция*

$$u_{k,0}(t)=\mathbb{T}_{k,0}\,C(t;A)u_0=\frac{2^{k/2}\Gamma(k/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)}\operatorname{sh}^{1-k}t\int\limits_0^t(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}s)^{k/2-1}C(s;A)u_0\,ds \tag{12}$$

удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (11).

Операторная функция $P_k(t;A)=\mathbb{T}_{k,0}\,C(t;A)$ названа в [5, 7] операторной функцией Лежандра (ОФЛ). В частном случае, когда оператор $A=(a+1/2)^2$, $a\in\mathbb{R}$, является оператором умножения на число, ОФЛ $P_k(t;A)$ выражается через присоединённую функцию Лежандра первого рода $P_a^{\beta}(\cdot)$ (см. [16, с. 661]):

$$P_k(t;A)=\frac{\Gamma(1-\beta)\operatorname{sh}^{\beta}t}{2^{\beta}}P_a^{\beta}(\operatorname{ch}t), \quad \beta=\frac{1-k}{2}.$$

2. ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ИНДЕКСАМ k, q ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Построим далее оператор преобразования, с помощью которого по известному решению $u_{k,0}(t)=\mathbb{T}_{k,0}\,C(t;A)u_0$ при $q=0$ определим решение $u_{k,q}(t)$ уравнения (1) при $q>0$.

Пусть

$$\Psi_{k,q}u(t)=\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)u(t). \tag{13}$$

В этом случае для определения оператора преобразования в равенстве (2) для левостороннего дробного интеграла от функции $u(t)$ следует выбрать функцию $g(t)=\operatorname{ch}(2t)/2$, а вместо равенств (6), (7) следует, соответственно, использовать соотношения

$$L_{-k,2-q}\Psi_{k,q}u(t)=\Psi_{k,q}L_{k,q}u(t), \tag{14}$$

$$L_{k,q+2\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\right)_+^{\alpha}u(t)=\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\right)_+^{\alpha}L_{k,q}u(t), \quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

Равенство (15) справедливо для функций, удовлетворяющих условию $u(0)=0$, которое может быть снято при $\alpha\in\mathbb{N}$. Таким образом, операторы $\Psi_{k,q}$ и $(\operatorname{sh}^{-1}(2t)\,d/dt)^{\alpha}_{+}$ осуществляют движение оператора $L_{k,q}$ по второму индексу. Пусть

$$\mathbb{T}_{0,q}\,u(t)=\frac{2^q\,\Gamma(q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}}\Psi_{0,2-q}\biggl(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\biggr)^{-q/2}_{+}\frac{u(t)}{\operatorname{sh}(2t)}, \tag{16}$$

тогда при $k>0$, $q>0$ на функциях, удовлетворяющих условию $u'(0)=0$, из соотношений (14), (15) для определяемого равенством (16) оператора $\mathbb{T}_{0,q}$ вытекает равенство

$$L_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\,\mathbb{T}_{0,q}\operatorname{sh}^{k}t\,u(t)=\operatorname{sh}^{-k}t\,\mathbb{T}_{0,q}\operatorname{sh}^{k}t\,L_{k,0}u(t). \tag{17}$$

Введём в рассмотрение оператор

$$\mathbb{T}_{k,q}=\mu_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\,\mathbb{T}_{0,q}\operatorname{sh}^{k}t\,\mathbb{T}_{k,0},\quad \mu_{k,q}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(q/2+1/2)}, \tag{18}$$

который является оператором преобразования, сплетающим операторы $L_{k,q}$ и d^2/dt^2, т.е. на функциях, удовлетворяющих условию $u'(0)=0$, справедливо равенство

$$L_{k,q}\,\mathbb{T}_{k,q}\,u(t)=\mathbb{T}_{k,q}\,u''(t). \tag{19}$$

Действительно, в силу равенств (9) и (16)–(18) имеем

$$L_{k,q}\,\mathbb{T}_{k,q}\,u(t)=\mu_{k,q}L_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\,\mathbb{T}_{0,q}\operatorname{sh}^{k}t\,\mathbb{T}_{k,0}\,u(t)=\mu_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\,\mathbb{T}_{0,q}\operatorname{sh}^{k}t\,L_{k,0}\,\mathbb{T}_{k,0}\,u(t)=$$
$$=\mu_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\,\mathbb{T}_{0,q}\operatorname{sh}^{k}t\,\mathbb{T}_{k,0}\,u''(t)=\mathbb{T}_{k,q}\,u''(t).$$

Как и равенства (6), (7), (9) с помощью представления (4) для оператора $L_{k,q}$, соотношения (14), (15), (17) устанавливаются непосредственной проверкой, которая в некоторых случаях может быть и громоздкой. В п. 3 покажем, что (как и операторы $\mathbb{T}_{k,0}$, $\mathbb{T}_{0,q}$) определяемый равенством (18) оператор преобразования $\mathbb{T}_{k,q}$ будет сохранять начальные условия, т.е.

$$\mathbb{T}_{k,q}\,u(t)\big|_{t=0}=u(0),\quad \bigl(\mathbb{T}_{k,q}\,u(t)\bigr)'\big|_{t=0}=0.$$

3. ЗАДАЧА КОШИ

С учётом установленного равенства (19) построим решение задачи Коши (1), (11). При $u_0\in D(A)$ введём в рассмотрение функцию

$$u_{k,q}(t)=\mathbb{T}_{k,q}\,C(t;A)u_0=\mu_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\,\mathbb{T}_{0,q}\operatorname{sh}^{k}t\,\mathbb{T}_{k,0}\,C(t;A)u_0=$$
$$=\frac{4\Gamma(q/2+1/2)\mu_{k,q}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^{k}t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_0^t(\operatorname{ch}(2t)-\operatorname{ch}(2s))^{q/2-1}\operatorname{sh}^{k}s\,\mathbb{T}_{k,0}\,C(s;A)u_0\,ds=$$
$$=\frac{2^{k/2+2}\,\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^{k}t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_0^t(\operatorname{ch}(2t)-\operatorname{ch}(2s))^{q/2-1}\operatorname{sh}s\int\limits_0^s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\tau)^{k/2-1}C(\tau;A)u_0\,d\tau\,ds=$$
$$=\frac{2^{k/2+2}\,\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2)\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^{k}t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\times$$
$$\times\int\limits_0^t C(\tau;A)u_0\int\limits_\tau^t\operatorname{sh}s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\tau)^{k/2-1}(\operatorname{ch}(2t)-\operatorname{ch}(2s))^{q/2-1}\,d\tau\,ds. \tag{20}$$

Равенство (19) означает, что функция (20) удовлетворяет уравнению (1). Действительно,

$$L_{k,q}u_{k,q}(t)=L_{k,q}\,\mathbb{T}_{k,q}\,C(t;A)u_0=\mathbb{T}_{k,q}\,C''(t)u_0=A\,\mathbb{T}_{k,q}\,C(t;A)u_0=Au_{k,q}(t).$$

Внутренний интеграл в представлении (20) можно вычислить (см. формулу (3.20) в [17]), тогда

$$u_{k,q}(t)=\frac{2^{2-k/2}\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2+q/2)\operatorname{ch}^{k/2}t\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\times$$

$$\times\int\limits_0^t(\operatorname{ch}(2t)-\operatorname{ch}(2\tau))^{k/2+q/2-1}{}_2F_1\left(\frac{k}{2}+q-1,\frac{k}{2};\frac{k+q}{2};\frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\tau}{2\operatorname{ch}t}\right)C(\tau;A)u_0\,d\tau,$$

где ${}_2F_1(\cdot)$ — гипергеометрическая функция.

Покажем далее, что функция (20) удовлетворяет начальным условиям (11). Отметим, что при $t\to 0$ оператор $\mathbb{T}_{k,q}$ действует на функции как оператор преобразования типа Пуассона (см. [2, пп. 2.1.2, 2.1.3])

$$\mathbb{P}_{k,q}C(t;A)u_0=\frac{2\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(q/2)t^{k+q-1}}\int\limits_0^t s^k(t^2-s^2)^{q/2-1}C(s;A)u_0\,ds,$$

который и обладает нужными нам свойствами:

$$\mathbb{P}_{k,q}u(t)\big|_{t=0}=u(0),\quad \big(\mathbb{P}_{k,q}u(t)\big)'\big|_{t=0}=0.$$

Разлагая в соответствующие ряды подынтегральные функции в представлении (20) и используя интегралы 2.2.3.1, 2.2.4.8 из [18], будем иметь

$$\lim_{t\to 0}u_{k,q}(t)=\lim_{t\to 0}\frac{2^{q+1}\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_0^t s(t^2-s^2)^{q/2-1}\int\limits_0^s(s^2-\tau^2)^{k/2-1}u_0\,d\tau\,ds=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(q/2)t^{k+q-1}}\int\limits_0^t s^k(t^2-s^2)^{q/2-1}u_0\,ds=\lim_{t\to 0}\mathbb{P}_{k,q}C(t;A)u_0=u_0.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $k>0$, $q>0$, $u_0\in D(A)$ и оператор A является генератором КОФ $C(t;A)$. Тогда функция (20) является единственным решением задачи (1), (11).*

Доказательство. Для доказательства теоремы, учитывая изложенное выше в п. 3, осталось установить единственность решения задачи (1), (11). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t,s)=f\big(C(s;A)(u_1(t)-u_2(t))\big),$$

где $f\in E^*$ (E^* — сопряжённое пространство), $t,s\geqslant 0$, удовлетворяющую, очевидно, уравнению

$$\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial t^2}+\frac{(\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^q(2t))'}{\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^q(2t)}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t}+\left(\frac{k}{2}+q\right)^2 w(t,s)=\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial s^2},\quad t,s>0,\tag{21}$$

и условиям

$$\lim_{t\to 0}\ w(t,s)=\lim_{t\to 0}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t}=\lim_{s\to 0}\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}=0.\tag{22}$$

Применив по переменной s преобразование Лапласа, из (21), (22) для образа $\hat{w}(t,\lambda)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t^2}+\frac{(\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^q(2t))'}{\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^q(2t)}\frac{\partial\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t}+\left(\frac{k}{2}+q\right)^2\hat{w}(t,\lambda)=\lambda^2\hat{w}(t,\lambda),\quad t>0, \tag{23}$$

$$\lim_{t\to 0}\ \hat{w}(t,\lambda)=\lim_{t\to 0}\frac{\partial\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t}=0. \tag{24}$$

В [19] установлено, что скалярная задача (23), (24) имеет только нулевое решение. Следовательно, $\hat{w}(t,\lambda)=w(t,s)=0$ для любого $s\geqslant 0$. В силу произвольности функционала $f\in E^*$ при $s=0$ получим равенство $u_1(t)\equiv u_2(t)$, тем самым единственность решения рассматриваемой задачи установлена. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $k>0$, $q=2$ и оператор A является генератором КОФ $C(t;A)$. Тогда после вычисления внутреннего интеграла в формуле (20) решение задачи (1), (11) будет иметь вид

$$u_{k,2}(t)=\frac{2^{k/2+2}\,\Gamma(k/2+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}(2t)}\int\limits_0^t C(\tau;A)u_0\int\limits_\tau^t \operatorname{sh}s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\tau)^{k/2-1}\,ds\,d\tau=$$

$$=\frac{2^{k/2+3}\,\Gamma(k/2+3/2)}{k\sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}(2t)}\int\limits_0^t(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\tau)^{k/2}C(\tau;A)u_0\,d\tau=\frac{1}{\operatorname{ch}t}P_{k+2}(t;A)u_0,$$

где $P_{k+2}(t;A)=\mathbb{T}_{k+2,0}\,C(t;A)$ — ОФЛ (см. (12)).

В частном случае если в уравнении (1) $k=q=2$, $A\in\mathbb{R}$, $C(t;A)=\operatorname{ch}(t\sqrt{A})$, то интеграл может быть вычислен:

$$u_{2,2}(t)=\frac{6}{\operatorname{sh}^2 t\operatorname{sh}(2t)}\int\limits_0^t(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\tau)\operatorname{ch}(\tau\sqrt{A})u_0\,d\tau=$$

$$=\frac{6\sqrt{A}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}(t\sqrt{A})u_0-6\operatorname{ch}t\operatorname{sh}(t\sqrt{A})u_0}{(A-1)\sqrt{A}\operatorname{sh}^2 t\operatorname{sh}(2t)}\quad\text{если}\quad A\neq 0,\ A\neq 1. \tag{25}$$

При $A=0$ или $A=1$ в правой части (25) следует вычислить соответствующие пределы, в результате получим

$$u_{2,2}(t)=\begin{cases}\dfrac{6(t\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t)u_0}{\operatorname{sh}^2 t\operatorname{sh}(2t)}, & A=0,\\[2ex] \dfrac{3(\operatorname{sh}2t-2t)u_0}{2\operatorname{sh}^2 t\operatorname{sh}(2t)}, & A=1.\end{cases}$$

4. ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ПЕРВОМУ ИНДЕКСУ k ДЛЯ НЕПОЛНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ И ПРИСОЕДИНЁННАЯ ОПЕРАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЕЖАНДРА

В дальнейшем нас будет интересовать решение уравнения (1), которое при $t\to\infty$ стремится к нулю, поэтому в этом пункте вместо левостороннего дробного интеграла от функции $u(t)$ по выбираемой специальным образом функции $g(t)$ будем использовать понятия правостороннего дробного интеграла

$$I^\alpha_{\infty-,g}u(t)=\left(\frac{d}{dg(t)}\right)^{-\alpha}_{-}u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^\infty(g(s)-g(t))^{\alpha-1}g'(s)u(s)\,ds,\quad \alpha>0, \tag{26}$$

и правосторонней дробной производной $\big(d/dg(t)\big)^\alpha_{-}u(t)$.

В [8] при $t>0$ для достаточно гладких и экспоненциально убывающих функций $u(t)$ установлено равенство

$$L_{k+2\alpha,0}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)_{-}^{\alpha}u(t)=\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)_{-}^{\alpha}L_{k,0}u(t),\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{27}$$

Таким образом, определяемый равенством (5) оператор Φ_k и оператор $(\operatorname{sh}^{-1}t\,d/dt)_{-}^{\alpha}$ осуществляют движение оператора $L_{k,0}$ по первому индексу.

Пусть

$$\hat{\mathbb{T}}_{k,0}\,u(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\Phi_{2-k}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)_{-}^{-k/2}\frac{u(t)}{\operatorname{sh} t}, \tag{28}$$

тогда [8] при $k>0$ для экспоненциально убывающих функций из соотношений (6), (27) вытекает равенство

$$L_{k,0}\,\hat{\mathbb{T}}_{k,0}\,u(t)=\hat{\mathbb{T}}_{k,0}\,u''(t), \tag{29}$$

которое означает, что формулой (28) определён оператор преобразования $\hat{\mathbb{T}}_{k,0}$, сплетающий операторы $L_{k,0}$ и d^2/dt^2.

Поскольку нас интересует решение уравнения (1), которое при $t\to\infty$ стремится к нулю, то требуемое условие будет обеспечено видом оператора A. Будем предполагать, что оператор $A=B^2$, где B — генератор экспоненциально убывающей C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку

$$\|T(t;B)\|\leqslant\Upsilon e^{-\omega t},\quad \Upsilon\geqslant 1,\quad \omega>0. \tag{30}$$

При $k>0$, $\omega>|k/2-1|$, $v_0\in E$, следуя [8], введём в рассмотрение операторную функцию

$$Q_k(t;B)v_0=\hat{\mathbb{T}}_{k,0}\,T(t;B)v_0=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\Phi_{2-k}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)_{-}^{-k/2}\frac{T(t;B)v_0}{\operatorname{sh} t}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\operatorname{sh}^{1-k}t\int\limits_t^{\infty}(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}t)^{k/2-1}T(s;B)v_0\,ds. \tag{31}$$

Сходимость интеграла в (31) при $\omega>|k/2-1|$ обеспечена условием $k>0$ и неравенством (30). Действительно, учитывая интеграл 2.4.14.1 из [18], получаем оценку

$$\|Q_k(t;B)\|\leqslant\frac{\Upsilon\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\operatorname{sh}^{1-k}t\int\limits_t^{\infty}(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}s)^{k/2-1}e^{-\omega t}\,ds\leqslant\Upsilon\sqrt{2}\ \operatorname{sh}^{1/2-k/2}t\ Q_{\omega-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch}t), \tag{32}$$

где $Q_{\omega-1/2}^{k/2-1/2}(\cdot)$ — присоединённая функция Лежандра второго рода, которая при $t\to+\infty$ стремится к нулю, поскольку при $t\to\infty$ главный член асимптотики функции $Q_{\omega-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch}t)$ имеет вид $c_0\operatorname{ch}^{-\omega-1/2}t$ с некоторой постоянной c_0 (см., например, [20, § 7]).

В частности, если $B\in\mathbb{R}$, $B<0$, то $T(t;B)=e^{Bt}$ и (см. интеграл 2.4.14.1 из [18])

$$Q_k(t;B)=-i\sqrt{2}\exp\left\{\frac{k\pi}{2}i\right\}\operatorname{sh}^{1/2-k/2}t\,Q_{-B-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch}t). \tag{33}$$

Операторная функция $Q_k(t;B)$ представляет собой результат применения оператора преобразования $\hat{\mathbb{T}}_{k,0}$ к убывающей полугруппе $T(t;B)$ и называется присоединённой операторной функцией Лежандра (ПОФЛ), а равенство (29) означает, что при $q=0$ функция $u(t)=Q_k(t;B)v_0$ удовлетворяет уравнению (1). Таким образом, справедлива

Теорема 3 [8]. *Пусть $k>0$, $q=0$, $v_0\in D(A)$ и оператор A представим в виде $A=B^2$, где B — генератор C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку (30) при $\omega>|k/2-1|$. Тогда определяемая равенством (31) функция $u_{k,0}(t)=Q_k(t;B)v_0$ удовлетворяет уравнению (1).*

5. ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ИНДЕКСАМ k, q ДЛЯ НЕПОЛНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Построим далее оператор преобразования, с помощью которого по известному решению $u_{k,0}(t)=Q_k(t;B)v_0$ определим решение $u_{k,q}(t)$ уравнения (1) при $q>0$. Пусть

$$\Psi_{k,q}u(t)=\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)u(t). \tag{34}$$

В этом случае для определения оператора преобразования вместо равенств (6), (7) следует соответственно использовать соотношения

$$L_{-k,2-q}\Psi_{k,q}u(t)=\Psi_{k,q}L_{k,q}u(t), \tag{35}$$

$$L_{k,q+2\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\right)_{-}^{\alpha}u(t)=\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\right)_{-}^{\alpha}L_{k,q}u(t),\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{36}$$

Равенство (36) справедливо для экспоненциально убывающих функций $u(t)$. Таким образом, определяемый формулой (34) оператор $\Psi_{k,q}$ и определяемый равенством (26) при $g(t)=\operatorname{ch}(2t)/2$ оператор $(\operatorname{sh}^{-1}(2t)\,d/dt)_{-}^{\alpha}$ осуществляют движение оператора $L_{k,q}$ по второму индексу. Пусть

$$\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\,u(t)=\Psi_{0,2-q}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\right)_{-}^{-q/2}\frac{u(t)}{\operatorname{sh}(2t)}, \tag{37}$$

тогда при $k>0$, $q>0$ для экспоненциально убывающих функций $u(t)$ из соотношений (35), (36) вытекает равенство

$$L_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\,\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^k t\,u(t)=\operatorname{sh}^{-k}t\,\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^k t\,L_{k,0}u(t), \tag{38}$$

которое означает, что построен оператор преобразования

$$\hat{\mathbb{T}}_{k,q}=\operatorname{sh}^{-k}t\,\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^k t\,\hat{\mathbb{T}}_{k,0}, \tag{39}$$

сплетающий операторы $L_{k,q}$ и d^2/dt^2, т.е. для экспоненциально убывающих функций $u(t)$ справедливо равенство

$$L_{k,q}\,\hat{\mathbb{T}}_{k,q}\,u(t)=\hat{\mathbb{T}}_{k,q}\,u''(t). \tag{40}$$

Действительно, в силу равенств (29), (37)–(40) имеем

$$L_{k,q}\,\hat{\mathbb{T}}_{k,q}\,u(t)=L_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\,\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^k t\,\hat{\mathbb{T}}_{k,0}\,u(t)=\operatorname{sh}^{-k}t\,\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^k t\,L_{k,0}\,\hat{\mathbb{T}}_{k,0}\,u(t)=$$
$$=\operatorname{sh}^{-k}t\,\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^k t\,\hat{\mathbb{T}}_{k,0}\,u''(t)=\hat{\mathbb{T}}_{k,q}\,u''(t).$$

Как и в случае равенств (6), (7), (9), используя для оператора $L_{k,q}$ представление (4), соотношения (35), (36), (38) устанавливаются непосредственной проверкой.

6. НЕПОЛНАЯ ЗАДАЧА КОШИ

Равенство (40) означает, что при $v_0\in D(B^2)$ функция

$$u_{k,q}(t)=\hat{\mathbb{T}}_{k,q}\,T(t;B)v_0=\operatorname{sh}^{-k}t\,\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^k t\,\hat{\mathbb{T}}_{k,0}\,T(t;B)v_0=$$
$$=\frac{2^{1-q/2}}{\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_t^{\infty}(\operatorname{ch}(2s)-\operatorname{ch}(2t))^{q/2-1}\operatorname{sh}^k s\,Q_k(s;B)v_0\,ds, \tag{41}$$

которую с учётом (31) можно также представить в виде

$$u_{k,q}(t)=\frac{2^{1-q/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\times$$

$$\times\int\limits_t^\infty(\operatorname{ch}(2s)-\operatorname{ch}(2t))^{q/2-1}\operatorname{sh}s\int\limits_s^\infty(\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}s)^{k/2-1}T(\tau;B)v_0\,d\tau\,ds=$$

$$=\frac{2^{1-q/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_t^\infty T(\tau;B)v_0\int\limits_t^\tau\operatorname{sh}s(\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}s)^{k/2-1}(\operatorname{ch}(2s)-\operatorname{ch}(2t))^{q/2-1}\,ds\,d\tau,\quad(42)$$

удовлетворяет уравнению (1), поскольку в силу (40)

$$L_{k,q}u_{k,q}(t)=L_{k,q}\,\hat{\mathbb{T}}_{k,q}\,T(t;B)v_0=\hat{\mathbb{T}}_{k,q}\,T''(t)v_0=B^2\,\hat{\mathbb{T}}_{k,q}\,T(t;B)v_0=Au_{k,q}(t).$$

Так же как и в (20), внутренний интеграл в представлении (42) можно вычислить, и тогда решение уравнения (1) запишется как

$$u_{k,q}(t)=\frac{2^{1-k/2-q/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2+q/2)\operatorname{ch}^{k/2}t\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\times$$

$$\times\int\limits_t^\infty(\operatorname{ch}(2\tau)-\operatorname{ch}(2t))^{k/2+q/2-1}{}_2F_1\left(\frac{k}{2}+q-1,\frac{k}{2};\frac{k+q}{2};\frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\tau}{2\operatorname{ch}t}\right)T(\tau;B)v_0\,d\tau.\qquad(43)$$

Как уже было отмечено, главный член асимптотики функции $Q_{\omega-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch}t)$ имеет вид $c_0\operatorname{ch}^{-\omega-1/2}t$ с некоторой постоянной c_0, поэтому при $\omega>\max\{k/2+q-2,|1-k/2|\}$, как следует из представления (20) и соотношений (12), (13), функция $u_{k,q}(t)$ удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u'(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u''(t)\|=0.$$

Выясним теперь, какому начальному условию при $t=0$ удовлетворяет функция (43). Если $0<k+q<1,\ v_0\in E$, то в силу оценки (32) и теоремы Лебега после очевидных преобразований получим

$$\lim_{t\to0}u_{k,q}(t)=\lim_{t\to0}\frac{2^{1-k/2-q/2}\sqrt{\pi}\,t}{\Gamma(k/2+q/2)\operatorname{ch}^{k/2}t\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_1^\infty(\operatorname{ch}(2t\xi)-\operatorname{ch}(2t))^{k/2+q/2-1}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{k}{2}+q-1,\frac{k}{2};\frac{k+q}{2};\frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}(t\xi)}{2\operatorname{ch}t}\right)T(t\xi;B)v_0\,d\xi=$$

$$=\frac{2^{1-q}\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2+q/2)}\int\limits_1^\infty(\xi^2-1)^{k/2+q/2-1}v_0\,d\xi=\frac{\Gamma(1/2-k/2-q/2)}{2^q}v_0.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть $k>0,\ q>0,\ k+q<1$ и оператор A представим в виде $A=B^2$, где B — генератор C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку (30) при $\omega>1-k/2$. Тогда при любом выборе $u_0\in D(A)$ функция*

$$u_{k,q}(t)=\frac{2^{q/2+1}}{\Gamma(q/2)\Gamma(1-k/2-q/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_t^\infty(\operatorname{ch}(2s)-\operatorname{ch}(2t))^{q/2-1}\operatorname{sh}^k s\,Q_k(s;B)u_0\,ds$$

является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$u(0)=u_0, \quad \lim_{t\to\infty}\|u(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u'(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u''(t)\|=0.$$

Далее при $k>0$, $q>0$, $k+q\geqslant 1$ для $v_0\in D(A)$ аналогично найдём предел при $t\to 0$ производной функции $u_{k,q}(t)$ с весом t^{k+q}. Имеем

$$\lim_{t\to 0}t^{k+q}u'_{k,q}(t)=\frac{2^{1-q}\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2+q/2)}\lim_{t\to 0}t^{k+q}\frac{d}{dt}\int\limits_1^\infty(\xi^2-1)^{k/2+q/2-1}T(t\xi;B)v_0\,d\xi=$$

$$=\frac{2^{1-q}\sqrt{\pi}}{(k+q)\Gamma(k/2+q/2)}\lim_{t\to 0}t^{k+q+1}\int\limits_1^\infty(\xi^2-1)^{k/2+q/2}T(t\xi;B)B^2v_0\,d\xi.$$

Предел последнего интеграла, с учётом существования дробной степени у оператора $-B$ (см., например, [14, с. 96]), был найден в [8], в результате получим

$$\lim_{t\to 0}t^{k+q}u'_{k,q}(t)=-2^{k/2}\Gamma(k/2+q/2+1/2)(-B)^{1-k-q}v_0.$$

На основании предыдущих рассуждений справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $k>0$, $q>0$, $k+q\geqslant 1$, оператор A представим в виде $A=B^2$, где B — генератор C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку (30) при $\omega>\max\{k/2+q-2,|1-k/2|\}$, и, кроме того, $u_1\in D((-B)^{k+q+1})$. Тогда функция*

$$u_{k,q}(t)=\frac{2^{1-q/2-k}}{\Gamma(q/2)\Gamma(k/2+q/2+1/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\times$$

$$\times\int\limits_t^\infty(\operatorname{ch}(2s)-\operatorname{ch}(2t))^{q/2-1}\operatorname{sh}^k s\,Q_k(s;B)(-B)^{k+q-1}u_1\,ds \tag{44}$$

является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t\to 0}t^k u'(t)=u_1, \quad \lim_{t\to\infty}\|u(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u'(t)\|=\lim_{t\to\infty}\|u''(t)\|=0. \tag{45}$$

Пример 2. Пусть $k>0$, $q=2$ и оператор A представим в виде $A=B^2$, где B — генератор C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку (30) при $\omega>\max\{k/2,|1-k/2|\}$. Тогда по формуле (44) после вычисления внутреннего интеграла будем иметь

$$u_{k,2}(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}(2t)}\int\limits_t^\infty T(\tau;B)v_0\int\limits_t^\tau\operatorname{sh}s(\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}s)^{k/2-1}\,ds\,d\tau=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2+1)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}(2t)}\int\limits_t^\infty(\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}t)^{k/2}T(\tau;B)v_0\,d\tau=\frac{1}{2\operatorname{ch}t}Q_{k+2}(t;B)v_0, \tag{46}$$

где $Q_{k+2}(t;B)$ — ПОФЛ (см. (11)),

$$v_0=-\frac{(-B)^{k+1}u_1}{2^{k/2+1}\Gamma(k/2+3/2)}. \tag{47}$$

Функция (46) является решением задачи (1), (45).

Пример 3. Пусть $k>0$, $q>0$, $k+q\geqslant 1$, $B\in\mathbb{R}$, $B<-\max\{k/2+q-2,|1-k/2|\}$, $T(t;B)=e^{Bt}$, тогда ПОФЛ имеет вид (см. (33))

$$Q_k(t;B)=\mu_k\operatorname{sh}^{1/2-k/2}t\,Q^{k/2-1/2}_{-B-1/2}(\operatorname{ch}t),\quad \mu_k=-i\sqrt{2}\exp\left\{\frac{k\pi}{2}i\right\}.$$

Учитывая интеграл 2.18.4.3 из [16], после очевидных преобразований из равенств (41), (47) получаем

$$u_{k,q}(t)=\frac{2^{1-q/2}\mu_k}{\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_t^\infty(\operatorname{ch}(2s)-\operatorname{ch}(2t))^{q/2-1}\operatorname{sh}^{k/2+1/2}s\,Q^{k/2-1/2}_{-B-1/2}(\operatorname{ch}s)v_0\,ds=$$

$$=\frac{\mu_k}{\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int\limits_t^\infty(\xi^2-\operatorname{ch}^2t)^{q/2-1}(\xi^2-1)^{k/4-1/4}\,Q^{k/2-1/2}_{-B-1/2}(\xi)v_0\,d\xi=$$

$$=-\frac{\Gamma(-B/2-k/4+1/2)\Gamma(-B/2-k/4-q/2+1)}{2^{3k/2+q}\Gamma(k/2+q/2+1/2)\Gamma(1-B)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}2t\operatorname{ch}^{k/2-q-B+1}t}\times$$

$$\times{}_2F_1(-B/2-k/4+1/2,-B/2-k/4-q/2+1;1-B;\operatorname{ch}^{-2}t)(-B)^{k+q-1}u_1. \tag{48}$$

Функция (48) является решением задачи (1), (45).

В частном случае если в уравнении (1) $k=q=2$, $B<-1$, то решение задачи (1), (45) имеет вид

$$u_{2,2}(t)=\frac{B^2(B\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}t)}{3(B^2-1)\operatorname{sh}^2t\operatorname{sh}(2t)}e^{Bt}u_1.$$

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carroll, R.W. Singular and Degenerate Cauchy Problems / R.W. Carroll, R.E. Showalter. — New York : Academic Press, 1976. — 333 p.
2. Ситник, С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. — М. : Физматлит, 2019. — 224 с.
3. Глушак, А.В. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак, О.А. Покручин // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 41–59.
4. Глушак, А.В. Семейство операторных функций Бесселя / А.В. Глушак // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и её приложения. Темат. обзоры. — Т. 187. — М. : ВИНИТИ РАН, 2020. — С. 36—43.
5. Глушак, А.В. Операторная функция Лежандра / А.В. Глушак // Изв. РАН. Сер. Математическая. — 2001. — Т. 65, № 6. — С. 3–14.
6. Глушак, А.В. Однозначно разрешимые задачи для абстрактного уравнения Лежандра / А.В. Глушак // Изв. вузов. Математика. — 2018. — № 7. — С. 3–15.
7. Glushak, A.V. A family of singular differential equations / A.V. Glushak // Lobachevskii J. Math. — 2020. — V. 41, № 5. — P. 763–771.
8. Глушак, А.В. Присоединённая операторная функция Лежандра и неполная задача Коши / А.В. Глушак // Изв. вузов. Математика. — 2022. — № 9 — С. 3–13.
9. Fattorini, H.O. The undetermined Cauchy problem in Banach spaces / H.O. Fattorini // Math. Ann. — 1973. — V. 200, № 5. — P. 103–112.
10. De Laubenfels, R. Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations / R. De Laubenfels. — Springer-Verlag, 1994. — 244 p.

11. Глушак, А.В. Операторная функция Макдональда и неполная задача Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её приложения. Темат. обзоры. — Т. 195. — М. : ВИНИТИ РАН, 2021. — С. 35–43.
12. Катрахов, В.В. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 211–426.
13. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.
14. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — Киев : Выща школа, 1989. — 347 с.
15. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. ВИНИТИ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.
16. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Наука, 2003. — 688 с.
17. Carrol, R.W. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / R.W. Carrol. — North Holland, 1982. — 457 p.
18. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Наука, 1981. — 800 с.
19. Trimeche, K. Transformation integrale de Weyl et theoreme de Paley–Wiener associes a un operateur differentiel singulier sur $(0, \infty)$ / K. Trimeche // J. Math. pur et Appl. — 1981. — V. 60. — P. 51–98.
20. Virchenko, N. Generalized Associated Legendre Functions and their Applications / N. Virchenko, I. Fedotova. — Singapore ; New Jersey ; London ; Hong Kong : World Scientific, 2001. — 196 p.

INITIAL PROBLEMS FOR THE ABSTRACT LEGENDRE EQUATION CONTAINING TWO PARAMETERS

© **2024 / A. V. Glushak**

Belgorod State National Research University, Russia
e-mail: aleglu@mail.ru

Using the concept of a fractional integral of a function over another function, transformation operators are constructed that make it possible to prove the solvability of initial problems for the abstract singular Legendre equation containing two parameters. Examples are given.

Keywords: initial problem, Legendre's singular differential equation, fractional integral of a function over another function, operator of motion with respect to a parameter, transformation operator, solvability

REFERENCES

1. Carroll, R.W. and Showalter, R.E., *Singular and Degenerate Cauchy Problems*, New York: Academic Press, 1976.
2. Sitnik, S.M. and Shishkina, E.L., *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravnenii s operatorami besselya* (Method of Transformation Operators for Differential Equations with Bessel Operators), Moscow: Fizmatlit, 2019.
3. Glushak, A.V. and Pokruchin, O.A., Criterion for the solvability of the Cauchy problem for an abstract Euler–Poisson–Darboux equation, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 39–57.
4. Glushak, A.V., Family of Bessel operator functions, *Itogi Nauki Tekh. Ser.: Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obzory*, Moscow: VINITI RAN, 2020, vol. 187, pp. 36–43.
5. Glushak, A.V., The Legendre operator function, *Izvestiya: Mathematics*, 2001, vol. 65, no. 6, pp. 1073–1083.
6. Glushak, A.V., Uniquely solvable problems for abstract Legendre equation, *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 7, pp. 1–12.
7. Glushak, A.V., A family of singular differential equations, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 5, pp. 763–771.
8. Glushak, A.V., The associated operator Legendre function and the incomplete Cauchy problem, *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 9, pp. 1–10.

9. Fattorini, H.O., The undetermined Cauchy problem in Banach spaces, *Math. Ann.*, 1973, vol. 200, no. 5, pp. 103–112.
10. De Laubenfels, R. *Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations*, Springer-Verlag, 1994.
11. Glushak, A.V., Macdonald operator function and the incomplete Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation, *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obzory*, 2021, vol. 195, pp. 35–43.
12. Katrakhov, V.V. and Sitnik, S.M., The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2018, vol. 64, no. 2, pp. 211–426.
13. Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Boca Raton: CRC Press, 1993.
14. Goldstein, J.A., *Semigroups of Linear Operators and Applications*, New York: Oxford Univ. Press, 1985.
15. Vasil'ev, V.V., Krein, S.G., and Piskarev, S.I., Semigroups of operators, cosine operator functions, and linear differential equations, *J. Sov. Math.*, 1991, vol. 54, no. 4, pp. 1042–1129.
16. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integrals and Series: More Special Functions*, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1990.
17. Carrol, R.W., *Transmutation, Scattering Theory and Special Functions*, North Holland, 1982.
18. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integrals and Series. Elementary Functions*, New York etc.: Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
19. Trimeche, K., Transformation integrale de Weyl et theoreme de Paley–Wiener associes a un operateur differentiel singulier sur $(0,\infty)$, *J. Math. pur et Appl.*, 1981, vol. 60, pp. 51–98.
20. Virchenko, N. and Fedotova, I., *Generalized Associated Legendre Functions and their Applications*, Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 2001.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1325–1333

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956.4

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

© 2024 г. А. Ю. Егорова[1], А. Н. Коненков[2]

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

e-mail: [1]an_batseva@mail.ru, [2]a.konenkov@365.rsu.edu.ru

Поступила в редакцию 08.05.2024 г., после доработки 15.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Рассматривается задача Коши для параболической системы второго порядка с коэффициентами и правой частью, принадлежащими анизотропному пространству Зигмунда. Построена шкала гладкости решений задачи в анизотропных пространствах Зигмунда. Получена априорная оценка решений равномерно-эллиптических систем в изотропных пространствах Зигмунда.

Ключевые слова: задача Коши, параболическая система, эллиптическая система, пространство Зигмунда, априорные оценки

DOI: 10.31857/S0374064124100039, EDN: JTSXEW

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, гл. 4], что если правая часть параболического уравнения второго порядка принадлежит анизотропному пространству Гёльдера $C^{l,\alpha}(\bar{D})$, $l\geqslant 2$, $\alpha\in(0,1)$, в слое $D=\mathbb{R}^n\times(0,T)$, $0<T<\infty$, а начальное условие — классу $C^{l+2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, то ограниченное классическое решение задачи Коши будет принадлежать пространству $C^{l+2,\alpha}(\bar{D})$. Однако для целого показателя гладкости (в частности, при $\alpha=1$), когда правая часть такого уравнения принадлежит пространствам Липшица $C^{l,1}(\bar{D})$, данное утверждение перестаёт быть верным, что вытекает из примера для уравнения Лапласа [2, гл. 4]. В этом случае для уравнения теплопроводности установлено [3], что решение задачи Коши принадлежит более широкому, чем $C^{l+2,1}(\bar{D})$, параболическому пространству Зигмунда $H_{l+3}(\bar{D})$. В статье [4] аналогичный результат получен для решений параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами из весовых анизотропных пространств Зигмунда.

Теория разрешимости задачи Коши для параболических систем в пространствах Гёльдера построена достаточно полно. В работе [5] доказана однозначная разрешимость задачи Коши и получены точные оценки её решения для параболических систем порядка $2p$ в слое D в классе гёльдеровских функций $C^{l,\alpha}(\bar{D})$. Для неограниченной по t области в [6] получена шкала гладкости решений задачи Коши в весовом пространстве Гёльдера $C_\lambda^{k,\alpha}\big(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}\big)$, $k\geqslant 2p$, допускающем не более чем показательный рост при $t\to+\infty$ решения и его производных.

Для параболических систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условиям Дини, в работах [7, 8] установлена единственность классического решения задачи Коши в классе Тихонова с пространственными производными первого и второго порядков из класса Тихонова в каждом слое $\mathbb{R}^n\times(t_1,T]$, $t_1\in(0,T)$. В [9] исследован характер гладкости решений задачи Коши для одномерной по пространственной переменной x однородной параболической системы второго порядка, коэффициенты которой удовлетворяют двойному условию

Дини, а начальное условие непрерывно и ограничено вместе со своими первой и второй производными, и показано, что в этом случае классическое решение задачи имеет ограниченные и непрерывные производные по x до второго порядка включительно и первые — по аргументу t.

В работах [10, 11] методом параболических потенциалов получена шкала гладкости классического решения задачи Коши в анизотропных пространствах Зигмунда для параболической по Петровскому системы второго порядка с постоянными коэффициентами.

В настоящей статье построена шкала гладкости решения задачи Коши для равномерно параболической в смысле Петровского системы второго порядка с переменными коэффициентами из анизотропного пространства Зигмунда $H_l(\bar{D})$, $l \in \mathbb{N}$. Получена априорная оценка решения в этом пространстве. Разрешимость задачи Коши для рассматриваемой системы в пространстве Зигмунда выводится из разрешимости задачи Коши для системы с постоянными коэффициентами в том же пространстве методом продолжения по параметру. Установлена принадлежность решения задачи Коши анизотропному пространству Зигмунда $H_{l+2}(\bar{D})$ при условии, что правая часть системы и начальное условие принадлежат соответствующим пространствам Зигмунда. Вместе со шкалой Гёльдера $C^{l+2,\alpha}(\bar{D})$, $0<\alpha<1$, для решений задачи Коши получается шкала, в которой показатель гладкости принимает как целые, так и нецелые значения.

Решения эллиптической системы уравнений в пространстве $\mathbb{R}^n$ могут быть получены из решений соответствующей параболической системы интегрированием по временно́й переменной от 0 до $+\infty$ (метод спуска). Однако для сходимости интеграла требуется накладывать некоторые условия на коэффициенты системы. Методом спуска также могут быть найдены оценки фундаментальной матрицы решений эллиптической системы [12, гл. 1, § 7]. В работе [13] предложен метод получения оценок фундаментальных решений для эллиптического уравнения, использующий оценки для фундаментального решения параболического уравнения только в конечном по t слое. Используя идею этой работы, мы приводим здесь простой способ получения априорных оценок для решений эллиптических систем, опирающийся на существование и единственность (в определённом классе) решения соответствующей задачи для параболической системы лишь в ограниченной по t области. Из установленных оценок для параболической задачи Коши мы выводим априорные оценки решений эллиптических систем в изотропных пространствах Зигмунда. Для одного эллиптического уравнения произвольного порядка с коэффициентами из класса C^∞ оценки решений краевых задач в пространствах Зигмунда получены в [14, § 4.3].

1. НЕОБХОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Положим $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$. Задача Коши для параболической системы второго порядка с переменными коэффициентами рассматривается в слое $D_T=\mathbb{R}^n\times(0,T)$, $0<T<+\infty$.

Для вектор-функции $g=(g_1,\ldots,g_n)$ введём следующие обозначения первой и второй разностей по аргументу x:

$$\Delta_x g(x)=g(x+\Delta x)-g(x), \quad \Delta_x^2 g(x)=g(x+2\Delta x)-2g(x+\Delta x)+g(x).$$

Разности первого и второго порядков для функции g по аргументу t определяются аналогичным образом.

Обозначим пространство $H_0(D_T)=L_\infty(D_T)$ с нормой $|g|_{0,D_T}=\operatorname{vrai\,sup}_{D_T}|g|$. Пусть

$$[g]_{1,D_T}=\sup_{D_T}\frac{|\Delta_x^2 g(x,t)|}{|\Delta x|}+\sup_{D_T}\frac{|\Delta_t g(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}}.$$

Положим для $\alpha = 1, 2$
$$\langle g\rangle_{\alpha,D_T} = \sup_{D_T} \frac{|\Delta_t^{\alpha} g(x,t)|}{|\Delta t|^{\alpha/2}};$$
для целых $a \geqslant 2$
$$[g]_{a,D_T} = \sum_{|k|+2s=a-1} \left[\partial_x^k \partial_t^s g\right]_{1,D_T}, \quad \langle g\rangle_{\alpha,D_T} = \sum_{|k|+2s=a-2} \left\langle \partial_x^k \partial_t^s g\right\rangle_{2,D_T};$$
для натуральных a
$$|g|_{a,D_T} = \sup_{\substack{D_T\\ |k|+2s\leqslant a-1}} |\partial_x^k \partial_t^s g(x,t)| + [g]_{a,D_T} + \langle g\rangle_{\alpha,D_T}.$$

Через $H_a(\bar{D}_T)$ обозначим пространства Зигмунда функций g, определённых в слое $\bar{D}_T$ и имеющих в нём все производные $\partial_x^k \partial_t^s g$, причём $|k| + 2s < a$, величина $|g|_{a,D_T}$ конечна.

Обозначим через $H_a(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{N}$, изотропные пространства Зигмунда для функций, зависящих только от переменной x; норму в $H_a(\mathbb{R}^n)$ можно определить через уже введённые нормы в пространстве $H_a(\bar{D}_T)$ как $|v|_{a,\mathbb{R}^n} = |v|_{a,D_T}$.

2. ЗАДАЧА КОШИ

В слое D_T для параболического оператора $L = (L_1, \ldots, L_m)^T$ и вектор-функции $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$, где
$$L_i u = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{r,s=1}^{n} a_{ijrs}(x,t) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} b_{ijr}(x,t) \frac{\partial u_j}{\partial x_r} - \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x,t) u_j,$$
начальной вектор-функции $\psi = (\psi_1, \ldots \psi_m)^T$ и правой части $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$ рассмотрим задачу Коши
$$Lu = f, \quad u|_{t=0} = \psi. \tag{1}$$

Предполагаем, что система (1) равномерно параболическая в слое $\bar{D}_T$ в смысле Петровского [12, с. 9] и для некоторого натурального l выполняются условия
$$a_{ijrs}, b_{ijr}, c_{ij} \in H_l(\bar{D}_T), \quad |a_{ijrs}|_{l,D_T}, |b_{ijr}|_{l,D_T}, |c_{ij}|_{l,D_T} \leqslant A. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $l \in \mathbb{N}$, для коэффициентов равномерно параболической по Петровскому системы (1) выполнены условия (2) и $f \in H_l(\bar{D}_T)$, $\psi \in H_{l+2}(\mathbb{R}^n)$. Тогда классическое, ограниченное в слое $\bar{D}_T$ вместе со своими пространственными производными до второго порядка включительно, решение задачи Коши (1) принадлежит пространству $H_{l+2}(\bar{D}_T)$ и справедлива оценка*
$$|u|_{l+2,D_T} \leqslant C(|f|_{l,D_T} + |\psi|_{l+2,\mathbb{R}^n}),$$
где константа C зависит от m, n, l, T, A и константы из условия равномерной параболичности оператора L.

Замечание 1. Единственность решения задачи Коши (1) в классе функций, ограниченных в D_T вместе со своими пространственными производными до второго порядка включительно, следует из [7, 8].

Замечание 2. Существование решения задачи Коши (1) из анизотропного пространства Гёльдера $C^{l+1,\alpha}(\bar{D}_T)$ для любого $\alpha \in (0,1)$ при наложенных условиях на данные задачи вытекает из [5].

Доказательство теоремы 1. Будем следовать известной идее о представлении оператора с переменными коэффициентами как возмущения оператора с постоянными коэффициентами, "замороженными" в некоторой точке. Для параболических уравнений второго порядка такой подход для построения шкалы гладкости решений задачи Коши в пространствах Зигмунда был использован в [4].

Пусть $l=1$ и младшие коэффициенты оператора в левой части системы (1) отсутствуют, т.е.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{r,s=1}^{n}a_{ijrs}(x,t)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_r\partial x_s}=f_i(x,t),\quad i=\overline{1,n}.$$

Достаточно доказать утверждение теоремы в слое D_τ, где $\tau>0$ — достаточно малое число. Если в слое D_τ вектор-функция $u_i(x,t)$ является решением задачи Коши (1), то $u_i^*(x,t)=u(\tau^{1/2}x,\tau t)$ является в слое D_1 решением задачи

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{m}a_{ijrs}^*(x,t)\frac{\partial^2 u_j^*}{\partial x_r\partial x_s}=f_i^*,\quad u_i^*|_{t=0}=\psi_i^*,$$

где $a_{ijrs}^*(x,t)=a_{ijrs}(\tau^{1/2}x,\tau t)$, $f_i^*(x,t)=\tau^{-1}f_i(\tau^{1/2}x,\tau t)$, $\psi_i^*(x)=\psi_i(\tau^{1/2}x)$.

Так как пространство Зигмунда $H_1(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство Гёльдера $C^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ [15, гл. 4], то справедливо неравенство

$$[a_{ijrs}^*(\cdot,t)]_{1/2,\mathbb{R}^n}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ |\Delta x|>0}\frac{|\Delta_x a_{ijrs}^*(x,t)|}{|\Delta x|^{1/2}}=\tau^{1/4}[a_{ijrs}(\cdot,\tau t)]_{1/2,\mathbb{R}^n}\leqslant$$

$$\leqslant C\tau^{1/4}|a_{ijrs}|_{1,D_\tau}\leqslant CA\tau^{1/4},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Поэтому, чтобы доказать включение $u\in H_3(\bar D_\tau)$, достаточно установить требуемое утверждение в слое D_1 при условии, что система (1) удовлетворяет условию равномерной параболичности в смысле Петровского и полунормы коэффициентов в пространстве Зигмунда достаточно малы:

$$[a_{ijrs}]_{1,D_1}\leqslant A\tau^{1/2},\quad [a_{ijrs}(\cdot,t)]_{1/2,\mathbb{R}^n}\leqslant CA\tau^{1/4},\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{3}$$

Покажем, что при достаточно малых τ из условий $a_{ijrs}\in H_1(\bar D_1)$, (2), (3) и равномерной параболичности системы для любой функции $u\in H_3(\bar D_1)$ имеет место априорная оценка

$$|u|_{3,D_1}\leqslant C\big(|Lu|_{1,D_1}+|u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n}\big). \tag{4}$$

Тогда разрешимость задачи Коши для системы (1) в пространстве $H_3(\bar D_1)$ выводится из априорной оценки (4) и существования решения задачи для системы с постоянными коэффициентами [11] методом продолжения по параметру [2, гл. 5].

Пусть функция $\varsigma\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0\leqslant\varsigma(x)\leqslant 1$, причём $\varsigma(x)=0$ при $|x|\geqslant 2$ и $\varsigma(x)=1$ при $|x|\leqslant 1$. Для $R\geqslant 1$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$ положим $\varsigma_R^\xi(x)=\varsigma(R^{-1}(x-\xi))$. Обозначим через $G_R(P)=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon |x-\xi|<R,\ 0<t<1\}$ цилиндр радиуса R в слое D_1 с осью, проходящей через точку P. Зафиксируем функцию $u\in H_3(\bar D_1)$, точку $P=(\xi,\chi)\in D_1$ и число $R\geqslant 1$. Параболический оператор с коэффициентами, "замороженными" в точке P, обозначим через $L(P)=(L_1(P),\ldots,L_m(P))$, где

$$L_i(P)=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{r,s=1}^{n}a_{ijrs}(P)\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_s}.$$

Использовав оценку решений задачи Коши в пространстве Зигмунда $H_3(\bar{D}_1)$ для однородной параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами [11], получим

$$|\varsigma_R^P u|_{3,D_1} \leqslant C\big(|\varsigma_R^\xi u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |L(P)(\varsigma_R^P u)|_{1,D_1}\big) \leqslant$$

$$\leqslant C\big(|\varsigma_R^\xi u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |\varsigma_R^P Lu|_{1,D_1} + |\varsigma_R^P (L-L(P))u|_{1,D_1} + R^{-1}|u|_{3,D_1}\big) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(|u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |Lu|_{1,D_1} + \sum_{r,s=1}^n \left|\varsigma_R^P (a_{rs} - a_{rs}(P))\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\right|_{1,D_1} + R^{-1}|u|_{3,D_1}\right). \qquad (5)$$

Оценка первых двух слагаемых в правой части неравенства (5) получена с помощью соответствующих неравенств для функции $\varsigma_R^\xi u(\cdot,0) \in H_3(\mathbb{R}^n)$ из леммы 1 [4]. Для третьего слагаемого из неравенства (5) применим оценку [4] для нормы произведения

$$\left|\varsigma_R^P (a_{ijrs} - a_{ijrs}(P))\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\right|_{1,D_1} = \left|\varsigma_R^P (a_{ijrs} - a_{ijrs}(P))\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\right|_{1,G_{4R}(P)} \leqslant$$

$$\leqslant C|\varsigma_R^P|_{1,G_{8R}(P)}|a_{ijrs} - a_{ijrs}(P)|_{1,G_{16R}(P)}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\right|_{1,G_{16R}(P)} \leqslant$$

$$\leqslant C|\varsigma_R^P|_{1,D_1}|a_{ijrs} - a_{ijrs}(P)|_{1,G_{16R}(P)}|u|_{3,D_1}.$$

Норма $|\varsigma_R^P|_{1,D_1}$ ограничена сверху константой, не зависящей от P и $R \geqslant 1$. С учётом (3) имеем

$$|(a_{ijrs} - a_{ijrs}(P))|_{0,G_{16R}(P)} \leqslant C[a_{ijrs}(\cdot,\chi)]_{1/2,\mathbb{R}^n}\tau^{1/4}R^{1/2} + [a_{ijrs}]_{1,D_1} \leqslant CA(\tau^{1/4}R^{1/2} + \tau^{1/2}),$$

$$|a_{ijrs} - a_{ijrs}(P)|_{1,G_{16R}(P)} = [a_{ijrs}]_{1,G_{16R}(P)} \leqslant [a_{ijrs}]_{1,D_1} \leqslant A\tau^{1/2}.$$

Тогда неравенство (5) примет вид

$$|\varsigma_R^P u|_{3,D_1} \leqslant C\big(|u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |Lu|_{1,D_1} + (\tau^{1/4}R^{1/2} + \tau^{1/2} + R^{-1})|u|_{3,D_1}\big),$$

где C не зависит от R, P, τ. Используя неравенство $|u|_{3,D_1} \leqslant \sup_{P\in D_1}|\varsigma_R^P u|_{3,D_1}$ [4], заключаем, что

$$|u|_{3,D_1} \leqslant C\big(|u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |Lu|_{1,D_1} + (\tau^{1/4}R^{1/2} + \tau^{1/2} + R^{-1})|u|_{3,D_1}\big).$$

Выбирая сначала R достаточно большим, а затем τ настолько малым, чтобы множитель при $|u|_{3,D_1}$ в правой части последнего неравенства стал равным $1/2$, получаем (4).

Теперь докажем утверждение теоремы для $l=1$ при наличии в параболическом операторе L младших коэффициентов $b_{ijr}, c_{ij} \in H_1(\bar{D}_T)$. Зафиксируем некоторое число $\alpha \in (0,1)$. Так как при $l \in \mathbb{N}$ пространства Зигмунда $H_l(\bar{D}_T)$ вложены в параболические пространства Гёльдера $C^{l-1,\alpha}(\bar{D}_T)$ [15, гл. 4], то задача (1) является задачей Коши с коэффициентами и правой частью из пространства $C^{0,\alpha}(\bar{D}_T)$ и начальной функцией из $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение задачи Коши $u \in C^{2,\alpha}(\bar{D}_T)$ и для его нормы в этом пространстве справедлива оценка [5]

$$|u|_{2+\alpha,D_T} \leqslant C(|f|_{\alpha,D_T} + |\psi|_{2+\alpha,\mathbb{R}^n}) \leqslant C(|f|_{1,D_T} + |\psi|_{3,\mathbb{R}^n}).$$

Рассмотрим оператор $L_0 = (L_{01},\ldots,L_{0m})^T$, где

$$L_{0i}u = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \sum_{r,s=1}^m a_{ijrs}(x,t)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_r \partial x_s}.$$

Тогда
$$L_0u = f_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{m} b_{ijr}(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x_r} + c_i(x,t)u_i = F \in H_1(\bar{D}_T)$$
и справедливо неравенство $|F|_{1,D_T} \leqslant C(|f|_{1,D_T} + |\psi|_{3,\mathbb{R}^n})$. По предыдущему $u \in H_3(\bar{D}_T)$ и $|u|_{3,D_T} \leqslant C(|f|_{1,D_T} + |\psi|_{3,\mathbb{R}^n})$. Таким образом, утверждение теоремы установлено для $l = 1$.

Для $l \geqslant 2$ доказательство проведём по индукции. Достаточно доказать оценки для производных решения по x. Пусть теорема справедлива для некоторого $l \geqslant 1$ и $f \in H_{l+1}(\bar{D}_T)$, $\psi \in H_{l+3}(\mathbb{R}^n)$. Тогда производные $\partial u/\partial x_j$, $j = \overline{1,n}$, являются в слое D_T решениями задач Коши
$$Lw_j = F_j, \quad w_j|_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j},$$
где правые части системы
$$F_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} + L\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial(Lu)}{\partial x_j}$$
содержат пространственные производные u порядка не выше второго. По предположению индукции
$$F_j \in H_l(\bar{D}_T), \quad |F_j|_{l,D_T} \leqslant C\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{l,D_T} + |f|_{l,D_T} + \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right|_{l+2,\mathbb{R}^n}\right).$$
Отсюда имеем
$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in H_{l+2}(\bar{D}_T), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{l+2,D_T} \leqslant C(|f|_{l+1,D_T} + |\psi|_{l+3,\mathbb{R}^n}).$$
Теорема доказана.

3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим равномерно эллиптический по Петровскому оператор $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m)^T$, действующий на вектор-функции $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_m(x))^T$, где
$$\mathcal{L}_i v = \sum_{j=1}^{m}\sum_{r,s=1}^{n} a_{ijrs}(x)\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} b_{ijr}(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_r} + \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x)v_j, \quad i = \overline{1,m}.$$

Теорема 2. *Пусть $l \in \mathbb{N}$, коэффициенты равномерно эллиптического по Петровскому оператора $\mathcal{L}$ и вектор-функция f принадлежат пространству Зигмунда $H_l(\mathbb{R}^n)$. Если вектор-функция $v \in H_{l+2}(\mathbb{R}^n)$ является в $\mathbb{R}^n$ решением системы $\mathcal{L}v = f$, то справедлива оценка*
$$|v|_{l+2,\mathbb{R}^n} \leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n} + |f|_{l,\mathbb{R}^n}).$$

Доказательство. Установим утверждение теоремы для $l = 1$. Рассмотрим равномерно-параболический по Петровскому оператор $L = \partial_t - \mathcal{L}$. Функция $u(x,t) = tv(x)$ является в слое D_1 решением задачи Коши
$$Lu = v(x) - tf(x) = g(x,t), \quad u|_{t=0} = 0. \tag{6}$$
По теореме 1
$$|v|_{3,\mathbb{R}^n} = |u(\cdot,1)|_{3,\mathbb{R}^n} \leqslant |u|_{3,D_1} \leqslant C|g|_{1,D_1} \leqslant C(|v|_{1,D_1} + |tf|_{1,D_1}) \leqslant C(|v|_{1,\mathbb{R}^n} + |f|_{1,\mathbb{R}^n}).$$
Чтобы избавиться от нормы $|v|_{1,\mathbb{R}^n}$ в правой части последнего неравенства, воспользуемся представлением решения в виде объёмного потенциала: в силу единственности [12, гл. 3,

§ 2] решения задачи Коши (6) в анизотропном пространстве Гёльдера $C^{2,\alpha}(\bar{D}_1)$, $0<\alpha<1$, оно может быть записано в виде

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,t,y,\tau)g(y,\tau)\,dy\,d\tau,$$

где $\Gamma(x,t,y,\tau)$ — фундаментальная матрица решений оператора L. Используя для неё оценки [12, гл. 1], имеем

$$|\partial_x^k u(x,t)|\leqslant|g|_{0,D_1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_x^k\Gamma(x,t,y,\tau)|\,dy\,d\tau\leqslant C|g|_{0,D_1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-(n+|k|)/2}\exp\left\{-c\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right\}dy\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant Ct^{1-|k|/2}|g|_{0,D_1}\leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+|f|_{0,\mathbb{R}^n}),\quad |k|\leqslant 1,\ (x,t)\in\bar{D}_1,$$

откуда вытекает оценка

$$|v|_{1,\mathbb{R}^n}\leqslant C\left(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+\sum_{i=1}^n|\partial_i v|_{0,\mathbb{R}^n}\right)=C\left(|u(\cdot,1)|_{0,\mathbb{R}^n}+\sum_{i=1}^n|\partial_i u(\cdot,1)|_{0,\mathbb{R}^n}\right)\leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+|f|_{0,\mathbb{R}^n}).$$

Для $l\geqslant 2$ доказательство по индукции. Пусть утверждение теоремы справедливо для некоторого $l\geqslant 1$, коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ и вектор-функция f принадлежат пространству $H_{l+1}(\mathbb{R}^n)$, а функция $v\in H_{l+3}(\mathbb{R}^n)$ — решение системы $\mathcal{L}v=f$. Снова используя теорему 1, получаем

$$|v|_{l+3,\mathbb{R}^n}=|u(\cdot,1)|_{l+3,\mathbb{R}^n}\leqslant|u|_{l+3,D_1}\leqslant C|g|_{l+1,D_1}\leqslant C(|v|_{l+1,D_1}+|tf|_{l+1,D_1})\leqslant$$
$$\leqslant C(|v|_{l+1,\mathbb{R}^n}+|f|_{l+1,\mathbb{R}^n})\leqslant C(|v|_{l+2,\mathbb{R}^n}+|f|_{l+1,\mathbb{R}^n})\leqslant$$
$$\leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+|f|_{l,\mathbb{R}^n}+|f|_{l+1,\mathbb{R}^n})\leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+|f|_{l+1,\mathbb{R}^n}).$$

Теорема доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.
2. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер ; пер. с англ. Л.П. Купцова ; под ред. А.К. Гущина. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 464 с.
3. Коненков, А.Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 6. — С. 820–831.
4. Коненков, А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 6. — С. 867–873.
5. Солонников, В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. — 1965. — Т. 83. — С. 3–163.
6. Черепова, М.Ф. О гладкости решения задачи Коши для параболической системы / М.Ф. Черепова // Вестн. МЭИ. — 2009. — № 6. — С. 38–44.

7. Baderko, E.A. Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // Appl. Anal. — 2016. — V. 95, № 7. — P. 1570–1580.
8. Бадерко, Е.А. О единственности решения задачи Коши для параболических систем / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 6. — С. 822–830.
9. Бадерко, Е.А. О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости / Е.А. Бадерко, К.Д. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1606–1618.
10. Егорова, А.Ю. Задача Коши для системы параболических уравнений в анизотропных пространствах Зигмунда / А.Ю. Егорова // Вестн. БГУ. Математика, информатика. — 2023. — № 3. — С. 14–22.
11. Егорова, А.Ю. Задача Коши для неоднородных параболических систем в анизотропных пространствах Зигмунда / А.Ю. Егорова // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. — 2024. — Т. 16, № 1. — С. 5–12.
12. Эйдельман, С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 446 с.
13. Коненков, А.Н. О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 2. — С. 247–256.
14. Трибель, Х. Теория функциональных пространств / Х. Трибель ; пер. с англ. П.И. Лизоркина. — М. : Мир, 1986. — 448 с.
15. Бесов, О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. — М. : Наука, 1996. — 475 с.

THE CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEM WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN ANISOTROPIC ZYGMUND SPACES

© 2024 / A. Yu. Egorova[1], A. N. Konenkov[2]

Ryazan State University named after S.A. Esenin, Russia
e-mail: [1]an_batseva@mail.ru, [2]a.konenkov@365.rsu.edu.ru

The Cauchy problem for a second-order parabolic system with coefficients and the right hand side which belong to the Zygmund anisotropic space is considered. A smoothness scale of the Cauchy problem solutions in anisotropic Zygmund spaces is obtained. A priori estimates of solutions for uniformly elliptic systems in isotropic Zygmund spaces are derived.

Keywords: Cauchy problem, parabolic system, elliptic system, Zygmund space, a priori estimates

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., and Ural'tseva, N.N., *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Providence: AMS, 1968.
2. Gilbarg, D. and Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977.
3. Konenkov, A.N., The Cauchy problem for the heat equation in Zygmund spaces, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 860–872.
4. Konenkov, A.N., The Cauchy problem for parabolic equations in Zygmund spaces, *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 6, pp. 867–873.
5. Solonnikov, V.A., On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1965, vol. 83, pp. 3–163.
6. Cherepova, M.F., On the smoothness of the solution of Cauchy's problem for the parabolic system, *Bulletin MPEI*, 2009, no. 6, pp. 38–44.
7. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem, *Appl. Anal.*, 2016, vol. 95, no. 7, pp. 1570–1580.
8. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness of the solution of a the Cauchy problem for parabolic systems, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55. no. 6, pp. 806–814.

9. Baderko, E.A. and Fedorov, K.D., On the smoothness of the Poisson potential for second-order parabolic systems on the plane, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1613–1626.
10. Egorova, A.Yu., The Cauchy problem for parabolic system of equations in anisotropic Zydmund spaces, *Bulletin of BSU. Mathematics, computer science*, 2023, no. 3, pp. 14–22.
11. Egorova, A.Yu., The Cauchy problem for inhomogeneous parabolic systems in anisotropic Zydmund spaces, *Bulletin of the South Ural State Univ. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 5–12.
12. Eidel'man, S.D., *Parabolic Systems*, Elsevier, 1969.
13. Konenkov, A.N., On the relationship between fundamental solutions of elliptic and parabolic equations, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 2, pp. 263–273.
14. Triebel, H., *Theory of Function Spaces*. Basel: Birkhäuser, 1983.
15. Besov, O.V., Ilyin, V.P., and Nikol'sky, S.M. *Integral Representation of Functions and Embedding Theorems*, Washington DC: V.H. Wilson and Sons, 1978.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1334–1349

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА

 А. А. Косов[1], Э. И. Семенов[2]

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения РАН, г. Иркутск

e-mail: [1]kosov_idstu@mail.ru, [2]edwseiz@gmail.com

Поступила в редакцию 18.05.2024 г., после доработки 03.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Найдены точные решения некоторых многомерных обобщённых уравнений Монжа–Ампера в виде суперпозиции квадратичной формы пространственных переменных и решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, порождаемых исходными.

Ключевые слова: многомерное уравнение Монжа–Ампера, точное решение

DOI: 10.31857/S0374064124100046, EDN: JTRSCV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В задачах газовой динамики встречается уравнение Монжа–Ампера [1–3] вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=G(x,y), \tag{1}$$

где $u=u(x,y)$ — искомая, а $G(x,y)$ — заданная функции; левая часть уравнения является определителем матрицы Гессе (гессианом) [4, с. 200] от функции двух переменных. Как отмечено в [1], уравнения газовой динамики для плоских одномерных течений с переменной энтропией можно свести к уравнению Монжа–Ампера (1), используя метод (преобразование) М.Х. Мартина [5]. В справочниках [2, с. 774–786; 3, с. 98–107] приведены некоторые частные решения уравнения (1), а также указаны общие решения в параметрическом виде для случаев $G=0$ и $G=\mathrm{const}<0$.

В монографии [6] изучается многомерное уравнение Монжа–Ампера относительно неизвестной функции любого числа переменных

$$\det H(u)=f(\mathbf{x},u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n}), \tag{2}$$

где $u=u(\mathbf{x})$ — искомая функция переменной $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$; $H(u)=\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$ — матрица Гессе n-го порядка; u_{x_i} — частная производная по переменной x_i, $i=\overline{1,n}$. Отметим, что в случае $n=2$ точные решения уравнения (2) для некоторых правых частей указаны в [2, с. 787–793; 3, с. 107–111].

Уравнение Монжа–Ампера и его различные обобщения исследовались методами группового анализа в работах [7, 8], где в ряде случаев были представлены их точные решения. Для построения точных решений нестационарных уравнений математической физики типа Монжа–Ампера в последнее время успешно применяется метод редукции [9], при этом возможно эффективное использование метода разделения переменных [9, 10].

В данной статье рассматривается обобщённое уравнение Монжа–Ампера для случая n пространственных переменных

$$\det H(u) = f(\mathbf{x}, u, \nabla u, \Delta u), \tag{3}$$

где ∇u — градиент, Δu — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Класс уравнений вида (3) имеет ряд важных приложений. Так, например, в геофизике исследуют задачу построения поля соленоидального ветра $\{v, w\}$, согласованного с характеризующим атмосферное давление заданным геопотенциалом $\Phi(x, y)$, посредством так называемого уравнения баланса ветра и давления следующего вида [11]:

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \frac{1}{2}l(x, y)\Delta u + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = \frac{1}{2}\Delta\Phi(x, y), \tag{4}$$

где $u(x, y)$ — искомая функция тока ($u_x = v$, $u_y = w$); $l(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$ — заданные функции. Отметим, что в статье [12] рассматривались точные решения дифференциального уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \mathbf{a}\cdot\nabla u = 0, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2,$$

являющегося частным случаем уравнений (2) и (4).

В литературе, посвященной задачам дифференциальной геометрии, часто встречается частный случай уравнения (3) следующего вида [13]:

$$\det H(u) = f(\mathbf{x}, |\nabla u|^2). \tag{5}$$

Например, к (5) относится дифференциальное уравнение гауссовой кривизны. Известно [14, с. 10], что гауссова кривизна $K(\mathbf{x})$ графика функции $u(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^n$ в точке $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ задаётся соотношением

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\det H(u)}{(1 + |\nabla u|^2)^{(n+2)/2}}, \tag{6}$$

которое можно рассматривать как уравнение Монжа–Ампера относительно неизвестной функции $u(\mathbf{x})$. В [11] рассматривается гиперболическое уравнение Монжа–Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \varphi^2(x, y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^2 = 0 \tag{7}$$

для отрицательной гауссовой кривизны $K(x, y) = -\varphi^2(x, y)$; там же отмечается, что уравнение баланса и давления (4) при заданной правой части можно свести к уравнению (7).

Основной целью данной статьи является построение точных решений многомерного уравнения (3) в предположении, что $f(\mathbf{x}, u, \nabla u, \Delta u) \equiv f(\xi, u, |\nabla u|^2, \Delta u)$, при этом аргумент $\xi = \xi(\mathbf{x})$ является квадратичной функцией вида

$$\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

где A — числовая симметричная $n \times n$-матрица. Ранее квадратичная функция (8) успешно использовалась авторами для построения точных решений многомерных систем уравнений реакции–диффузии, эллиптических уравнений и многомерных систем эллиптических уравнений со степенными нелинейностями [15, 16].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для построения точных решений уравнения (3) нам понадобится формула, являющаяся результатом следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $F(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Тогда для любой симметричной матрицы A, задающей квадратичную форму $\xi=(A\mathbf{x},\mathbf{x})/2$, для гессиана функции $F(\xi)=F((A\mathbf{x},\mathbf{x})/2)$ справедлива формула*

$$\det\left(\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial x_i\partial x_j}\right)=\det A\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right],\quad i,j=\overline{1,n},\tag{9}$$

где $\det A$ *— определитель матрицы* A.

Доказательство. Формулу (9), используя обозначение

$$\det\left(\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial x_i\partial x_j}\right)=\Theta_k,\quad i,j=\overline{1,k},$$

запишем как

$$\Theta_k=\det A_k\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k-1}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right),\quad \xi=\frac{1}{2}(A_k\mathbf{x},\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^k,\tag{10}$$

где A_k — симметрическая числовая матрица порядка k.

Для доказательства (10) применим метод математической индукции. Так как нас интересуют только многомерные решения, то случай $k=1$ рассматривать не будем, хотя и здесь формула (10) останется справедливой. Считаем что матрица A_1 состоит из одного элемента a_{11}, который и является её определителем. В справедливости формулы (10) при $k=2$ можно убедиться непосредственным вычислением гессиана от функции $F(\xi)$, где аргумент ξ и определитель матрицы A_2 имеют вид

$$\xi=\frac{1}{2}a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\frac{1}{2}a_{22}x_2^2,\quad \det A_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$$

Предположим, что формула (10) выполнена для некоторого натурального $k\geqslant 2$, и докажем, что справедлива формула

$$\Theta_{k+1}=\det A_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right),\quad \xi=\frac{1}{2}(A_{k+1}\mathbf{x},\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{k+1},\tag{11}$$

для натурального числа $k+1$. Формально равенство (11) получается из (10) заменой k на число $k+1$, однако используемая в этих формулах одна и та же буква ξ разная по смыслу. В (11) Θ_{k+1} — определитель матрицы Гесса $(k+1)$-го порядка от функции $F(\xi)$. Разложим его по элементам $(k+1)$-й строки:

$$\Theta_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1+j}\Theta_{k,j}F_{x_{k+1}x_j}.\tag{12}$$

Здесь $\Theta_{k,j}$ — миноры элементов $F_{x_{k+1}x_j}$ матрицы Гесса $\big(F_{x_ix_j}(\xi)\big)_{i,j=\overline{1,k+1}}$, являющиеся определителями соответствующих матриц k-го порядка, которые получаются из исходной матрицы

Гесса $(k+1)$-го порядка вычеркиванием $(k+1)$-й строки и j-го столбца. Для вычисления этих определителей будем использовать следующие формулы:

$$\Theta_{k,j} = \det A_{k,j}\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k-1}\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right) -$$
$$-(-1)^{k+1+j}x_{k+1}x_j \det A_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k-1}\frac{d^2F}{d\xi^2}, \quad j = \overline{1, k+1}. \tag{13}$$

Здесь $A_{k,j}$ — матрицы k-го порядка, которые получаются из симметричной матрицы A_{k+1} $(k+1)$-го порядка вычеркиванием $(k+1)$-й строки и j-го столбца. В справедливости формул (13) можно убедиться непосредственным вычислением определителей $\Theta_{k,j}$ для любых натуральных k и $j = \overline{1, k+1}$.

Покажем, как получаются формулы (13) для случая $k = 2$. При $k = 2$ формула (11) принимает вид

$$\Theta_3 = \det A_3\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right), \quad \xi = \frac{1}{2}(A_3\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{14}$$

С другой стороны, из (12) имеем

$$\Theta_3 = (-1)^{3+1}\Theta_{2,1}F_{x_3x_1} + (-1)^{3+2}\Theta_{2,2}F_{x_3x_2} + (-1)^{3+3}\Theta_{2,3}F_{x_3x_3}.$$

Вычислив частные производные $F_{x_ix_j}$, с учётом (14) перепишем последнее равенство как

$$(-1)^{3+1}\Theta_{2,1}\left[a_{13}\frac{dF}{d\xi} + \frac{\partial\xi}{\partial x_3}\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\frac{d^2F}{d\xi^2}\right] + (-1)^{3+2}\Theta_{2,2}\left[a_{23}\frac{dF}{d\xi} + \frac{\partial\xi}{\partial x_3}\frac{\partial\xi}{\partial x_2}\frac{d^2F}{d\xi^2}\right] +$$
$$+(-1)^{3+3}\Theta_{2,3}\left[a_{33}\frac{dF}{d\xi} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x_3}\right)^2\frac{d^2F}{d\xi^2}\right] = \det A_3\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right). \tag{15}$$

Теперь в (15) заменим выражение для определителя матрицы A_3 равенством

$$\det A_3 = (-1)^{3+1}a_{13}\det A_{2,1} + (-1)^{3+2}a_{23}\det A_{2,2} + (-1)^{3+3}a_{33}\det A_{2,3},$$

при этом будем предполагать, что $a_{13} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$, иначе имеем $\det A_3 = 0$. Тогда равенство (15) запишем следующим образом:

$$(-1)^{3+1}a_{13}\left[\Theta_{2,1} - \det A_{2,1}\frac{dF}{d\xi}\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\right]\frac{dF}{d\xi} +$$
$$+(-1)^{3+2}a_{23}\left[\Theta_{2,2} - \det A_{2,2}\frac{dF}{d\xi}\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\right]\frac{dF}{d\xi} +$$
$$+(-1)^{3+3}a_{33}\left[\Theta_{2,3} - \det A_{2,3}\frac{dF}{d\xi}\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\right]\frac{dF}{d\xi} +$$
$$+\left\{(-1)^{3+1}\Theta_{2,1}\frac{\partial\xi}{\partial x_3}\frac{\partial\xi}{\partial x_1} + (-1)^{3+2}\Theta_{2,2}\frac{\partial\xi}{\partial x_3}\frac{\partial\xi}{\partial x_2} + (-1)^{3+3}\Theta_{2,3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_3}\right)^2\right\}\frac{d^2F}{d\xi^2} = 0. \tag{16}$$

По определению для миноров $\Theta_{2,j}$ $(j = 1, 2, 3)$ имеют место формулы

$$\Theta_{2,1} \equiv F_{x_1x_2}F_{x_2x_3} - F_{x_1x_3}F_{x_2x_2}, \quad \Theta_{2,2} \equiv F_{x_1x_1}F_{x_2x_3} - F_{x_1x_3}F_{x_2x_1},$$
$$\Theta_{2,3} \equiv F_{x_1x_1}F_{x_2x_2} - F_{x_1x_2}F_{x_2x_1}.$$

Непосредственным вычислением находим

$$\Theta_{2,1}=\Xi_1(x_1,x_2,x_3)\frac{dF}{d\xi}\frac{d^2F}{d\xi^2}+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2,$$

$$\Theta_{2,2}=\Xi_2(x_1,x_2,x_3)\frac{dF}{d\xi}\frac{d^2F}{d\xi^2}+(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2,$$

$$\Theta_{2,3}=\Xi_3(x_1,x_2,x_3)\frac{dF}{d\xi}\frac{d^2F}{d\xi^2}+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2,$$

где введены обозначения

$$\Xi_1(x_1,x_2,x_3)=2\xi(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})-x_1x_3\det A_3,$$

$$\Xi_2(x_1,x_2,x_3)=2\xi(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})+x_2x_3\det A_3,$$

$$\Xi_3(x_1,x_2,x_3)=2\xi(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)-x_3^2\det A_3.$$

С учётом этих соотношений выражение в фигурных скобках равенства (16) примет вид $x_3(x_1a_{13}+x_2a_{23}+x_3a_{33})\det A_3(dF/d\xi)^2$, тогда равенство (16) после несложных преобразований можно записать как

$$(-1)^{3+1}a_{13}\left[\Theta_{2,1}-\det A_{2,1}\frac{dF}{d\xi}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)+(-1)^{3+1}x_1x_3\det A_3\frac{dF}{d\xi}\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]\frac{dF}{d\xi}+$$

$$+(-1)^{3+2}a_{23}\left[\Theta_{2,2}-\det A_{2,2}\frac{dF}{d\xi}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)+(-1)^{3+2}x_2x_3\det A_3\frac{dF}{d\xi}\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]\frac{dF}{d\xi}+$$

$$+(-1)^{3+3}a_{33}\left[\Theta_{2,3}-\det A_{2,3}\frac{dF}{d\xi}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)+(-1)^{3+3}x_3^2\det A_3\frac{dF}{d\xi}\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]\frac{dF}{d\xi}=0.$$

Так как $dF/d\xi\neq 0$, то для того чтобы последнее равенство обратилось в тождество, мы должны потребовать равенства нулю всех трёх выражений, стоящих в квадратных скобках. Таким образом, получены формулы (13) для случая $k=2$. Аналогичные рассуждения можно провести для любого $k\geqslant 2$.

С учётом формул (13) равенство (12) запишем в виде

$$\Theta_{k+1}=\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k-1}\left[\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\Omega_{k+1}-\det A_{k+1}\frac{d^2F}{d\xi^2}\Phi_{k+1}\right], \tag{17}$$

где

$$\Omega_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1+j}\det A_{k,j}F_{x_{k+1}x_j},\quad \Phi_{k+1}=x_{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}x_jF_{x_{k+1}x_j}. \tag{18}$$

Вычислим

$$F_{x_{k+1}x_j}=\frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}+a_{k+1,j}\frac{dF}{d\xi},\quad j=\overline{1,k+1},$$

и подставим их в формулы (18):

$$\Omega_{k+1}=\frac{dF}{d\xi}\left[\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1+j}a_{k+1,j}\det A_{k,j}\right]+\frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}\left\{\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1+j}\det A_{k,j}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\right\}, \tag{19}$$

$$\Phi_{k+1}=x_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}\left[\sum_{j=1}^{k+1}a_{k+1,j}x_j\right]+\frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}\left\{\sum_{j=1}^{k+1}x_j\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\right\}\right). \tag{20}$$

Выражение в квадратных скобках равенства (19) является определителем симметричной матрицы A_{k+1}. С учётом очевидных соотношений

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,k+1}x_{k+1},\quad \ldots,\quad \frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}=a_{1,k+1}x_1+a_{2,k+1}x_2+\ldots+a_{k+1,k+1}x_{k+1}$$

в выражении в фигурных скобках равенства (19) сгруппируем слагаемые относительно переменных $x_1,\ \ldots,\ x_{k+1}$:

$$\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1+j}\det A_{k,j}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}=x_1\big[(-1)^{k+1+1}a_{11}\det A_{k,1}+(-1)^{k+1+2}a_{12}\det A_{k,2}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{k+1+k}a_{1k}\det A_{k,k}+(-1)^{k+1+k+1}a_{1,k+1}\det A_{k,k+1}\big]+\ldots$$
$$\ldots+x_{k+1}\big[(-1)^{k+1+1}a_{1,k+1}\det A_{k,1}+(-1)^{k+1+2}a_{2,k+1}\det A_{k,2}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{k+1+k}a_{k,k+1}\det A_{k,k}+(-1)^{k+1+k+1}a_{k+1,k+1}\det A_{k,k+1}\big].$$

Так как выражения в квадратных скобках при переменных $x_1,\ \ldots,\ x_k$ равны нулю, а выражение при переменной x_{k+1} является определителем симметричной матрицы A_{k+1}, то из (19) имеем

$$\Omega_{k+1}=\det A_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}+x_{k+1}\frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}\right).\tag{21}$$

Сумма в квадратных скобках равенства (20) — первая частная производная функции ξ по переменной x_{k+1}, а выражение в фигурных скобках в (20) равно 2ξ, следовательно,

$$\Phi_{k+1}=x_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}.\tag{22}$$

Подставив соотношения (21) и (22) в (17), получим равенства

$$\Theta_{k+1}=\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k-1}\left[\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\det A_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}+x_{k+1}\frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}\right)-\right.$$
$$\left.-\det A_{k+1}\frac{d^2F}{d\xi^2}x_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}\right]=$$
$$=\det A_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k-1}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\left[\frac{dF}{d\xi}+x_{k+1}\frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}-x_{k+1}\frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x_{k+1}}\right]=$$
$$=\det A_{k+1}\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k}\left(\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right).$$

Таким образом, получена формула (11). Лемма доказана.

Точные решения уравнения (3) будем искать в следующем виде:

$$u(\mathbf{x})=F(\xi),\tag{23}$$

где аргумент ξ задаётся формулой (8), а условия на функцию $F(\xi)$ определены в лемме 1.

В случае когда правая часть уравнения (3) будет явно зависеть от лапласиана (квадрата градиента искомой функции), необходимо подобрать матрицу A в классе симметричных матриц таким образом, чтобы для функции (8) выполнялось равенство

$$|\nabla\xi|^2=\sigma\xi,\tag{24}$$

где $\sigma\neq 0$ — некоторая постоянная.

Лемма 2. *Пусть E_n — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m\in\{1,2,\ldots,n\}$ единиц и $n-m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица. Тогда для функции (8) с симметричной матрицей A вида*

$$A=\frac{\sigma}{2}SE_nS^T \tag{25}$$

справедливо равенство (24).

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется справедливость равенств

$$|\nabla\xi|^2=(A\mathbf{x},A\mathbf{x})=\left(A^2\mathbf{x},\mathbf{x}\right)=\left(\frac{\sigma^2}{4}(SE_nS^T)^2\mathbf{x},\mathbf{x}\right)=\frac{\sigma^2}{4}(SE_n^2S^T\mathbf{x},\mathbf{x})=$$
$$=\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\sigma}{2}SE_nS^T\mathbf{x},\mathbf{x}\right)=\frac{\sigma}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x})=\sigma\xi.$$

Лемма доказана.

При $m<n$ определитель матрицы (25) равен нулю. Поэтому прежде всего рассмотрим случай $E_n=E$, где E — единичная матрица. При этом имеем

$$\xi(\mathbf{x})=\frac{\sigma}{4}\|\mathbf{x}\|^2,\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{26}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Если при некотором $\sigma\neq 0$ функция $F(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)*

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]=\bar f\left(\xi,F,\frac{dF}{d\xi},\frac{d^2F}{d\xi^2}\right), \tag{27}$$

где

$$\bar f\left(\xi,F,\frac{dF}{d\xi},\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\equiv f\left(\xi,F,\sigma\xi\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2,\frac{\sigma}{2}\left(n\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\right),$$

то обобщённое уравнение Монжа–Ампера (3) обладает точным решением (23), (26).

Доказательство. Пусть функция $\xi(\mathbf{x})$ определяется соотношением (26), тогда из формулы (23) прямыми вычислениями находим

$$|\nabla u|^2=\sigma\xi\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2,\quad \Delta u=\frac{\sigma}{2}\left(n\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right),\quad \det A=\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n.$$

С учётом этих соотношений и формулы (9) после подстановки решения (23) в уравнение (3) придём к ОДУ (27). Теорема доказана.

Заметим, что если правая часть уравнения (3) не зависит от частных производных искомой функции, то для построения точных решений обобщённого уравнения Монжа–Ампера [17]

$$\det H(u)=f(\xi,u) \tag{28}$$

необходимости в виде (23) в условии (24) нет. В этом случае имеет место

Теорема 2. *Уравнение (28) имеет точное решение (23), где аргумент задаётся формулой (8), а функция $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ*

$$\det A\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]=f(\xi,F).$$

Справедливость этой теоремы вытекает непосредственно из формулы (9).

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим уравнение гауссовой кривизны (6) в двумерном координатном пространстве:

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=K(x,y)(1+u_x^2+u_y^2)^2, \quad u=u(x,y). \tag{29}$$

Точные решения уравнения (29) будем искать в виде (23). Так как $n=2$, то (23) с учётом формулы (26) примет вид

$$u(x,y)=F(\xi), \quad \xi=\frac{\sigma}{4}(x^2+y^2). \tag{30}$$

Хорошо известно [14, с. 138], что гауссова кривизна $K(x,y)$ поверхности равна нулю в параболических точках и точках уплощения, положительна в эллиптических и отрицательна в гиперболических точках. Поэтому рассмотрим все три случая.

1. Пусть $K=0$. Тогда из формулы (9) с учётом равенства $\det A=\sigma^2/4$ получим

$$\frac{\sigma^2}{4}\frac{dF}{d\xi}\left[\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]=0.$$

Легко убедиться, что решением этого ОДУ является функция $F(\xi)=C_1\sqrt{\xi}+C_2$, где $C_1\neq 0$ и C_2 — константы интегрирования. По теореме 1 частным точным решением уравнения $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=0$ будет функция

$$u(x,y)=\frac{C_1\sqrt{\sigma}}{2}\sqrt{x^2+y^2}+C_2.$$

2. Пусть $K>0$. Обозначим $K(x,y)=K(\xi)$. По теореме 1 точным решением уравнения (29) является функция (30), где $F(\xi)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка

$$\frac{\sigma^2}{4}\frac{dF}{d\xi}\left[\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]=K(\xi)\left(1+\sigma\xi\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\right)^2. \tag{31}$$

С помощью замены $dF/d\xi=\sqrt{Z(\xi)}$ ОДУ (31) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$Z+\xi\frac{dZ}{d\xi}=\frac{4}{\sigma^2}K(\xi)(1+\sigma\xi Z)^2,$$

общее решение которого задаётся формулой

$$Z(\xi)=-\frac{4\int K(\xi)\,d\xi+\sigma(1-C_1)}{\sigma\xi(4\int K(\xi)\,d\xi-\sigma C_1)}.$$

Следовательно, общее решение ОДУ (31) имеет вид

$$F(\xi)=\pm\int\left(-\frac{4\int K(\xi)\,d\xi+\sigma(1-C_1)}{\sigma\xi(4\int K(\xi)\,d\xi-\sigma C_1)}\right)^{1/2}d\xi+C_2, \tag{32}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Заметим, что при выводе формулы (32) мы не делали никаких предположений относительно функции $K(\xi)$, т.е она может быть и постоянной. Если $K(\xi)\equiv k^2>0$, где k — постоянная, то интеграл (32) вычисляется непосредственно и принимает громоздкий вид. Однако можно подобрать постоянные так, чтобы найденные решения были вещественными и достаточно компактными.

Так, например, при $C_1=1$, $C_2=0$, $\sigma=-1$ точным решением уравнения (29) будет функция

$$u(x,y)=\pm\frac{1}{|k|}\sqrt{1-k^2(x^2+y^2)}, \tag{33}$$

а при $C_1=3/2$, $C_2=0$, $\sigma=1$ —

$$u(x,y)=\pm\frac{1}{|k|}E\biggl(\frac{1}{3}\sqrt{9-6k^2(x^2+y^2)},\,\frac{\sqrt{6}}{2}\biggr),$$

где $E(z,\nu)$ — эллиптический интеграл 2-го рода.

3. Если $K<0$, то точное решение (29) определяется также по формулам (30), (32).

Если $K(\xi)\equiv -k^2<0$, то при $C_1=1$, $C_2=0$, $\sigma=-1$ точным решение уравнения (29) будет функция (33), при $C_1=0$, $C_2=0$, $\sigma=-1$ — функция

$$u(x,y)=\pm\frac{1}{|k|}\sqrt{1-k^2(x^2+y^2)}\pm\frac{1}{2|k|}\ln\biggl(\frac{\sqrt{1-k^2(x^2+y^2)}-1}{\sqrt{1-k^2(x^2+y^2)}+1}\biggr),$$

а при $C_1=-1$, $C_2=0$, $\sigma=1$ —

$$u(x,y)=\pm\frac{1}{|k|}E\biggl(\sqrt{1-\frac{k^2}{2}(x^2+y^2)},\,\sqrt{2}\biggr)\mp\frac{1}{|k|}F\biggl(\sqrt{1-\frac{k^2}{2}(x^2+y^2)},\,\sqrt{2}\biggr),$$

где $F(z,\nu)$ и $E(z,\nu)$ — эллиптические интегралы 1-го и 2-го родов соответственно.

Теперь перейдём к рассмотрению случая, когда $K(\xi)$ — некоторая заданная функция такая, что $K(0)\neq 0$ и $-\infty<K(0)<+\infty$. Если, например, $K(\xi)=\lambda(1+\xi)^{-2}$, где $\lambda\neq 0$ — произвольная постоянная, то формула (32) запишется как

$$F(\xi)=\pm\int\biggl(\frac{(1-C_1)\sigma(1+\xi)-4\lambda}{\sigma\xi(4\lambda+\sigma C_1(1+\xi))}\biggr)^{1/2}d\xi. \tag{34}$$

Интеграл в (34) вычисляется точно и имеет громоздкий вид [18, с. 58]. Однако при определённом выборе констант интеграл (34) вычисляется в элементарных функциях.

Так, при $C_1=0$, $\sigma=1$, $K(x,y)=16\lambda(4+x^2+y^2)^{-2}>0$, $\lambda>0$, точное решение уравнения (29) определяется по формуле

$$u(x,y)=\pm\frac{1}{4\sqrt{\lambda}}\biggl[\Theta(x,y)+(4\lambda-1)\ln 2-(4\lambda-1)\ln\biggl(1-4\lambda+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\Theta(x,y)\biggr)\biggr],$$

$$\Theta(x,y)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+4-16\lambda}.$$

Легко видеть, что при $\lambda=1/4$ оно примет вид $u(x,y)=(x^2+y^2)/4$.

При $C_1=1$, $\sigma=4$, $K_2(x,y)=-(1+x^2+y^2)^{-2}<0$ точное решение уравнения (29) следующее:

$$u(x,y)=\pm\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Пример 2. Теперь рассмотрим уравнение гауссовой кривизны (6) в трёхмерном координатном пространстве:

$$\det H(u)=K(x,y,z)(1+u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{5/2},\quad u=u(x,y,z), \tag{35}$$

где
$$\det H(u) \equiv u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2.$$
Точные решения уравнения (35) будем искать в виде
$$u(x,y,z) = F(\xi), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(x^2+y^2+z^2),$$
при этом по теореме 1 функция $F(\xi)$ должна удовлетворять следующему ОДУ:
$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right] = K(\xi)\left(1+\sigma\xi\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\right)^{5/2}. \tag{36}$$

Заменой $dF(\xi)/d\xi = Z(\xi)$ ОДУ (36) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка
$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 Z^2\left(Z + 2\xi\frac{dZ}{d\xi}\right) = K(\xi)\left(1+\sigma\xi Z^2\right)^{5/2},$$
умножив которое на $(3/2)\sqrt{\xi}$, будем иметь
$$\frac{3}{2}\sqrt{\xi}\,\frac{Z^2(Z+2\xi dZ/d\xi)}{(1+\sigma\xi Z^2)^{5/2}} = \frac{12}{\sigma^3}\sqrt{\xi}K(\xi).$$
Заметим, что функция $(3/2)\sqrt{\xi}$ является интегрирующим множителем, тогда последнее равенство можно записать как
$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi^{3/2}Z^3}{(1+\sigma\xi Z^2)^{3/2}}\right) = \frac{12}{\sigma^3}\sqrt{\xi}K(\xi).$$
Отсюда находим
$$\frac{\xi^{3/2}Z^3}{(1+\sigma\xi Z^2)^{3/2}} = \Phi(\xi), \quad \Phi(\xi) = \frac{12}{\sigma^3}\int\sqrt{\xi}K(\xi)\,d\xi + C_1, \quad C_1 = \mathrm{const},$$
и, следовательно,
$$F(\xi) = \pm\int\frac{\Phi(\xi)^{1/3}\,d\xi}{\sqrt{\xi(1-\sigma\Phi(\xi)^{2/3})}} + C_2, \quad C_2 = \mathrm{const}.$$

Очевидно, что не для каждой функции $K(\xi)$ вычисляется интеграл $\Phi(\xi)$, а значит, и $F(\xi)$. Но, например, при $K_1 = \lambda^3$, где $\lambda \neq 0$ — произвольная постоянная, точное решение уравнения (35) имеет вид
$$u(x,y,z) = \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(x^2+y^2+z^2)},$$
а при $K_2(x,y,z) = 27(x^2+y^2+z^2)^3(9+(x^2+y^2+z^2)^3)^{-5/2}$ —
$$u(x,y,z) = \frac{1}{12}(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Пример 3. Найдём частные точные решения следующего уравнения:
$$\det H(u) = \frac{\beta}{\|\mathbf{x}\|^{2k}}\Delta u, \quad u = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \tag{37}$$
где k, $\beta\neq 0$ — произвольные параметры.

Уравнение (37) при $n=2$ является частным случаем уравнения баланса ветра и давления (4). По теореме 1 точным решением уравнения (37) является функция (23), при этом $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ

$$\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]=\frac{B}{\xi^k}\left[\frac{n}{2}\frac{dF}{d\xi}+\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right],\quad B=\frac{2^n\beta\sigma^{k+1-n}}{4^k}. \tag{38}$$

С помощью замены

$$\frac{dF}{d\xi}=\xi^{-\frac{k}{n-1}}Z(\eta),\quad \eta=\ln\xi, \tag{39}$$

ОДУ (38) сводится к квадратуре

$$\int\frac{2Z^{n-1}-B}{bZ^n+aBZ}\,dZ=\eta+C_1,\quad a=\frac{n}{2}-\frac{k}{n-1},\quad b=\frac{2k}{n-1}-1. \tag{40}$$

Интеграл в (40) легко вычисляется, при этом мы должны рассмотреть три случая.

1. Пусть $a=0$, $b\neq 0$. Тогда $k=n(n-1)/2$, $b=n-1$ и из формулы (40) получим

$$\frac{2}{n-1}\ln Z+\frac{B}{(n-1)^2}\,Z^{1-n}=\eta+C_1.$$

2. Если $a\neq 0$, $b=0$, то $k=(n-1)/2$, $a=(n-1)/2$ и из формулы (40) находим

$$\frac{4}{B(n-1)^2}\,Z^{n-1}-\frac{2}{n-1}\ln Z=\eta+C_1.$$

3. При $a\neq 0$, $b\neq 0$ получим

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)\ln(Z^n+aBZ)-\frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{b}+\frac{n}{a}\right)\ln Z=\eta+C_1.$$

Как видно, во всех трёх случаях функция $Z(\eta)$ задаётся неявно трансцендентными равенствами, первые два из которых разрешимы в явном виде с использованием специальной функции Ламберта [19, с. 7]. Однако найти в явном виде функцию $F(\xi)$ из соотношения (39) возможно только при некоторых значениях параметров n, k. Например, при $n=2$, $k=1$ в (37) уравнение

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=\frac{\beta}{x^2+y^2}(u_{xx}+u_{yy})$$

имеет частное точное решение

$$u(x,y)=-\frac{\beta}{\mathcal{W}(Z(x,y))}+\beta\ln\mathcal{W}(Z(x,y)),\quad Z(x,y)=\frac{\beta}{\sqrt{\sigma(x^2+y^2)}},$$

где $\sigma>0$ — произвольная постоянная, $\mathcal{W}(Z)$ — специальная функция Ламберта, которая определяется как решение функционального уравнения $\mathcal{W}(Z)\exp\{\mathcal{W}(Z)\}=Z$ относительно $\mathcal{W}(Z)$.

В случае $n=3$, $k=2$ уравнение

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz}+2u_{xy}u_{xz}u_{yz}-u_{xx}u_{yz}^2-u_{yy}u_{xz}^2-u_{zz}u_{xy}^2=\frac{\beta}{(x^2+y^2+z^2)^2}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

имеет частное точное решение

$$u(x,y,z)=\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sigma(x^2+y^2+z^2)-4\beta}-\sqrt{\beta}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\sigma(x^2+y^2+z^2)-4\beta}}{2\sqrt{\beta}}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma(x^2+y^2+z^2)},$$

где $\sigma>0$ — произвольный параметр.

Пример 4. Рассмотрим обобщённое уравнение Монжа–Ампера следующего вида:

$$\det H(u) = \beta\xi^\mu u^\lambda, \tag{41}$$

которое является частным случаем уравнения (28), следовательно, к нему применима теорема 2, а значит, точным решением (41) является функция (23), причём $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ

$$\det A\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right] = \beta\xi^\mu F^\lambda. \tag{42}$$

В уравнениях (41), (42) $\beta \neq 0$, μ, λ — произвольные параметры. Преобразованием $F(\xi) = G(\eta)$, $\eta = \sqrt{\xi}$, ОДУ (42) приводится к виду

$$\frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2} = \frac{2^n\beta}{\det A}\,\eta^{2\mu+n-1}G^\lambda(\eta)\left(\frac{dG(\eta)}{d\eta}\right)^{1-n}. \tag{43}$$

ОДУ (43) является обобщённым уравнением Эмдена–Фаулера [20, с. 261]. В справочнике [20, с. 277–279] приведены формулы, с помощью которых ОДУ (43) можно свести к уравнению Абеля второго рода, а также некоторые дискретные преобразования обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера. Для некоторых значений параметров n, λ, μ общее решение уравнения (43) можно найти в параметрическом виде [20, с. 265–266]. Структура ОДУ (43) такова, что для него легко можно найти явные точные решения, которые выражаются степенной функцией и экспонентой. Так имеем

$$G_1(\eta) = B\eta^{\frac{2(\mu+n)}{n-\lambda}}, \quad B = \left(\frac{\beta(n-\lambda)^{n+1}}{\det A(2\mu+n+\lambda)(\mu+n)^n}\right)^{\frac{1}{n-\lambda}}, \quad \lambda \neq n, \quad \lambda \neq -n;$$

$$G_2(\eta) = C_1\exp\left\{\left(\frac{2^n\beta}{\det A}\right)^{\frac{1}{n+1}}\eta\right\}, \quad \lambda = n, \quad \mu = -(n-1)/2,$$

где $C_1 \neq 0$ — произвольная постоянная.

Теперь, используя найденные функции $G_1(\eta)$, $G_2(\eta)$, выпишем соответствующие им частные точные решения уравнения (41). Пусть $\mu = 0$, тогда уравнение

$$\det H(u) = \beta u^\lambda$$

имеет частное решение вида

$$u(\mathbf{x}) = \left[\frac{\beta}{\det A}\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^n\frac{n-\lambda}{n+\lambda}\right]^{\frac{1}{n-\lambda}}\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x})\right]^{\frac{n}{n-\lambda}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть уравнение (41) имеет вид

$$\det H(u) = \beta\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x})\right]^{-\frac{n-1}{2}}u^n,$$

тогда оно обладает частным точным решением

$$u(\mathbf{x}) = \exp\left\{\left(\frac{2^n\beta}{\det A}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x})\right]^{1/2}\right\},$$

где A — произвольная невырожденная симметричная матрица порядка n. В общем случае решения $u(\mathbf{x})$ являются анизотропными по пространственным переменным. Пусть $n=3$ и матрицы имеют вид

$$A_1=\begin{pmatrix}4&1&-5\\1&2&0\\-5&0&6\end{pmatrix},\quad \det A_1=-8,\quad A_2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-4\end{pmatrix},\quad \det A_2=16.$$

Для матриц A_1, A_2 квадратичные функции ξ_1, ξ_2 по формуле (8) задаются соотношениями

$$\xi_1=2x^2+y^2+3z^2+xy-5xz,\quad \xi_2=x^2-y^2-2z^2.$$

Для этих функций получим, что обобщённые уравнения Монжа–Ампера

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz}+2u_{xy}u_{xz}u_{yz}-u_{xx}u_{yz}^2-u_{yy}u_{xz}^2-u_{zz}u_{xy}^2=\beta u^{\lambda},\quad \lambda\neq 3,\quad \lambda\neq -3,$$

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz}+2u_{xy}u_{xz}u_{yz}-u_{xx}u_{yz}^2-u_{yy}u_{xz}^2-u_{zz}u_{xy}^2=\frac{\beta\,u^3}{x^2-y^2-2z^2}$$

обладают, соответственно, частными точными решениями

$$u(x,y,z)=\left[-\frac{\beta(3-\lambda)^4}{216(3+\lambda)}\right]^{\frac{1}{3-\lambda}}(2x^2+y^2+3z^2+xy-5xz)^{\frac{3}{3-\lambda}},$$

$$u(x,y,z)=\exp\left\{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4}\sqrt{x^2-y^2-2z^2}\right\}.$$

Пусть теперь $\mu=0$, $\lambda=0$, тогда уравнение (41) запишем как

$$\det H(u)=\beta, \tag{44}$$

а точные решения будем также отыскивать в виде $u(\mathbf{x})=F(\xi)$. При этом функция $F(\xi)$ находится из следующего интеграла:

$$F(\xi)=\left(\frac{1}{\det A}\right)^{1/n}\int\xi^{-1/2}(\beta\xi^{n/2}+C_1)^{1/n}d\xi+C_2, \tag{45}$$

где C_1, C_2 — константы интегрирования. При $C_1=0$ из (45) получим частное точное решение уравнения (44) вида

$$u(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\det A}\right)^{1/n}(A\mathbf{x},\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,$$

где A — произвольная невырожденная симметричная матрица.

В случае $C_1\neq 0$ интеграл в формуле (45) вычисляется, по видимому, только при $n=2$, тогда уравнение (44) запишется как

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)^2=\beta. \tag{46}$$

Как уже было отмечено, в справочниках [2, 3] приведены некоторые частные решения уравнения (46), а также указаны общие решения в параметрическом виде для частных случаев $\beta=0$ и $\beta<0$. Здесь мы построим ещё одно частное решение вида (8) уравнения (46). Итак, в случае $n=2$ из (45) находим

$$F(\xi)=\pm\sqrt{B\xi^2+C_1\xi}\pm\frac{C_1}{2\sqrt{B}}\ln\left(\frac{2B\xi+C_1}{2\sqrt{B}}+\sqrt{B_1\xi^2+C_1\xi}\right)+C_2,$$

где $B=\beta/\det A>0$. Общий вид симметричной 2×2-матрицы A, зависящей от трёх произвольных параметров, имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}2a & c\\ c & 2b\end{pmatrix},\quad \det A=4ab-c^2.$$

Пусть $4ab-c^2\neq0$, тогда частное точное решение уравнения (46) задаётся формулой

$$u(x,y)=\pm\sqrt{B(ax^2+by^2+cxy)^2+C_1(ax^2+by^2+cxy)}\pm$$
$$\pm\frac{C_1}{2\sqrt{B}}\ln\left(\frac{2B(ax^2+by^2+cxy)+C_1}{2\sqrt{B}}+\sqrt{B(ax^2+by^2+cxy)^2+C_1(ax^2+by^2+cxy)}\right),$$

здесь $B=\beta/(4ab-c^2)>0$ и опущена несущественная аддитивная постоянная C_2.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проекты 121041300058-1, 117032210078-4).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. — М. : Наука, 1978. — 688 с.
2. Polyanin, A.D. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — 2nd ed. — New York : Chapman & Hall / CRC Press, 2012. — 1840 p.
3. Полянин, А.Д. Нелинейные уравнения математической физики : учеб. пособие для вузов / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. — 2-е изд., испр. и доп. — Ч. 2. — М. : Юрайт, 2023. — 368 с.
4. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон ; пер. с англ. Х.Д. Икрамова [и др.] ; под ред. Х.Д. Икрамова. — М. : Мир, 1989. — 655 с.
5. Martin, M.H. The Monge–Ampere partial differential equation $rt-s^2+\lambda^2=0$ / M.H. Martin // Pasif. J. Math. — 1953. — V. 3. — P. 37–39.
6. Погорелов, А.В. Многомерное уравнение Монжа–Ампера / А.В. Погорелов. — М. : Наука, 1988. — 96 с.
7. Фущич, В.И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера / В.И. Фущич, Н.И Серов // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 3. — С. 543–546.
8. Leibov, O.S. Reduction and exact solutions of the Monge–Ampere equation / O.S Leibov // Nonlin. Math. Phys. — 1989. — V. 4, № 1-2. — P. 146–148.
9. Полянин, А.Д. Точные решения и редукции нестационарных уравнений математической физики типа Монжа–Ампера / А.Д. Полянин // Вестн. НИЯУ МИФИ. — 2023. — Т. 12, № 5. — С. 276–288.
10. Рахмелевич, И.В. Многомерное уравнение Монжа–Ампера со степенными нелинейностями по первым производным / И.В. Рахмелевич // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2020. — № 2. — С. 86–98.

11. Розендорн, Э.Р. Поверхности отрицательной кривизны / Э.Р. Розендорн // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фунд. направления. — 1989. — Т. 48. — С. 98–195.
12. Розендорн, Э.Р. Некоторые классы частных решений уравнения $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + \mathbf{a}\nabla z = 0$ и их приложение к задачам метеорологии / Э.Р. Розендорн // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1984. — № 2. — С. 56–58.
13. Trudinger, N.S. The Monge–Ampère equation and its geometric applications / N.S. Trudinger, X.J. Wang // Handbook of Geometric Analysis. — Somerville : International Press, 2008. — V. 1. — P. 467–524.
14. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. — М. : Наука, 1974. — 176 с.
15. Косов, А.А. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 108–122.
16. Косов, А.А. О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1619–1640.
17. Cheng, S.Y. On the regularity of the Monge–Ampère equation $\det \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, u)$ / S.Y. Cheng, S.T. Yau // Comm. Pure Appl. Math. — 1977. — V. 30. — P. 41–68.
18. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев — М. : Наука, 1981. — 800 с.
19. Дубинов, А.Е. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики / А.Е. Дубинов, И.Д. Дубинова, С.К. Сайков. — Саров : РФЯЦ ВНИИЭФ, 2006. — 160 с.
20. Зайцев, В.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Справочник для вузов / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — Ч. 1. — М. : Юрайт, 2023. — 385 с.

ON EXACT SOLUTIONS OF MULTIDIMENSIONAL GENERALIZED MONGE–AMPERE EQUATION

A. A. Kosov[1], E. I. Semenov[2]

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of RAS, Irkutsk, Russia
e-mail: [1]kosov_idstu@mail.ru, [2]edwseiz@gmail.com

Exact solutions of some multidimensional generalized Monge–Ampere equations are found. These solutions are a superposition of a quadratic form of spatial variables and solutions of nonlinear ordinary differential equations generated by the Monge–Ampere equations.

Keywords: multidimensional Monge–Ampere equation, exact solution

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (projects no. 121041300058-1 and no. 117032210078-4).

REFERENCES

1. Rozhdestvenskij, B.L. and Yanenko, N.N., *Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike* (Systems of Quasilinear Equations and their Applications to Gas Dynamics), Moscow: Nauka, 1978.
2. Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed., New York: Chapman & Hall / CRC Press, 2012.
3. Polyanin, A.D. and Zajcev, V.F., *Nelinejnye uravneniya matematicheskoj fiziki* (Nonlinear Equations of Mathematical Physics), vol. 2, Moscow: Yurajt, 2023.
4. Horn, R.A. and Johnson, C.R., *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1985.

5. Martin, M.H., The Monge–Ampere partial differential equation $rt - s^2 + \lambda^2 = 0$, *Pasif. J. Math.*, 1953, vol. 3, pp. 37–39.
6. Pogorelov, A.V., *Mnogomernoe uravnenie Monzha–Ampera* (Multidimensional Monge–Ampere Equation), Moscow: Nauka, 1988.
7. Fushchich, V.I. and Serov, N.I., Symmetry and some exact solutions of the multidimensional Monge–Ampere equation. *Dokl. AN SSSR*, 1983, vol. 273, no. 3, pp. 543–546.
8. Leibov, O.S., Reduction and exact solutions of the Monge–Ampere equation, *Nonlin. Math. Phys.*, 1989, vol. 4, no. 1-2, pp. 146–148.
9. Polyanin, A.D., Exact solutions and reductions of nonstationary equations of mathematical physics of the Monge–Ampere type, *Vestnik Nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI*, 2023, vol. 12, no. 5, pp. 276–288.
10. Rakhmelevich, I.V., Multidimensional Monge–Ampere equation with power-law nonlinearities in first derivatives, *Vestnik VGU. Seriya Fizika. Matematika*, 2020, no. 2, pp. 86–98.
11. Rozendorn, E.R. Surfaces of negative curvature, *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. prob. mat. Fundam. napravleniya*, 1989, vol. 48, pp. 98–195.
12. Rozendorn, E.R., Some classes of partial solutions to the equation $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + \mathbf{a}\nabla z = 0$ and their application to meteorological problems, *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Math., Mekh.*, 1984, no. 2, pp. 56–58.
13. Trudinger, N.S. and Wang, X.J., The Monge–Ampère equation and its geometric applications, in *Handbook of Geometric Analysis*, Somerville: International Press, 2008, vol. 1, pp. 467–524.
14. Pogorelov, A.V., *Differencial'naya geometriya* (Differential Geometry), Moscow: Nauka, 1974.
15. Kosov, A.A. and Semenov, E.I., On exact multidimensional solutions of a nonlinear system of reaction-diffusion equations, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54. no. 1, pp. 106–120.
16. Kosov, A.A. and Semenov, E.I., On exact solutions of a multidimensional system of elliptic equations with power-law nonlinearities *Differ. Equat.*, 2023, vol. 54. no. 1, pp. 1627–1649.
17. Cheng, S.Y. and Yau, S.T., On the regularity of the Monge–Ampère equation det $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x,u)$, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1977, vol. 30, pp. 41–68.
18. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integrals and Series. Elementary Functions*, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
19. Dubinov, A.E., Dubinova, I.D., and Sajkov, S.K. *W-funkciya Lamberta i ee primenenie v matematicheskih zadachah fiziki* (Lambert's W-Function and its Application in Mathematical Problems of Physics), Sarov: RFYAC VNIIEF, 2006.
20. Zajcev, V.F. and Polyanin, A.D., *Obyknovennye differencial'nye uravneniya* (Ordinary Differential Equations), Part 1, Moscow: Yurajt, 2023.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1350–1367

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.958

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. Х. Г. Умаров

Академия наук Чеченской Республики, г. Грозный
Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный
e-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 11.03.2024 г., после доработки 04.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными, обобщающего уравнение Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией и уравнение поперечных колебаний вязкоупругой балки Фойхта–Кельвина, находящейся под действием внешнего и внутреннего трений, деформация которой рассматривается с учётом поправки от инерции поворота сечений, найдены достаточные условия существования и экспоненциального убывания глобального решения задачи Коши.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение колебаний балки, уравнение Буссинеска шестого порядка, асимптотическое поведение решения

DOI: 10.31857/S0374064124100059, EDN: JTOWLX

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения в частных производных

$$(I-\partial_x^2)\partial_t^2 u+(q_1\partial_x^4-q_2\partial_x^2+q_3I)\partial_t u-(q_4\partial_x^6-q_5\partial_x^4+q_6\partial_x^2-q_7I)u=\lambda\partial_x u_x^{1-p}, \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x), \tag{2}$$

где $\partial_x=\partial/\partial x$, $\partial_t=\partial/\partial t$; I — тождественный оператор; $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$, $\mathbb{R}=$ $=(-\infty,+\infty)$; коэффициенты q_i, $i=\overline{1,7}$, — заданные неотрицательные числа; параметр $\lambda\in\mathbb{R}$; показатель степени $p=2m/(2n+1)$, $m,n\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$. Полагаем, что в уравнении (1) частная производная u_{xx} ограничена ассимптотически снизу и сверху функцией u_x в проколотой окрестности точки x_0: $u_{xx}(t,x)=O(u_x(t,x))$ при $x\to x_0$, где x_0 — точки, в которых $u_x(t,x_0)=0$, т.е. [1, гл. 1, § 8] существует постоянная $c>0$ такая, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|u_{xx}(t,x)|\leqslant c|u_x(t,x)|$.

Если в уравнении (1) коэффициенты $q_2=q_4=q_6=q_7=\lambda=0$, то приходим [2, гл. 6] к уравнению поперечных колебаний вязкоупругой балки, находящейся под действием внешнего и внутреннего трений (материал Фойхта–Кельвина), деформация которой рассматривается с учётом поправки от инерции поворота сечений. Предполагаем, что балка является “бесконечной”. Такая идеализация допустима [3, § 6.3], если на границах балки находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающая на него изгибная волна не отражается.

Если в уравнении (1) коэффициенты $q_1=q_3=q_7=0$, то получается [4, 5] уравнение Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией.

Задача Коши (1), (2) рассматривается в пространстве $C[\mathbb{R}]$ [6, гл. 8, § 1] непрерывных функций $g(x)$, для которых существуют оба предела при $x\to\pm\infty$, полагая, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и искомое классическое решение $u=u(t,x)$, $(t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty)$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (1), для всех значений временно́й переменной t по переменной x принадлежат $C[\mathbb{R}]$. (Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.) Через $C^{(k)}[\mathbb{R}]=\{g(x)\in C[\mathbb{R}]\colon g'(x),\ldots,g^{(k)}(x)\in C[\mathbb{R}]\}$, $k\in\mathbb{N}$, обозначим подмножества дифференцируемых функций в пространстве $C[\mathbb{R}]$, наделённом нормой $\|g\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$.

Исследование задачи Коши (1), (2) проведём по следующей схеме: прежде всего убедимся, что постановка задачи Коши (1), (2) корректна и локальное по времени её классическое решение существует. С этой целью для соответствующего (1) линейного однородного уравнения ($\lambda=0$) найдём решение задачи Коши. Далее для вспомогательной задачи Коши

$$(I-\partial_x^2)\partial_t^2 v+(q_1\partial_x^4-q_2\partial_x^2+q_3I)\partial_t v-(q_4\partial_x^6-q_5\partial_x^4+q_6\partial_x^2-q_7I)v=\lambda\partial_x^2 v^{1-p}, \tag{3}$$

$$v|_{t=0}=\varphi'(x),\quad v_t|_{t=0}=\psi'(x), \tag{4}$$

где $v_x(t,x)=O(v(t,x))$ и $v_{xx}(t,x)=O(v(t,x))$ при $x\to x_0$, x_0 — точки, в которых $v(t,x_0)=0$, определим временно́й отрезок $[0,t_1]$ существования и единственности классического решения. Затем установим связь между решениями уравнений (1) и (3), полагая, что на временно́м отрезке $[0,t_1]$ классическое решение $u=u(t,x)$ по переменной x принадлежит пересечению подмножества $C^{(6)}[\mathbb{R}]\subset C[\mathbb{R}]$ с пространством Соболева $W_2^6(\mathbb{R})$, причём временны́е частные производные $u_t=u_t(t,x)\in C^{(4)}[\mathbb{R}]\cap W_2^4(\mathbb{R})$ и $u_{tt}=u_{tt}(t,x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}]\cap W_2^2(\mathbb{R})$. Наконец, получим достаточные условия существования единственного глобального (при $t\geqslant 0$) решения задачи Коши (1), (2) и его экспоненциального убывания.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

В этом пункте понадобятся некоторые сведения из теории полугрупп. Напомним, что в пространстве $C[\mathbb{R}]$ [6, гл. 8, § 1; 7, § 1.3] дифференциальные операторы ∂_x (с областью определения $\mathcal{D}(\partial_x)=C^{(1)}[\mathbb{R}]$) и ∂_x^2 ($\mathcal{D}(\partial_x^2)=C^{(2)}[\mathbb{R}]$) являются соответственно производящими операторами сильно непрерывных сжимающих группы

$$U(\tau;\partial_x)g(x)=g(x+\tau),\quad \tau\in\mathbb{R},$$

и полугруппы

$$U(t;\partial_x^2)g(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)\,d\xi,\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+.$$

Полуось $\lambda>0$ принадлежит резольвентным множествам операторов ∂_x и ∂_x^2, и для соответствующих резольвент справедливы оценки норм $\|(\lambda I-\partial_x)^{-1}\|\leqslant 1/\lambda$, $\|(\lambda I-\partial_x^2)^{-1}\|\leqslant 1/\lambda$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (1):

$$(I-\partial_x^2)u_{tt}+(q_1\partial_x^4-q_2\partial_x^2+q_3I)u_t-(q_4\partial_x^6-q_5\partial_x^4+q_6\partial_x^2-q_7I)u=0, \tag{5}$$

и пусть $u=u(t,x)$ — решение задачи Коши (5), (2), для которого частные производные u_{xx} и u_{txx} непрерывны при $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$.

Введём в уравнении (5) новую неизвестную функцию

$$v(t,x)=u(t,x)-u_{xx}(t,x). \tag{6}$$

Если начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат пространству $C^{(2)}[\mathbb{R}]$, то из замены (6) можно единственным образом определить начальные значения новой неизвестной функции:

$$v|_{t=0} = v_0(x) = \varphi(x) - \varphi''(x), \quad v_t|_{t=0} = v_1(x) = \psi(x) - \psi''(x),$$

и выразить решение $u(t,x)$ уравнения (5) через эту функцию:

$$u(t,x) = (I-\partial_x^2)^{-1}v(t,x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}U(s;\partial_x^2)v(t,x)\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|}v(t,x+\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

В результате замены (6) получим эквивалентное (5) интегро-дифференциальное уравнение

$$v_{tt} + Av_t - Bv = 0, \tag{8}$$

в котором $A = -q_1\partial_x^2 + c_1(I-\partial_x^2)^{-1} - c_2 I$, $\mathcal{D}(A) = C^{(2)}[\mathbb{R}]$, $c_1 = q_1 - q_2 + q_3$, $c_2 = q_1 - q_2$, $B = -q_4\partial_x^4 - c_3\partial_x^2 - c_4(I-\partial_x^2)^{-1} + c_4 I$, $\mathcal{D}(B) = C^{(4)}[\mathbb{R}]$, $c_3 = q_4 - q_5$, $c_4 = q_6 - q_7 + c_3$.

Оператор $-A$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы

$$\begin{gathered} U(t;-A)g(x) = e^{c_2 t}U(t;q_1\partial_x^2)U(-c_1 t;(I-\partial_x^2)^{-1})g(x) = \\ = e^{c_2 t}U(-c_1 t;(I-\partial_x^2)^{-1})U(t;q_1\partial_x^2)g(x), \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+, \end{gathered} \tag{9}$$

где $U(t;q_1\partial_x^2) = U(q_1 t;\partial_x^2)$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, — сжимающая полугруппа, для которой справедливо представление

$$U(q_1 t;\partial_x^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi q_1 t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\eta)^2/(4q_1 t)}g(\eta)\,d\eta,$$

а $U(-c_1\tau;(I-\partial_x^2)^{-1})$, $\tau\in\mathbb{R}$, — группа, определяемая разложением в степенной ряд:

$$U(-c_1\tau;(I-\partial_x^2)^{-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-c_1)^n\tau^n}{n!}(I-\partial_x^2)^{-n},$$

равномерно сходящийся по τ на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}$.

Для полугруппы $U(t;-A)$ справедлива оценка нормы

$$\|U(t;-A)\| \leqslant e^{(c_2+|c_1|)t}, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+.$$

Используя формулу [6, гл. 8, § 1, лемма 12], выражающую степени резольвенты $(\lambda I-\mathbb{A})^{-1}$ производящего оператора $\mathbb{A}$ сильно непрерывной полугруппы $U(t;\mathbb{A})$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$(\lambda I-\mathbb{A})^{-k}g(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^{+\infty} s^{k-1}e^{-\lambda s}U(s;\mathbb{A})g(x)\,ds,$$

найдём представление для группы $U(-c_1\tau;(I-\partial_x^2)^{-1})$ при $\tau = t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$:

$$U(-c_1 t;(I-\partial_x^2)^{-1})g(x) = g(x) + \sqrt{\frac{|c_1|t}{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{M}(2\sqrt{|c_1|t},\xi^2)g(x+\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

где

$$\mathrm{M}(2\sqrt{|c_1|t},\xi^2)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-r-\xi^2/(4r)}\mathrm{N}(2\sqrt{|c_1|tr})\frac{dr}{r},\quad \mathrm{N}(2\sqrt{|c_1|ts})=\begin{cases}-J_1(2\sqrt{c_1tr}), & c_1>0,\\ I_1(2\sqrt{|c_1|tr}), & c_1<0,\end{cases}$$

J_1 и I_1 — функции Бесселя.

Аналогично выводим ($t\in\overline{\mathbb{R}}_+$)

$$U(c_1t;(I-\partial_x^2)^{-1})g(x)=g(x)+\sqrt{\frac{|c_1|t}{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{M}^*(2\sqrt{|c_1|t},\xi^2)g(x+\xi)\,d\xi,$$

$$\mathrm{M}^*(2\sqrt{|c_1|t},\xi^2)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-s-\xi^2/(4s)}\mathrm{N}^*(2\sqrt{|c_1|ts})\frac{ds}{s},\quad \mathrm{N}^*(2\sqrt{|c_1|ts})=\begin{cases}I_1(2\sqrt{c_1ts}), & c_1>0,\\ -J_1(2\sqrt{|c_1|ts}), & c_1<0.\end{cases}$$

Введём в уравнении (8) новую неизвестную функцию $w=w(t,x)$ по формуле

$$v(t,x)=U(t/2;-A)w(t,x),\quad (t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R},\tag{11}$$

полагая, что значения этой функции принадлежат области определения оператора A: $w(t,x)\in\mathcal{D}(A)$. Тогда при выполнении условия $\varphi(x)\in C^{(6)}[\mathbb{R}]$, $\psi(x)\in C^{(4)}[\mathbb{R}]$ можно единственным образом определить начальные значения функции $w(t,x)$:

$$w|_{t=0}=w_0(x)=v_0(x)\in\mathcal{D}(A),\quad w_t|_{t=0}=w_1(x)=Av_0(x)/2+v_1(x)\in\mathcal{D}(A).$$

Подставив в уравнение (8) значения производных v_t и v_{tt}, получим

$$e^{-c_2t}U(-c_1t;(I-\partial_x^2)^{-1})U(q_1t;\partial_x^2)\left[w_{tt}-\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)w\right]=0$$

или (учитывая, что $U(-c_1t;(I-\partial_x^2)^{-1})$ — группа)

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi q_1t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\eta)^2/(4q_1t)}\left[w_{tt}(t,\eta)-\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)w(t,\eta)\right]d\eta=0.\tag{12}$$

Уравнение (12) можно представить в виде

$$e^{-x^2/(4q_1t)}*\left[w_{tt}(t,x)-\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)w(t,x)\right]=0,$$

где символ $*$ обозначает свёртку двух непрерывных функций по переменной x. Но тогда, согласно теореме Титчмарша [8, гл. 6, § 5], функция $w=w(t,x)$ является решением уравнения

$$w_{tt}=\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)w,\tag{13}$$

где

$$A^2=q_1^2\partial_x^4+2q_1c_2\partial_x^2+(c_2^2+2q_1c_1)I-2c_1(q_1+c_2)(I-\partial_x^2)^{-1}+c_1^2(I-\partial_x^2)^{-2},$$

и значит,

$$\frac{1}{4}A^2+B=\left(\frac{q_1^2}{4}-q_4\right)\partial_x^4+c_5\partial_x^2+c_6I-c_7(I-\partial_x^2)^{-1}+c_8(I-\partial_x^2)^{-2},$$

где $c_5=q_1c_2/2-c_3$, $c_6=(c_2^2+2q_1c_1)/4+c_4$, $c_7=c_1(q_1+c_2)/2+c_4$, $c_8=c_1^2/4$.

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$q_1 = 2\sqrt{q_4}, \quad (q_1 - q_2)^2 > q_2^2 - 4q_5. \tag{14}$$

(Если $d = q_2^2 - 4q_5 \leqslant 0$, то неравенство $c_5 > 0$ выполняется для всех $q_1 \neq q_2$. Если $d > 0$, то неравенство $c_5 > 0$ выполняется при $q_1 < q_2 - \sqrt{d}$ и при $q_1 > q_2 + \sqrt{d}$.) Тогда уравнение (13) в пространстве $C[\mathbb{R}]$ можно записать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = KW, \tag{15}$$

в котором операторный коэффициент

$$K = K_1 + K_2, \quad \mathcal{D}(K) = C^{(2)}[\mathbb{R}],$$

где

$$K_1 = (\sqrt{c_5}\partial_x)^2, \quad \mathcal{D}(K_1) = C^{(2)}[\mathbb{R}], \quad K_2 = c_6 I - c_7(I - \partial_x^2)^{-1} + c_8(I - \partial_x^2)^{-2}, \quad \mathcal{D}(K_2) = C[\mathbb{R}],$$

а $W = W(t)\colon t \to w(t,x)$ — искомая вектор-функция со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}]$, определённая для $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Начальные условия для уравнения (15) в $C[\mathbb{R}]$ запишутся в виде

$$W|_{t=0} = W_0, \quad W_t|_{t=0} = W_1, \tag{16}$$

где $W_0 = w_0(x)$, $W_1 = w_1(x)$ — элементы пространства $C[\mathbb{R}]$.

Оператор K_1 является [7, § 1.5] производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; K_1)$, $\tau \in \mathbb{R}$, для которой справедливо представление

$$C(\tau; K_1)g(x) = \frac{1}{2}\big[U(\tau; \sqrt{c_5}\partial_x) + U(-\tau; \sqrt{c_5}\partial_x)\big]g(x) = \frac{1}{2}\big[g(x + \sqrt{c_5}\tau) + g(x - \sqrt{c_5}\tau)\big]$$

и оценка нормы $\|C(t; K_1)\| \leqslant 1$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Ограниченный оператор K_2 порождает [7, § 4.2] косинус оператор-функцию $C(\tau; K_2)$, $\tau \in \mathbb{R}$, для которой справедливы разложение в сходящийся равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ на каждом конечном отрезке степенной ряд

$$C(\tau; K_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} K_2^n$$

и оценка нормы $\|C(t; K_2)\| \leqslant \operatorname{ch}(c_9 t)$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, где $c_9 = (|c_6| + |c_7| + |c_8|)^{1/2}$.

Оператор K, полученный возмущением ограниченным оператором K_2 производящего оператора K_1, порождает [7, § 8.2] косинус оператор-функцию, для которой на элементах $g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}]$ и для всех $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы представление

$$C(\tau; K)g(x) = C(\tau; K_1)g(x) + \frac{\tau^2}{2}\int_0^1 j_1(\tau\sqrt{1-s^2}, K_1)C(\tau s; K_2)g(x)\,ds, \tag{17}$$

где

$$j_1(\tau, K_1)g(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,C(\tau r; K_1)g(x)\,dr, \quad \|j_1(\tau, K_1)\| \leqslant 1,$$

и оценка

$$\|C(t; K)\| \leqslant 1 + \frac{t}{2c_9}\operatorname{sh}(c_9 t) = h_1(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{18}$$

С косинус оператор-функцией (17) ассоциирована [7, § 1.4] синус оператор-функция

$$S(\tau;K)g(x)=\int_0^\tau C(\xi;K)g(x)\,d\xi,\quad g(x)\in C[\mathbb{R}], \tag{19}$$

и линейное многообразие $C_1[\mathbb{R}]=\{g(x)\in C[\mathbb{R}]\colon C(\tau;K)g(x)\in C^{(1)}(\mathbb{R};C[\mathbb{R}])\}$, т.е. подмножество $C_1[\mathbb{R}]\subset C[\mathbb{R}]$ состоит из тех функций из $C[\mathbb{R}]$, для которых функция $C(\tau;K)g(x)\colon\mathbb{R}\to C[\mathbb{R}]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной τ. Очевидно, что $\mathcal{D}(K)=$ $=C^{(2)}[\mathbb{R}]\subset C_1[\mathbb{R}]$.

Из соотношений (18) и (19) для $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ выводим оценку нормы синус оператор-функции:

$$\|S(t;K)\|\leqslant t+\frac{t}{2c_9^2}\operatorname{ch}(c_9t)=h_2(t). \tag{20}$$

Задача Коши (15), (16) равномерно корректна [7, § 1.4] только тогда, когда оператор K является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции, при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (15), (16) даётся формулой

$$W(t)=C(t;K)W_0+S(t;K)W_1,\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

для любых $W_0\in\mathcal{D}(K)$ и $W_1\in C_1[\mathbb{R}]$.

Теперь, производя обратные замены (7) и (11) и используя перестановочность резольвенты $(I-\partial_x^2)^{-1}$ с полугруппой $U(t/2;-A)$ и косинус оператор-функцией $C(t;K)$:

$$u(t,x)=(I-\partial_x^2)^{-1}v(t,x)=(I-\partial_x^2)^{-1}U(t/2;-A)w(t,x), \tag{21}$$

находим решение задачи Коши для уравнения (5):

$$u(t,x)=U\left(\frac{t}{2};-A\right)\left[C(t;K)\varphi(x)+S(t;K)\left(\psi(x)+\frac{1}{2}A\varphi(x)\right)\right]. \tag{22}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (14) и начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат подмножеству $C^{(6)}[\mathbb{R}]$ пространства $C[\mathbb{R}]$, тогда задача Коши для линейного однородного уравнения (5) равномерно корректна, классическое решение определяется формулой (22) и для него справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leqslant e^{(c_2+|c_1|)t/2}\biggl\{h_1(t)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|+$$
$$+h_2(t)\left[\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi(x)|+\frac{1}{2}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi''(x)|+(|c_1|+|c_2|)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\right)\right]\biggr\},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+.$$

Замечание 1. Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (15), (16) принадлежит $C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}_+,C[\mathbb{R}])$ и для него $KW(t)\in C(\overline{\mathbb{R}}_+,C[\mathbb{R}])$, при этом значения $w(t,x)\in$ $\in\mathcal{D}(A^2)\cap\mathcal{D}(B)$ при $(t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}$, следовательно, $w(t,x)\in C^{2,4}(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R})$. В силу формулы (21) найденное решение $u(t,x)\in C^{2,6}(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R})$.

3. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ (3), (4)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3), получающегося из (1) дифференцированием обеих частей по переменной x и последующей подстановкой $u_x=v$ (отметим, что при этом соответствующие линейные однородные уравнения для уравнений (1) и (3) совпадают).

Применив к обеим частям уравнения (3) линейный ограниченный оператор $(I-\partial_x^2)^{-1}$, получим эквивалентное (3) уравнение

$$v_{tt}+Av_t-Bv=\lambda[(I-\partial_x^2)^{-1}-I]f(v), \tag{23}$$

в котором операторы A и B такие же, как и в уравнении (8), а $f(g)\colon g(x)\to(g(x))^{1-p}$, $g(x)\in C[\mathbb{R}]$, — оператор суперпозиции.

После замены в (23) по формуле

$$v(t,x)=U\left(\frac{t}{2};-A\right)\mathrm{v}(t,x)$$

придём к уравнению

$$U\left(\frac{t}{2};-A\right)\left[\mathrm{v}_{tt}-\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)\mathrm{v}\right]=f_1(t,x), \tag{24}$$

где $f_1(t,x)=\lambda[(I-\partial_x^2)^{-1}-I]f(U(t/2;-A)\mathrm{v}(t,x))$.

Используя в левой части (24) представление (9) полугруппы, порождаемой оператором $-A$, и обратимость группы, порождаемой оператором $(I-\partial_x^2)^{-1}$:

$$U^{-1}(-c_1t/2;(I-\partial_x^2)^{-1})=U(c_1t/2;(I-\partial_x^2)^{-1}),$$

выводим

$$U\left(\frac{q_1t}{2};\partial_x^2\right)[\mathrm{v}_{tt}-K\mathrm{v}]=f_2(t,x),\quad (t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}, \tag{25}$$

где $f_2(t,x)=e^{-c_2t/2}U(c_1t/2;(I-\partial_x^2)^{-1})f_1(t,x)$, а оператор $K=A^2/4+B$ такой же, как и в уравнении (15).

Пусть в уравнении (25) временна́я переменная t удовлетворяет неравенству $1-q_1t/2>0$, тогда, действуя на обе части (25) полугруппой $U(1-q_1t/2;\partial_x^2)$ и используя полугрупповое свойство

$$U(1-q_1t/2;\partial_x^2)U(q_1t/2;\partial_x^2)=U(1;\partial_x^2),\quad t\in[0,2/q_1),$$

придём к уравнению

$$U(1;\partial_x^2)[\mathrm{v}_{tt}-K\mathrm{v}]=f_3(t,x),\quad (t,x)\in[0,2/q_1)\times\mathbb{R}, \tag{26}$$

где $f_3(t,x)=U(1-q_1t/2;\partial_x^2)f_2(t,x)\in C[\mathbb{R}]$.

В подробной записи левая часть (26) представляет собой преобразование Вейерштрасса [9, гл. 8, § 2]

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\eta)^2/4}\big[\mathrm{v}_{tt}(t,\eta)-K\mathrm{v}(t,\eta)\big]\,d\eta=f_3(t,x), \tag{27}$$

причём так как искомое решение $\mathrm{v}=\mathrm{v}(t,x)$ классическое, то выражение в квадратных скобках — ограниченная и непрерывная функция при $\eta\in\mathbb{R}$, и поэтому [9, гл. 8, § 4] из соотношения (27) следует уравнение

$$\mathrm{v}_{tt}(t,x)-K\mathrm{v}(t,x)=e^{-D^2}f_3(t,x),\quad (t,x)\in[0,2/q_1)\times\mathbb{R}, \tag{28}$$

для функций $f_3(t,x)$, к которым применим [9, гл. 8, § 3] символический оператор

$$e^{-D^2}g(x)=\lim_{\tau\to1-0}e^{-\tau D^2}g(x)=\lim_{\tau\to1-0}\frac{1}{2i\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}e^{(s-x)^2/(4\tau)}g(s)\,ds.$$

Напомним [9], что функция $g(x)$ принадлежит в интервале $-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty$ классу $\mathcal{A}$ функций, к которым применим оператор e^{-D^2}, тогда и только тогда, когда она может быть так аналитически продолжена в комплексную плоскость, что функция $g(x+iy)$ аналитична в полосе $a<x<b$ и $g(x+iy)=o(|y|e^{y^2/4})$, $|y|\to\infty$, равномерно в каждом замкнутом подинтервале интервала (a,b). Например, $e^{-x^2/4}\in\mathcal{A}$ при $x\in\mathbb{R}$. Если $g(x)\in\mathcal{A}$ при $x\in\mathbb{R}$, то

$$e^{-tD^2}g(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2/(4t)}g(x+iy)\,dy,$$

причём интеграл сходится абсолютно при $0<t<1$, $x\in\mathbb{R}$, и представляет собой вещественную функцию, если таковой является функция $g(x)$.

Потребуем, чтобы искомое классическое решение $\mathrm{v}=\mathrm{v}(t,x)$ уравнения (28) принадлежало классу $\mathcal{A}$ и выполнялось неравенство

$$|\mathrm{v}(t,x+iy)|\leqslant|\mathrm{v}(t,x)|\alpha(|y|)|y|e^{y^2/4}, \tag{29}$$

где $\alpha(|y|)$ — непрерывная функция, бесконечно малая при $|y|\to+\infty$, тогда, использовав (29), получим оценку

$$\|f_3(t,x+iy)\|_C\leqslant|\lambda|e^{-c_2t/2}e^{|c_1|t/2}2\|\mathrm{v}(t,x+iy)\|_C^{1-p}\leqslant$$
$$\leqslant 2|\lambda|e^{(|c_1|-c_2)t/2}\|\mathrm{v}(t,x)\|_C^{1-p}\alpha^{1-p}(|y|)|y|e^{y^2/4},\quad |y|\geqslant1,$$

а значит, к правой части $f_3(t,x)$ уравнения (27) применим символический оператор e^{-D^2}.

Уравнение (28) в пространстве $C[\mathbb{R}]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$\mathbb{V}_{tt}=K\mathbb{V}+F(t,U(t/2;-A)\mathbb{V}),\quad (t,x)\in[0,2/q_1)\times\mathbb{R}, \tag{30}$$

где $\mathbb{V}=\mathbb{V}(t)\colon t\to\mathrm{v}(t,x)$ — искомая вектор-функция, а

$$F(t,g)=\lambda e^{-c_2t/2}U(1-q_1t/2;\partial_x^2)U(c_1t/2;(I-\partial_x^2)^{-1})[(I-\partial_x^2)^{-1}-I]e^{-D^2}f(g) \tag{31}$$

— заданный нелинейный оператор; здесь $g(x)$ — функции из пространства $C[\mathbb{R}]$, степень $g^{1-p}(x)$ которых принадлежит классу $\mathcal{A}$ при $x\in\mathbb{R}$. (В формуле (31) поменяли порядок интегрирования, так как все интегралы, формирующие представление (31) оператора $F(t,g)$, абсолютно и равномерно сходятся.)

Для нелинейного оператора (31) справедлива оценка нормы

$$\|F(t,g)\|_C\leqslant2|\lambda|e^{(|c_1|-c_2)t/2}\lim_{\tau\to1-0}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2/(4\tau)}\|f(g(x+iy))\|_C\,dy=$$
$$=c_{10}|\lambda|e^{(|c_1|-c_2)t/2}\|g(x)\|_C^{1-p}, \tag{32}$$

где

$$c_{10}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2p/4}\alpha^{1-p}(|y|)|y|^{1-p}\,dy.$$

Начальные условия для уравнения (30) в $C[\mathbb{R}]$ запишутся в виде

$$\mathbb{V}|_{t=0}=\mathbb{V}_0,\quad \mathbb{V}_t|_{t=0}=\mathbb{V}_1, \tag{33}$$

где

$$\mathbb{V}|_{t=0} = \mathbb{V}_0 = \mathrm{v}|_{t=0} = v|_{t=0} = \varphi'(x),$$

$$\mathbb{V}_t|_{t=0} = \mathbb{V}_1 = \psi'(x) - \frac{q_1}{2}\varphi'''(x) + \frac{c_1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|}\varphi'(x+\xi)\,d\xi - \frac{c_2}{2}\varphi'(x)$$

— элементы пространства $C[\mathbb{R}]$.

Из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $f(g)$ в пространстве непрерывных функций следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(t,g)$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$, и поэтому существует промежуток $[0,t_0)\subset[0,2/q_1)$, в котором абстрактная задача Коши (30), (33) для любых $\mathbb{V}_0\in D(K)$ и $\mathbb{V}_1\in C_1[\mathbb{R}]$ имеет [10, § 3] единственное классическое решение $\mathbb{V}=\mathbb{V}(t)$, удовлетворяющее абстрактному интегральному уравнению

$$\mathbb{V}(t) = C(t;K)\mathbb{V}_0 + S(t;K)\mathbb{V}_1 + \int\limits_0^t S(t-\tau;K)F(\tau, U(\tau/2;-A)\mathbb{V}(\tau))\,d\tau. \tag{34}$$

Из уравнения (34), используя оценки (18), (20) и (32), выводим интегральное неравенство

$$\|\mathbb{V}(t)\|_C \leqslant h_3(t) + c_{10}|\lambda|\int\limits_0^t h_2(\tau)e^{(|c_1|-c_2)\tau/2}\|U(\tau/2;-A)\mathbb{V}(\tau)\|_C^{1-p}\,d\tau,$$

где

$$h_3(t) = h_1(t)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)| + h_2(t)\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\psi'(x) - \frac{q_1}{2}\varphi'''(x) + \frac{c_1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|}\varphi'(x+\xi)\,d\xi - \frac{c_2}{2}\varphi'(x)\right|,$$

или, увеличивая правую часть,

$$\|\mathbb{V}(t)\|_C \leqslant c_{11} + \int\limits_0^t h_4(\tau)\|\mathbb{V}(\tau)\|_C^{1-p}\,d\tau, \quad t\in[0,t_0), \tag{35}$$

здесь $c_{11} = \max_{t\in[0,2/q_1]} h_3(t)$ и $h_4(t) = c_{10}|\lambda|e^{[|c_1|-(|c_1|+c_2)p/2]t}h_2(t)$.

Из неравенства (35) находим [11, гл. 1, § 1, с. 8] оценку нормы решения $\mathbb{V}(t)$ на отрезке $[0,t_1]\subset[0,t_0)$:

$$\|\mathbb{V}(t)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\mathrm{v}(t,x)| \leqslant \left(c_{11}^p + p\int\limits_0^t h_4(\tau)\,d\tau\right)^{1/p}, \quad t_1 = \sup\left\{t\in[0,t_0)\colon c_{11}^p + p\int\limits_0^t h_4(\tau)\,d\tau > 0\right\}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (14), (29) и начальные функции $\varphi(x),\psi(x)\in C^{(7)}[\mathbb{R}]$, тогда на отрезке $[0,t_1]\subset[0,2/q_1)$ существует единственное классическое решение задачи Коши (3), (4): $v(t,x) = U(t/2;-A)\mathrm{v}(t,x)$, для которого справедлива оценка*

$$\|v(t,x)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}}|u_x(t,x)| \leqslant e^{(c_2+|c_1|)t}\left(c_{11}^p + p\int\limits_0^t h_4(\tau)\,d\tau\right)^{1/p} = h_5(t).$$

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ (1) И (3)

Далее будем предполагать, что классическое решение уравнения (1) принадлежит пересечению пространства $C[\mathbb{R}]$ с пространством $L_2(\mathbb{R})$.

Напомним, что скалярное произведение и норма в $L_2(\mathbb{R})$ определяются соответственно формулами $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)\,dx$ и $\|\varphi\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,dx)^{1/2}$ и что для функций $g(x)$, принадлежащих пересечению пространства непрерывных ограниченных функций $C(\mathbb{R})$ с пространством Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$, справедлива оценка

$$\|g\|_C \leqslant \|g\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [(g(x))^2 + (g'(x))^2]\, dx \right)^{1/2}, \tag{36}$$

причём если $g(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, то [12] предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \to \pm\infty$ равен нулю.

Лемма. *Из существования локального классического решения $v = v(t,x)$, $t \in [0, t_1]$, уравнения (3) следует существование соответствующего решения*

$$u = u(t,x) = \lim_{x_0 \to -\infty} \int_{x_0}^{x} v(t,s)\, ds = \int_{-\infty}^{x} v(t,s) ds \tag{37}$$

уравнения (1) на том же временно́м отрезке $[0, t_1]$ при выполнении условий

$$u_{xx}(t,x) = O(u_x(t,x)), \quad u_{xxx}(t,x) = O(u_x(t,x)) \quad \textit{при} \quad x \to \pm\infty \tag{38}$$

и

$$u(t,x) \in C^{(6)}[\mathbb{R}] \cap W_2^6(\mathbb{R}), \quad u_t(t,x) \in C^{(4)}[\mathbb{R}] \cap W_2^4(\mathbb{R}), \quad u_{tt}(t,x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}] \cap W_2^2(\mathbb{R}). \tag{39}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий (39) при $t \in [0, t_1]$ следуют предельные равенства

$$\lim_{x\to\pm\infty} \partial_x^n u(t,x) = 0, \quad n = \overline{0,6}; \quad \lim_{x\to\pm\infty} \partial_t \partial_x^m u(t,x) = 0, \quad m = \overline{0,4};$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \partial_t^2 \partial_x^q u(t,x) = 0, \quad q = \overline{0,2}. \tag{40}$$

Пусть $v = v(t,x)$ — классическое решение уравнения (3) на временно́м отрезке $[0, t_1]$, тогда, используя соотношения (38) и (40), выводим равенства

$$\int_{-\infty}^{x} \partial_t^i \partial_s^j v(t,s)\, ds = \int_{-\infty}^{x} (\partial_t^i \partial_s^j u(t,s))_s\, ds = \partial_t^i \partial_x^j u(t,x) - \lim_{s\to-\infty} \partial_t^i \partial_s^j u(t,s) = \partial_t^i \partial_x^j u(t,x),$$

$$\int_{-\infty}^{x} \partial_s^2 (v^{1-p}(t,s))\, ds = \partial_s (v^{1-p}(t,s))|_{-\infty}^{x} = \partial_x (v^{1-p}(t,x)) - (1-p) \lim_{x_0\to-\infty} \frac{v_x(t,x_0)}{v^p(t,x_0)} =$$

$$= \partial_x u_x^{1-p}(t,x) - (1-p) \lim_{x_0\to-\infty} u_x^{1-p}(t,x_0) \frac{u_{xx}(t,x_0)}{u_x(t,x_0)} = \partial_x u_x^{1-p}(t,x).$$

Теперь, применяя полученные представления и подставляя функцию (37) в уравнение (1), получаем тождественное равенство на отрезке $[0, t_1]$.

Замечание 2. Из требований (39) к решению $u = u(t,x)$ задачи Коши (1), (2) следуют необходимые условия, которым должны удовлетворять начальные функции:

$$\varphi(x) \in C^{(6)}[\mathbb{R}] \cap W_2^6(\mathbb{R}), \quad \psi(x) \in C^{(4)}[\mathbb{R}] \cap W_2^4(\mathbb{R}).$$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

На временном отрезке $t \in [0, t_1]$ существования единственного решения $u = u(t,x)$ задачи Коши (1), (2) введём в рассмотрение функционал — так называемый интеграл энергии уравнения (1):

$$y(t) = (u,u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2)\, dx = \|u\|_{W_2^1}^2, \quad t \in [0, t_1]. \tag{41}$$

Применяя к значению производной функционала (41)

$$y'(t)=2((u,u_t)+(u_x,u_{tx}))$$

неравенство Коши–Буняковского $|(\varphi,\psi)|\leqslant\|\varphi\|_2\|\psi\|_2$ и обозначая через

$$z(t)=(u_t,u_t)+(u_{tx},u_{tx})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u_t^2+u_{tx}^2)\,dx=\|u_t\|^2_{W_2^1},\quad t\in[0,t_1],$$

ещё один интеграл энергии, связанный с уравнением (1), выводим вспомогательную оценку

$$y'(t)\leqslant y(t)+z(t). \tag{42}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы 2 и функция $\varphi'(x)\in C[\mathbb{R}]$ принадлежит пространству $L_{2-p}(\mathbb{R})$: $\|\varphi'\|^{2-p}_{2-p}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi'(x))^{2-p}\,dx<\infty$. Тогда при $\lambda>0$ существует единственное глобальное классическое решение задачи Коши (1), (2), для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leqslant\sqrt{E_0}e^{t/2},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,\quad E_0=\mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Введём в рассмотрение функционал энергии для уравнения (1):

$$E(t)=\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_7\|u\|_2^2+$$
$$+\frac{2\lambda}{2-p}\|u_x\|^{2-p}_{2-p}+2q_1\int\limits_0^t\|u_{\tau xx}\|_2^2\,d\tau+2q_2\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+2q_3\int\limits_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau. \tag{43}$$

Умножим уравнение (1) на $u_t(t,x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда, интегрируя по частям, будем иметь

$$(u_{tt},u_t)+(u_{ttx},u_{tx})+q_1(u_{txx},u_{txx})+q_2(u_{tx},u_{tx})+q_3(u_t,u_t)+q_4(u_{xxx},u_{txxx})+$$
$$+q_5(u_{xx},u_{txx})+q_6(u_x,u_{tx})+q_7(u,u_t)+\lambda(u_x^{1-p},u_{tx})=0$$

или

$$\frac12\frac{d}{dt}\bigg(\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_7\|u\|_2^2+\frac{2\lambda}{2-p}\|u_x\|^{2-p}_{2-p}\bigg)+$$
$$+q_1\|u_{txx}\|_2^2+q_2\|u_{tx}\|_2^2+q_3\|u_t\|_2^2=0. \tag{44}$$

Из равенства (44) следует, что производная функционала энергии $E'(t)=0$, т.е. функционал энергии (43) не зависит от времени и, следовательно, имеет место закон сохранения

$$E(t)=E(0)\equiv E_0, \tag{45}$$

в котором

$$E_0=\|\psi\|_2^2+\|\psi'\|_2^2+q_4\|\varphi'''\|_2^2+q_5\|\varphi''\|_2^2+q_6\|\varphi'\|_2^2+q_7\|\varphi\|_2^2+\frac{2\lambda}{2-p}\|\varphi'\|^{2-p}_{2-p}$$

— начальная энергия.

Потребуем, чтобы для функции $\varphi'(x)\in L_{2-p}(\mathbb{R})$ и параметра $\lambda\in\mathbb{R}$ выполнялось условие положительности начальной энергии $E_0>0$, т.е.

$$\|\psi\|^2_{W_2^1}+q_4\|\varphi'''\|_2^2+q_5\|\varphi''\|_2^2+q_6\|\varphi'\|_2^2+q_7\|\varphi\|_2^2>-\frac{2\lambda}{2-p}\|\varphi'\|^{2-p}_{2-p}. \tag{46}$$

Отметим, что условие (46) существенно только для отрицательных значений параметра λ и при $\lambda > 0$ выполняется всегда.

Полагая, что параметр $\lambda > 0$, из закона сохранения (45), уменьшая его левую часть, выводим оценку второго интеграла энергии

$$z(t) = \|u_t\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 \leqslant E_0. \tag{47}$$

Совместно рассматривая неравенства (42) и (47), получаем интегральное неравенство

$$y(t) \leqslant E_0 t + \int_0^t y(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \tag{48}$$

Применив к (48) лемму Гроноулла [13, гл. 1, § 1], выводим оценку интеграла энергии

$$y(t) \leqslant E_0 e^t, \tag{49}$$

справедливую на всей положительной полуоси $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, значит, классическое решение $u = u(t, x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ при $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Теперь, используя неравенства (36) и (49), получаем оценку решения $u = u(t, x)$ задачи Коши (1), (2) в пространстве $C[\mathbb{R}]$:

$$\|u\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \leqslant \|u\|_{W_2^1} \leqslant \sqrt{E_0} e^{t/2}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

обеспечивающую существование глобального решения.

6. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ УБЫВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Введём в рассмотрение еще один функционал энергии для уравнения (1)

$$E_1(t) = \|u_t\|_{W_2^1}^2 + q_4\|u_{xxx}\|_2^2 + q_5\|u_{xx}\|_2^2 + q_6\|u_x\|_2^2 + q_7\|u\|_2^2 + \frac{2\lambda}{2-p}\|u_x\|_{2-p}^{2-p} \tag{50}$$

и перепишем соотношение (44) в виде дифференциального равенства:

$$\frac{d}{d\tau} E_1(\tau) = -2(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2 + q_2\|u_{\tau x}\|_2^2 + q_3\|u_\tau\|_2^2), \quad \tau \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{51}$$

Из (51) следует, что функционал $E_1(t)$ монотонно убывает на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$, причём, интегрируя обе части (51) по отрезку $[0, t]$, имеем

$$E_1(t) = E_0 - 2\int_0^t (q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2 + q_2\|u_{\tau x}\|_2^2 + q_3\|u_\tau\|_2^2)\, d\tau.$$

Следовательно, $E_1(t) \leqslant E_0$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, т.е. функционал $E_1(t)$ ограничен сверху на всей полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$ начальной энергией E_0 функционала энергии $E(t)$.

Выясним достаточные условия экспоненциального убывания нормы глобального классического решения $\|u\|_C$ при $t \to +\infty$.

Умножим обе части равенства (51) на экспоненту $e^{\varepsilon\tau}$, где ε — пока не определённый положительный числовой параметр:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\varepsilon\tau} E_1(\tau)) + 2e^{\varepsilon\tau}(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2 + q_2\|u_{\tau x}\|_2^2 + q_3\|u_\tau\|_2^2) = \varepsilon e^{\varepsilon\tau} E_1(\tau). \tag{52}$$

Проинтегрировав обе части (52) по отрезку $[0,t]$, получим

$$e^{\varepsilon t}E_1(t)+2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2+q_2\|u_{\tau x}\|_2^2+q_3\|u_\tau\|_2^2\big)\,d\tau=E_0+\varepsilon\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}E_1(\tau)\,d\tau. \tag{53}$$

Интегрируя по частям и используя предельные соотношения (40), преобразуем степень нормы $\|u_x\|_{2-p}^{2-p}$ из определения (50):

$$\|u_x\|_{2-p}^{2-p}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_x^{1-p}\,du=\lim_{x\to+\infty}(uu_x^{1-p})-\lim_{x\to-\infty}(uu_x^{1-p})-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\,du_x^{1-p}=-(\partial_x(u_x^{1-p}),u). \tag{54}$$

С учётом представления (54) рассмотрим интеграл в правой части равенства (53):

$$\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}E_1(\tau)\,d\tau=-\frac{2\lambda}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(\partial_x(u_x^{1-p}),u)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(\|u_\tau\|_{W_2^1}^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_7\|u\|_2^2)\,d\tau. \tag{55}$$

Первое слагаемое $J(t)$ в правой части (55), используя уравнение (1), представим в виде

$$\frac{2-p}{2}J(t)=-\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(\lambda\partial_x(u_x^{1-p}),u)\,d\tau=-\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau},u)\,d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau xx},u)\,d\tau-$$

$$-q_1\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xxxx},u)\,d\tau+q_2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xx},u)\,d\tau-q_3\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_\tau,u)\,d\tau+$$

$$+q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxxxxx},u)\,d\tau-q_5\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxxx},u)\,d\tau+q_6\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xx},u)\,d\tau-q_7\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u,u)d\tau. \tag{56}$$

Используя очевидные равенства, неравенство Коши–Буняковского и интегрируя по частям, преобразуем интегралы в (56) следующим образом:

$$j_1(t)=-\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau},u)\,d\tau=-e^{\varepsilon t}(u_t,u)+(\psi,\varphi)+\varepsilon\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_\tau,u)d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_2^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{\varepsilon t}}{2}(\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2)+(\psi,\varphi)+\frac{\varepsilon e^{\varepsilon t}}{2}\|u\|_2^2-\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi\|_2^2-\frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_2^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{\varepsilon t}}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{(1+\varepsilon)e^{\varepsilon t}}{2}\|u\|_2^2+(\psi,\varphi)-\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi\|_2^2+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_2(t)=\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau xx},u)d\tau=-\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau x},u_x)\,d\tau=$$

$$=-e^{\varepsilon t}(u_{tx},u_x)+(\psi'(x),\varphi'(x))+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\frac{d}{d\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\|u_{tx}\|_2^2+\frac{(1+\varepsilon)e^{\varepsilon t}}{2}\|u_x\|_2^2+(\psi',\varphi')-\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi'\|_2^2-\frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2 d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\|u_{tx}\|_2^2+\frac{(1+\varepsilon)e^{\varepsilon t}}{2}\|u_x\|_2^2+(\psi',\varphi')-\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi'\|_2^2+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_3(t)=-q_1\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xxxx},u)d\tau=-q_1\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xx},u_{xx})d\tau=-\frac{q_1}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\frac{d}{d\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau=$$

$$=-\frac{q_1e^{\varepsilon t}}{2}\|u_{xx}\|_2^2+\frac{q_1}{2}\|\varphi''\|_2^2+\frac{q_1\varepsilon}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_4(t)=q_2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xx},u)\,d\tau=-q_2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau x},u_x)d\tau=-\frac{q_2}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\frac{d}{d\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau=$$

$$=-\frac{q_2e^{\varepsilon t}}{2}\|u_x\|_2^2+\frac{q_2}{2}\|\varphi'\|_2^2+\frac{q_2\varepsilon}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_5(t)=-q_3\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_\tau,u)d\tau=-\frac{q_3}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\frac{d}{d\tau}\|u\|_2^2\,d\tau=-\frac{q_3e^{\varepsilon t}}{2}\|u\|_2^2+\frac{q_3}{2}\|\varphi\|_2^2+\frac{q_3\varepsilon}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_6(t)=q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxxxxx},u)d\tau=-q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxx},u_{xxx})d\tau=-q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xxx}\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_7(t)=-q_5\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxxx},u)d\tau=-q_5\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xx},u_{xx})\,d\tau=-q_5\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_8(t)=q_6\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xx},u)\,d\tau=-q_6\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_x,u_x)\,d\tau=-q_6\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_9(t)=-q_7\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u,u)\,d\tau=-q_7\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau.$$

Подставив полученные оценки и представления интегралов $j_i(t)$, $i=\overline{1,9}$, в правую часть (56), имеем

$$(2-p)J(t)\leqslant c_{12}+e^{\varepsilon t}(\|u_t\|_{W_2^1}^2+(1+\varepsilon-q_3)\|u\|_2^2+(1+\varepsilon-q_2)\|u_x\|_2^2-q_1\|u_{xx}\|_2^2)+$$
$$+2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_{W_2^1}^2\,d\tau+(\varepsilon q_3-2q_7)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau+$$
$$+(\varepsilon q_2-2q_6)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau+(\varepsilon q_1-2q_5)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau-2q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xxx}\|_2^2\,d\tau, \qquad (57)$$

где $c_{12}=2[(\psi,\varphi)+(\psi',\varphi')]+(q_3-\varepsilon)\|\varphi\|_2^2+(q_2-\varepsilon)\|\varphi'\|_2^2+q_1\|\varphi''\|_2^2$.

Использовав неравенство (57), получим оценку интеграла (55):

$$\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}E_1(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{c_{12}}{2-p}+\frac{e^{\varepsilon t}}{2-p}(\|u_t\|^2_{W_2^1}+(1+\varepsilon-q_3)\|u\|_2^2+(1+\varepsilon-q_2)\|u_x\|_2^2-q_1e^{\varepsilon t}\|u_{xx}\|_2^2)+$$

$$+\frac{4-p}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|^2_{W_2^1}\,d\tau+\frac{\varepsilon q_3-pq_7}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon q_2-pq_6}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau+\frac{\varepsilon q_1-pq_5}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau-\frac{pq_4}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xxx}\|_2^2\,d\tau. \tag{58}$$

Применив оценку (58), увеличим правую часть равенства (53):

$$e^{\varepsilon t}E_1(t)+2\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\big(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2+q_2\|u_{\tau x}\|_2^2+q_3\|u_\tau\|_2^2\big)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}+\frac{\varepsilon e^{\varepsilon t}}{2-p}\big(\|u_t\|^2_{W_2^1}+(1+\varepsilon-q_3)\|u\|_2^2+(1+\varepsilon-q_2)\|u_x\|_2^2-q_1e^{\varepsilon t}\|u_{xx}\|_2^2\big)+$$

$$+\varepsilon\frac{4-p}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|^2_{W_2^1}\,d\tau+\varepsilon\frac{\varepsilon q_3-pq_7}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\frac{\varepsilon q_2-pq_6}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau+\varepsilon\frac{\varepsilon q_1-pq_5}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau-\varepsilon\frac{pq_4}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xxx}\|_2^2\,d\tau.$$

Подставив в левую часть последнего неравенства значение функционала $E_1(t)$, после преобразований получим

$$e^{\varepsilon t}\bigg[\bigg(1-\frac{\varepsilon}{2-p}\bigg)\|u_t\|^2_{W_2^1}+\bigg(q_7-\frac{\varepsilon^2+(1-q_3)\varepsilon}{2-p}\bigg)\|u\|_2^2+\bigg(q_6-\frac{\varepsilon^2+(1-q_2)\varepsilon}{2-p}\bigg)\|u_x\|_2^2+\bigg(q_5+\frac{\varepsilon q_1}{2-p}\bigg)\|u_{xx}\|_2^2+$$

$$+q_4\|u_{xxx}\|_2^2\bigg]+\frac{2\lambda e^{\varepsilon t}}{2-p}\|u_x\|^{2-p}_{2-p}+2q_1\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\|u_{\tau xx}\|_2^2\,d\tau+\bigg(2q_2-\varepsilon\frac{4-p}{2-p}\bigg)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+$$

$$+\bigg(2q_3-\varepsilon\frac{4-p}{2-p}\bigg)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_2^2\,d\tau+\frac{\varepsilon p}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2\big)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}+\frac{\varepsilon^2}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_3\|u\|_2^2+q_2\|u_x\|_2^2+q_1\|u_{xx}\|_2^2\big)\,d\tau.$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $1-\varepsilon/(2-p)>0$, тогда $\varepsilon<2-p$;

2) $2q_k-\varepsilon(4-p)/(2-p)>0$, $k=2,3$, тогда $\varepsilon<2q_k(2-p)/(4-p)$;

3) $q_7-(\varepsilon^2+(1-q_3)\varepsilon)/(2-p)>q_7/2$ или $2\varepsilon^2+2(1-q_3)\varepsilon-(2-p)q_7<0$, тогда $\varepsilon_1<0<\varepsilon<\varepsilon_2=$ $=(q_3-1+\sqrt{(q_3-1)^2+2(2-p)q_7})/2$, где $\varepsilon_{1,2}$ — корни квадратного трехчлена;

4) $q_6-(\varepsilon^2+(1-q_2)\varepsilon)/(2-p)>q_6/2$ при $\widetilde{\varepsilon}_1<0<\varepsilon<\widetilde{\varepsilon}_2=(q_2-1+\sqrt{(q_2-1)^2+2(2-p)q_6})/2$.

Таким образом, если $\varepsilon<\min\{2-p;\varepsilon_2;\widetilde{\varepsilon}_2;q_2;2q_2(2-p)/(4-p);q_3;2q_3(2-p)/(4-p)\}$, то постоянная $c_{12}\geqslant 0$ и

$$e^{\varepsilon t}\big(q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2\big)\leqslant 2E_0+\frac{2\varepsilon c_{12}}{2-p}+\frac{2\varepsilon^2}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_3\|u\|_2^2+q_2\|u_x\|_2^2+q_1\|u_{xx}\|_2^2\big)\,d\tau. \quad (59)$$

Пусть $\delta=2\max\{q_3/q_7;q_2/q_6;q_1/q_5\}/(2-p)$. Тогда, увеличив правую часть неравенства (59), придём к интегральному неравенству

$$e^{\varepsilon t}\big(q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2\big)\leqslant 2\bigg(E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}\bigg)+\varepsilon^2\delta\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2\big)\,d\tau,$$

откуда, применив лемму Гронуолла, имеем

$$q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2\leqslant 2\bigg(E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}\bigg)e^{-\varepsilon(1-\varepsilon\delta)t}. \quad (60)$$

Полагая $0<\varepsilon<\min\{2-p;\varepsilon_2;\widetilde{\varepsilon}_2;q_2;2q_2(2-p)/(4-p);q_3;2q_3(2-p)/(4-p);1/\delta\}$, получаем экспоненциальное убывание при $t\to+\infty$ правой части (60).

Уменьшив левую часть неравенства (60), получим

$$k_0(\|u\|_2^2+\|u_x\|_2^2)\leqslant q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2\leqslant 2\bigg(E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}\bigg)e^{-\varepsilon(1-\varepsilon\delta)t}, \quad k_0=\min\{q_6;q_7\},$$

откуда следует экспоненциальное убывание нормы глобального решения задачи Коши (1), (2) в пространстве Соболева:

$$\|u\|_{W_2^1}\leqslant c_{13}e^{-c_{14}t}, \quad c_{13}=\sqrt{2\bigg(E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}\bigg)}, \quad c_{14}=\frac{\varepsilon(1-\varepsilon\delta)}{2}, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

а значит, в силу оценки (36), и в пространстве $C(\mathbb{R})$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для глобального классического решения $u=u(t,x)$ задачи Коши (1), (2) существуют такие постоянные c_{13} и c_{14}, что имеет место оценка*

$$\|u\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leqslant c_{13}e^{-c_{14}t}, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

т.е. глобальное решение задачи Коши (1), (2) экспоненциально убывает на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1 / Л.Д. Кудрявцев. — М. : Юрайт, 2009. — 702 с.
2. Филиппов, А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. — М. : Машиностроение, 1970. — 736 с.
3. Ерофеев, В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаев, Н.П. Семерикова. — М. : Физматлит, 2002. — 208 с.

4. Фараджев, А.С. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода / А.С. Фараджев // Прикл. математика & Физика. — 2022. — Т. 54, № 3. — С. 141–153.
5. Zhou, J. Well-posedness of solutions for the sixth-order Boussinesq equation with linear strong damping and nonlinear source / J. Zhou, H. Zhang // J. Nonlin. Sci. — 2021. — V. 31, № 76. — P. 1–61.
6. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц ; пер. с англ. Л.И. Головиной и Б.С. Митягина ; под ред. А.Г. Костюченко. — М. : ИЛ, 1962. — 896 с.
7. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.
8. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида ; пер. с англ. В.М. Волосова. — М. : Мир, 1967. — 624 с.
9. Хиршман, И.И. Преобразования типа свертки / И.И. Хиршман, Д.В. Уиддер ; пер. с англ. В.П. Потапова ; под ред. А.О. Гельфонда. — М. : ИЛ, 1958. — 313 с.
10. Travis, C.C. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations / C.C. Travis, G.F. Webb // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. — 1978. — V. 32. — P. 75–96.
11. Yuming Qin. Integral and Discrete Inequalities and their Applications. V. II: Nonlinear Inequalities / Yuming Qin. — Switzerland : Springer, 2016. — 1083 p.
12. Benjamin, T.B. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems / T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Philos. Trans. Roy. Soc. London. — 1972. — V. 272. — P. 47–78.
13. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. — М. : Наука, 1976. — 152 с.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR EQUATION

© 2024 / Kh. G. Umarov

Chechen Academy of Sciences, Grozny, Russia
Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russia
e-mail: umarov50@mail.ru

For a nonlinear partial differential equation generalizing a damped sixth-order Boussinesq equation with double dispersion and the equation of transverse oscillations of a viscoelastic Voigt–Kelvin beam under the action of external and internal friction and whose deformation is considered taking into account the correction for the inertia of section rotation, sufficient conditions for the existence and exponential decay of a global solution of the Cauchy problem are found.

Keywords: Cauchy problem, beam oscillation equation, sixth-order Boussinesq equation, asymptotic behavior of the solution

REFERENCES

1. Kudryavtsev, L.D., *Kurs matematicheskogo analiza* (Course of Mathematical Analysis), vol. 1, Moscow: Yurait, 2009.
2. Filippov, A.P., *Kolebaniya deformiruyemykh sistem* (Oscillations of Deformable Systems), Moscow: Machinostroenie, 1970.
3. Erofeev, V.I., Kazhaev, V.V., and Semerikova, N.P., *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost'* (Waves in Rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity), Moscow: Fizmatlit, 2002.
4. Faradzhev, A.S., On a nonlocal inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with nonlocal time-integral conditions of the second kind, *Applied Math. & Phys.*, 2022, vol. 54, no. 3, pp. 141–153.
5. Zhou, J. and Zhang, H., Well-posedness of solutions for the sixth-order Boussinesq equation with linear strong damping and nonlinear source, *J. Nonlin. Sci.*, 2021, vol. 31, no. 76, pp. 1–61.
6. Dunford, N. and Schwartz, J.T., *Linear Operators. Part I: General Theory*, New York: Interscience, 1958.

7. Vasilyev, V.V., Crane, S.G., and Piskarev, S.I., Operator semigroups, cosine operator functions and linear differential equations, *VINITI: Results of Science and Technology. Series Math. Analysis*, 1990, vol. 28, pp. 87–202.
8. Yosida, K., *Functional Analysis*, Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1965.
9. Hirshman, I.I. and Widder, D.V., *The Convolution Transform*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.
10. Travis, C.C. and Webb, G.F., Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 1978, vol. 32, pp. 75–96.
11. Yuming Qin, *Integral and Discrete Inequalities and their Applications. Vol. II: Nonlinear Inequalities*, Springer, 2016.
12. Benjamin, T.B., Bona, J.L., and Mahony, J.L., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1972, vol. 272, pp. 47–78.
13. Filatov, A.N. and Sharova, L.V., *Integral'nyye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* (Integral Inequalities and the Theory of Nonlinear Oscillations), Moscow: Nauka, 1976.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1368–1385

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977+517.925

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ И ВОЗМУЩЕНИЕМ

 В. В. Евстафьева

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: v.evstafieva@spbu.ru

Поступила в редакцию 13.02.2024 г., после доработки 08.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Рассмотрена многомерная управляемая система с постоянной матрицей, существенной нелинейностью типа двухпозиционного реле с гистерезисом в качестве управления и непрерывной периодической функцией возмущения. Матрица системы имеет простые вещественные ненулевые собственные значения, среди которых одно значение может быть положительным. Установлены условия на параметры системы, в том числе на нелинейности, при выполнении которых существует единственное двухточечно-колебательное периодическое решение с периодом, соизмеримым с периодом функции возмущения, в случае специального вида вектора обратной связи. Доказана асимптотическая устойчивость решения с помощью метода фазовой плоскости. Полученные для трёхмерных систем результаты проиллюстрированы на примерах.

Ключевые слова: многомерная управляемая система, двухпозиционное реле с гистерезисом, непрерывная периодическая функция возмущения, двухточечно-колебательное периодическое решение, синтез управления, асимптотическая устойчивость

DOI: 10.31857/S0374064124100064, EDN: JTIOXZ

ВВЕДЕНИЕ

В задачах теории автоматического управления и регулирования модели управляемых нелинейных систем описываются дифференциально-разностными уравнениями, уравнениями с частными производными или обыкновенными дифференциальными уравнениями (см., например, [1, 2]). Для описания внешнего постоянного воздействия на систему в моделях часто используют непрерывные ограниченные, в том числе периодические, функции возмущения (см. [3]).

Релейные автоматические системы охватывают широкий класс систем регулирования (см., например, [4–6]). Известно [7, с. 11], что эти системы могут обладать бóльшим быстродействием вследствие интенсивного управляющего воздействия, которое может стать причиной возникновения автоколебаний. В некоторых системах (например, в вибрационных регуляторах) такие незатухающие колебания являются основным рабочим режимом, но во многих случаях появление автоколебаний нежелательно. Устранить их можно, если систему подвергнуть внешнему периодическому воздействию. В этом случае при условии захватывания частоты в системе возникают гармонические и субгармонические вынужденные колебания. Согласно [7, с. 12] для разработки и эффективного использования релейных автоматических систем необходимо уметь определять зависимость их режима работы от параметров отдельных элементов, а также от вида и параметров внешнего воздействия.

Автором ранее были изучены системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейностью типа неидеального [8, с. 181] двухпозиционного реле и ограниченной, в том числе периодической, функцией возмущения в правой части (см. работы [9–12]). Настоящая статья развивает аналитическое исследование, начатое в [9] и продолженное в [10–12], по проблеме существования в таких системах двухточечно-колебательных решений, т.е. непрерывных решений с двумя точками переключения на поверхностях разрыва в пространстве состояний системы и возвратом в каждую из этих точек за одно и то же время — *период возврата*.

В статье [9] впервые даны определения двухточечно-колебательного решения, момента первой встречи с гиперплоскостью переключения и получены достаточные условия существования решения с периодом возврата, равным периоду функции возмущения, в случае неустойчивой линейной части системы, когда матрица системы имеет простые вещественные ненулевые собственные значения, среди которых есть положительное. В [10] рассмотрена вещественная симметричная матрица системы с кратными собственными числами, установлено необходимое условие существования решения системы с заданным видом периодической функции возмущения, доказаны теоремы существования и несуществования такого решения. В статье [11] разработан алгоритм выбора параметров нелинейности как управления, при которых система имеет единственное асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение с двумя точками переключения за период, кратный периоду функции возмущения. В [12] для случая функции возмущения общего вида доказан критерий существования и единственности решения с произвольным периодом возврата и для случая периодической функции возмущения установлено необходимое и достаточное условие существования единственного периодического решения с заданным периодом, кратным периоду функции возмущения.

В настоящей статье решается задача синтеза управления при ограничениях на параметры системы с целью обеспечить существование единственного асимптотически устойчивого двухточечно-колебательного решения с заданным периодом возврата, соизмеримым с периодом функции возмущения. В отличие от [11] ниже исследуются периодические решения системы с четырьмя переключениями реле за период.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель релейной неавтономной управляемой системы в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Y} = AY + Bu(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y). \tag{1}$$

Здесь $Y = (y_1, \ldots, y_n)^{\text{т}}$ — вектор состояний системы, символ т означает операцию транспонирования; матрица системы A, векторы $B = (b_1, \ldots, b_n)^{\text{т}}$, $K = (k_1, \ldots, k_n)^{\text{т}}$ и $C = (c_1, \ldots, c_n)^{\text{т}}$ являются ненулевыми, вещественными и постоянными; (C, Y) — скалярное произведение векторов C и Y, где C определяет обратную связь в системе.

Оператором $u(\sigma)$ задана характеристика неидеального двухпозиционного релейного элемента с пороговыми значениями $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, значениями выхода $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ и положительным направлением обхода петли гистерезиса на плоскости $(\sigma, u(\sigma))$. Полагаем, что $\ell_1 < \ell_2$ и $m_1 < m_2$. Описание реле далее приведём в соответствии с работой [13]. Непрерывная входная функция $\sigma(t)$, $t \geqslant t_0$, преобразуется в выходную кусочно-непрерывную функцию

$$u(t) = \begin{cases} m_1, & (\sigma(t) \leqslant \ell_1) \vee (\sigma(t) \in (\ell_1, \ell_2) \wedge \sigma(\xi(t)) = \ell_1), \\ m_2, & (\sigma(t) \geqslant \ell_2) \vee (\sigma(t) \in (\ell_1, \ell_2) \wedge \sigma(\xi(t)) = \ell_2), \\ u_0, & \sigma(\tau) \in (\ell_1, \ell_2) \text{ для любых } \tau \in [t_0, t), \end{cases}$$

где $\xi(t) = \sup\{\tau \colon \tau \leqslant t,\ \sigma(\tau) = \ell_1 \vee \sigma(\tau) = \ell_2\}$ и $u_0 = u(t_0) \in \{m_1, m_2\}$.

Допустимыми состояниями реле называют все пары $(\sigma, u) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условию $(u = m_1 \wedge \sigma < \ell_2) \vee (u = m_2 \wedge \sigma > \ell_1)$. В релейных автоматических системах $\sigma(t)$ задаёт *управляющий сигнал*, $u(t)$ — *управляющее воздействие*. Характеристика релейного элемента имеет гистерезис (зону неоднозначности), поэтому всякий раз при прохождении управляющим сигналом пороговых значений управляющее воздействие изменяется скачком, а между скачками оно постоянно и определяется не только значением управляющего сигнала, но и направлением его изменения [7, с. 45–46].

Внешнее воздействие на релейную систему задано непрерывной периодической функцией возмущения $f(t)$, $t \geqslant 0$, в следующем виде:

$$f(t) = f_0 + \sum_{\alpha=1}^{\rho} f_\alpha \sin(\alpha\omega t + \varphi_\alpha), \quad \rho \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где f_0, f_α, ω и φ_α $(\alpha = \overline{1, \rho})$ — вещественные постоянные, причём $f_1 \neq 0$, $\omega > 0$. Период функции $f(t)$ равен $T = 2\pi/\omega$. Вид (2) функции возмущения часто используют в модели для описания периодического воздействия на систему. Для определённости положим ρ чётным.

Приведём определения из работы [12], которые используются в данной статье.

Определение 1. *Точкой переключения* называется состояние системы (1), при котором входная функция $\sigma(t)$ достигает одного из пороговых значений ℓ_μ, $\mu = 1, 2$, а выходная функция $u(t)$ при этом меняет значение выхода m_1 на m_2 или наоборот.

Определение 2. *Гиперплоскостью переключения* называется гиперплоскость

$$L_\mu = \{Y \in \mathbb{R}^n \colon (C, Y) = \ell_\mu\}, \quad \mu = 1, 2.$$

Определение 3. Если в некоторый момент времени t' изображающая точка принадлежит гиперплоскости L_μ, $\mu = 1, 2$, то наименьший момент времени $t'' > t'$, в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости $L_{3-\mu}$, называется *моментом первой встречи* изображающей точки с $L_{3-\mu}$.

Определение 4. Решение $Y(\cdot)$ системы (1) называется *T_r-двухточечно-колебательным простейшего поведения*, если существуют вещественные положительные числа τ_1 и τ_2 такие, что $\tau_1 + \tau_2 = T_r$, и точки $Y^1 \in L_1$ и $Y^2 \in L_2$, для которых выполняются следующие условия:

1) $Y(t_0 + \kappa T_r) = Y^1$ и $Y(t_0 + \tau_1 + \kappa T_r) = Y^2$, где $t_0 \geqslant 0$ — начальный момент времени, $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

2) для всех $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на полуинтервале $\Delta_\kappa^1 = [t_0 + \kappa T_r, t_0 + \tau_1 + \kappa T_r)$ имеет место равенство $u = m_1$, а на полуинтервале $\Delta_\kappa^2 = [t_0 + \tau_1 + \kappa T_r, t_0 + (\kappa + 1)T_r)$ — равенство $u = m_2$.

В данной статье решение системы (1) ищется в соответствии с определением 4 в классе определённых на полуоси $t \geqslant t_0$ непрерывных вектор-функций $Y(t)$ с начальным условием $Y(t_0) = Y^1$ таким, что $\sigma(t_0) = (C, Y^1) = \ell_1$. Кроме того, решение будем называть *Ψ-периодическим*, $\Psi > 0$, если $Y(t + \Psi) = Y(t)$ для всех $t \geqslant t_0$. На полуинтервале Δ_κ^1, $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, выход релейного элемента принимает значение m_1, поэтому активной является система

$$\dot{Y} = AY + Bm_1 + Kf(t), \quad (C, Y) < \ell_2. \tag{3}$$

На полуинтервале Δ_κ^2 выход релейного элемента принимает значение m_2 и активной является система

$$\dot{Y} = AY + Bm_2 + Kf(t), \quad (C, Y) > \ell_1. \tag{4}$$

Нелинейность $u(\sigma)$ можно представить в виде

$$u(\sigma) = \begin{cases} m_1, & \sigma = (C, Y) < \ell_2, \\ m_2, & \sigma = (C, Y) > \ell_1. \end{cases} \tag{5}$$

В точке Y^μ, $\mu=1,2$, происходит переключение реле и “сшивание” траекторий, заданных системами уравнений (3) и (4). Число τ_μ далее называется *временем перехода* изображающей точки решения из точки Y^μ в точку $Y^{3-\mu}$, а времена перехода и точки переключения — *параметрами решения*. Согласно определению 3 значение $t_0+\tau_1$ является моментом первой встречи с гиперплоскостью L_2, а значение t_0+T_r — моментом первой встречи с L_1. В силу условия 1) определения 4 периодом возврата является число T_r.

Пусть матрица A и вектор B удовлетворяют следующим условиям: a) матрица A имеет только простые ненулевые вещественные собственные значения λ_i, $i=\overline{1,n}$; b) векторы B, AB, A^2B, …, $A^{n-1}B$ являются линейно независимыми.

Применим к системе (1) неособое преобразование $Y=SX$ (например, из [12]), приводящее матрицу A к диагональной матрице A_0, у которой (i,i)-й элемент равен λ_i. Условие b) является условием полной управляемости системы по отношению ко входу $u(\sigma)$. В силу неособого преобразования все элементы b_i^0 вектора $B_0=S^{-1}B$ отличны от нуля.

Следуя методу сечений пространства параметров [14, с. 22], рассмотрим для системы (1) сечение 1-го рода и положим вектор C таким, что вектор $\Gamma=S^{\mathrm{т}}C$ имеет один ненулевой элемент (например, $\gamma_s\neq 0$) и нулевые остальные элементы.

После преобразования система (1) принимает каноническую форму в векторном виде

$$\dot X=A_0X+B_0u(\sigma)+K_0f(t),\quad \sigma=(\Gamma,X),$$

или в координатном виде

$$\dot x_i=\lambda_ix_i+b_i^0u(\sigma)+k_i^0f(t),\quad \sigma=\gamma_sx_s,\quad i=\overline{1,n},\tag{6}$$

где x_i — i-й элемент вектора $X=S^{-1}Y$, s — некоторый индекс.

По определению 4 решению $X(t)$ системы (6) отвечает траектория с точками переключения $X^1=(x_1^1,\ldots,x_n^1)^{\mathrm{т}}$ и $X^2=(x_1^2,\ldots,x_n^2)^{\mathrm{т}}$, которые связаны равенством $X^\mu=S^{-1}Y^\mu$, $\mu=1,2$. Утверждение $X^\mu\in L_\mu$ равносильно выполнению равенства $\gamma_sx_s^\mu=\ell_\mu$. Гиперплоскости переключения ориентированы ортогонально оси x_s в пространстве состояний системы (6).

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) может являться моделью автоматических систем управления, используемых в судостроении. В элементах постоянной матрицы заложены характеристики управляемого объекта, например, судна. Релейная нелинейность играет роль управления в решении задачи, например, по автоматической стабилизации курса судна. Элементы вектора, стоящего при нелинейности, задают коэффициенты усиления. При этом на судно регулярно воздействует волнение на воде, которое можно описать непрерывной периодической функцией внешнего возмущения.

Полагаем, что собственные значения λ_1, …, λ_n матрицы A_0, элементы b_1^0, …, b_n^0 вектора B_0 и постоянные f_0, f_1, …, f_ρ, ω функции $f(t)$ заданы. Ставится задача управления для системы (6), которая заключается в том, чтобы найти ограничения на числовые параметры k_1^0, …, k_n^0 системы (6), параметры φ_1, …, φ_ρ функции возмущения (2) и на параметры γ_s, ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 нелинейности $u(\sigma)$, при выполнении которых существует решение системы (6) с начальным моментом времени t_0 и периодом возврата T_r, соизмеримым с периодом T функции возмущения $f(t)$.

Для аналитического представления решения используем формулу Коши

$$x_i(t)=e^{\lambda_i(t-\nu)}x_i(\nu)+\int\limits_\nu^t e^{\lambda_i(t-\tau)}(b_i^0m_\mu+k_i^0f(\tau))\,d\tau,\quad i=\overline{1,n},\quad \mu=1,2,$$

где ν — начальный момент времени.

2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОГРАММНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассмотрим программное управление с параметрами m_1, m_2, τ_1 и τ_2

$$u_p(t)=\begin{cases} m_1, & t\in\Delta_\kappa^1=[t_0+\kappa T_r, t_0+\kappa T_r+\tau_1),\\ m_2, & t\in\Delta_\kappa^2=[t_0+\kappa T_r+\tau_1, t_0+\kappa T_r+\tau_1+\tau_2)\end{cases} \tag{7}$$

и двухмерную подсистему системы (6) для $i=s$ с управлением (7)

$$\dot{x}_s(t)=\lambda_s x_s(t)+b_s^0 u_p(t)+k_s^0 f(t), \quad \sigma(t)=\gamma_s x_s(t).$$

Заметим, что $u_p(t)$, $t\geqslant t_0$, является кусочно-постоянной T_r-периодической функцией, т.е. $u_p(t)=u_p(t+T_r)$ для всех $t\geqslant t_0$.

Исследуем уравнение

$$\gamma_s\dot{x}_s(t)=\lambda_s\gamma_s x_s(t)+\gamma_s(b_s^0 u_p(t)+k_s^0 f(t))$$

с начальным условием $\gamma_s x_s(t_0)=\gamma_s x_s^1=\ell_1$ или эквивалентное уравнение

$$\dot{\sigma}(t)=\lambda_s\sigma(t)+\gamma_s(b_s^0 u_p(t)+k_s^0 f(t)) \tag{8}$$

с начальным условием $\sigma(t_0)=\ell_1$ и найдём параметры программного управления $u_p(t)$, которые обеспечивают существование решения этого уравнения.

Согласно определению 4 справедливы равенства

$$\gamma_s x_s^1=\ell_1 \quad \text{или} \quad \sigma(t_0+\kappa T_r)=\sigma(t_0+(\kappa+1)T_r)=\ell_1,$$

$$\gamma_s x_s^2=\ell_2 \quad \text{или} \quad \sigma(t_0+\kappa T_r+\tau_1)=\ell_2,$$

где $t_0+\tau_1$ — момент первой встречи с гиперплоскостью L_2, t_0+T_r — момент первой встречи с гиперплоскостью L_1 в соответствии с определением 3.

С помощью формулы Коши выпишем решение $\sigma(t)$ уравнения (8) на полуинтервалах с соответствующим значением функции $u_p(t)$ и с учётом равенств (6). Имеем на полуинтервале Δ_κ^1 с $\nu=t_0+\kappa T_r$ и $\sigma(\nu)=\ell_1$ решение

$$\sigma(t)=e^{\lambda_s(t-\nu)}\ell_1+\gamma_s\int\limits_\nu^t e^{\lambda_s(t-\tau)}(b_s^0 m_1+k_s^0 f(\tau))\,d\tau, \tag{9}$$

на полуинтервале Δ_κ^2 с $\nu=t_0+\kappa T_r+\tau_1$ и $\sigma(\nu)=\ell_2$ — решение

$$\sigma(t)=e^{\lambda_s(t-\nu)}\ell_2+\gamma_s\int\limits_\nu^t e^{\lambda_s(t-\tau)}(b_s^0 m_2+k_s^0 f(\tau))\,d\tau. \tag{10}$$

Подставив $t_0+\kappa T_r+\tau_1$ вместо t в равенство (9), с учётом $\sigma(t_0+\kappa T_r+\tau_1)=\ell_2$ получим

$$\ell_2=e^{\lambda_s\tau_1}\ell_1+\gamma_s\int\limits_{t_0+\kappa T_r}^{t_0+\kappa T_r+\tau_1} e^{\lambda_s(t_0+\kappa T_r+\tau_1-\tau)}(b_s^0 m_1+k_s^0 f(\tau))\,d\tau.$$

После замены $\xi=\tau-t_0-\kappa T_r$ имеем

$$\ell_2=e^{\lambda_s\tau_1}\ell_1+\gamma_s\int\limits_0^{\tau_1} e^{\lambda_s(\tau_1-\xi)}(b_s^0 m_1+k_s^0 f(t_0+\kappa T_r+\xi))\,d\xi. \tag{11}$$

Подставим $t_0+(\kappa+1)T_r$ вместо t в равенство (10), ввиду $\sigma(t_0+(\kappa+1)T_r)=\ell_1$ получим

$$\ell_1=e^{\lambda_s\tau_2}\ell_2+\gamma_s\int\limits_{t_0+\kappa T_r+\tau_1}^{t_0+(\kappa+1)T_r}e^{\lambda_s(t_0+(\kappa+1)T_r-\tau)}(b_s^0m_2+k_s^0f(\tau))\,d\tau.$$

После замены $\xi=t_0+(\kappa+1)T_r-\tau$ будем иметь

$$\ell_1=e^{\lambda_s\tau_2}\ell_2+\gamma_s\int\limits_0^{\tau_2}e^{\lambda_s\xi}(b_s^0m_2+k_s^0f(t_0+(\kappa+1)T_r-\xi))\,d\xi. \tag{12}$$

Подставив в равенство (12) вместо ℓ_2 правую часть равенства (11), получим

$$\ell_1=\frac{\gamma_s}{1-e^{\lambda_sT_r}}\biggl(b_s^0m_1\int\limits_0^{\tau_1}e^{\lambda_s(T_r-\xi)}\,d\xi+k_s^0\int\limits_0^{\tau_1}e^{\lambda_s(T_r-\xi)}f(t_0+\kappa T_r+\xi)\,d\xi+$$

$$+b_s^0m_2\int\limits_0^{\tau_2}e^{\lambda_s\xi}\,d\xi+k_s^0\int\limits_0^{\tau_2}e^{\lambda_s\xi}f(t_0+(\kappa+1)T_r-\xi)\,d\xi\biggr). \tag{13}$$

Равенство (13) справедливо, если и только если выполняется следующее условие: интегралы

$$k_s^0\int\limits_0^{\tau_2}e^{\lambda_s\xi}f(t_0+(\kappa+1)T_r-\xi)\,d\xi,\quad k_s^0\int\limits_0^{\tau_1}e^{-\lambda_s\xi}f(t_0+\kappa T_r+\xi)\,d\xi \tag{14}$$

не зависят от $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пусть период возврата кратен периоду функции возмущения, т.е. $T_r=kT$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда

$$f(t_0+(\kappa+1)T_r-\xi)=f(t_0+(\kappa+1)kT-\xi)=f(t_0+kT-\xi)\quad\text{для любого}\quad\xi\in[0,\tau_2],$$

$$f(t_0+\kappa T_r+\xi)=f(t_0+\kappa kT+\xi)=f(t_0+\xi)\quad\text{для любого}\quad\xi\in[0,\tau_1],$$

и значит, интегралы (14) не зависят от $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пусть период возврата не кратен периоду функции возмущения, но соизмерим с ним, т.е. $T_r=qT$, $q\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}$. Введём обозначение

$$H_s(\tau)=\sum_{\alpha=1}^{\rho}\frac{f_\alpha\sin(\alpha\omega\tau+\varphi_\alpha+\delta_s^\alpha)}{\sqrt{\lambda_s^2+(\alpha\omega)^2}},\quad \tau\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

где $\delta_s^\alpha=\operatorname{arctg}(\alpha\omega/\lambda_s)+\pi q_s$, причём $q_s=0$ при $\lambda_s>0$ и $q_s=1$ при $\lambda_s<0$. Имеет место

Лемма. *Пусть $k_s^0\neq0$, $\varphi_v=\pi h_v-\omega t_0-\delta_s^v$, $v=1,3,\ldots,\rho-1$, $h_v\in\mathbb{Z}$; $T_r=(k+1/2)T$, $\tau_1=mT/2$, $k,m\in\mathbb{N}$ и $m<2k+1$. Тогда интегралы (14) с функцией $f(t)$ вида (2) не зависят от κ.*

Доказательство. Вычислим интегралы (14), учитывая равенство $T_r-\tau_2=\tau_1$. Имеем

$$k_s^0\int\limits_0^{\tau_1}e^{-\lambda_s\xi}f(t_0+\kappa T_r+\xi)\,d\xi=-k_s^0e^{-\lambda_s\xi}\biggl(\frac{f_0}{\lambda_s}+H_s(t_0+\kappa T_r+\xi)\biggr)\bigg|_0^{\tau_1}=$$

$$=k_s^0\biggl(\frac{f_0}{\lambda_s}+H_s(t_0+\kappa T_r)\biggr)-k_s^0e^{-\lambda_s\tau_1}\biggl(\frac{f_0}{\lambda_s}+H_s(t_0+\kappa T_r+\tau_1)\biggr),$$

$$k_s^0\int\limits_0^{\tau_2}e^{\lambda_s\xi}f(t_0+(\kappa+1)T_r-\xi)\,d\xi=k_s^0e^{\lambda_s\xi}\biggl(\frac{f_0}{\lambda_s}+H_s(t_0+(\kappa+1)T_r-\xi)\biggr)\bigg|_0^{\tau_2}=$$

$$=k_s^0e^{\lambda_s\tau_2}\biggl(\frac{f_0}{\lambda_s}+H_s(t_0+\kappa T_r+\tau_1)\biggr)-k_s^0\biggl(\frac{f_0}{\lambda_s}+H_s(t_0+(\kappa+1)T_r)\biggr).$$

Пусть выполняются условия леммы. Тогда, принимая во внимание, что $T=2\pi/\omega$ и $H_s(\tau+\kappa T)=H_s(\tau)$, получаем равенства

$$H_s(t_0+\kappa T_r+\tau_1)=H_s(t_0+(\kappa+m)T/2)=H_s(t_0+mT/2)=H_s(t_0+\tau_1),$$

$$H_s(t_0+\kappa T_r)=H_s(t_0+\kappa T/2)=H_s(t_0).$$

Отсюда следует, что интегралы не зависят от $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Более того,

$$H_s(t_0)=H_s(t_0+\tau_1)=\sum_{\alpha=1}^{\rho/2}\frac{f_{2\alpha}\sin(2\alpha\omega t_0+\varphi_{2\alpha}+\delta_s^{2\alpha})}{\sqrt{\lambda_s^2+(2\alpha\omega)^2}}.$$

Лемма доказана.

В случае когда период возврата кратен периоду функции возмущения и в противном случае при выполнении условий леммы система равенств (11), (12) принимает следующий вид:

$$\ell_2=\left(\ell_1+\frac{\gamma_s b_s^0 m_1}{\lambda_s}\right)e^{\lambda_s\tau_1}-\frac{\gamma_s b_s^0 m_1}{\lambda_s}+\gamma_s k_s^0\int\limits_0^{\tau_1}e^{\lambda_s(\tau_1-\xi)}f(t_0+\xi)\,d\xi,$$

$$\ell_1=\left(\ell_2+\frac{\gamma_s b_s^0 m_2}{\lambda_s}\right)e^{\lambda_s\tau_2}-\frac{\gamma_s b_s^0 m_2}{\lambda_s}+\gamma_s k_s^0\int\limits_0^{\tau_2}e^{\lambda_s\xi}f(t_0+T_r-\xi)\,d\xi,$$

откуда после интегрирования с учётом (15) имеем

$$\begin{gathered}\ell_2=(\ell_1+\gamma_s Q_s(t_0,m_1))e^{\lambda_s\tau_1}-\gamma_s Q_s(t_0+\tau_1,m_1),\\ \ell_1=(\ell_2+\gamma_s Q_s(t_0+\tau_1,m_2))e^{\lambda_s\tau_2}-\gamma_s Q_s(t_0+\tau_1+\tau_2,m_2).\end{gathered}\tag{16}$$

Здесь используется обозначение

$$Q_s(\tau,m_\mu)=(b_s^0 m_\mu+k_s^0 f_0)/\lambda_s+k_s^0 H_s(\tau),\quad \mu=1,2.\tag{17}$$

Условия на параметры системы (16), в том числе на параметры управления $u_p(t)$ с τ_1 и $\tau_2=T_r-\tau_1$, удовлетворяющими условиям леммы, установлены в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть для некоторых $m\in\mathbb{N}$ и $k\in\mathbb{N}$ таких, что $m<2k+1$, выполняются условия леммы и следующие условия:*

1) для некоторых ℓ_1, ℓ_2 и такого γ_s, что $\gamma_s b_s^0<0$, справедливо равенство

$$m_1=\frac{\lambda_s}{\gamma_s b_s^0}\left(\frac{\ell_2-\ell_1}{e^{\lambda_s mT/2}-1}-\ell_1\right)-\frac{k_s^0}{b_s^0}\left(\lambda_s H_s(t_0)+f_0\right);\tag{18}$$

2) значение $\tau_1=mT/2$ является наименьшим (или единственным) положительным решением первого уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_1\in(0,(k+1/2)T)$;

3) имеют место при $\lambda_s>0$ неравенство $\ell_1+\gamma_s Q_s(t_0,m_1)>0$ или при $\lambda_s<0$ неравенство $e^{\lambda_s\tau_1}(\ell_1+\gamma_s Q_s(t_0,m_1))<0$ и равенство

$$m_2=m_1+\frac{\lambda_s(\ell_1+\gamma_s Q_s(t_0,m_1))(e^{\lambda_s(k+1/2)T}-1)}{\gamma_s b_s^0(1-e^{\lambda_s((k+1/2)T-\tau_1)})},\tag{19}$$

где значения m_1 и τ_1 определены в 1) и 2) соответственно;

4) значение $\tau_2=(k+(1-m)/2)T$ является наименьшим (или единственным) положительным решением второго уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_2\in(0,(k+1/2)T)$.

Тогда параметрами программного управления $u_p(t)$ являются значения τ_1, τ_2, m_1 и m_2, обеспечивающие для $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ существование единственного решения уравнения (8):

$$\sigma(t)=\begin{cases} e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_1+\gamma_sQ_s(\nu,m_1))-\gamma_sQ_s(\nu+t,m_1), & \nu=t_0+\kappa T_r,\ \ t\in\Delta^1_\kappa,\\ e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_2+\gamma_sQ_s(\nu,m_2))-\gamma_sQ_s(\nu+t,m_2), & \nu=t_0+\kappa T_r+\tau_1,\ \ t\in\Delta^2_\kappa.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 1 для некоторых $m,k\in\mathbb{N}$ таких, что $m<2k+1$. Тогда, как следует из доказательства леммы, имеют место равенства $H_s(t_0)=$ $=H_s(t_0+\tau_1)=H_s(t_0+T_r)$. Отсюда, принимая во внимание (17), приходим к ссоотношениям

$$Q_s(t_0,m_\mu)=Q_s(t_0+\tau_1,m_\mu)=Q_s(t_0+\tau_1+\tau_2,m_\mu),\quad \mu=1,2.$$

Пусть выполняется условие 1) теоремы 1. Равенство (18) преобразуем сначала к виду

$$\frac{\ell_2-\ell_1}{e^{\lambda_s mT/2}-1}-\ell_1=\gamma_s\frac{b^0_sm_1+k^0_sf_0}{\lambda_s}+k^0_sH_s(t_0),$$

а затем к виду

$$\ell_2=(\ell_1+\gamma_sQ_s(t_0,m_1))e^{\lambda_s mT/2}-\gamma_sQ_s(t_0,m_1), \tag{20}$$

где $Q_s(t_0,m_1)$ определяется по формуле (17) при $m_\mu=m_1$. Выполнение (20) равносильно утверждению, что значение $\tau_1=mT/2$ является решением первого уравнения системы (16) относительно переменной τ_1 из интервала $(0,(k+1/2)T)$.

Пусть выполняется условие 2) теоремы 1. Тогда на полуинтервале Δ^1_1 имеет место неравенство $\sigma(t)<\ell_2$, а значит, значение $t_0+\tau_1$ является моментом первой встречи с гиперплоскостью L_2 и $\sigma(t_0+mT/2)=\sigma(t_0+\tau_1)=\ell_2$.

Пусть выполняется условие 3) теоремы 1. Тогда в равенстве (19) второе слагаемое принимает положительное значение и, следовательно, $m_2>m_1$. Равенство (19) преобразуем сначала к виду

$$\gamma_sb^0_s(m_1-m_2)(e^{\lambda_s((k+1/2)T-\tau_1)}-1)=\lambda_s(\ell_1+\gamma_sQ_s(t_0,m_1))(e^{\lambda_s(k+1/2)T}-1),$$

а затем к виду

$$\ell_1=(\ell_2+\gamma_sQ_s(t_0,m_2))e^{\lambda_s((k+1/2)T-\tau_1)}-\gamma_sQ_s(t_0,m_2),$$

где ℓ_2 определяется в (20). Выполнение последнего равенства равносильно утверждению, что значение $\tau_2=(k+1/2)T-\tau_1$ при известном τ_1 является решением второго уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_2\in(0,(k+1/2)T)$.

Пусть выполняется условие 4) теоремы 1. Тогда для $t\in\Delta^2_1$ имеет место неравенство $\sigma(t)>\ell_1$, следовательно, значение $t_0+\tau_1+\tau_2$ является моментом первой встречи с гиперплоскостью L_1 и $\sigma(t_0+\tau_1+(k+(1-m)/2)T)=\sigma(t_0+\tau_1+\tau_2)=\ell_1$.

Учитывая начальное условие $\sigma(t_0)=\ell_1$, имеем $\tau_1+\tau_2=T_r$. Исходя из построения системы (16), приходим к равенствам (6) для любого $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Так как параметры определяются однозначно, то и решение является единственным. Следовательно, имеет место утверждение теоремы 1.

Условия на параметры системы (16), при которых существуют $\tau_1\in(0,T_r)$ и $\tau_2=T_r-\tau_1$ в случае, когда $T_r=kT$, $k\in\mathbb{N}$, устанавливает

Теорема 2. *Пусть при некотором $k\in\mathbb{N}$ справедливы следующие условия:*

1) при некоторых ℓ_1 и γ_s значения параметров m_1 и m_2 удовлетворяют неравенствам

$$m_1<-L<m_2, \tag{21}$$

$$\gamma_s(Q_s(t_0,m_1)e^{\lambda_s\tau_1}-Q_s(t_0+\tau_1,m_1))>\ell_1(1-e^{\lambda_s\tau_1}), \tag{22}$$

где

$$L=\frac{1}{b_s^0}\left(\frac{\lambda_s\ell_1}{\gamma_s}+k_s^0f_0+\lambda_sk_s^0H_s(t_0)\right),$$

$$\tau_1=kT+\lambda_s^{-1}\ln\Omega, \tag{23}$$

$$\Omega=\frac{m_2-m_1}{(1-e^{\lambda_skT})L+m_2-m_1e^{\lambda_skT}};$$

2) значение параметра ℓ_2 задаётся равенством

$$\ell_2=(\ell_1+\gamma_sQ_s(t_0,m_1))e^{\lambda_s\tau_1}-\gamma_sQ_s(t_0+\tau_1,m_1); \tag{24}$$

3) значение τ_1, определяемое формулой (23), является наименьшим (или единственным) положительным решением первого уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_1\in(0,kT)$, а значение $\tau_2=kT-\tau_1$ — наименьшим (или единственным) положительным решением второго уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_2\in(0,kT)$.

Тогда параметрами программного управления $u_p(t)$ являются значения τ_1, τ_2, m_1 и m_2, обеспечивающие для $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ существование единственного решения уравнения (8):

$$\sigma(t)=\begin{cases}e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_1+\gamma_sQ_s(\nu,m_1))-\gamma_sQ_s(\nu+t,m_1), & \nu=t_0+\kappa kT,\ \ t\in\Delta_\kappa^1,\\ e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_2+\gamma_sQ_s(\nu,m_2))-\gamma_sQ_s(\nu+t,m_2), & \nu=t_0+\kappa kT+\tau_1,\ \ t\in\Delta_\kappa^2.\end{cases}$$

Доказательство. Проведём предварительный анализ. Пусть $T_r=kT$, $k\in\mathbb{N}$. Рассмотрим систему уравнений (16) относительно переменной $\tau_1\in(0,kT)$, в которой $\tau_2=kT-\tau_1$ и $Q_s(t_0+\tau_1+\tau_2,m_\mu)=Q_s(t_0,m_\mu)$, $\mu=1,2$.

После сложения двух уравнений этой системы и преобразований с учётом равенства (17), приходим к уравнению

$$(m_2-m_1)e^{\lambda_s(kT-\tau_1)}=(1-e^{\lambda_skT})\left(\frac{\lambda_s\ell_1}{\gamma_sb_s^0}+\frac{k_s^0f_0}{b_s^0}+\frac{\lambda_sk_s^0H_s(t_0)}{b_s^0}\right)+m_2-m_1e^{\lambda_skT}, \tag{25}$$

из которого однозначно находим значение τ_1, определяемое равенством (23).

По условию задачи $\tau_1\in(0,kT)$, значит, равенство (23) имеет смысл, если $0<e^{-\lambda_skT}<\Omega<1$ при $\lambda_s>0$ или $1<\Omega<e^{-\lambda_skT}$ при $\lambda_s<0$. Выполнение последнего условия с учётом предположения $m_2>m_1$ равносильно выполнению неравенств (21).

Уравнение (25) совместно с первым уравнением системы (16) равносильно системе (16). Значит, значение τ_1 является решением системы (16) тогда и только тогда, когда удовлетворяет первому уравнению системы (16), что равносильно выполнению равенства (24). По предположению должно выполняться неравенство $\ell_2>\ell_1$. Если в этом неравенстве ℓ_2 заменить выражением (24), то после преобразований получим неравенство (22).

Теперь непосредственно докажем теорему 2. Пусть имеют место условия 1) и 2) теоремы 2 и $\tau_2=kT-\tau_1$. Тогда значение τ_1, определяемое равенством (23), является решением системы (16) и принадлежит интервалу $(0,kT)$. При этом, как следует из неравенств (21) и (22), выполнены предположения, что $m_2>m_1$ и $\ell_2>\ell_1$. Пусть выполняется условие 3) теоремы 2. Тогда имеют место неравенства $\sigma(t)<\ell_2$ для $t\in\Delta_1^1$ и $\sigma(t)>\ell_1$ для $t\in\Delta_1^2$. Значит, значение $t_0+\tau_1$ является моментом первой встречи с L_2, значение t_0+kT — моментом первой встречи с L_1 и справедливы равенства $\sigma(t_0+\tau_1)=\ell_2$ и $\sigma(t_0+\tau_1+\tau_2)=\sigma(t_0+kT)=\ell_1$. Исходя из построения системы (16) с начальным условием $\sigma(t_0)=\ell_1$ для $T_r=kT$, приходим к равенствам (6) для любого $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и, следовательно, к утверждению теоремы 2. Единственность решения следует из того, что параметры определяются однозначно. Теорема доказана.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим остальные (при $j=\overline{1,n}$, $j\neq s$) уравнения системы (6) с начальным условием $x_j(t_0)=x_j^1$ и найденным управлением (7). Имеем

$$\dot{x}_j(t)=\lambda_j x_j(t)+b_j^0u_p(t)+k_j^0f(t),\quad j=\overline{1,n},\quad j\neq s. \tag{26}$$

Проинтегрируем уравнения (26) на полуинтервалах с соответствующими значениями функции $u_p(t)$. На полуинтервале Δ_κ^1 с $\nu=t_0+\kappa T_r$ и $x_j(\nu)=x_j^1$ имеем

$$x_j(t)=e^{\lambda_j(t-\nu)}x_j^1+\int\limits_\nu^t e^{\lambda_j(t-\tau)}(b_j^0m_1+k_j^0f(\tau))d\tau, \tag{27}$$

на полуинтервале Δ_κ^2 с $\nu=t_0+\kappa T_r+\tau_1$ и $x_j(\nu)=x_j^2$ —

$$x_j(t)=e^{\lambda_j(t-\nu)}x_j^2+\int\limits_\nu^t e^{\lambda_j(t-\tau)}(b_j^0m_2+k_j^0f(\tau))d\tau. \tag{28}$$

Согласно условию 1) определения 4 должны выполняться равенства

$$x_j(t_0+\kappa T_r)=x_j(t_0+(\kappa+1)T_r)=x_j^1,\quad x_j(t_0+\kappa T_r+\tau_1)=x_j^2. \tag{29}$$

После соответствующих подстановок и замен приходим к равенствам

$$x_j^2=e^{\lambda_j\tau_1}x_j^1+\int\limits_0^{\tau_1} e^{\lambda_j(\tau_1-\xi)}(b_j^0m_1+k_j^0f(t_0+\kappa T_r+\xi))d\xi,$$

$$x_j^1=e^{\lambda_j\tau_2}x_j^2+\int\limits_0^{\tau_2} e^{\lambda_j\xi}(b_j^0m_2+k_j^0f(t_0+(\kappa+1)T_r-\xi))d\xi, \tag{30}$$

которые справедливы, если и только если интегралы

$$k_j^0\int\limits_0^{\tau_2} e^{\lambda_j\xi}f(t_0+(\kappa+1)T_r-\xi)d\xi,\quad k_j^0\int\limits_0^{\tau_1} e^{-\lambda_j\xi}f(t_0+\kappa T_r+\xi)d\xi,\quad i=\overline{1,n}, \tag{31}$$

не зависят от $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Имеет место

Теорема 3. *Пусть параметры ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 и γ_s нелинейности $u(\sigma)$ подобраны так, что выполняются условия теоремы 1 и, дополнительно, $k_j^0=0$, $j=\overline{1,n}$, $j\neq s$. Тогда для $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ существует единственное решение системы (6):*

$$x_s(t)=\begin{cases} e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_1/\gamma_s+Q_s(\nu,m_1))-Q_s(\nu+t,m_1), & \nu=t_0+\kappa T_r,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_2/\gamma_s+Q_s(\nu,m_2))-Q_s(\nu+t,m_2), & \nu=t_0+\kappa T_r+\tau_1,\ t\in\Delta_\kappa^2,\end{cases}$$

$$x_j(t)=\begin{cases} e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^1+Q_j(m_1))-Q_j(m_1), & \nu=t_0+\kappa T_r,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^2+Q_j(m_2))-Q_j(m_2), & \nu=t_0+\kappa T_r+\tau_1,\ t\in\Delta_\kappa^2,\end{cases}$$

где

$$x_j^1=\frac{e^{\lambda_jT_r}}{1-e^{\lambda_jT_r}}\bigg(\frac{Q_j(m_2)-Q_j(m_1)}{e^{\lambda_j\tau_1}}+Q_j(m_1)-\frac{Q_j(m_2)}{e^{\lambda_jT_r}}\bigg),\quad x_j^2=e^{\lambda_j\tau_1}(x_j^1+Q_j(m_1))-Q_j(m_1), \tag{32}$$

$$Q_j(m_\mu)=\frac{b_j^0m_\mu}{\lambda_j},\quad \mu=1,2. \tag{33}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда существует единственное решение $\sigma(t)$ уравнения (8), которое выписано в утверждении теоремы 1. Учитывая, что имеет место соотношение $\sigma(t)=\gamma_s x_s(t)$, приходим к выражению для решения $x_s(t)$ системы (6), которое приведено в утверждении теоремы 3.

Пусть имеет место дополнительное условие теоремы 3, а именно, $k_j^0=0$, $j=\overline{1,n}$, $j\neq s$. Тогда интегралы (31) равны нулю и, следовательно, не зависят от $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Равенства (30) после интегрирования принимают вид

$$x_j^2=(x_j^1+Q_j(m_1))e^{\lambda_j\tau_1}-Q_j(m_1),\quad x_j^1=(x_j^2+Q_j(m_2))e^{\lambda_j\tau_2}-Q_j(m_2), \tag{34}$$

где $Q_j(m_\mu)$, $\mu=1,2$, определяются по формуле (33). Если равенства рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно неизвестных x_j^1 и x_j^2, то в силу того, что $\lambda_j\neq 0$, якобиан этой системы отличен от нуля, а значит, неизвестные определяются однозначно. Выражение для x_j^2 подставим во второе равенство и после преобразования получим формулы (32), определяющие j-е координаты точек переключения при найденных значениях параметров τ_1, τ_2 (таких, что $T_r=\tau_1+\tau_2$) и m_1, m_2 управления $u_p(t)$.

Далее сужение функции $x_j(t)$, заданное равенством (27) на полуинтервал Δ_κ^1 с $\nu=t_0+\kappa T_r$, принимает вид

$$x_j(t)=e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^1+Q_j(m_1))-Q_j(m_1),$$

а заданное равенством (28) на полуинтервал Δ_κ^2 с $\nu=t_0+\kappa T_r+\tau_1$ —

$$x_j(t)=e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^2+Q_j(m_2))-Q_j(m_2).$$

Принимая во внимание равенства (29), приходим к выражению, приведённому в утверждении теоремы 3 для определения решения $x_j(t)$ системы (6). Теорема доказана.

В случае когда период возврата T_r решения кратен периоду T функции возмущения справедлива

Теорема 4. *Пусть параметры ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 и γ_s нелинейности $u(\sigma)$ подобраны так, что выполняются условия теоремы 2. Тогда для $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ существует единственное решение системы (6):*

$$x_s(t)=\begin{cases}e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_1/\gamma_s+Q_s(\nu,m_1))-Q_s(\nu+t,m_1), & \nu=t_0+\kappa kT,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_2/\gamma_s+Q_s(\nu,m_2))-Q_s(\nu+t,m_2), & \nu=t_0+\kappa kT+\tau_1,\ t\in\Delta_\kappa^2,\end{cases}$$

$$x_j(t)=\begin{cases}e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^1+Q_j(\nu,m_1))-Q_j(\nu+t,m_1), & \nu=t_0+\kappa kT,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^2+Q_j(\nu,m_2))-Q_j(\nu+t,m_2), & \nu=t_0+\kappa kT+\tau_1,\ t\in\Delta_\kappa^2,\end{cases}$$

где

$$x_j^1=\frac{e^{\lambda_j kT}}{1-e^{\lambda_j kT}}\left(\frac{Q_j(t_0+\tau_1,m_2)-Q_j(t_0+\tau_1,m_1)}{e^{\lambda_j\tau_1}}+Q_j(t_0,m_1)-\frac{Q_j(t_0,m_2)}{e^{\lambda_j kT}}\right),$$

$$x_j^2=e^{\lambda_j\tau_1}(x_j^1+Q_j(t_0,m_1))-Q_j(t_0+\tau_1,m_1), \tag{35}$$

$Q_j(\tau,m_\mu)$, $\mu=1,2$, определяются по формуле (17), в которой $s=j$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3. При выполнении условий теоремы 2 для уравнения (8) существует единственное решение $\sigma(t)$, которое приведено в утверждении теоремы 2. Поскольку $x_s(t)=\sigma(t)/\gamma_s$, то из выражения для $\sigma(t)$ получаем выражение, однозначно определяющее решение $x_s(t)$ системы (6). Это выражение приведено в утверждении теоремы 4.

Имеем $T_r = kT$, поэтому интегралы (31) не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и значит равенства (30) после интегрирования принимают следующий вид:

$$x_j^2 = (x_j^1 + Q_j(t_0, m_1))e^{\lambda_j \tau_1} - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1), \quad x_j^1 = (x_j^2 + Q_j(t_0 + \tau_1, m_2))e^{\lambda_j \tau_2} - Q_j(t_0, m_2), \quad (36)$$

где $Q_j(\tau, m_\mu)$, $\mu = 1, 2$, определяются по формуле (17), в которой $s = j$, что отражено в утверждении теоремы 4. Поскольку при ненулевых λ_j координаты x_j^1 и x_j^2 определяются однозначно, то после подстановки выражения для x_j^2 во второе равенство и преобразований получим для них формулы (35) с найденными значениями параметров программного управления $u_p(t)$.

Далее рассмотрим равенства (27) и (28). После интегрирования сужение функции $x_j(t)$ на полуинтервал Δ_κ^1 с $\nu = t_0 + \kappa kT$ имеет вид

$$x_j(t) = e^{\lambda_j (t-\nu)}(x_j^1 + Q_j(\nu, m_1)) - Q_j(\nu + t, m_1),$$

а на полуинтервал Δ_κ^2 с $\nu = t_0 + \kappa kT + \tau_1$ —

$$x_j(t) = e^{\lambda_j (t-\nu)}(x_j^2 + Q_j(\nu, m_2)) - Q_j(\nu + t, m_2).$$

С учётом равенств (29) получаем выражение для определения решения $x_j(t)$ системы (6), которое приведено в утверждении теоремы 4. Теорема доказана.

Непосредственно из теорем 3 и 4 вытекает

Следствие. *Пусть для системы (6) существует T_r-двухточечно-колебательное решение $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{т}}$ с параметрами τ_1, τ_2, $X^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)^{\mathrm{т}}$ и $X^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)^{\mathrm{т}}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) решение является T_r-периодическим, где $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$, если выполняются условия теоремы 4;

2) решение является $2T_r$-периодическим, где $T_r = (k + 1/2)T$, если имеют место условия теоремы 3.

Отметим, что $2T_r$-периодическому решению соответствует фазовая траектория, проходящая через точки переключения дважды за период, т.е. условия теоремы 3 обеспечивают существование двухточечно-колебательного периодического решения системы с четырьмя переключениями реле за период.

4. ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения системы (6) при малых отклонениях в начальных данных. Справедлива

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 3 или теоремы 4 и, дополнительно, $\lambda_j < 0$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq s$. Тогда решение $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{т}}$ системы (6) является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 3. Исследуем решение $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{т}}$ системы (6) на устойчивость с помощью фазовой плоскости. Для этого рассмотрим проекции решения $X(t)$ и гиперплоскостей переключения на фазовую плоскость (x_s, x_j), где $j \neq s$. Проекции гиперплоскостей L_1 и L_2 обозначим через H_1 и H_2 соответственно и далее их будем называть *прямыми переключения.*

В результате выбора вектора обратной связи Γ на плоскости (x_s, x_j) прямые H_1 и H_2 ортогональны оси x_s. По построению системы (16) времена перехода τ_1 и τ_2 зависят от $x_s(t_0)$ и не зависят от $x_j(t_0)$, вследствие чего время перехода с одной прямой переключения на другую одно и то же, независимо от выбора начальной точки на прямой H_1 при одинаковом начальном значении t_0.

Выпишем равенства

$$x_j^1 = e^{\lambda_j(\tau_1+\tau_2)} x_j^1 + \Theta_j^1, \quad x_s^1 = \ell_1/\gamma_s, \tag{37}$$

где $\Theta_j^1 = Q_j(m_1)e^{\lambda_j(\tau_1+\tau_2)} + (Q_j(m_2) - Q_j(m_1))e^{\lambda_j\tau_2} - Q_j(m_2)$. Первое равенство получено из (34) после подстановки выражения вместо x_j^2. Второе равенство добавлено из (6).

Напомним, что $x_j^1 = x_j(t_0+\kappa T_r) \in H_1$ для любого $\kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Равенства (37) с константой Θ_j^1 при найденных значениях τ_1 и τ_2 определяют точечное отображение прямой H_1 в себя в силу решения системы (6) за время T_r такое, что $T_r = \tau_1 + \tau_2$, поскольку на плоскости (x_s, x_j) изображающая точка движется из точки $(\ell_1/\gamma_s, x_j(t_0))^{\mathrm{T}} = (\ell_1/\gamma_s, x_j^1)^{\mathrm{T}} \in H_1$ в точку $(\ell_2/\gamma_s, x_j(t_0+\tau_1))^{\mathrm{T}} = (\ell_2/\gamma_s, x_j^2)^{\mathrm{T}} \in H_2$ за время τ_1 и возвращается в точку $(\ell_1/\gamma_s, x_j(t_0+T_r))^{\mathrm{T}} = (\ell_1/\gamma_s, x_j^1)^{\mathrm{T}} \in H_1$ за время τ_2, далее движение повторяется κ раз. Следовательно, имеем по координате x_j равенства

$$x_j(t_0+T_r) = e^{\lambda_j T_r} x_j(t_0) + \Theta_j^1, \quad x_j(t_0+2T_r) = e^{\lambda_j T_r} x_j(t_0+T_r) + \Theta_j^1, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad x_j(t_0+(\kappa+1)T_r) = e^{\lambda_j T_r} x_j(t_0+\kappa T_r) + \Theta_j^1.$$

Неподвижная точка $(\ell_1/\gamma_s, x_j^1)^{\mathrm{T}}$ отображения (37) совпадает с проекцией точки переключения X^1 на плоскость (x_s, x_j).

Пусть $\lambda_j < 0$. Тогда неподвижная точка асимптотически устойчива. Действительно, рассмотрим точку $(\ell_1/\gamma_s, x_j(t_0))^{\mathrm{T}} \in H_1$ и для любого $\delta > 0$ точку $(\ell_1/\gamma_s, \tilde{x}_j(t_0))^{\mathrm{T}} \in H_1$ такую, что $0 < |x_j(t_0) - \tilde{x}_j(t_0)| < \delta$. Тогда при $\kappa \to \infty$ имеет место сжатие

$$|x_j(t_0+\kappa T_r) - \tilde{x}_j(t_0+\kappa T_r)| = e^{\lambda_j \kappa T_r}|x_j(t_0) - \tilde{x}_j(t_0)| < e^{\lambda_j \kappa T_r}\delta \to 0.$$

Пусть выполняются условия теоремы 4. В этом случае рассмотрим равенства (36) с $T_r = kT = \tau_1 + \tau_2$ и точечное отображение прямой H_1 в себя в следующем виде:

$$x_j^1 = e^{\lambda_j(\tau_1+\tau_2)} x_j^1 + \Theta_j^2, \quad x_s^1 = \ell_1/\gamma_s, \tag{38}$$

где $\Theta_j^2 = Q_j(t_0, m_1)e^{\lambda_j kT} + (Q_j(t_0+\tau_1, m_2) - Q_j(t_0+\tau_1, m_1))e^{\lambda_j\tau_2} - Q_j(t_0, m_2)$. Далее доказательство совпадает с приведённым выше, так как Θ_j^2 также является константой, если известны значения τ_1 и τ_2.

Таким образом, неподвижная точка отображения (37) или отображения (38) асимптотически устойчива. Поскольку имеет место сжатие по каждой j-й координате, то асимптотически устойчивым является решение $X(t)$ системы (6). Теорема доказана.

5. ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем полученные теоретические результаты.

Пример 1. Рассмотрим систему (6) с $n = 3$, $s = 1$ и числовыми параметрами, значения которых удовлетворяют условиям задачи, а именно,

$$\dot{x}_1 = 0.5x_1 + 1.5u(\sigma) + k_1^0 f(t), \quad \dot{x}_2 = -5x_2 + u(\sigma) + k_2^0 f(t), \quad \dot{x}_3 = -2x_3 + u(\sigma) + k_3^0 f(t), \quad \sigma = \gamma_1 x_1, \tag{39}$$

вещественные собственные значения $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = -5$ и $\lambda_3 = -2$ являются простыми и ненулевыми, элементы $b_1^0 = 1.5$ и $b_2^0 = b_3^0 = 1$ отличны от нуля. Здесь $f(t) = 0.5 + \sin(2t + \varphi_1) + 3\sin(4t + 1.62)$ с $f_1 = 1 \neq 0$, параметром φ_1 и периодом $T = \pi$.

Найдём значения параметров k_1^0, k_2^0, k_3^0 системы (39), параметра φ_1 функции возмущения $f(t)$ и параметров γ_1, ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 нелинейности $u(\sigma)$, при которых существует решение системы (39) с $t_0=0.1\pi$ и периодом возврата T_r, соизмеримым с периодом T, но не кратным ему, т.е. $T_r=1.5\pi$.

Обратимся к условиям леммы и положим $k_1^0=-1\neq 0$, $\varphi_1\approx 1.187$ ($h=1$, $\delta_1^1\approx 1.326$) и $\tau_1=\pi$ ($k=1$, $m=2$). Здесь и далее расчёты выполнены с точностью до 10^{-9}, результаты представлены с округлением до тысячных.

Обратимся к условиям теоремы 1. Пусть $\ell_1=-6$, $\ell_2=14$ и $\gamma_1=-1.5$ ($\gamma_1 b_1^0=-2.25<0$). Вычислив значение m_1 по формуле (18), где $H_1(t_0)\approx -0.689$, имеем $m_1\approx -2.398$. Первое уравнение системы (16) относительно переменной τ_1 на интервале $(0,T_r)=(0,1.5\pi)$ имеет единственное решение $\tau_1=\pi$, значит, условия 1) и 2) выполняются. Поскольку $\lambda_1=0.5>0$ и $\ell_1+\gamma_1 Q_1(t_0,m_1)\approx 5.249>0$, то по формуле (19) $m_2\approx 6.939$. Второе уравнение системы (16) относительно переменной τ_2 на интервале $(0,1.5\pi)$ имеет единственное решение $\tau_2=0.5\pi$. Условия 3) и 4) также выполняются.

Выпишем программное управление с найденными значениями параметров согласно (7). Итак, для $\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$u_p(t)\approx\begin{cases}-2.398, & t\in\Delta_\kappa^1=[0.1\pi+1.5\pi\kappa, 1.1\pi+1.5\pi\kappa),\\ 6.939, & t\in\Delta_\kappa^2=[1.1\pi+1.5\pi\kappa, 1.6\pi+1.5\pi\kappa).\end{cases}$$

Отсюда согласно (5) нелинейность $u(\sigma)$ принимает вид

$$u(\sigma)\approx\begin{cases}-2.398, & \sigma<14,\\ 6.939, & \sigma>-6.\end{cases}$$

Обратимся к условиям теоремы 3. Пусть $k_2^0=k_3^0=0$. Тогда решение системы (39) будет следующим:

$$x_1(t)\approx\begin{cases}-3.499\,e^{0.5(t-\nu)}-Q_1(\nu+t,-2.396), & \nu=0.1\pi+1.5\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ 11.174\,e^{0.5(t-\nu)}-Q_1(\nu+t,6.939), & \nu=1.1\pi+1.5\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^2,\end{cases}$$

$$x_2(t)\approx\begin{cases}1.866\,e^{-5(t-\nu)}-0.479, & \nu=0.1\pi+1.5\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ -1.867\,e^{-5(t-\nu)}+1.388, & \nu=1.1\pi+1.5\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^2,\end{cases}$$

$$x_3(t)\approx\begin{cases}4.466\,e^{-2(t-\nu)}-1.198, & \nu=0.1\pi+1.5\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ -4.659\,e^{-2(t-\nu)}+3.470, & \nu=1.1\pi+1.5\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^2.\end{cases}$$

Отсюда имеем координаты $x_1^1=x_1(0.1\pi)=4$, $x_2^1=x_2(0.1\pi)\approx 1.387$, $x_3^1=x_3(0.1\pi)\approx 3.268$ точки переключения X^1 и координаты $x_1^2=x_1(1.1\pi)\approx -9.333$, $x_2^2=x_2(1.1\pi)\approx -0.479$, $x_3^2=x_3(1.1\pi)\approx$ ≈ -1.190 точки переключения X^2.

Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ и траектория 1.5π-двухточечно-колебательного решения в пространстве состояний системы (39) с точками переключения X^1 и X^2 показаны на рис. 1. Гиперплоскости переключения L_1, L_2 ориентированы ортогонально оси x_1 и задаются уравнениями $-1.5x_1=-6$, $-1.5x_1=14$ соответственно. Изображающая точка решения начинает своё движение в $X^1\in L_1$ при $t_0=0.1\pi$, за время $\tau_1=\pi$ попадает в $X^2\in L_2$, затем

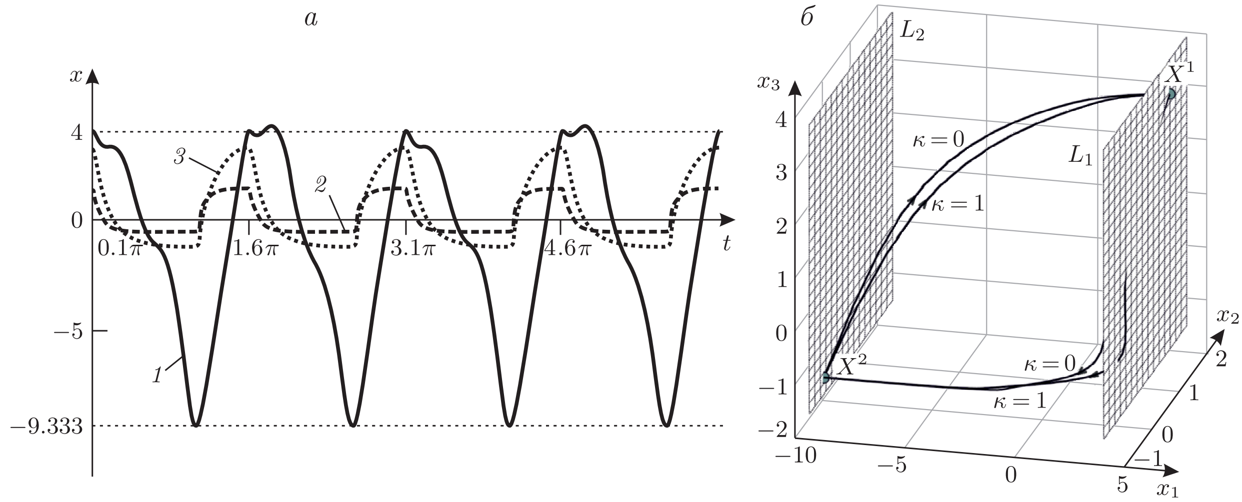

Рис. 1. Решение системы (39): *а* — графики решения $x_1(t)$ (кривая *1*), $x_2(t)$ (кривая *2*) и $x_3(t)$ (кривая *3*) при $t_0 = 0.1\pi$; *б* — 1.5π-двухточечно-колебательное решение с точками переключения X^1 и X^2 в пространстве состояний (x_1, x_2, x_3)

за время $\tau_2 = \pi/2$ возвращается в начальную точку X^1. При втором обходе петли гистерезиса ($\kappa = 1$) изображающая точка после пересечения L_1 достигает L_2 и возвращается на L_1, а значит проходит через точки переключения по другой траектории, не совпадающей с траекторией при первом обходе ($\kappa = 0$). Далее движение от L_1 до L_2 и обратно повторяется только по этим двум траекториям. Согласно следствию и теореме 5 найденное решение является асимптотически устойчивым 3π-периодическим решением системы (39).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 0.5x_1 + 1.5u(\sigma) - f(t), \quad \dot{x}_2 = -5x_2 + u(\sigma) + f(t), \quad \dot{x}_3 = -2x_3 + u(\sigma) + 0.5\, f(t), \quad \sigma = \gamma_1 x_1, \quad (40)$$

где $f(t) = 0.5 + \sin(2t + 1.187) + 3\sin(4t + 1.62)$, и найдём значения параметров γ_1, ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 нелинейности $u(\sigma)$, при которых существует её решение с $t_0 = 0.1\pi$ и периодом возврата, равным периоду функции $f(t)$, т.е. $T_r = \pi$.

Обратимся к условиям теоремы 2. Пусть $\ell_1 = -6$ и $\gamma_1 = -1.5$. Тогда $H_1(t_0) \approx -0.688$ и, значит, $L \approx 1.229$. Положим $m_1 = -2$ и $m_2 = 6$ согласно неравенству (21). Получим $\tau_1 \approx \approx 2.516$ по формуле (23) с $\Omega \approx 0.732$. Имеет место неравенство (22) с $Q_1(t_0, m_1) \approx -6.312$ и $Q_1(t_0 + \tau_1, m_1) \approx -8.181$. По формуле (24) находим $\ell_2 \approx -0.070$. Условия 1) и 2) выполнены.

Значение $\tau_1 \approx 2.516$ является единственным решением первого уравнения системы (16), а значение $\tau_2 \approx 0.625$ — единственным решением второго уравнения системы (16) на интервале $(0, T_r) = (0, \pi)$, следовательно, условие 3) выполняется.

Имеем программное управление с найденными значениями параметров для $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$u_p(t) = \begin{cases} -2, & t \in \Delta_\kappa^1 \approx [0.1\pi + \pi\kappa, 0.1\pi + 2.516 + \pi\kappa), \\ 6, & t \in \Delta_\kappa^2 \approx [0.1\pi + 2.516 + \pi\kappa, 1.1\pi + \pi\kappa) \end{cases}$$

и нелинейность

$$u(\sigma) = \begin{cases} -2, & \sigma < -0.070, \\ 6, & \sigma > -6. \end{cases}$$

Согласно теореме 4 существует следующее решение системы (40):

$$x_1(t)\approx\begin{cases}-2.312\,e^{0.5(t-\nu)}-Q_1(\nu+t,-2), & \nu=0.1\pi+\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ 15.865\,e^{0.5(t-\nu)}-Q_1(\nu+t,6), & \nu\approx 0.1\pi+2.516+\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^2,\end{cases}$$

$$x_2(t)\approx\begin{cases}1.530\,e^{-5(t-\nu)}-Q_2(\nu+t,-2), & \nu=0.1\pi+\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ -1.600\,e^{-5(t-\nu)}-Q_2(\nu+t,6), & \nu\approx 0.1\pi+2.516+\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^2,\end{cases}$$

$$x_3(t)\approx\begin{cases}2.860\,e^{-2(t-\nu)}-Q_3(\nu+t,-2), & \nu=0.1\pi+\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^1,\\ -3.981\,e^{-2(t-\nu)}-Q_3(\nu+t,6), & \nu\approx 0.1\pi+2.516+\pi\kappa,\ t\in\Delta_\kappa^2.\end{cases}$$

Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ и траектория π-двухточечно-колебательного решения системы (40) с точками переключения $X^1\approx(4,\ 1.792,\ 3.002)^{\text{т}}$, $X^2\approx(0.047,\ -0.404,\ -0.864)^{\text{т}}$ показаны на рис. 2. Гиперплоскости переключения L_1 и L_2 задаются уравнениями $-1.5x_1=-6$ и $-1.5x_1\approx-0.070$ соответственно (ориентированы ортогонально оси x_1). Изображающая точка решения начинает своё движение в $X^1\in L_1$ при $t_0=0.1\pi$, за время $\tau_1\approx 2.516$ попадает в $X^2\in L_2$, затем за время $\tau_2\approx 0.625$ возвращается в начальную точку X^1. Далее движение от L_1 до L_2 и обратно повторяется по этой траектории. Таким образом, согласно следствию и теореме 5 найденное решение является асимптотически устойчивым π-периодическим решением системы (40).

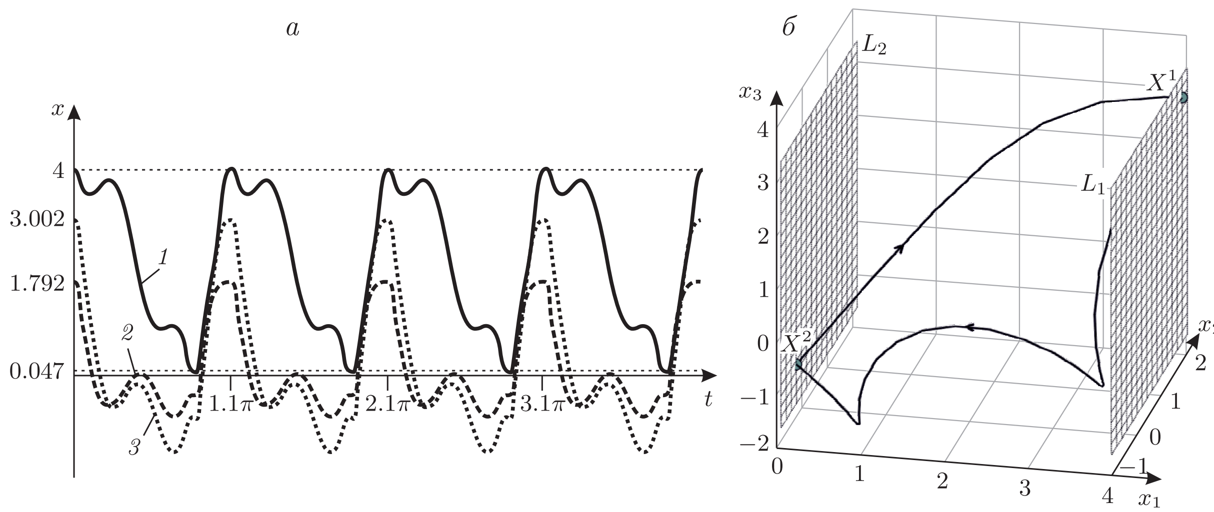

Рис. 2. Решение системы (40): *а* — графики решения $x_1(t)$ (кривая *1*), $x_2(t)$ (кривая *2*) и $x_3(t)$ (кривая *3*) при $t_0=0.1\pi$; *б* — π-двухточечно-колебательное решение с точками переключения X^1 и X^2 в пространстве состояний (x_1,x_2,x_3)

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уткин, В.И. Системы управления с векторным реле / В.И. Уткин, Ю.В. Орлов // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 9. — С. 143–155.
2. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе / А.С. Фурсов, Р.П. Митрев, П.А. Крылов, Т.С. Тодоров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1104–1115.
3. Da Silva, C.E.L. Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations / C.E.L. Da Silva, A. Jacquemard, M.A. Teixeira // J. Dyn. Control Syst. — 2020. — V. 26, № 1. — P. 17–44.
4. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления / А.Л. Медведский, П.А. Мелешенко, В.А. Нестеров [и др.] // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 4. — С. 58–82.
5. Vasquez-Beltran, M.A. Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator / M.A. Vasquez-Beltran, B. Jayawardhana, R. Peletier // IEEE Control Syst. Lett. — 2021. — V. 5, № 3. — P. 1061–1066.
6. Fen, M.O. Quasilinear systems with unpredictable relay perturbations / M.O. Fen, F. Fen // Turk. J. Math. — 2022. — V. 46, № 4. — P. 1369–1383.
7. Цыпкин, Я.З. Релейные автоматические системы / Я.З. Цыпкин. — М. : Наука, 1974. — 575 с.
8. Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.
9. Евстафьева, В.В. О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом / В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 169–178.
10. Євстаф'єва, В.В. Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці / В.В. Євстаф'єва // Укр. мат. журн. — 2021. — Т. 73, № 5. — С. 640–650.
11. Евстафьева, В.В. Синтез управления возмущённой системой с неоднозначной нелинейностью / В.В. Евстафьева // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 3. — С. 44–64.
12. Евстафьева, В.В. Критерий существования двухточечно-колебательного решения возмущённой системы с реле / В.В. Евстафьева // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 260–273.
13. Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations / G.A. Leonov, M.M. Shumafov, V.A. Teshev, K.D. Aleksandrov // Differ. Equat. — 2017. — V. 53, № 13. — P. 1764–1816.
14. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления / В.М. Кунцевич, А.М. Лётов, Б.Н. Наумов [и др.]. — М. : Машиностроение, 1971. — 322 с.

CONTROL DESIGN FOR A MULTIDIMENSIONAL SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RELAY HYSTERESIS AND PERTURBATION

© 2024 / V. V. Yevstafyeva

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: v.evstafieva@spbu.ru

A multidimensional controllable system with a constant matrix, a significant nonlinearity of the two-position relay type with hysteresis as a control and a continuous periodic perturbation function is considered. The system matrix has simple, real, non-zero eigenvalues, among which one can be positive. Conditions for the system parameters, including the nonlinearity ones, are established under which there is a single two-point oscillatory periodic solution with a period comparable to the period of the perturbation function in the case of a special type of the feedback vector. The asymptotic stability of the solution has been proven using the phase plane method. The results obtained are illustrated by examples for three-dimensional systems.

Keywords: multidimensional controllable system, two-position relay with hysteresis, continuous periodic perturbation function, two-point oscillatory periodic solution, control design, asymptotic stability

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00069).

REFERENCES

1. Utkin, V.I. and Orlov, Yu.V., Control systems with vector relays, *Autom. Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 9, pp. 1671–1680.
2. Fursov, A.S., Mitrev, R.P., Krylov, P.A., and Todorov, T.S., On the existence of a periodic mode in a nonlinear system, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1076–1087.
3. Da Silva, C.E.L., Jacquemard, A., and Teixeira, M.A., Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations, *J. Dyn. Control Syst.*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 17–44.
4. Medvedskii, A.L., Meleshenko, P.A., Nesterov, V.A. [et al.], Unstable oscillating systems with hysteresis: problems of stabilization and control, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 533–556.
5. Vasquez-Beltran, M.A., Jayawardhana, B., and Peletier, R., Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator, *IEEE Control Syst. Lett.*, 2021, vol. 5, no. 3, pp. 1061–1066.
6. Fen, M.O. and Fen, F. Quasilinear systems with unpredictable relay perturbations, *Turk. J. Math.*, 2022, vol. 46, no. 4, pp. 1369–1383.
7. Tsypkin, Ya.Z., *Releinye avtomaticheskie sistemy* (Relay Automatic Systems), Moscow: Nauka, 1974.
8. Krasnosel'skii, M.A. and Pokrovskii, A.V., *Sistemy s gisterezisom* (Systems with Hysteresis), Moscow: Nauka, 1983.
9. Yevstafyeva, V.V., On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 155–164.
10. Yevstafyeva, V.V., Existence of two-point oscillatory solutions of a relay nonautonomous system with multiple eigenvalue of a real symmetric matrix, *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 73, no. 5, pp. 746–757.
11. Yevstafyeva, V.V., Control design for a perturbed system with an ambiguous nonlinearity, *Autom. Remote Control*, 2023, vol. 84, no. 3, pp. 254–269.
12. Yevstafyeva, V.V., Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 2, pp. 212–222.
13. Leonov, G.A., Shumafov, M.M., Teshev, V.A., and Aleksandrov, K.D., Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 13, pp. 1764–1816.
14. Kuntsevich, V.M., Letov, A.M., Naumov, B.N. [et al.], *Tochnye metody issledovaniya nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Exact Analysis Methods for Nonlinear Automatic Control Systems), Moscow: Mashinostroenie, 1971.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1386–1393

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

РЕШЕНИЕ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

В. Н. Лаптинский

Белорусско-Российский университет, г. Могилёв, Республика Беларусь

e-mail: lavani@tut.by

Поступила в редакцию 14.07.2023 г., после доработки 15.05.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Предложен алгоритм решения линейной многоточечной задачи управления с ограничениями изопериметрического типа на функцию состояний.

Ключевые слова: управление, многоточечная задача, интегральное условие

DOI: 10.31857/S0374064124100075, EDN: JTGJGA

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучается задача построения возможных управлений $u\in C(I,\mathbb{R}^r)$ и соответствующих функций состояний $x\in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ на основе системы соотношений

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+Q(t)u, \tag{1}$$

$$x(t_s)=x_s, \quad s=\overline{0,m}, \tag{2}$$

$$\int\limits_{a_i}^{b_i}\Psi_i(\tau)x(\tau)\,d\tau=\mu_i, \quad i=\overline{1,k}, \tag{3}$$

где $A\in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $Q\in C(I,\mathbb{R}^{n\times r})$, $\Psi_i\in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $u\in\mathbb{R}^r$, $\mu_i\in\mathbb{R}^n$, $a_i,b_i\in I=[0,\omega]$, $i=\overline{1,k}$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_m\leqslant\omega$, $\omega>0$.

Соотношения (3) представляют собой обобщения интегральных условий, рассматриваемых при $i\in\mathbb{N}$ в работах [1, с. 264; 2, гл. 9, § 5] и являющихся в теории управления изопериметрическими ограничениями [3, с. 19].

При описании структуры решения задачи и соответствующего алгоритма его построения понадобятся дополнительные данные. С этой целью введём матрицы $\Phi_i\in C(I,\mathbb{R}^{r\times n})$, $P_l\in C(I,\mathbb{R}^{r\times n})$, $l=\overline{1,m}$, возможно, базисного типа [4, гл. 4] — структурные функции управления, в принципе аналогичные классическим функциям [5, § 30; 6, гл. 4]. Развёрнутое описание основных алгоритмов на основе таких функций дано в книге [7], где уделено особое внимание выбору базисных функций. Основными приёмами такого выбора можно руководствоваться при анализе задачи (1)–(3).

Соотношения (1), (2) представляют собой классическую задачу управления с начальным состоянием системы, описываемым условием Коши $x(t_0)=x_0$. Очевидно, возможны и другие начальные состояния этой системы. Соотношения $x(t_\nu)=x_\nu$ $(\nu=\overline{1,m-1})$ — заданные промежуточные состояния системы. Условие (3) формально обобщает условие из [3, с. 19] в линейном случае. Цель работы — получить достаточные условия разрешимости задачи (1)–(3), а также замкнутые соотношения для функций $u(t)$, $x(t)$.

Задача состоит из двух частей, определяемых условиями (2) и (3) соответственно, которые с точки зрения теории уравнений первого рода не имеют принципиальных различий. В рамках эквивалентности задаче (1)–(3) рассматриваем совокупность $m+k+1$ соотношений, состоящую из уравнения (1), m уравнений типа (3), порождаемых условиями (2), и k уравнений (3). На основании (1) $m+1$ точечных условий (2) порождают m интегральных соотношений типа (3). Поэтому для изучения разрешимости и построения этих функций используем единый метод, который опишем применительно к системе (3), представленной в операторном виде

$$T_i x = \mu_i, \quad i = \overline{1, k}, \tag{4}$$

где T_i — интегральные операторы, определяемые левыми частями в (3). Суть метода состоит в использовании представлений типа [5, § 30; 6, гл. 4] для точного представления функции $x(t)$ (см. [4, гл. 4]).

Для построения решения системы (4) введём функции $S_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ типа [4, гл. 4], при этом воспользуемся поэтапным по $i=\overline{1,k}$ введением и частичным исключением промежуточных вспомогательных функций.

На первом этапе функцию $x(t)$ ищем из первого уравнения в следующем виде:

$$x(t) = S_1(t)c_1 + y_1(t), \tag{5}$$

где c_1 — постоянный вектор, $y_1(t)$ — произвольная функция.

Вид функции (5) соответствует специфике решений уравнений первого рода. Величину c_1 выберем так, чтобы первое уравнение выполнялось при любой функции $y_1(t)$. После подстановки (5) в первое уравнение системы (4) и необходимых упрощений придём к выражению

$$T_1 S_1 c_1 = \mu_1 - T_1 y_1. \tag{6}$$

Предполагая, что $\det(T_1 S_1) \neq 0$, из (5), (6) получаем

$$x(t) = M_1(y_1) + q_1(t), \tag{7}$$

где $M_1 : \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$ — линейный однородный оператор:

$$M_1(y_1) = y_1 - S_1(T_1 S_1)^{-1} T_1 y_1, \quad q_1(t) = S_1(T_1 S_1)^{-1}\mu_1. \tag{8}$$

Произвольную функцию $y_1(t)$ доопределим таким образом, чтобы выполнялось второе уравнение системы (4) (2-й этап, $i=2$), т.е.

$$T_2 M_1(y_1) = \mu_2 - T_2 q_1. \tag{9}$$

С этой целью функцию $y_1(t)$ строим в виде

$$y_1(t) = S_2(t)c_2 + y_2(t), \tag{10}$$

где c_2 и y_2 — величины, аналогичные c_1 и y_1 соответственно.

Подставив (10) в (9), получим

$$T_2 M_1 S_2 c_2 = \mu_2 - T_2 q_1 - T_2 M_1 y_2. \tag{11}$$

Из (11) при $\det(T_2 M_1 S_2) \neq 0$ находим

$$c_2 = (T_2 M_1 S_2)^{-1}(\mu_2 - T_2 q_1 - T_2 M_1 y_2),$$

а затем, в силу (10),

$$y_1 = y_2 - S_2(T_2M_1S_2)^{-1}T_2M_1y_2 + S_2(T_2M_1S_2)^{-1}(\mu_2 - T_2q_1). \tag{12}$$

Здесь и ниже аргумент t будем опускать.

На основании (12) соотношение (7) примет вид

$$x(t) = M_2(y_2) + q_2, \tag{13}$$

где M_2 — оператор, аналогичный M_1:

$$M_2(y_2) = M_1(y_2) - M_1S_2(T_2M_1S_2)^{-1}T_2M_1y_2, \tag{14}$$

$$q_2 = q_1 + M_1S_2(T_2M_1S_2)^{-1}(\mu_2 - T_2q_1). \tag{15}$$

В силу (7), (8) и (13)–(15) на r-м этапе $(i=r)$ приходим к равенству (алгоритму)

$$x(t) = M_r(y_r) + q_r, \tag{16}$$

где при выполнении условия

$$\det(T_rM_{r-1}S_r) \neq 0 \tag{17}$$

имеют место рекуррентные соотношения

$$M_r(y_r) = M_{r-1}(y_r) - M_{r-1}S_r(T_rM_{r-1}S_r)^{-1}T_rM_{r-1}(y_r), \tag{18}$$

$$q_r = q_{r-1} + M_{r-1}S_r(T_rM_{r-1}S_r)^{-1}(\mu_r - T_rq_{r-1}), \tag{19}$$

$M_0 = \mathfrak{J}$ — тождественный оператор.

Иными словами, при выполнении условия (17) решение системы (4) определяется формулой

$$x(t) = M(t,y) + q(t), \tag{20}$$

где y — произвольная вспомогательная функция, $M(t,y)$, $q(t)$ — соответственно линейный однородный интегральный оператор, действующий из $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$, и функция, построенные по алгоритму (16)–(19), при этом $y_k = y$, $q_k = q$, $M_k(y_k) = M(t,y)$. Аргумент t в $M(t,y)$ означает явную зависимость M_k от t.

Определение. Решение $(u(t),x(t))$ задачи (1)–(3) называем *замкнутым*, если оно представимо с помощью конечного числа квадратур и алгебраических операций с матрицантом $X(t)$ свободной системы и остальными исходными величинами задачи (1)–(3).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Введём интегральные операторы

$$H_lu = \int\limits_{t_0}^{t_l} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)\,d\tau, \quad l = \overline{1,m},$$

$$N_iu = \int\limits_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau)X(\tau)\,d\tau \int\limits_{t_0}^{\tau} X^{-1}(s)Q(s)u(s)\,ds, \quad i = \overline{1,k},$$

а также матрицы $H_{j+1}G_jP_{j+1}$, $j = \overline{0,m-1}$, $F_{p+1}K_p\Phi_{p+1}$, $p = \overline{0,k-1}$; здесь G_j, K_p — линейные однородные операторы, аналогичные M_i, при этом $G_0 = K_0 \equiv \mathfrak{J}$ — тождественный оператор, $F_{p+1}(z) = N_{p+1}G_m(z)$ $(z \in \mathbb{R}^r)$.

По предложенному в п. 1 методу выведем алгоритм построения решений задачи (1)–(3).

Сначала решим первую часть задачи, т.е. найдём управление $u(t)$, подчинённое условиям (2). Поскольку

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

то, согласно (2),

$$\int\limits_{t_0}^{t_s} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)\,d\tau = X^{-1}(t_s)x_s - x_0. \tag{22}$$

Соотношение (22) представляет собой условие типа (3). Совокупность соотношений (3), (21), (22) эквивалентна задаче (1)–(3).

На первом этапе будем искать управление в виде

$$u(t) = P_1(t)c_1 + z_1,$$

где c_1 — постоянный вектор, z_1 — произвольная вспомогательная функция, определяемая на следующем этапе $(s=2)$, и т.д. В результате при выполнении условия $\det(H_{j+1}G_jP_{j+1}) \neq 0$ получим выражение типа (20):

$$u(t) = G(t,z) + \varphi(t), \tag{23}$$

где z — вспомогательная вектор-функция, $G(t,z)$, $\varphi(t)$ — соответственно линейный однородный интегральный оператор, действующий из $C(I,\mathbb{R}^r)$ в $C(I,\mathbb{R}^r)$, и функция, найденные по алгоритму

$$G_{j+1}(z_{j+1}) = G_j(z_{j+1}) - G_jP_{j+1}(H_{j+1}G_jP_{j+1})^{-1}H_{j+1}G_j(z_{j+1}), \tag{24}$$

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + G_jP_{j+1}(H_{j+1}G_jP_{j+1})^{-1}[X^{-1}(t_{j+1})x_{j+1} - x_0 - H_{j+1}\varphi_j], \tag{25}$$

$j=\overline{0,m-1}$, при этом $\varphi_0 = 0$, $G_m(z_m) = G(t,z)$, $\varphi_m = \varphi(t)$, $z_m = z$.

Выполнение условия $\det(H_{j+1}G_jP_{j+1}) \neq 0$ обеспечивает реализуемость процесса (24) и (25) построения $G(t,z)$ и $\varphi(t)$, начиная с

$$G_1(z_1) = z_1 - P_1(H_1P_1)^{-1}H_1z_1, \quad \varphi_1 = P_1(H_1P_1)^{-1}[X^{-1}(t_1)x_1 - x_0].$$

Соотношение (23) является решением задачи (1), (2); оно принимается за основу при анализе условий (3), т.е. при получении решения второй части задачи, а вместе с тем задачи (1)–(3). На основании (21), (23) имеем

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)\,[G(\tau,z) + \varphi(\tau)]\;d\tau. \tag{26}$$

Далее подставим (26) в (3):

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau)X(\tau)\,d\tau \int\limits_{t_0}^{\tau} X^{-1}(s)Q(s)G(s,z)\,ds = \mu_i - \int\limits_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau)X(\tau)\left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau} X^{-1}(s)Q(s)\varphi(s)\,ds\right]d\tau. \tag{27}$$

Запишем эту систему в следующем виде:

$$F_iz = \lambda_i, \ \ i=\overline{1,k}, \tag{28}$$

где λ_i — правые части в (27).

Система (28) аналогична (22), поэтому при выполнении условия $\det(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1}) \neq 0$ получим выражение типа (23):

$$z(t) = K(t,y) + g(t), \tag{29}$$

где y, $K(t,y)$, $g(t)$ — величины, аналогичные принятым в (23) и получаемые по алгоритму типа (24), (25), т.е.

$$K_{p+1}(y_{p+1}) = K_p(y_{p+1}) - K_p\Phi_{p+1}(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1})^{-1}F_{p+1}K_p(y_{p+1}), \tag{30}$$

$$g_{p+1} = g_p + K_p\Phi_{p+1}(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1})^{-1}[\lambda_{p+1} - K_{p+1}g_p], \tag{31}$$

$p = \overline{0, k-1}$, при этом $g_0 = 0$, $K_m(y_m) = K(t,y)$, $g_m = g(t)$, $y_m = y$.

Выполнение условия $\det(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1}) \neq 0$ обеспечивает реализуемость процесса (30), (31) построения $K(t,y)$ и $g(t)$, начиная с

$$K_1(y_1) = y_1 - \Phi_1(F_1\Phi_1)^{-1}F_1y_1, \quad g_1 = \Phi_1(F_1\Phi_1)^{-1}\lambda_1.$$

Подставив (29) в (23), получим

$$u(t) = G(t, K(\tau,y) + g(\tau)) + \varphi(t). \tag{32}$$

Из (21) с учётом (32) имеем

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)[G(\tau, K(s,y) + g(s)) + \varphi(\tau)]\,d\tau. \tag{33}$$

Таким образом, справедливо

Утверждение. *Пусть выполнены соотношения*

$$\det(H_{j+1}G_jP_{j+1}) \neq 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad \det(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1}) \neq 0, \quad p = \overline{0, k-1}.$$

Тогда задача (1)–(3) имеет замкнутое решение (32), (33).

Отметим, что формула (23) определяет управление, удовлетворяющее условиям (2) и зависящее от произвольной функции $z = z(t)$. Формулы (23), (29) задают управление (32), содержащее произвольную функцию $y = y(t)$.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = 3, \quad x(2) = 4, \tag{34}$$

$$\int\limits_0^2 x(\tau)\,d\tau = 0. \tag{35}$$

Из (34) имеем уравнение

$$\int\limits_0^2 u(\tau)\,d\tau = 1 \tag{36}$$

относительно функции $u(t)$, которую будем искать в виде

$$u(t) = c_1 + z(t). \tag{37}$$

Из (36), (37) получим

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(\tau)\,d\tau. \tag{38}$$

Подставим (38) в (37):

$$u(t)=\frac{1}{2}+z(t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(\tau)\,d\tau. \tag{39}$$

Используя (39) в соотношении

$$x(t)=3+\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau, \tag{40}$$

находим

$$x(t)=\frac{3}{2}+\frac{t}{2}+\int\limits_0^t\left[z(\tau)-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(s)\,ds\right]d\tau. \tag{41}$$

Подставим теперь (41) в (35) и в результате упрощений получим уравнение

$$\int\limits_0^2(1-\tau)z(\tau)\,d\tau=-7, \tag{42}$$

где функцию $z(t)$ будем искать в виде

$$z(t)=\widetilde{c}_1t+y(t). \tag{43}$$

Из (42), (43) находим

$$\widetilde{c}_1=\frac{21}{2}+\frac{3}{2}\int\limits_0^2(1-\tau)y(\tau)\,d\tau. \tag{44}$$

Подстановка (44) в (43) даёт

$$z(t)=\frac{21}{2}t+\frac{3}{2}t\int\limits_0^2(1-\tau)y(\tau)\,d\tau+y(t). \tag{45}$$

Далее из (39) с учётом (45) имеем управление

$$u(t)=-10+\frac{21}{2}t+\frac{1}{2}\int\limits_0^2[3(t-1)(1-\tau)-1]y(\tau)\,d\tau+y(t). \tag{46}$$

Из (40), (46) находим функцию состояний

$$x(t)=3-10t+\frac{21}{4}t^2+\frac{t}{2}\int\limits_0^2\left[\frac{3}{2}(t-2)(1-\tau)-1\right]y(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

Замечание 1. Задача (34), (35) является задачей вида (1)–(3) с безусловно разрешимой системой (3) и очевидным решением

$$\hat{x}=h(t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 h(\tau)\,d\tau,$$

где $h(t)$ — произвольная непрерывная функция.

Задача (1)–(3) с безусловно разрешимой системой (3) представляет собой самостоятельный объект исследования по предложенному в п. 1 методу. Система (3) — совокупность уравнений 1-го рода относительно $x(t)$, при этом соотношения (24), (30) играют роль поэтапных (частичных) регуляризаторов для неё. Предложенный метод позволяет построить решение системы (3) (его целесообразно назвать методом регуляризации этой системы) и служит дополнением к регуляризаторам, используемым в книге [4] для изучения краевых задач дифференциальных уравнений, поскольку такие задачи эквивалентны соответствующим уравнениям 1-го рода. Очевидно, что этот метод может быть применён для изучения систем, приведённых в [1; 2; 8, гл. 3, § 1, п. 53].

Замечание 2. Применение метода Гаусса к системе (3) на основе формулы

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i(t) c_i + y(t) \tag{47}$$

приводит к её решению типа (20) с более сложным алгоритмом построения векторов c_i. По этой причине также неконструктивным является сведение системы (3) к системе с фиксированными пределами интегрирования.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 741 с.
2. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах / Л.В. Канторович, Б.З. Вулих, А.Г. Пинскер. — М.-Л. : Гостехиздат, 1950. — 548 с.
3. Моисеев, Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. — М. : Наука, 1971. — 424 с.
4. Лаптинский, В.Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем/ В.Н. Лаптинский. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 1998. — 300 с.
5. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 496 с.
6. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [и др.]. — М. : Наука, 1969. — 452 с.
7. Марчук, Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.
8. Рисс, Ф.Б. Лекции по функциональному анализу/ Ф.Б. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь ; пер. с фр. Д.А. Василькова ; под ред. С.В. Фомина. — М. : Мир, 1979. — 580 с.

SOLUTION OF A MULTIPOINT CONTROL PROBLEM WITH INTEGRAL CONSTRAINTS OF EQUALITIES TYPE

© 2024 / **V. N. Laptinskii**

Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus
e-mail: lavani@tut.by

An algorithm for solving a linear multipoint control problem with isoperimetric type constraints on the state function is proposed.

Keywords: control, multipoint problem, integral conditions

REFERENCES

1. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P., *Funktsional'nyy analiz* (Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1977.
2. Kantorovich, L.V., Vulikh, B.Z., and Pinsker, A.G., *Funktsional'nyy analiz v poluuporyadochennykh prostranstvakh* (Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950.

3. Moiseev, N.N., *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* (Numerical Methods in the Theory of Optimal Systems), Moscow: Nauka, 1971.
4. Laptinskii, V.N., *Konstruktivnyi analiz upravlyayemykh kolebatel'nykh sistem* (Constructive Analysis of Controlled Oscillatory Systems). Minsk: Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Belarusi, 1998.
5. Trenogin, V.A., *Funktsional'nyy analiz* (Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1980.
6. Krasnosel'sky, M.A., Vainikko, G.M., Zabreiko, P.P., et al., *Priblizhonnoye resheniye operatornykh uravnenii* (Approximate Solution of Operator Equations), Moscow: Nauka, 1969.
7. Marchuk, G.I. and Agoshkov, V.I, *Vvedeniye v proyektsionno-setochnyye metody* (Introduction to Projection Mesh Methods), Moscow: Nauka, 1981.
8. Riess, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Leçons D'Analyse Fonctionnelle, Budapest: Akadémiai Kiadó, 1979.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1394–1406

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

РЕГУЛЯТОРЫ ФИНИТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

© 2024 г. В. Е. Хартовский

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Республика Беларусь

e-mail: hartows@mail.ru

Поступила в редакцию 11.06.2024 г., после доработки 11.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Для гибридных линейных автономных непрерывно-дискретных систем предложены методы проектирования регуляторов двух видов, обеспечивающих их финитную стабилизацию. Построение регулятора финитной стабилизации по состоянию (первый вид) основано на известных значениях решения системы управления в дискретные моменты времени, кратные шагу квантования. Найден наблюдатель, позволяющий в режиме реального времени с нулевой ошибкой получить необходимые значения решения по данным наблюдаемого выходного сигнала. Регулятор финитной стабилизации по выходу (второй вид) использует в качестве обратной связи наблюдаемый выходной сигнал; его конструкция представляет собой модификацию регулятора финитной стабилизации по состоянию путём включения в его контур указанного наблюдателя.

Ключевые слова: линейная гибридная непрерывно-дискретная система, наблюдаемый выходной сигнал, регулятор, наблюдатель, финитная стабилизация

DOI: 10.31857/S0374064124100088, EDN: JTEHKQ

ВВЕДЕНИЕ

К гибридным системам относятся системы, в структуре которых имеется несколько уровней разнородного описания, а вектор-состояние содержит непрерывные и дискретные компоненты. Такие системы встречаются, например, в прикладных задачах управления механическими и электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях (см. [1–5]). Исследованию различных классов гибридных систем посвящены работы [6–17].

В настоящей статье изучаются линейные автономные гибридные непрерывно-дискретные системы с импульсным управляющим воздействием, которые можно интерпретировать как непрерывные системы при воздействии регуляторов дискретного действия. Различные свойства управляемости и наблюдаемости линейных непрерывно-дискретных систем изучены в работах [13, 14], в них же предложены методы построения необходимого програмного управления и вычисления решения по измерениям наблюдаемого выхода. Однако хорошо известно, что более универсальным управлением, в сравнении с программным, является управление по типу обратной связи. В представленном исследовании предлагаются подходы к проектированию регуляторов с обратной связью, обеспечивающих финитную стабилизацию замкнутой системы [18], т.е. равенство нулю решения системы через конечное время. Строятся регуляторы двух видов. Первый вид — регулятор финитной стабилизации по состоянию. Получен критерий существования и предложен метод построения такого регулятора. Для реализации обратной связи в этом регуляторе необходимо иметь возможность определять состояния системы в дискретные моменты времени, кратные шагу квантования. Для этого предложен так называемый "поточечный наблюдатель", позволяющий по наблюдаемому выходному сигналу в режиме реального времени и с нулевой ошибкой восстанавливать необходимые данные, а также доказан критерий его существования. Второй вид разработанного регулятора — регулятор финитной стабилизации по выходу, основанный на использовании обратной связи в виде наблюдаемого выходного сигнала. Идея его построения заключается в модификации регулятора финитной стабилизации по состоянию путём встраивания в него дополнительного контура, выполняющего функцию поточечного наблюдателя. Показано, что регулятор финитной стабилизации по выходу существует тогда и только тогда, когда существуют регулятор финитной стабилизации по состоянию и поточечный наблюдатель.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть объект управления описывается линейной непрерывно-дискретной системой с импульсным управляющим воздействием и известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^{m} B_{1j}u(t_{k-j}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \tag{1}$$

$$x_2(t_{k+1}) = A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^{m} B_{2j}u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^{m} \left(C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})\right), \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{3}$$

где $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$; $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{0, m}$, u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал, $t_k = kh$, $k = \mathbb{Z}$, $h > 0$ — шаг квантования.

Считаем, что начальное условие для системы (1), (2) имеет вид

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = a_2, \quad a_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, 2, \quad u(t_j) = 0, \quad j < 0. \tag{4}$$

Под решением системы (1), (2) с начальным условием (4) понимается пара функций $\{x_1(t),\ t \geqslant 0,\ x_2(t_k),\ k = 0, 1, \ldots\}$, удовлетворяющих начальному условию (4) и уравнениям (1), (2), где $x_1(t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывная и дифференцируемая при $t \neq t_j$, $j = 0, 1, \ldots$, функция, $x_2(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, — дискретная функция. В уравнении (1) при $t = t_k$ понимается правосторонняя производная.

В работе исследуется задача финитной стабилизации системы (1), (2). Под задачей финитной стабилизации будем понимать [18] задачу проектирования регулятора с обратной связью, который обеспечивает равенство нулю решению замкнутой системы, начиная с некоторого момента времени $t_0 = k_0 h$ $(k_0 \in \mathbb{N})$, независимо от начального состояния (4). Финитную стабилизацию будем осуществлять регуляторами двух типов:

а) регулятор с обратной связью по состоянию, реализация которого предполагает, что в каждый момент времени измерению доступен вектор $X(t_k)$:

$$u(t_k) = \sum_{j=0}^{m_1} (V_{11}^j X(t_{k-j}) + V_{12}^j x_3(t_{k-j})), \quad x_3(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_1} (V_{21}^j X(t_{k-j}) + V_{22}^j x_3(t_{k-j})),$$
$$k = k_1, k_1 + 1, \ldots, \quad k_1 = m + m_1; \tag{5}$$

б) регулятор с обратной связью по неполным измерениям, в котором обратная связь строится по наблюдаемому выходному сигналу (3):

$$u(t_k)=\sum_{j=0}^{m_2}(U_{11}^j y(t_{k-j})+U_{12}^j x_4(t_{k-j})),\quad x_4(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_2}(U_{21}^j y(t_{k-j})+U_{22}^j x_4(t_{k-j})),$$
$$k=k_2,k_2+1,\ldots,\quad k_2=2m+m_2. \tag{6}$$

Здесь $X(t_k)=\operatorname{col}[x_1(t_k),x_2(t_k)]$, $k=0,1,\ldots$; $x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=3,4,$ — вспомогательные переменные, удовлетворяющие начальному условию

$$x_{i+2}(t_k)=a_{i+2\,k},\quad k=\overline{0,m+m_i},\quad i=1,2, \tag{7}$$

где $a_{i+2\,k}\in\mathbb{R}^{n_{i+2}}$ — любые заданные векторы, V_{ij}, U_{ij} — постоянные матрицы подходящих размеров. Для определённости считаем, что при использовании регуляторов (5) и (6) $u(t_k)=0$, $k=\overline{0,k_i-1}$, $i=1,2$.

Определение 1. Регулятор вида (5) (вида (6)), для которого существует число $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что, какими бы ни были начальные условия (4), (7) для решения замкнутой системы (1), (2), (5) (замкнутой системы (1)–(3), (6)), выполняются равенства

$$x_1(t)=0,\quad t\geqslant t_{k_0},\quad x_2(t_k)=0,\quad x_3(t_k)=0,\quad k=k_0,k_0+1,\ldots \tag{8}$$

$$\Big(x_1(t)=0,\quad t\geqslant t_{k_0},\quad x_2(t_k)=0,\quad x_4(t_k)=0,\quad k=k_0,k_0+1,\ldots\Big), \tag{9}$$

назовём *регулятором финитной стабилизации по состоянию* (*регулятором финитной стабилизации по выходу*).

Для реализации регулятора (5) необходимо иметь возможность определения в режиме реального времени векторов $X(t_k)$. Поэтому, а также для дальнейшего проектирования внутреннего контура регулятора (6), предварительно решим задачу построения наблюдателя, который позволит при любом управлении $u(t_k)$ в режиме реального времени на основании наблюдений (3) получать точные значения решения в точках t_k, т.е. величины $X(t_k)$.

Введём систему с дискретным временем

$$Z(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_3}\big(\widehat{A}_jZ(t_{k-j})+\widehat{F}_jW(t_{k-j})\big)+\sum_{j=0}^{m}\widehat{B}_ju(t_{k-j}),$$
$$V(t_k)=\sum_{j=0}^{m_3}\widehat{Q}_jZ(t_{k-j}),\quad k=k_3,k_3+1,\ldots,\quad k_3\geqslant m_3+m, \tag{10}$$
$$Z(t_j)=d_j,\quad j=\overline{k_3-m_3,k_3,} \tag{11}$$

с дискретным входом $W(t_k)$ и дискретным выходом $V(t_k)$, где $\widehat{A}_j$, $\widehat{F}_j$, $\widehat{B}_j$, $\widehat{Q}_j$ и d_j — некоторые постоянные матрицы и векторы подходящих размеров. Равенства (11) определяют начальные условия для системы (10).

Определение 2. Под *поточечным наблюдателем* для системы (1)–(3) с заданным управлением $u(t_k)$ будем понимать систему вида (10), для которой существует момент времени $t_{\widetilde{k}_3}$ такой, что при любом начальном условии (11) и входном воздействии $W(t_j)$, равным выходу (3), $W(t_k)=y(t_k)$, $k=k_3,k_3+1,\ldots$, выход $V(t_k)$ системы (10), начиная с момента времени $t_{\widetilde{k}_3}$, совпадает в точках t_k, $k=\widetilde{k}_3, \widetilde{k}_3+1, \ldots$, с решением системы (1)–(3), порождающим выход (3), т.е. с векторами $X(t_k)\colon V(t_k)=X(t_k)$, $k=\widetilde{k}_3, \widetilde{k}_3+1, \ldots$

Для формулировки основных результатов обозначим $n=n_1+n_2$ и введём матрицы

$$E_1=e^{A_{11}h}, \quad E_2=\int\limits_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}\,d\tau, \quad A=\begin{bmatrix} E_1 & E_2A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_j=\begin{bmatrix} E_2B_{1j} \\ B_{2j} \end{bmatrix}, \quad C_j=\begin{bmatrix} C_{1j} & C_{2j} \end{bmatrix},$$

$$B(\lambda)=\sum_{j=0}^m \lambda^j B_j, \quad C(\lambda)=\sum_{j=0}^m \lambda^j C_j.$$

Сформулируем критерии существования поточечного наблюдателя и регуляторов финитной стабилизации по состоянию и по выходу.

Теорема 1. *Для существования поточечного наблюдателя (10) для системы (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n-\lambda A \\ C(\lambda) \end{bmatrix}=n \quad \text{\textit{при любом}} \quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Для существования регулятора финитной стабилизации по состоянию (5) для системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n-\lambda A, & B(\lambda) \end{bmatrix}=n \quad \text{\textit{при любом}}\ \lambda\in\mathbb{C}. \tag{13}$$

Теорема 3. *Для существования регулятора финитной стабилизации по выходу (6) (для системы (1)–(3)) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (12) и (13).*

Доказательства теорем 1–3 приводятся в пп. 3–5 и носят конструктивный характер, т.е. содержат способы построения регуляторов и наблюдателя.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Следуя [13, 14], для описания функции $X(t_k)$, $k=0,1,\ldots$, получим систему с дискретным временем.

Применив формулу Коши к уравнению (1), имеем

$$x_1(t_{k+1})=e^{A_{11}h}x_1(t_k)+\int\limits_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}\,d\tau\biggl(A_{12}x_2(t_k)+\sum_{j=0}^m B_{1j}u(t_{k-j})\biggr), \quad k=0,1,\ldots \tag{14}$$

Учитывая (14), запишем систему

$$X(t_{k+1})=AX(t_k)+\sum_{j=0}^m B_ju(t_{k-j}), \quad k=0,1,\ldots, \tag{15}$$

$$y(t_k)=\sum_{j=0}^m C_jX(t_{k-j}), \quad k=m,m+1,\ldots \tag{16}$$

Начальные условия для системы (15) в силу (4) имеют вид

$$X(0)=\operatorname{col}[a_1,a_2], \quad u(t_j)=0, \quad j<0. \tag{17}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Для того чтобы регулятор (5) (регулятор (6)) был регулятором финитной стабилизации по состоянию (по выходу) для системы (1), (2) (для системы (1)–(3)) необходимо и достаточно, чтобы этот регулятор обеспечивал решению системы (15), (5) (решению системы (15), (16), (6)) при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$ равенства*

$$X(t_k)=0, \quad x_3(t_k)=0, \quad k=k_0,k_0+1,\ldots \tag{18}$$

$$\big(X(t_k)=0, \quad x_4(t_k)=0, \quad k=k_0,k_0+1,\ldots\big), \tag{19}$$

какими бы ни были начальные условия (17), (7).

Если замкнуть систему (15) регулятором (5) $\big($регулятором (6) и в полученной системе выход $y(t_k)$ заменить выражением $\sum_{j=0}^{m} C_j X(t_{k-j})\big)$, то получим однородную разностную систему. Запишем эту систему для случая уравнений (15), (5):

$$\widetilde{X}(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{k_1}\widetilde{A}_j\widetilde{X}(t_{k-j}), \quad k=k_1,k_1+1,\ldots, \tag{20}$$

где $\widetilde{X}(t_k)=\mathrm{col}[X(t_k),x_3(t_k)]$, $\widetilde{A}_j\in\mathbb{R}^{(n+n_3)\times(n+n_3)}$ — некоторые матрицы. Характеристической матрице системы (20)

$$\widetilde{\Delta}(\lambda)=\left[\lambda^{k_1+1}I_{\tilde{n}}-\sum_{j=0}^{k_1}\lambda^{k_1-j}\widetilde{A}_j\right]$$

поставим в соответствие матрицу

$$\widetilde{W}(\lambda)=[I_{\tilde{n}}-\lambda\widetilde{A}(\lambda)], \quad \text{где} \quad \widetilde{A}(\lambda)=\sum_{j=0}^{k_1}\lambda^j\widetilde{A}_j, \tag{21}$$

которую будем называть *матрицей, ассоциированной с характеристической матрицей системы (20).*

Лемма 2. *Для того чтобы существовало число $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что решение системы (20) будет удовлетворять равенствам $\widetilde{X}(t_k)=0$, $k=k_0,k_0+1,\ldots,$ независимо от начального условия $\widetilde{X}(t_j)$, $j=\overline{0,k_1}$, этой системы, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы (21) был тождественно равен единице, т.е.*

$$\det\widetilde{W}(\lambda)\equiv 1. \tag{22}$$

Доказательство. Введём матрицу и вектор

$$\Theta=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_0 & \widetilde{A}_1 & \ldots & \widetilde{A}_{k_1-1} & \widetilde{A}_{k_1}\\ I_{\tilde{n}} & 0_{\tilde{n}\times\tilde{n}} & \ldots & 0_{\tilde{n}\times\tilde{n}} & 0_{\tilde{n}\times\tilde{n}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0_{\tilde{n}\times\tilde{n}} & 0_{\tilde{n}\times\tilde{n}} & \ldots & I_{\tilde{n}} & 0_{\tilde{n}\times\tilde{n}}\end{bmatrix}, \quad \theta(t_k)=\begin{bmatrix}\widetilde{X}(t_k)\\ \ldots\\ \widetilde{X}(t_{k-k_1})\end{bmatrix},$$

где $0_{n\times k}\in\mathbb{R}^{n\times k}$ — нулевая матрица. В силу (20) вектор $\theta(t_k)$ удовлетворяет системе

$$\theta(t_{k+1})=\Theta\theta(t_k), \quad k=k_1,k_1+1,\ldots \tag{23}$$

Равенства $\widetilde{X}(t_k)=0$, $k=k_0,k_0+1,\ldots,$ при любом начальном условии $\widetilde{X}(t_j)$, $j=\overline{0,k_1}$, для системы (20) возможны в том и только в том случае, когда $\theta(t_k)=0$, $k=k_0+k_1,k_0+k_1+1,\ldots,$

независимо от начальных условий системы (23). Это равносильно тому, что матрица Θ является нильпотентной. Покажем, что необходимым и достаточным условием нильпотентности матрицы Θ является условие (22). Определим матрицу

$$\Omega(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} & \ldots & 0_{n\times n} \\ \lambda I_n & I_n & \ldots & 0_{n\times n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{k_1} I_n & \lambda^{k_1-1} I_n & \ldots & I_n \end{bmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$(I_{n+n_3}-\lambda\Theta)\Omega(\lambda)=\begin{bmatrix} \widetilde{W}(\lambda) & -\sum_{i=1}^{k_1}\lambda^i\widetilde{A}_i & -\sum_{i=2}^{k_1}\lambda^{i-1}\widetilde{A}_i & \ldots & -\lambda\widetilde{A}_{k_1} \\ 0_{n\times n} & I_n & 0_{n\times n} & \ldots & 0_{n\times n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \ldots & I_n \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Из равенства (24) следует, что $\det(I_{n+n_3}-\lambda\Theta)=\det\widetilde{W}(\lambda)$, поэтому условие $\det(I_{n+n_3}-\lambda\Theta)\equiv 1$ равносильно условию (22); это же условие является необходимым и достаточным для того, чтобы матрица Θ была нильпотентной. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathbb{R}^{m\times k}[\lambda]$ множество полиномиальных матриц.

Лемма 3 [19]. *Условие*

$$\operatorname{rank}\big[I-\lambda D_1,\ D_2(\lambda)\big]=n \quad \textit{при любом} \quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{25}$$

где $D_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $D_2(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times r}[\lambda]$, *является необходимым и достаточным для того, чтобы нашлись матрицы* $\Phi_1(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $\Phi_2(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times r}[\lambda]$ *такие, что* $\det D_\Phi(\lambda)\equiv 1$, *где*

$$D_\Phi(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n-\lambda D_1 & -D_2(\lambda) \\ -\lambda\Phi_1(\lambda) & I_r-\lambda\Phi_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Следствие. *Условие (25) необходимо и достаточно для того, чтобы нашлись матрицы* $\Phi_{11}(\lambda),\Phi_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $\Phi_{12}(\lambda),\Phi_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times r}[\lambda]$ *такие, что* $\det\widetilde{D}_\Phi(\lambda)\equiv 1$, *где*

$$\widetilde{D}_\Phi(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n-\lambda D_1-\lambda D_2(\lambda)\Phi_{11}(\lambda) & -\lambda D_2(\lambda)\Phi_{12}(\lambda) \\ -\lambda\Phi_{21}(\lambda) & I_r-\lambda\Phi_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Достаточность. В силу условия (12) и следствия существуют матрицы $M_{11}(\lambda),M_{12}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$ и $M_{21}(\lambda),M_{22}(\lambda)\in\mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$ такие, что

$$\begin{vmatrix} I_n-\lambda A-\lambda M_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda M_{12}(\lambda) \\ -\lambda M_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_l-\lambda M_{22}(\lambda) \end{vmatrix}\equiv 1. \tag{26}$$

Пусть $M_{ik}(\lambda)=\sum_{j=0}^{m_3}\lambda^j M_{ik}^j$, где M_{ik}^j — постоянные матрицы подходящих размеров. Наблюдатель вида (10) определим системой

$$Z_1(t_{k+1})=AZ_1(t_k)+\sum_{j=0}^{m_3}M_{11}^j\sum_{i=0}^{m}C_iZ_1(t_{k-j-i})+\sum_{j=0}^{m_3}M_{12}^jZ_2(t_{k-j})-\sum_{j=0}^{m_3}M_{11}^jW(t_{k-j})+\sum_{j=0}^{m}B_ju(t_{k-j}),$$
$$Z_2(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_3}M_{21}^j\sum_{i=0}^{m}C_iZ_1(t_{k-j-i})+\sum_{j=0}^{m_3}M_{22}^jZ_2(t_{k-j})-\sum_{j=0}^{m_3}M_{21}^jW(t_{k-j}),$$
$$k=k_3,k_3+1,\ldots,\quad k_3\geqslant m_3+m, \tag{27}$$

с выходом

$$V(t_k)=\big[I_n,\ 0_{n\times l}\big]Z(t_k),\quad k=k_3,k_3+1,\ldots, \tag{28}$$

где $Z=\operatorname{col}[Z_1,Z_2]$.

Начальные условия для системы (27) возьмём в виде $Z_1(t_k)=b_k^1,\ k=\overline{k_3-(m+m_3),k_3}$, $Z_2(t_k)=b_k^2,\ k=\overline{k_3-m_3,k_3}$, где $b_k^1\in\mathbb{R}^n,\ b_k^2\in\mathbb{R}^l$ — любые векторы.

Пусть $X(t_k)$ — любое решение системы (15), а $y(t_k)$ — отвечающий этому решению выход (16). Положим $W(t_k)=y(t_k),\ k=k_3,k_3+1,\ldots,$ и обозначим через $\varepsilon(t_k)=V(t_k)-X(t_k)=Z_1(t_k)-X(t_k),\ k=k_3,k_3+1,\ldots,$ ошибку оценивания решения $X(t_k)$ системы (15), (16) наблюдателем (27), (28). Легко видеть, что в этом случае ошибка оценивания $\varepsilon(t_k)$ является векторной компонентой решения следующей линейной автономной однородной разностной системы:

$$\varepsilon(t_{k+1})=A\varepsilon(t_k)+\sum_{j=0}^{m_3}M_{11}^j\sum_{i=0}^{m}C_i\varepsilon(t_{k-j-i})+\sum_{j=0}^{m_3}M_{12}^jZ_2(t_{k-j}),$$
$$Z_2(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_3}M_{21}^j\sum_{i=0}^{m}C_i\varepsilon(t_{k-j-i})+\sum_{j=0}^{m_3}M_{22}^jZ_2(t_{k-j}),\quad k=k_3,k_3+1,\ldots \tag{29}$$

В силу тождества (26) определитель матрицы, ассоциированной с характеристической матрицей системы (29), тождественно равен единице. Поэтому найдётся момент времени $t_{\widetilde{k}_3}$ такой, что решение системы (29), независимо от её начального условия, удовлетворяет соотношениям $\varepsilon(t_k)=0,\ Z_2(t_k)=0,\ k=\widetilde{k}_3,\widetilde{k}_3+1,\ldots$ Отсюда следует, что выполняется равенство

$$V(t_k)=X(t_k),\quad k=\widetilde{k}_3,\widetilde{k}_3+1,\ldots \tag{30}$$

Необходимость. Если для системы (1)–(3) существует поточечный наблюдатель (10), то при любой фиксированной функции $u(t_k)$ найдутся $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ такие, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством выходов $\{y(t_k),\ k=t_\alpha,t_\alpha+1,\ldots\}$ и множеством решений $\{X(t_k)\}$, где $k=\alpha+\beta,\alpha+\beta+1,\ldots$ Покажем, что для существования такого взаимно однозначного соответствия необходимо условие (12). При этом, не нарушая общности рассуждений, примем, что $u(t_k)=0,\ k=0,1,\ldots$

Обозначим $C_A=\sum_{j=0}^{m}C_jA^{m-j}$. Очевидно, что имеют место равенства

$$y(t_{\alpha+j})=C_AA^jX(t_{\alpha-m}),\quad j=\overline{0,\beta},\quad X_{\alpha+\beta+1}=A^{\beta+m+1}X(t_{\alpha-m}),\quad \alpha,\ \beta\in\mathbb{N}. \tag{31}$$

Из (31) следует, что существование указанного взаимно однозначного соответствия возможно в том и только в том случае, когда найдётся число $\beta_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $\beta \geqslant \beta_0$ выполняется равенство

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_A \\ \dots \\ C_A A^\beta \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_A \\ \dots \\ C_A A^\beta \\ A^{\beta+m+1} \end{bmatrix},$$

которое, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_A \\ \dots \\ C_A A^{n-1} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_A \\ \dots \\ C_A A^{n-1} \\ A^n \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Последнее условие равносильно соотношению [20]

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C_A \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0. \tag{33}$$

Условие (33) равносильно условию (12). Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Необходимость. Предположим, что существует регулятор (5) такой, что при любых начальных условиях (4), (7) выполняются равенства (8). Тогда имеют место соотношения (18). Поэтому для матрицы (21) согласно лемме 2 выполняется тождество (22), которое запишем более подробно, учитывая обозначения (5):

$$\begin{vmatrix} I_n - \lambda A - \lambda B(\lambda)V_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)V_{12}(\lambda) \\ -\lambda V_{21}(\lambda) & I_{n_3} - \lambda V_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1, \tag{34}$$

где $V_{ik}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_1} \lambda^j V_{ik}^j$. Легко видеть, что если условие (13) нарушается, то тождество (34) выполняться не может. Необходимость условия (34) доказана.

Достаточность. Поскольку выполняется условие (13), то в силу следствия 8 найдутся матрицы $L_{11}(\lambda), L_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $L_{12}(\lambda), L_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r}[\lambda]$ такие, что

$$\begin{vmatrix} I_n - \lambda A - \lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{12}(\lambda) \\ -\lambda L_{21}(\lambda) & I_r - \lambda L_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1. \tag{35}$$

Пусть $L_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m_1} \lambda^k L_{ij}^k$, где L_{ij}^k — постоянные матрицы подходящих размеров. Построим регулятор

$$u(t_k) = \sum_{j=0}^{m_1} \big(L_{11}^j X(t_{k-j}) + L_{12}^j x_3(t_{k-j})\big), \quad x_3(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_1} \big(L_{21}^j X(t_{k-j}) + L_{22}^j x_3(t_{k-j})\big),$$

$$k = k_1, k_1+1, \dots, \quad k_1 = m + m_1, \tag{36}$$

где $x_3 \in \mathbb{R}^r$ — вспомогательная переменная. При замыкании системы (1), (2) регулятором (36) следует доопределить начальные условия, задав значения (7) (при $i=3$). В силу тождества (35) и лемм 1, 2 найдётся число $k_0 > 0$ такое, что какими бы ни были начальные условия (4), (7) (при $i=3$) замкнутой системы (15), (36), будут выполняться равенства (8). Теорема доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Необходимость. Предположим, что существует регулятор (6) такой, что при любых начальных условиях (4), (7) выполняются равенства (9). В этом случае имеют место соотношения (19), поэтому определитель матрицы, ассоциированной с характеристической матрицей системы (15), (16), (6), согласно лемме 2 тождественно равен единице. Запишем это тождество более подробно, учитывая обозначения (6):

$$\begin{vmatrix} I_n-\lambda A-\lambda B(\lambda)U_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda B(\lambda)U_{12}(\lambda) \\ -\lambda U_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_{n_4}-\lambda U_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1, \tag{37}$$

где $U_{ik}(\lambda)=\sum_{j=0}^{m_2}\lambda^j U_{ik}^j$. Легко видеть, что если условия (12) или (13) нарушаются, то тождество (37) выполняться не может. Необходимость условий (12), (13) доказана.

Достаточность. Предполагаем, что построены регулятор финитной стабилизации по состоянию (36) и поточечный наблюдатель (27), (28). Регулятор финитной стабилизации по выходу (6) определим следующими уравнениями:

$$u(t_k)=\sum_{j=0}^{m_1}\big(L_{11}^j x_{42}(t_{k-j})+L_{12}^j x_{41}(t_{k-j})\big), \quad x_{41}(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_1}\big(L_{21}^j x_{42}(t_{k-j})+L_{22}^j x_{41}(t_{k-j})\big),$$

$$x_{42}(t_{k+1})=Ax_{42}(t_k)+\sum_{j=0}^{m_3}M_{11}^j\sum_{i=0}^{m}C_i x_{42}(t_{k-j-i})+\sum_{j=0}^{m_3}M_{12}^j x_{43}(t_{k-j})-\sum_{j=0}^{m_3}M_{11}^j y(t_{k-j})+$$

$$+\sum_{j=0}^{m}B_j\sum_{i=0}^{m_1}\big(L_{11}^i x_{42}(t_{k-j-i})+L_{12}^i x_{41}(t_{k-j-i})\big),$$

$$x_{43}(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_3}M_{21}^j\sum_{i=0}^{m}C_i x_{42}(t_{k-j-i})+\sum_{j=1}^{m_3}M_{22}^j x_{43}(t_{k-j})-\sum_{j=0}^{m_3}M_{21}^j y(t_{k-j}),$$

$$k=k_2, k_2+1,\ldots, \quad k_2=m+\max\{m_1,\, m_3\}. \tag{38}$$

Здесь $x_{4k},\ k=\overline{1,3},$ — вспомогательные переменные.

Замечание. Соотношения (38) получены на основании (27), (30), (36) и соответствующих замен обозначений.

Для того чтобы показать, что построенный регулятор (38) является регулятором финитной стабилизации по выходу, докажем, что для системы (15), (16), замкнутой регулятором (38), выполняются условия леммы 2.

Выпишем матрицу, ассоциированную с характеристической матрицей системы (15), (38):

$$W(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n-\lambda A & -\lambda B(\lambda)L_{12}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & 0_{n\times l} \\ 0_{r\times n} & I_r-\lambda L_{22}(\lambda) & -\lambda L_{21}(\lambda) & 0_{r\times l} \\ \lambda M_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{12}(\lambda) & I_n-\lambda A-\lambda M_{11}(\lambda)C(\lambda)-\lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & -\lambda M_{12}(\lambda) \\ \lambda M_{21}(\lambda)C(\lambda) & 0_{l\times r} & -\lambda M_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_l-\lambda M_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Определив матрицу

$$\Gamma=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times r} & 0_{n\times n} & 0_{n\times l} \\ 0_{r\times n} & I_r & 0_{r\times n} & 0_{r\times l} \\ -I_n & 0_{n\times r} & I_n & 0_{n\times l} \\ 0_{l\times n} & 0_{l\times r} & 0_{l\times n} & I_l \end{bmatrix},$$

вычислим

$$\Gamma W(\lambda)\Gamma^{-1}=\begin{bmatrix} I_n-\lambda A-\lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{12}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & 0_{n\times l}\\ -\lambda L_{21}(\lambda) & I_r-\lambda L_{22}(\lambda) & -\lambda L_{21}(\lambda) & 0_{r\times l}\\ 0_{n\times n} & -0_{n\times r} & I_n-\lambda A-\lambda M_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda M_{12}(\lambda)\\ 0_{l\times n} & 0_{l\times r} & -\lambda M_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_l-\lambda M_{22}(\lambda)\end{bmatrix}.$$

Учитывая тождества (26) и (35), заключаем, что $\det W(\lambda)=\det\Gamma W(\lambda)\Gamma^{-1}\equiv 1$. Поэтому в силу леммы 2 найдётся число $k_0>0$ такое, что имеют место равенства (9). Теорема доказана.

6. ПРИМЕР

Пусть система (1)–(3) определяется матрицами

$$A_{11}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix},\quad A_{21}=[0\ \ 1],\quad A_{22}=1,$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}-1/2\\ -1\end{bmatrix},\quad B_{12}=0,\quad C_{11}=[-1\ \ -1],\quad C_{12}=0.$$

Тогда

$$e^{A_{11}t}=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \int\limits_0^1 e^{A_{11}(1-\tau)}\,d\tau=\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\quad C=[-1\ \ -1\ \ 0].$$

Нетрудно убедиться, что условия теоремы 3 для данной системы выполнены. Построим для неё регулятор финитной стабилизации по выходу (6). Согласно доказательству теоремы 3 на первом этапе необходимо иметь матрицы регулятора финитной стабилизации по состоянию (5) и поточечного наблюдателя (10). Эти матрицы определяются на основании следствия 8 так, чтобы выполнялись тождества (26), (35). Можно проверить, что эти тождества обеспечат матрицы

$$M_{11}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda\\ -3\\ 2\lambda\end{bmatrix},\quad M_{12}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda\\ 3\\ -2\lambda\end{bmatrix},\quad M_{21}(\lambda)=-1,\quad M_{22}(\lambda)=1,$$

$$L_{11}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & -3 & -3\end{bmatrix},\quad L_{12}(\lambda)=-1,\quad L_{21}(\lambda)=[-\lambda\ \ 3\ \ 3],\quad L_{22}(\lambda)=1. \tag{39}$$

Используя матрицы (39), выпишем регулятор (38):

$$u(t_k)=[0\ \ -3\ \ -3]x_{42}(t_k)+[1\ \ 0\ \ 0]x_{42}(t_{k-1})-x_{41}(t_k),$$

$$x_{41}(t_{k+1})=[0\ \ 3\ \ 3]x_{42}(t_k)+[-1\ \ 0\ \ 0]x_{42}(t_{k-1})+x_{41}(t_k),$$

$$x_{42}(t_{k+1})=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -3 & -5 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x_{42}(t_k)+\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}x_{42}(t_{k-1})+\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 0\end{bmatrix}x_{43}(t_k)+\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}x_{43}(t_{k-1})-$$

$$-\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 0\end{bmatrix}y(t_k)-\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}y(t_{k-1})-\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}x_{41}(t_k),$$

$$x_{43}(t_{k+1})=[-1\ \ -1\ \ 0]x_{42}(t_k)+x_{43}(t_k)-y(t_k),\quad k=3,4,\ldots \tag{40}$$

Для доказательства того, что полученный регулятор (40) является регулятором финитной стабилизации по выходу, можно воспользоваться леммой 2. Действительно, определитель матрицы

$$W(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & -\lambda & 0 & \lambda & -\lambda^2 & 3\lambda & 3\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2\lambda & \lambda & -\lambda^2 & 3\lambda & 3\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda^2 & -3\lambda & -3\lambda & 0 \\ \lambda^2 & \lambda^2 & 0 & \lambda & 1-\lambda-2\lambda^2 & -\lambda^2+2\lambda & 3\lambda & \lambda^2 \\ -3\lambda & -3\lambda & 0 & \lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 1+5\lambda & \lambda & -3\lambda \\ 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 0 & 0 & -2\lambda^2 & -\lambda-2\lambda^2 & 1 & 2\lambda^2 \\ -\lambda & -\lambda & 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

тождественно равен единице.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены критерии существования поточечного наблюдателя, регулятора финитной стабилизации по состоянию и регулятора финитной стабилизации по выходу. Доказательства этих критериев являются конструктивными в том смысле, что содержат методы построения соответствующих объектов.

Проверку выполнения условия (12) можно заменить проверкой условия (32), которое представляет собой сравнение рангов двух постоянных матриц. Рассуждая аналогично, можно показать, что проверку условия (13) можно заменить проверкой выполнения равенства рангов двух постоянных матриц:

$$\operatorname{rank}\left[B_A,\dots,A^{n-1}B_A\right]=\operatorname{rank}\left[B_A,\dots,A^{n-1}B_A,A^n\right],\quad B_A=\sum_{j=0}^{m}A^{m-j}B_j.$$

Можно показать, что критерии существования поточечного наблюдателя (теорема 1) и финитного регулятора по состоянию (теорема 2) при $m=0$ являются критериями (следуя терминологии [13, 14]) слабой финальной наблюдаемости и полной управляемости, записанными в иной форме. Распространение идей работ [13, 14] на случай $m\in\mathbb{N}$ позволяет переформулировать теорему 3 так: для того чтобы существовал финитный регулятор по выходу (6), необходимо и достаточно, чтобы система (1)–(3) была слабо финально наблюдаемой и полностью управляемой.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Гродненского государственного университета имени Янки Купалы в рамках реализации государственной программы научных исследований “Конвергенция–2025”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, С.Н. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем / С.Н. Васильев, А.И. Маликов // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. — Т. 1. — Казань : Фолиант, 2011. — С. 23–81.
2. Гурман, В.И. Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем / В.И. Гурман // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. — № 4. — С. 70–75.

3. Cassandras, C.G. Optimal control of a class of hybrid systems / C.G. Cassandras, D.L. Pepyne, Y. Wardi // IEEE Trans. Automat. Control. — 2001. — V. 46, № 3. — P. 398–415.
4. Savkin, A.V. Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems / A.V. Savkin, R.J. Evans. — Boston : Birkhäuser, 2002. — 153 p.
5. Бортаковский, А.С. Оптимизация траекторий переключаемых систем / А.С. Бортаковский, И.В. Урюпина // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2021. — № 5. — С. 33–51.
6. Бортаковский, А.С. Оптимизация переключающих систем / А.С. Бортаковский. — М. : Изд-во МАИ, 2016. — 119 с.
7. Максимов, В.П. Непрерывно-дискретные динамические модели / П.В. Максимов // Уфимск. мат. журн. — 2021. — Т. 13, № 3. — С. 97–106.
8. Батурин, В.А. Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами / В.А. Батурин, Е.В. Гончарова, Н.С. Малтугуева // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 5. — С. 53–61.
9. Габасов, Р. Оптимальное управление гибридными системами / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 6. — С. 2–52.
10. Agranovich, G. Observer for discrete-continuous LTI systems with continuous-time measurements / G. Agranovich // Funct. Differ. Equat. — 2011. — № 18 (1). — P. 3–12.
11. Branicky, M. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory / M. Branicky, V. Borkar, S. Mitter // IEEE Trans. Automat. Control. — 1998. — V. 43, № 1. — P. 31–45.
12. De la Sen, M. On the controller synthesis for linear hybrid systems / M. De la Sen // IMA J. Math. Control and Information. — 2001. — № 18 (4). — P. 503–529.
13. Марченко, В.М. Гибридные дискретно-непрерывные системы. Управляемость и достижимость / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 1. — С. 111–122.
14. Марченко, В.М. Наблюдаемость гибридных дискретно-непрерывных систем / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1421–1435.
15. Метельский, А.В. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 547–558.
16. Хартовский, В.Е. Управление спектром линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В.Е. Хартовский // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 1. — С. 23–43.
17. Хартовский, В.Е. Проектирование асимптотических наблюдателей для линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В.Е. Хартовский // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртск. гос. ун-та. — 2023. — Т. 60. — С. 114–136.
18. Фомичев, В.В. Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем / В.В. Фомичев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1516–1521.
19. Хартовский, В.Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 375–390.
20. Метельский, А.В. Выделение идентифицируемой и управляемой компонент состояния динамической системы с запаздыванием / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 6. — С. 972–984.

REGULATORS OF FINITE STABILIZATION FOR HYBRID LINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

V. E. Khartovskii

Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus
e-mail: hartows@mail.ru

For hybrid linear autonomous continuous-discrete systems, methods for designing two types of regulators that provide finite stabilization are proposed. The implementation of one of them, a regulators for finite stabilization by state, is based on knowledge of the values of the control system solution at discrete moments of time, multiples of the quantization step. For this purpose, an observer has been built that makes it possible to obtain the necessary solution values based on the observed output signal in real time and with zero error. The second type of regulator — the regulator of finite stabilization by output — uses the observed output signal as feedback, and its design is a modification of the finite state stabilization regulator by state by including the above observer in its circuit.

Keywords: linear hybrid continuous-discrete system, observed output signal, controller, observer, finite stabilization

FUNDING

This work was carried out with financial support from Yanka Kupala State University of Grodno within the framework of the State Program of Scientific Research "Konvergencia–2025"

REFERENCES

1. Vasil'yev, S.N. and Malikov, A.I., On some results on the stability of switchable and hybrid systems, in *Aktual'nyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy. K 20-letiyu IMM KazNTS RAN*, Kazan: Foliant, 2011. vol. 1, pp. 23–81.
2. Gurman, V.I., Models and optimality conditions for hybrid controlled systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2004, vol. 43, no. 4, pp. 560–565.
3. Cassandras, C.G., Pepyne, D.L., and Wardi, Y., Optimal control of a class of hybrid systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2001, vol. 46, no. 3, pp. 398–415.
4. Savkin, A.V. and Evans, R.J., *Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems*, Boston: Birkhäuser, 2002.
5. Bortakovsky, A.S. and Uryupin, I.V., Optimization of switchable systems' trajectories, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2021, vol. 60, no. 5, pp. 701–718.
6. Bortakovskiy, A.S., *Optimizatsiya pereklyuchayushchikh sistem* (Optimization of Switching Systems), Moscow: Izd-vo MAI, 2016.
7. Maksimov, V.P., Continuous-discrete dynamic models, *Ufa Math. J.*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 95–103.
8. Baturin, V.A., Goncharova E.V., and Maltugueva, N.S., Iterative methods for solution of problems of optimal control of logic-dynamic systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2010, vol. 49, no. 5, pp. 731–739.
9. Gabasov, R., Kirillova, F.M., and Paulianok, N.S., Optimal control of some hybrid systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2010, no. 49, pp. 872–882.
10. Agranovich, G., Observer for discrete-continuous LTI systems with continuous-time measurements, *Funct. Differ. Equat.*, 2011, no. 18 (1), pp. 3–12.
11. Branicky, M., Borkar, V., and Mitter S., A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 43, no. 1, pp. 31–45.
12. De la Sen, M., On the controller synthesis for linear hybrid systems, *IMA J. of Math. Control and Information*, 2001, no. 18 (4), pp. 503–529.
13. Marchenko, V.M., Hybrid discrete-continuous systems. Controllability and reachability, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 112–125.
14. Marchenko, V.M., Observability of hybrid discrete-continuous systems, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1389–1404.
15. Metel'skii, A.V. and Khartovskii, V.E., Synthesis of damping controllers for the solution of completely regular differential-algebraic delay systems, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 539–550.
16. Khartovskii, V.E., Controlling the spectrum of linear completely regular differential-algebraic systems with delay, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2020, vol. 59, no. 1, pp. 19–38.
17. Khartovskii, V.E., Designing asymptotic observers for linear completely regular differential algebraic systems with delay, *Izv. In-ta Matematiki i Informatiki Udmurtsk. Gos. Un-ta*, 2022, vol. 60, pp. 114–136.
18. Fomichev, V.V., Sufficient conditions for the stabilization of linear dynamical systems differential equations, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1512–1518.
19. Khartovskii, V.E., Spectral reduction of linear systems of the neutral type, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 366–381.
20. Metel'skii, A.V., Separation of identifiable and controllable component of the state of a dynamic system with delay, *Differ. Equat.*, 1992, vol. 28, no. 6, pp. 972–984.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1407–1421

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63+517.972

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ ДЛЯ ОПЕРАТОРА p-ЛАПЛАСА

© 2024 г. Д. Е. Апушкинская[1], А. А. Новикова[2], С. И. Репин[3]

[1,2,3]*Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва*
[3]*Санкт-Петербургское отделение*
Математического института имени В.А. Стеклова РАН
e-mail: [1]apushkinskaya@gmail.com, [2]aanovikova01@gmail.com, [3]rpnspb@gmail.com

Поступила в редакцию 02.07.2024 г., после доработки 02.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Получены функциональное тождество и оценки, выполняющиеся для мер отклонений от точных решений задачи с препятствием для оператора p-Лапласа для любых функций из соответствующего (энергетического) функционального класса, который содержит обобщённое решение задачи. При этом не были использованы какие-либо специальные свойства аппроксимаций или численных процедур, а также информация о точной конфигурации коинцидентного множества. Правые части тождества и оценок содержат только известные функции и могут быть явно вычислены, а левые части представляют собой определённую меру отклонения приближённого решения от точного. Найденные функциональные соотношения позволяют оценивать погрешность любых аппроксимаций задачи независимо от способа их получения. Кроме того, они позволяют сравнивать точные решения задач с различными данными, что даёт возможность оценивать ошибки математических моделей, например тех, что возникают при упрощении коэффициентов дифференциального уравнения.

Ключевые слова: задача со свободными границами, оператор p-Лапласа, апостериорные оценки

DOI: 10.31857/S0374064124100099, EDN: JTAWRK

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим эллиптическую задачу с препятствием для оператора p-Лапласа $(1<p<+\infty)$, сформулированную в виде задачи минимизации функционала

$$J[v]=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p-fv\right)dx \tag{1}$$

на замкнутом выпуклом множестве

$$\mathbb{K}=\left\{v\in W_p^1(\Omega)\colon v|_{\partial\Omega}=0,\ \ v\geqslant\phi\ \text{ в }\ \Omega\right\}.$$

Здесь и далее $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная связная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, $L^p(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$ — пространства Лебега и Соболева соответственно. Функция $\phi\in C^{\max\{2,p\}}$, удовлетворяющая условию $\phi\leqslant 0$ на $\partial\Omega$, задаёт гладкое препятствие; предполагается, что $f\in L^q(\Omega)$, а показатели p и q удовлетворяют соотношению $1/p+1/q=1$. Обозначения $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ и $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ используются для норм как скалярных, так и векторных функций в пространствах $L^p(\Omega)$ и $L^q(\Omega)$ соответственно (их смысл будет понятен из контекста).

Задача (1) принадлежит к классу задач с неизвестными свободными границами, которые изучаются в теории вариационных неравенств (см. работы [1–4] и цитированную в них литературу), и имеет множество приложений. Например, в сингулярном случае ($1<p<2$) такая задача возникает при построении модели Гренландского ледяного щита, когда неизвестной функцией является толщина ледяного покрова, а в качестве препятствия выступает рельеф подстилающей породы (см. [5]). Вероятностная интерпретация задачи (1) изложена в работе [6], где решение задачи с препятствием для оператора p-Лапласа при $2<p<+\infty$ интерпретируется как предельное значение дискретной игры “в перетягивание каната” при наличии шума.

Известно (см., например, [1; 2, гл. 1]), что задача (1) имеет единственное решение u, которое удовлетворяет п.в. в Ω соотношениям

$$\Delta_p u+f\leqslant 0,\quad u\geqslant\phi,\quad (\Delta_p u+f)(u-\phi)=0,$$

где $\Delta_p u:=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ — оператор p-Лапласа и $1<p<+\infty$. В общем случае область Ω разделяется на два подмножества: контактное (или коинцидентное) $\Omega^u_\phi=\{x\in\Omega\colon u(x)=\phi(x)\}$ и бесконтактное Ω^u_0, в котором u является решением уравнения $\Delta_p u+f=0$. Граница между этими подмножествами заранее не известна, что порождает существенные трудности как для качественного, так и для количественного анализа, связанные не только с наличием свободной границы, но и с самим оператором Δ_p, который при $p\neq 2$ не является равномерно эллиптическим. В тех точках, где градиент u обращается в нуль, оператор становится сингулярным при $1<p<2$ и вырожденным при $2<p<+\infty$.

Существование и качественные свойства решения задачи (1) изучались многими авторами. В подавляющем большинстве работ были исследованы оптимальные регулярности минимайзеров и описаны свойства свободных границ. Наиболее полно изучен случай $p=2$, т.е. классическая задача с препятствием. При $p\in(1,2)\cup(2,+\infty)$ регулярность решений исследована в работах [3, 4]. Различные свойства свободных границ при $p>2$ были изучены в [7, 8], при $1<p<2$ — в статье [9].

С точки зрения количественного анализа краевых задач наиболее важными являются вопросы построения последовательностей приближённых решений, сходящихся к точному, и контроля точности этих решений. Проблемы сходимости аппроксимаций для задач с препятствиями изучаются достаточно давно, начиная с работ Р. Фалка, например [10], и других авторов. В последнее время большое внимание уделяется апостериорным методам контроля точности приближённых решений дифференциальных уравнений. В отличие от априорных оценок асимптотического типа они позволяют оценить точность конкретного приближённого решения и генерируют индикаторы погрешности, использующиеся в современных адаптивных методах. Существует несколько различных подходов к формулировке целей апостериорного контроля и получению соответствующих оценок (см., например, статью [11] и приведённую в ней библиографию).

В данной работе получены апостериорные тождества и оценки так называемого функционального типа, при выводе которых использованы только методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений и не использованы специальные свойства аппроксимаций или точных решений. Основой для получения таких оценок являются специальные тождества, левая часть которых представляет собой меру отклонения приближенного решения от точного, а правая содержит данные задачи и известное приближенное решение. Такое тождество может быть использовано для оценки результатов численного эксперимента сразу после его завершения. Поэтому тождество естественно назвать апостериорным.

Для широкого круга задач математической физики апостериорные тождества и оценки функционального типа исследованы в работах [12–15]. В контексте стационарных и нестационарных задач с препятствием оценки такого рода ранее рассматривались в [16–18].

Важно подчеркнуть, что аналогичные оценки получены в настоящей статье без привлечения специальных свойств аппроксимаций или численных процедур, более того, точное решение и коинцидентное множество точного решения задачи не входят в явном виде в основное апостериорное тождество. Основное апостериорное тождество представлено в теореме 1. Оно верно для любой функции $v \in \mathbb{K}$, но содержит некоторые ограничения на другую переменную $\mathbf{y}^*$ (которую можно рассматривать как аппроксимацию потока). Это ограничение снимается далее в теоремах 2 и 3, которые относятся к случаям $p \geqslant 2$ и $p \in (1,2]$ соответственно. Они устанавливают полностью вычисляемые мажоранты для мер отклонений от решения. Мажоранты неотрицательны, обращаются в нуль только на точном решении и непрерывны относительно сходимости в базовых энергетических пространствах.

2. ТОЖДЕСТВО ДЛЯ МЕРЫ ОШИБКИ

Получим основное апостериорное тождество (см. теорему 1) для оценки отклонений приближённых решений вариационной задачи (1) от точного в соответствии с абстрактной теорией, развитой в [12, гл. 2; 13] для класса вариационных задач с функционалами вида

$$J[v] := G[\Lambda v] + F[v],$$

где G и F — выпуклые полунепрерывные снизу функционалы, а Λ — ограниченный линейный оператор. В рассматриваемом нами случае $\Lambda := \nabla$ и оператор действует из пространства $V := \{v \in W_p^1(\Omega) \colon v|_{\partial\Omega} = 0\}$ в пространство $Y := L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, а функционалы $G \colon Y \to \mathbb{R}$ и $F \colon V \to \mathbb{R}$ определяются формулами

$$G[\mathbf{y}] := \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\mathbf{y}|^p\,dx, \quad F[v] := -\int\limits_\Omega fv\,dx + \chi_{\mathbb{K}}(v), \quad \chi_{\mathbb{K}}(v) := \begin{cases} 0, & v \in \mathbb{K}, \\ +\infty, & v \notin \mathbb{K}. \end{cases}$$

Отметим, что функционал G коэрцитивен, неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} = 0$.

Задача минимизации функционала $J(v)$ на V имеет двойственную вариационную формулировку, которая состоит в максимизации функционала

$$I^*[\mathbf{y}^*] := -G^*[\mathbf{y}^*] - F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] \tag{2}$$

на пространстве $Y^* = L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$, где функционалы $G^* \colon Y^* \to \mathbb{R}$ и $F^* \colon V^* \to \mathbb{R}$ ($V^* := \mathring{W}_q^{-1}$) являются преобразованиями Юнга–Фенхеля от G и F соответственно, а $\Lambda^* \colon Y^* \to V^*$ является сопряжённым к Λ оператором, т.е. $(\mathbf{y}^*, \Lambda v) = \langle \Lambda^*\mathbf{y}^*, v\rangle$, где $(\cdot,\cdot)$ обозначает спаривание пространств Y и Y^*, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — спаривание пространств V и V^*. В нашем случае $\Lambda^* = -\operatorname{div}$. Заметим, что если $v \in L^p(\Omega) \supset V$, а $v^* \in L^q(\Omega) \subset V^*$, то $\langle v^*, v\rangle$ можно представить в виде интеграла Лебега по области Ω.

В дальнейшем будем обозначать через $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{y}^*$ соответственно точное и приближённое решения двойственной задачи (2). Нетрудно показать, что

$$G^*[\mathbf{y}^*] = \frac{1}{q}\int\limits_\Omega |\mathbf{y}^*|^q\,dx = \frac{1}{q}\|\mathbf{y}^*\|^q_{q,\Omega}.$$

Согласно определению функционал

$$F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] = \sup_{v\in V}\bigl\{-\langle\Lambda^*\mathbf{y}^*, v\rangle - F(v)\bigr\}.$$

Пусть $\mathbf{y}^* \in H_q(\Omega, \mathrm{div}) := \{\mathbf{y}^* \in Y^* \colon \ \mathrm{div}\,\mathbf{y}^* \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$. Тогда сопряжённый функционал можно представить в виде

$$F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] = \sup_{v\in\mathbb{K}} \left\{ \int_\Omega (f + \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*) v\, dx \right\}.$$

Пусть $\hat{v} \in \mathbb{K}$ — заданная функция и $w \in V^+(\Omega) := \{w \in V(\Omega) \colon \ w \geqslant 0$ п.в. в $\Omega\}$. Тогда $v + w \in \mathbb{K}$ и имеет место оценка снизу

$$F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] \geqslant \int_\Omega (f + \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*)\hat{v}\, dx + \sup_{w\in V^+(\Omega)} \left\{ \int_\Omega (f + \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*) w\, dx \right\}. \tag{3}$$

Ясно, что супремум в правой части неравенства (3) будет конечен только в том случае, когда

$$\mathbf{y}^* \in Q^*_{\leqslant 0} := \{\mathbf{y}^* \in H_q(\Omega, \mathrm{div}) \colon \ f + \mathrm{div}\,\mathbf{y}^* \leqslant 0 \ \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Таким образом, имеем

$$F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] = \begin{cases} \int_\Omega (f + \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*)\phi\, dx, & \text{если } \mathbf{y}^* \in Q^*_{\leqslant 0}, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из соотношения двойственности $J[u] = I^*[\mathbf{p}^*]$ и результатов общей теории [12] следует, что для любых функций $v \in V$ и $\mathbf{y}^* \in Y^*$ выполняются равенства

$$J[v] - J[u] = J[v] - I^*[\mathbf{p}^*] = \mathcal{D}_G[\nabla v, \mathbf{p}^*] + \mathcal{D}_F[v, \mathrm{div}\,\mathbf{p}^*], \tag{4}$$

$$I^*[\mathbf{p}^*] - I^*[\mathbf{y}^*] = J[u] - I^*[\mathbf{y}^*] = \mathcal{D}_G[\nabla u, \mathbf{y}^*] + \mathcal{D}_F[u, \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*]. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{D}_G$ и $\mathcal{D}_F$ — так называемые *составные функционалы*, определяемые формулами

$$\mathcal{D}_G[\nabla v, \mathbf{y}^*] := G[\nabla v] + G^*[\mathbf{y}^*] - (\mathbf{y}^*, \nabla v), \tag{6}$$

$$\mathcal{D}_F[v, \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*] := F[v] + F^*[\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*] - \langle \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*, v \rangle. \tag{7}$$

Из соотношений (4), (5) следует апостериорное тождество [12, гл. 2]

$$\mathcal{D}_G[\nabla v, \mathbf{p}^*] + \mathcal{D}_G[\nabla u, \mathbf{y}^*] + \mathcal{D}_F[v, \mathrm{div}\,\mathbf{p}^*] + \mathcal{D}_F[u, \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*] = \mathcal{D}_G[\nabla v, \mathbf{y}^*] + \mathcal{D}_F[v, \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*], \tag{8}$$

справедливое для любых $v \in \mathbb{K}$ и $\mathbf{y}^* \in Y^*$.

Найдём явный вид слагаемых в (8). Нетрудно видеть, что в силу (6) справедливы равенства

$$\mathcal{D}_G[\nabla u, \mathbf{y}^*] = \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q - \nabla u \cdot \mathbf{y}^* \right) dx, \tag{9}$$

$$\mathcal{D}_G[\nabla v, \mathbf{p}^*] = \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p + \frac{1}{q}|\mathbf{p}^*|^q - \nabla v \cdot \mathbf{p}^* \right) dx, \tag{10}$$

$$\mathcal{D}_G[\nabla v, \mathbf{y}^*] = \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p + \frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q - \nabla v \cdot \mathbf{y}^* \right) dx. \tag{11}$$

Если $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$, то согласно (7) имеем

$$\mathcal{D}_F[v,\operatorname{div}\mathbf{y}^*]=\int\limits_\Omega\big(-fv+(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)\phi-v(\operatorname{div}\mathbf{y}^*)\big)\,dx=\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-v)\,dx, \tag{12}$$

$$\mathcal{D}_F[u,\operatorname{div}\mathbf{y}^*]=\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-u)\,dx. \tag{13}$$

Далее, так как $\mathcal{D}_F[u,\operatorname{div}\mathbf{p}^*]=0$, то $\mathcal{D}_F[v,\operatorname{div}\mathbf{p}^*]$ можно записать как

$$\mathcal{D}_F[v,\operatorname{div}\mathbf{p}^*]=\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{p}^*)(\phi-v)\,dx-\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{p}^*)(\phi-u)\,dx=\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{p}^*)(u-v)\,dx. \tag{14}$$

Учитывая, что решения u прямой и $\mathbf{p}^*$ двойственной задач связаны друг с другом соотношениями $\mathbf{p}^*=\nabla u|\nabla u|^{p-2}$ и $|\nabla u|^p=|\mathbf{p}^*|^q$, будем иметь

$$\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{p}^*)(u-v)\,dx=\int\limits_\Omega(f+\Delta_p u)(u-v)\,dx.$$

Обозначим

$$\mu(v):=\lambda(v)+\int\limits_\Omega(f+\Delta_p u)(u-v)\,dx, \tag{15}$$

$$\mu^*(\mathbf{y}^*):=\lambda^*(\mathbf{y}^*)+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-u)\,dx, \tag{16}$$

где

$$\lambda(v):=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p+\frac{1}{q}|\nabla u|^p-\nabla v\cdot\nabla u|\nabla u|^{p-2}\right)dx,$$

$$\lambda^*(\mathbf{y}^*):=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\mathbf{p}^*|^q+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\nabla u\cdot\mathbf{y}^*\right)dx.$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega(f+\Delta_p u)(u-v)\,dx=\int\limits_{\Omega^u_\phi}(f+\Delta_p u)(u-v)\,dx=\int\limits_{\Omega^u_\phi}W_\phi(u-v)\,dx, \tag{17}$$

т.е. второе слагаемое в (15) можно записать в виде интеграла с весом $W_\phi=f+\Delta_p\phi$. Поскольку на множестве Ω^u_ϕ выполняются неравенства $W_\phi\leqslant 0$ и $v\geqslant u$, интеграл (17) неотрицателен.

Меру $\lambda^*(\mathbf{y}^*)$ можно записать в виде

$$\lambda^*(\mathbf{y}^*)=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\mathbf{p}^*|^q+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\gamma(x)\mathbf{p}^*\cdot\mathbf{y}^*\right)dx,$$

где

$$\gamma(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in\Omega\cap\{|\nabla u|=0\},\\ |\mathbf{p}^*|^{q-2}, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тождество (8) вместе с (9)–(16) приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Для любых функций* $v\in\mathbb{K}$ *и* $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$ *выполняется тождество*

$$\mu(v)+\mu^*(\mathbf{y}^*)=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\nabla v\cdot\mathbf{y}^*\right)dx+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-v)\,dx. \tag{18}$$

Прежде всего отметим, что выражения в правой части равенства (18) зависят только от известных функций v и $\mathbf{y}^*$ и от данных задачи, т.е. являются полностью вычисляемыми.

Левая часть (18) содержит меры μ и μ^*, которые неотрицательны и обращаются в нуль, если $v=u$ и $\mathbf{y}^*=\mathbf{p}^*$ соответственно. Входящие в них меры λ и λ^* являются интегральными характеристиками отклонений произвольных приближённых решений $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$ от u и $\mathbf{p}^*$ соответственно. При $p=q=2$ меры λ и λ^* представимы в виде норм

$$\lambda(v)=\frac{1}{2}\|\nabla(u-v)\|^2_{2,\Omega},\qquad \lambda^*(\mathbf{y}^*)=\frac{1}{2}\|\mathbf{p}^*-\mathbf{y}^*\|^2_{2,\Omega},$$

причём это единственный случай, когда возможно такое простое представление.

Нетрудно видеть, что если $\Omega^u_\phi\subset\Omega^v_\phi:=\{x\in\Omega\colon v(x)=\phi(x)\}$, т.е. если точное контактное множество содержится внутри приближённого (определённого с помощью функции v), то интеграл (17) равен нулю. Если, напротив, $\Omega^v_\phi\subset\Omega^u_\phi$, то

$$\int\limits_{\Omega^u_\phi}W_\phi(u-v)\,dx=\int\limits_{\Omega^u_\phi\setminus\Omega^v_\phi}W_\phi(\phi-v)\,dx\geqslant 0.$$

Поэтому второе слагаемое в (15) можно рассматривать как некоторую интегральную меру того, насколько хорошо множество Ω^v_ϕ аппроксимирует множество Ω^u_ϕ. В свою очередь, второе слагаемое в (16) можно считать характеристикой, указывающей на "неверное" поведение $\mathbf{y}^*$ на множестве Ω^u_0 (на этом множестве поток должен удовлетворять уравнению $\operatorname{div}\mathbf{p}^*+f=0$). К сожалению, эти меры весьма слабы и не позволяют оценить насколько точно свободная граница $\partial\Omega^u_\phi$ воспроизводится с помощью приближённого решения. Этот факт показывает ограниченность прямых вариационных методов в отношении реконструкции свободных границ (более подробное обсуждение этого вопроса см. в работах [15, 17]).

Меры μ и μ^* являются естественными характеристиками близости приближённых решений к точным. Мера μ задаёт систему локальных окрестностей (локальную топологию) вблизи решения u. Она не является симметричной относительно замены u на v и наоборот и, вообще говоря, не порождает метрику. Мера μ^* определяет локальную топологию в окрестности $\mathbf{p}^*$ и обладает аналогичными свойствами.

В частном случае $p=q=2$ тождество (18) принимает вид

$$\frac{1}{2}\|\nabla(u-v)\|^2_{2,\Omega}+\frac{1}{2}\|\mathbf{p}^*-\mathbf{y}^*\|^2_{2,\Omega}+\int\limits_{\Omega^u_\phi}(f+\Delta_p\phi)(\phi-v)\,dx+\int\limits_{\Omega^u_0}(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-u)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\|\nabla v-\mathbf{y}^*\|^2_{2,\Omega}+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-v)\,dx$$

и совпадает с ранее полученным в [15] тождеством для классической задачи с препятствием для оператора Лапласа.

Тождество (18) даёт простое выражение для вычисления полной меры ошибки, выполняемое для всех $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$. Однако условие $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$ содержит дифференциальное неравенство, выполнение которого может создавать трудности при использовании (18) в практических вычислениях. Далее обсудим, как можно преодолеть этот недостаток и расширить допустимое множество для приближённых решений $\mathbf{y}^*$ двойственной задачи (2).

3. АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ $p>2$

Для получения оценок нам понадобится алгебраическое неравенство [14]

$$\frac{1}{\alpha}|\mathbf{a}|^{\alpha}+\frac{1}{\alpha^*}|\mathbf{b}|^{\alpha}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\mathbf{a}|^{\alpha-2}\geqslant c(\alpha)|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^{\alpha},\quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha\geqslant 2, \tag{19}$$

где $c(\alpha)=(1+\zeta)^{2-\alpha}/\alpha$, ζ — корень уравнения $\zeta^{\alpha-1}+\zeta(1-\alpha)-2+\alpha=0$. Из (19) следует, что при $p>2$ для меры λ имеет место оценка

$$\lambda(v)\geqslant c(p)\|\nabla(v-u)\|^p_{p,\Omega}\quad \text{для любой } v\in V. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть $2<p<+\infty$. Для любых функций $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{z}^*\in H_q(\Omega,\operatorname{div})$ верны оценки*

$$\left(c(p)-\epsilon^p\frac{C^p_{F_\Omega}}{p}\right)\|\nabla(u-v)\|^p_{p,\Omega}+\int\limits_{\Omega^u_\phi}W_\phi(u-v)\,dx+\lambda^*(\mathbf{z}^*)\leqslant\mathcal{D}_G(\nabla v,\mathbf{z}^*)+\frac{1}{q\epsilon^q}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^q_{q,\Omega} \tag{21}$$

и

$$\mu(v)+\epsilon^p\frac{C^p_{F_\Omega}}{p}\|\nabla(u-v)\|^p_{p,\Omega}+\lambda^*(\mathbf{z}^*)\geqslant\mathcal{D}_G(\nabla v,\mathbf{z}^*)-\frac{1}{q\epsilon^q}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^q_{q,\Omega}, \tag{22}$$

где $c(p)$ — константа из неравенства (20), C_{F_Ω} — константа из обобщённого неравенства Фридрихса (27), параметр ϵ выбирается так, чтобы $0<\epsilon\leqslant(pc_p)^{1/p}/C_{F_\Omega}$ в (21) и $\epsilon>0$ в (22), вес $W_\phi=f+\Delta_p\phi$, а $R_f(\mathbf{z}^*)$ определяется соотношением (26).

Доказательство. Тождество (18) можно записать как

$$\mu(v)+\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\mathbf{p}^*|^q+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\nabla u\cdot\mathbf{y}^*\right)dx=$$

$$=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\nabla v\cdot\mathbf{y}^*\right)dx+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(u-v)\,dx. \tag{23}$$

Пусть $\mathbf{z}^*\in H_q(\Omega,\operatorname{div})$. После несложных алгебраических преобразований в (23) имеем

$$\mu(v)+\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\mathbf{p}^*|^q+\frac{1}{q}|\mathbf{z}^*|^q-\nabla u\cdot\mathbf{z}^*\right)dx=$$

$$=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p+\frac{1}{q}|\mathbf{z}^*|^q-\nabla v\cdot\mathbf{z}^*\right)dx+\int\limits_\Omega(\mathbf{z}^*-\mathbf{y}^*)\cdot\nabla(v-u)\,dx+$$

$$+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx+\int\limits_\Omega\operatorname{div}(\mathbf{z}^*-\mathbf{y}^*)(v-u)\,dx.$$

Используя интегрирование по частям и тот факт, что $v=u$ на $\partial\Omega$, получаем

$$\mu(v)+\lambda^*(\mathbf{z}^*)=\mathcal{D}_G(\nabla v,\mathbf{z}^*)+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx. \tag{24}$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx=\int\limits_{\Omega^v_0}(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx+\int\limits_{\Omega^v_\phi}(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\|f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*\|_{q,\Omega^v_0}\|u-v\|_{p,\Omega^v_0}+\|(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)_+\|_{q,\Omega^v_\phi}\|u-v\|_{p,\Omega^v_\phi}\leqslant\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}\|u-v\|_{p,\Omega}, \tag{25}$$

где функция R_f определена соотношением

$$R_f(\mathbf{z}^*) := \begin{cases} f + \operatorname{div}\mathbf{z}^* & \text{на } \Omega_0^v, \\ (f + \operatorname{div}\mathbf{z}^*)_+ & \text{на } \Omega_\phi^v. \end{cases} \tag{26}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (24) ввиду неравенства Юнга:

$$\int\limits_\Omega (f + \operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u - v)\,dx \leqslant \frac{1}{q\,\epsilon^q}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}^q + \epsilon^p\frac{1}{p}\|u - v\|_{p,\Omega}^p, \quad \epsilon > 0.$$

Для $w \in V$ имеет место обобщённое неравенство Фридрихса

$$\|w\|_{p,\,\Omega} \leqslant C_{F_\Omega}\|\nabla w\|_{p,\,\Omega}, \tag{27}$$

используя которое, приходим к оценке

$$\int\limits_\Omega (f + \operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u - v)\,dx \leqslant \frac{1}{q\epsilon^q}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}^q + \epsilon^p\frac{C_{F_\Omega}^p}{p}\|\nabla(u - v)\|_{p,\Omega}^p. \tag{28}$$

Оценки (21) и (22) следуют из (24) и (28). Теорема доказана.

4. АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ $p \in (1, 2]$

Случай $p \in (1, 2]$ существенно отличается от $p > 2$, так как здесь нельзя использовать (20). Эту трудность можно обойти, если перейти к рассмотрению аппроксимаций двойственной переменной и получить оценку нормы $\|\mathbf{p}^* - \mathbf{z}^*\|_{q,\,\Omega}$ для $\mathbf{z}^* \in H_q(\Omega, \operatorname{div})$.

Из (19) следует, что при $p \in (1, 2]$ для меры λ^* справедлива оценка

$$\lambda^*(\mathbf{y}^*) \geqslant c(q)\|\mathbf{y}^* - \mathbf{p}^*\|_{q,\Omega}^q \quad \text{для любой } \mathbf{y}^* \in Y^*. \tag{29}$$

Далее нам потребуется алгебраическое неравенство [14]

$$\big|\,|\mathbf{b}|^{\alpha-2}\mathbf{b} - |\mathbf{a}|^{\alpha-2}\mathbf{a}\big| \leqslant \kappa_\alpha|\mathbf{b} - \mathbf{a}|(|\mathbf{b}|^{\alpha-2} + |\mathbf{a}|^{\alpha-2}) \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \geqslant 2, \tag{30}$$

где

$$\kappa_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \in [2, 3], \\ (\alpha - 1)/2, & \text{если } \alpha > 3. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть $1 < p \leqslant 2$, $f \in L^r(\Omega)$ и $\Delta_p\phi \in L^r(\Omega)$, $r > qn$. Тогда для любых функций $v \in \mathbb{K}$ и $\mathbf{z}^* \in H_q(\Omega, \operatorname{div})$ справедлива оценка*

$$\mu(v) + \left(c(q) - C_{F_\Omega}^q\frac{\kappa_q\epsilon^q}{q}S(\mathbf{z}^*, f, \phi)\right)\|\mathbf{z}^* - \mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}^q \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{D}_G[\nabla v, \mathbf{z}^*] + C_{F_\Omega}\|\nabla v - |\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*\|_{p,\,\Omega}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega} + \frac{\kappa_q}{p\epsilon^p}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}^p S(\mathbf{z}^*, f, \phi), \tag{31}$$

где $c(q)$ и κ_q — константы из неравенств (29) и (30) соответственно, C_{F_Ω} — константа из обобщённого неравенства Фридрихса (27), параметр ϵ выбирается так, чтобы

$$0 < \epsilon \leqslant \bar{\epsilon} := C_{F_\Omega}\left(\frac{c(q)q}{\kappa_q S(\mathbf{z}^*, f, \phi)}\right),$$

а $S(\mathbf{z}^*, f, \phi)$ вычисляется по формуле

$$S(\mathbf{z}^*, f, \phi) := \|\mathbf{z}^*\|_{q,\,\Omega}^{q-2} + C_{F_\Omega}^{q-2}(2\|f\|_{q,\,\Omega} + \|\Delta_p\phi\|_{q,\,\Omega})^{q-2}.$$

Доказательство. Тождество (24) и оценка (25) приводят к соотношению

$$\mu(v)+\lambda^*(\mathbf{z}^*)\leqslant \mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{z}^*]+C_{F\Omega}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}\|\nabla(u-v)\|_{p,\Omega}. \tag{32}$$

Оценим последнюю норму в правой части (32) следующим образом:

$$\|\nabla(u-v)\|_{p,\Omega}\leqslant\|\nabla v-|\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*\|_{p,\,\Omega}+\||\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*-|\mathbf{p}^*|^{q-2}\mathbf{p}^*\|_{p,\,\Omega}. \tag{33}$$

Напомним, что если $1<p\leqslant 2$, то $q\geqslant 2$. Положив в (30) $\alpha=q$, $\mathbf{a}=\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{b}=\mathbf{z}^*$, получим оценку

$$||\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*-|\mathbf{p}^*|^{q-2}\mathbf{p}^*|\leqslant\kappa_q|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*|(|\mathbf{z}^*|^{q-2}+|\mathbf{p}^*|^{q-2}).$$

Отсюда, с учётом интегральных неравенств Минковского и Гёльдера, приходим к соотношению

$$\||\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*-|\mathbf{p}^*|^{q-2}\mathbf{p}^*\|_{p,\,\Omega}\leqslant\kappa_q\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}(\|\mathbf{z}^*\|^{q-2}_{q,\,\Omega}+\|\mathbf{p}^*\|^{q-2}_{q,\,\Omega}). \tag{34}$$

Известно [9], что если f и $\Delta_p\phi$ принадлежат пространству $L^r(\Omega)$ при $r>qn$, то решение задачи удовлетворяет уравнению

$$\Delta_p u=f+(\Delta_p\phi-f)\hat{\chi}\quad \text{п.в. в } \Omega, \tag{35}$$

где

$$\hat{\chi}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } u(x)=\phi(x),\\ 0, & \text{если } u(x)>\phi(x).\end{cases}$$

Переписав (35) в слабой форме

$$\int\limits_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla w\,dx=\int\limits_\Omega[f+(\Delta_p\phi-f)\hat{\chi}]w\,dx,\quad w\in V,$$

приходим к оценке

$$\|\nabla u\|^{p-1}_{p,\,\Omega}\leqslant C_{F\Omega}(2\|f\|_{q,\,\Omega}+\|\Delta_p\phi\|_{q,\,\Omega})$$

и, следовательно, к неравенству

$$\|\nabla u\|^{p}_{p,\,\Omega}\leqslant C^q_{F\Omega}(2\|f\|_{q,\,\Omega}+\|\Delta_p\phi\|_{q,\,\Omega})^q.$$

Таким образом, учитывая соотношение $|\nabla u|^p=|\mathbf{p}^*|^q$, получаем априорную оценку

$$\|\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}\leqslant C_{F\Omega}(2\|f\|_{q,\,\Omega}+\|\Delta_p\phi\|_{q,\,\Omega}). \tag{36}$$

Из (34) и (36) следует, что

$$\||\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*-|\mathbf{p}^*|^{q-2}\mathbf{p}^*\|_{p,\,\Omega}\leqslant\kappa_q\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}S(\mathbf{z}^*,f,\phi). \tag{37}$$

Оценив снизу второе слагаемое в левой части (32) с помощью (29), из (32), (33) и (37) будем иметь

$$\mu(v)+c(q)\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|^q_{q,\,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{z}^*]+C_{F\Omega}\big(\|\nabla v-|\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*\|_{p,\,\Omega}+\kappa_q\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}S(\mathbf{z}^*,f,\phi)\big)\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}. \tag{38}$$

Теперь используем неравенство Юнга

$$C_{F\Omega}\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}\leqslant\frac{\epsilon^qC^q_{F\Omega}}{q}\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|^q_{q,\,\Omega}+\frac{1}{p\epsilon^p}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^p_{q,\Omega}$$

и преобразуем (38) к виду

$$\mu(v)+c(q)\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|^q_{q,\,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{z}^*]+C_{F\Omega}\|\nabla v-|\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*\|_{p,\,\Omega}+\kappa_q S(\mathbf{z}^*,f,\phi)\left(\frac{\epsilon^q C^q_{F\Omega}}{q}\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|^q_{q,\,\Omega}+\frac{1}{p\epsilon^p}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^p_{q,\Omega}\right).$$

Нетрудно видеть, что (31) следует из этой оценки. Теорема доказана.

5. ПРИМЕРЫ

Приведём примеры, иллюстрирующие работу тождества (18) и оценки (21). Отметим, что в этих примерах приближённые решения имеют коинцидентные множества, существенно отличные от известного точного решения. Тем не менее оценки ошибок аппроксимации оказываются довольно точными.

Пусть $\Omega=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon |\mathbf{x}|<2\}$, $f\equiv 0$, а препятствие $\phi(x)=1-|\mathbf{x}|^2$. Из соображений симметрии минимайзер задачи с препятствием для оператора p-Лапласа должен быть радиально-симметричным. Следуя [19], нетрудно убедиться, что при $p=3$ точное радиально-симметричное решение задачи (1) имеет вид

$$u(\mathbf{x})=u(|\mathbf{x}|)=\begin{cases}1-|\mathbf{x}|^2, & \text{если } 0<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1:=0.416459,\\ 1.52031-1.07502\sqrt{|\mathbf{x}|}, & \text{если } \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2.\end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет нулевому условию Дирихле на границе $\partial\Omega$, совпадает с препятствием ϕ на множестве $\Omega^u_\phi=\{\mathbf{x}\in\Omega\colon 0\leqslant|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1\}$ и удовлетворяет уравнению $\Delta_3 u=0$ на множестве $\Omega^u_0=\{\mathbf{x}\in\Omega\colon \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2\}$. Минимайзер, препятствие и соответствующее коинцидентное множество (радиальное сечение и объёмное изображение) показаны на рисунке.

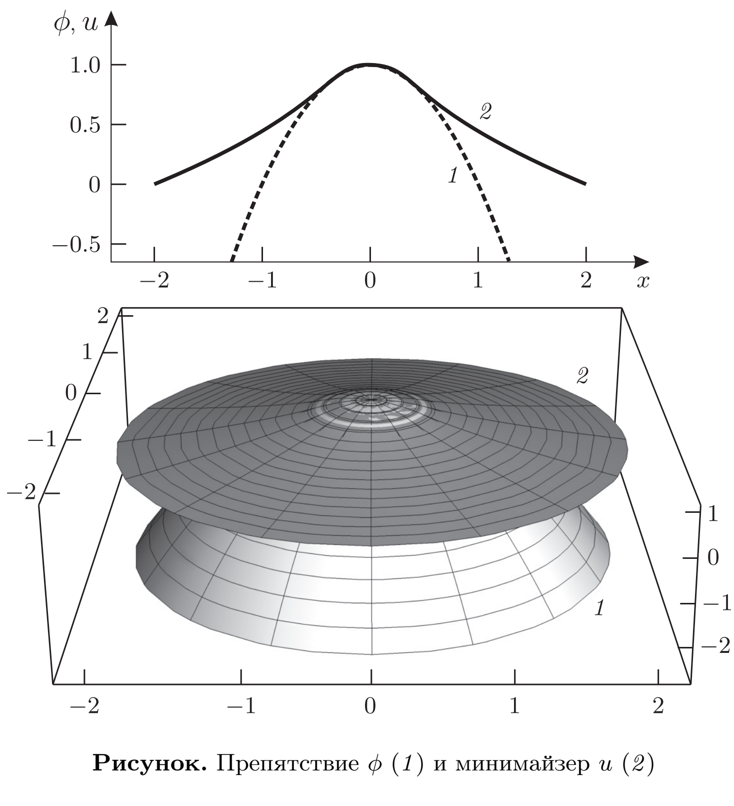

Рисунок. Препятствие ϕ (*1*) и минимайзер u (*2*)

Для проверки тождества (18) возьмём в качестве приближённого решения функцию

$$v(\mathbf{x})=\begin{cases}1-|\mathbf{x}|^2, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_2:=0.166459,\\ 1-|\mathbf{x}|^2+10(\varkappa_1-|\mathbf{x}|)^2(|\mathbf{x}|-\varkappa_2)^2, & \varkappa_2<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\ 1.52031-1.07502\sqrt{|\mathbf{x}|}, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2,\end{cases}$$

которая отличается от минимайзера u лишь на малую поправку в кольце

$$\{\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon \varkappa_2<|\mathbf{x}|<\varkappa_1\}.$$

Аппроксимацию двойственной переменной $\mathbf{y}^*$ положим равной $\mathbf{y}^*=-4|\mathbf{x}|\mathbf{x}$ во всей области Ω. Таким образом, этот приближённый поток существенно отличается от точного

$$\mathbf{p}^*=|\nabla u|\nabla u=\begin{cases}-4|\mathbf{x}|\mathbf{x}, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\ -\dfrac{(0.53751)^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2.\end{cases}$$

Прямое вычисление показывает, что $\operatorname{div}\mathbf{y}^*=-12|\mathbf{x}|\leqslant 0$, так что $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$ и можно использовать тождество (18).

Для слагаемых, входящих в состав мер $\mu(v)$ и $\mu^*(\mathbf{y}^*)$ из левой части тождества (18), имеем следующие значения: $\lambda(v)=1.32603\text{e}{-04}$, $\int_{\Omega^u_\phi}W_\phi(u-v)\,dx=1.13858\text{e}{-03}$, $\mu(v)=1.27118\text{e}{-03}$, $\lambda^*(\mathbf{y}^*)=171.394$, $\int_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-u)\,dx=325.101$, $\mu^*(\mathbf{y}^*)=496.495$. Соответствующие компоненты из правой части (18): $\int_\Omega|\nabla v|^3/3\,dx=5.44408\text{e}{-01}$, $\int_\Omega(2|\mathbf{y}^*|^{3/2}/2-\nabla v\cdot\mathbf{y}^*)\,dx=170.85$, $\int_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-v)\,dx=325.102$, значение правой части (18) равно 496.496. Видно, что основной вклад в ошибки и слева, и справа даёт плохое приближение двойственной переменной. Нетрудно убедиться, что $\mu(v)+\mu^*(\mathbf{y}^*)=0.00127118+496.495=496.496$, что совпадает с соответствующим значением для правой части (18).

Рассмотрим далее серию радиально-симметричных приближённых решений

$$v_\varepsilon(|\mathbf{x}|)=\begin{cases}1-|\mathbf{x}|^2, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant h_\varepsilon,\\ 1-|\mathbf{x}|^2+20\varepsilon(\varkappa_1-|\mathbf{x}|)^2(|\mathbf{x}|-h_\varepsilon)^2, & h_\varepsilon<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\ 1.52031-1.07502\sqrt{|\mathbf{x}|}+20\varepsilon(2-|\mathbf{x}|)(|\mathbf{x}|-\varkappa_1)^2, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2,\end{cases}$$

где ε — параметр, удовлетворяющий условию $0<\varepsilon<1/2$, $h_\varepsilon:=\varkappa_1-\varepsilon^2$. Для этих аппроксимаций $\Omega^{v_\varepsilon}_\phi\subset\Omega^u_\phi$ и при $\varepsilon\to 0$ аппроксимация коинцидентного множества Ω^u_ϕ улучшается.

В качестве аппроксимаций двойственной переменной возьмём $\mathbf{z}^*_\varepsilon=|\nabla v_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon$. Нетрудно убедиться, что при $\varepsilon=0.4$, 0.2 и 0.1 выражения для z^*_ε и $\operatorname{div}\mathbf{z}^*_\varepsilon$ имеют вид

$$\mathbf{z}^*_\varepsilon=\begin{cases}-4|\mathbf{x}|\mathbf{x}, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant h_\varepsilon,\\ -\dfrac{4\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}[\mathcal{N}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)]^2, & h_\varepsilon<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\ -\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}[\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon)]^2, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant h^{[1]}(\varepsilon),\\ \dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}[\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon)]^2, & h^{[1]}(\varepsilon)<|\mathbf{x}|\leqslant h^{[2]}(\varepsilon),\\ -\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}[\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon)]^2, & h^{[1]}(\varepsilon)<|\mathbf{x}|\leqslant 2,\end{cases}$$

$$
\operatorname{div}\mathbf{z}_\varepsilon^* = \begin{cases}
-12|\mathbf{x}|, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant h_\varepsilon,\\
-8\mathcal{N}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)\cdot\mathcal{N}_2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon), & h_\varepsilon<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\
2\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)\cdot\mathcal{A}_2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)-\dfrac{\mathcal{A}_1^2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)}{|\mathbf{x}|}, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant h^{[1]}(\varepsilon),\\
-2\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)\cdot\mathcal{A}_2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)+\dfrac{\mathcal{A}_1^2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)}{|\mathbf{x}|}, & h^{[1]}(\varepsilon)<|\mathbf{x}|\leqslant h^{[2]}(\varepsilon),\\
2\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)\cdot\mathcal{A}_2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)-\dfrac{\mathcal{A}_1^2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)}{|\mathbf{x}|}, & h^{[2]}(\varepsilon)<|\mathbf{x}|\leqslant 2,
\end{cases}
$$

где $h^{[1]}(0.4)=0.449126$, $h^{[2]}(0.4)=1.45426$, $h^{[1]}(0.2)=0.481619$, $h^{[2]}(0.2)=1.43546$, $h^{[1]}(0.1)=$ $=0.547394$, $h^{[2]}(0.1)=1.3946$, а

$$\mathcal{N}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon):=|\mathbf{x}|-20\varepsilon(\varkappa_1-|\mathbf{x}|)(|\mathbf{x}|-h_\varepsilon)(\varkappa_1+h_\varepsilon-2|\mathbf{x}|),$$

$$\mathcal{N}_2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon):=[1-20\varepsilon(\varkappa_1+h_\varepsilon-2|\mathbf{x}|)^2+40\varepsilon(\varkappa_1-|\mathbf{x}|)(|\mathbf{x}|-h_\varepsilon)],$$

$$\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon):=\left[\frac{0.53751}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}-20\varepsilon(|\mathbf{x}|-\varkappa_1)(4.416459-3|\mathbf{x}|)\right],$$

$$\mathcal{A}_2(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon):=\left[\frac{0.268755}{|\mathbf{x}|\sqrt{|\mathbf{x}|}}+20\varepsilon(4.416459-3|\mathbf{x}|)-60\varepsilon(|\mathbf{x}|-\varkappa_1)\right].$$

Очевидно, что $c(3)=1/6$ и при данном выборе $\mathbf{z}_\varepsilon^*$ верно $\mathcal{D}_G(\nabla v_\varepsilon,\mathbf{z}_\varepsilon^*)=0$. В табл. 1 приведены результаты расчётов для оставшихся компонент, входящих в оценку (21). Нам потребуется также оценка сверху для константы C_{F_Ω} из неравенства (27), для получения которой последовательно применим теорему 1.1 и замечание 1.2 из [20] и интегральное неравенство Гёльдера к квадрату $\Omega=(-2,2)\times(-2,2)$. В результате имеем неравенства

$$C_{F_\Omega}\leqslant 4^{2/3}\cdot 0.257125\cdot|\Omega|^{1/6}\leqslant 0.987914.$$

Таблица 1. Компоненты оценки (21), вычисленные для $v=v_\varepsilon$ и $\mathbf{z}^*=\nabla v_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|$

ε	h_ε	$\|\nabla(u-v_\varepsilon)\|^3_{3,\Omega}$	$\int_{\Omega^u_\phi} W_\phi(u-v)\,dx$	$\lambda^*(\mathbf{z}^*)$	$\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^{3/2}_{3/2,\Omega}$
0.4	0.256459	11346.6	2.40596e-04	7760	194494
0.2	0.376459	1418.34	1.61865e-07	221.971	32554.1
0.1	0.406459	177.293	8.51006e-11	20.5771	3420.63
0	0.416459	0	0	0	0

Таблица 2. Оценка (21) при $v=v_\varepsilon$ и $\mathbf{z}^*=\nabla v_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon|$

ε	Левая часть (21)	Правая часть (21)	I_{eff}
0.4	8705.58	254643	3.08114
0.2	340.17	42621.8	5.00394
0.1	35.352	4478.49	5.02234

В табл. 2 показаны результаты вычислений полной меры ошибки (левая часть (21)) и соответствующей мажоранты (правая часть (21)) при $\epsilon = 0.63766$, а также приведены значения индексов эффективности

$$1 \leqslant I_{\text{eff}} := \sqrt[3]{\frac{\text{правая часть (21)}}{\text{левая часть (21)}}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Апостериорное тождество (18) позволяет контролировать близость приближённых решений к решению задачи с препятствием для оператора p-Лапласа независимо от того, каким образом эти решения были получены. Этот результат обобщает некоторые ранее полученные результаты по апостериорному анализу задач с препятствиями.

Теоремы 2 и 3 снимают дифференциальное условие на двойственную переменную, которое используется в теореме 1. При этом вместо тождества получаются неравенства (для $p > 2$ и $p \in (1, 2]$), правые части которых зависят только от приближённых решений и известных данных и могут быть явно вычислены, а левые части представляют собой естественные меры отклонения приближённых решений от точных.

Оценки состоятельны в том смысле, что они обращаются в нуль на точном решении и непрерывны относительно сходимости в базовых энергетических пространствах для прямой и двойственной переменных.

Первый автор выражает признательность участникам Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (28 июня—04 июля 2024 г., г. Суздаль, Россия) за полезные обсуждения результатов статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00293).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions, J.-L. Variational inequalities / J.-L. Lions, G. Stampacchia // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — V. 20. — P. 493–519.
2. Petrosyan, A. Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems / A. Petrosyan, H. Shagholian, N.N. Uraltseva. — Providence : American Mathematical Society, 2012. — 221 p.
3. Choe, H.J. On the obstacle problem for quasilinear elliptic equations of p-Laplacian type / H.J. Choe, J.L. Lewis // SIAM J. Math. Anal. — 1991. — V. 22, № 3. — P. 623–638.
4. Andersson J. Optimal regularity for the obstacle problem for the p-Laplacian / J. Andersson, E. Lindgren, H. Shahgholian // J. Differ. Equat. — 2015. — V. 259, № 6. — P. 2167–2179.
5. Jouvet, G. Steady, shallow ice sheets as obstacle problems: well-posedness and finite element approximation / G. Jouvet, E. Bueler // SIAM J. Appl. Math. — 2012. — V. 72, № 4. — P. 1292–1314.
6. Lewicka, M. The obstacle problem for the p-Laplacian via optimal stopping of tug-of-war games / M. Lewicka, J.J. Manfredi // Probab. Theory Related Fields. — 2017. — V. 167, № 1-2. — P. 349–378.
7. On the porosity of free boundaries in degenerate variational inequalities / L. Karp, T. Kipeläinen, A. Petrosyan, H. Shagholian // J. Differ. Equat. — 2000. — V. 164, № 1. — P. 110–117.

8. Lee, K. Hausdorff measure and stability for the p-obstacle problem $(2<p<\infty)$ / K. Lee, H. Shahgholian // J. Differ. Equat. — 2003. — V. 195, № 1. — P. 14–24.
9. Rodrigues, J.F. Stability remarks to the obstacle problem for p-Laplacian type equations / J.F. Rodrigues // Calc. Var. Partial Differ. Equat. — 2005. — V. 23, № 1. — P. 51–65.
10. Falk, R.S. Error estimates for approximation of a class of a variational inequalities / R.S. Falk // Math. Comp. — 1974. — V. 28. — P. 963–971.
11. Chen, Z., Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems / Z. Chen, R. Nochetto // Numer. Math. — 2000. — V. 84. — P. 527—548.
12. Repin, S.I. Accuracy of Mathematical Models — Dimension Reduction, Homogenization, and Simplification / S.I. Repin, S.A. Sauter. — Zürich : European Mathematical Society, 2020. — 317 p.
13. Repin, S.I. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals / S.I. Repin // Math. Comp. — 2000. — V. 69, № 230. — P. 481–500.
14. Репин, С.И. Апостериорные тождества для мер отклонений от точных решений нелинейных краевых задач / С.И. Репин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 6. — С. 896–919.
15. Repin, S. Error identities for variational problems with obstacles / S. Repin, J. Valdman // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 2018. — Bd. 98, № 4. — S. 635–658.
16. Apushkinskaya D.E. Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution / D.E. Apushkinskaya, S.I. Repin // Interfaces Free Bound. — 2018. — V. 20, № 4. — P. 511–531.
17. Апушкинская, Д.Е. Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближённых решений / Д.Е. Апушкинская, С.И. Репин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 11. — С. 1881–1897.
18. Apushkinskaya, D. Functional a posteriori error estimates for the parabolic obstacle problem / D. Apushkinskaya, S. Repin // Comput. Methods Appl. Math. — 2022. — V. 22, № 2. — P. 259–276.
19. Sharp numerical inclusion of the best constant for embedding $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ on bounded convex domain / K. Tanaka, K. Sekine, M. Mizuguchi, S. Oishi // J. Comput. Appl. Math. — 2017. — V. 311 — P. 306–313.
20. Rossi, J.D. Optimal regularity at the free boundary for the infinity obstacle problem / J.D. Rossi, E.V. Teixeira, J.V. Urbano // Interfaces Free Bound. — 2015. — V. 17, № 3. — P. 381–398.

A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE OBSTACLE PROBLEM FOR THE p-LAPLACIAN

© 2024 / D. E. Apushkinskaya[1], A. A. Novikova[2], S. I. Repin[3]

[1,2,3]*People's Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia*
[3]*Saint Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS, Russia*
e-mail: [1]apushkinskaya@gmail.com, [2]aanovikova01@gmail.com, [3]rpnspb@gmail.com

The paper is concerned with a functional identity and estimates which are fulfilled for the measures of deviations from exact solutions of the obstacle problem for the p-Laplacian. They hold true for any functions from the corresponding (energy) functional class, which contains the generalised solution of the problem as well. We do not use any special properties of approximations or numerical methods nor information of the exact configuration of the coincidence set. The right-hand side of the identities and estimates contains only known functions and can be explicitly calculated, and the left side represents a certain measure of the deviation of the approximate solution from the exact solution. The right-hand side of the identity and estimates contains only known functions and can be explicitly calculated, while and the left side represents a certain measure of the deviation of the approximate solution from the exact one. The obtained functional relations allow to estimate the error of of any approximate solutions of the problem regardless of the method of their obtaining. In addition, they enable to compare the exact solutions of problems with different data. The latter provides the possibility to estimate the errors of mathematical models.

Keywords: free boundary problems, p-Laplacian, a posteriori estimates

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00293).

REFERENCES

1. Lions, J.-L. and Stampacchia, G., Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1967, vol. 20, pp. 493–519.
2. Petrosyan, A., Shagholian, H., and Uraltseva, N.N., *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*, Providence: American Mathematical Society, 2012.
3. Choe, H.J. and Lewis, J.L., On the obstacle problem for quasilinear elliptic equations of p-Laplacian type, *SIAM J. Math. Anal.*, 1991, vol. 22, no. 3, pp. 623–638.
4. Andersson, J., Lindgren, E., and Shahgholian, H., Optimal regularity for the obstacle problem for the p-Laplacian, *J. Differ. Equat.*, 2015, vol. 259, no. 6, pp. 2167–2179.
5. Jouvet, G. and Bueler, E., Steady, shallow ice sheets as obstacle problems: well-posedness and finite element approximation, *SIAM J. Appl. Math.*, 2012, vol. 72, no. 4, pp. 1292–1314.
6. Lewicka, M. and Manfredi, J.J., The obstacle problem for the p-Laplacian via optimal stopping of tug-of-war games, *Probab. Theory Related Fields*, 2017, vol. 167, no. 1-2, pp. 349–378.
7. Karp, L., Kipeläinen, T., Petrosyan, A., and Shagholian, H., On the porosity of free boundaries in degenerate variational inequalities, *J. Differ. Equat.*, 2000, vol. 164, no. 1, pp. 110–117.
8. Lee, K. and Shahgholian, H., Hausdorff measure and stability for the p-obstacle problem $(2<p<\infty)$, *J. Differ. Equat.*, 2003, vol. 195, no. 1, pp. 14–24.
9. Rodrigues, J.F., Stability remarks to the obstacle problem for p-Laplacian type equations, *Calc. Var. Partial Differ. Equat.*, 2005, vol. 23, no. 1, pp. 51–65.
10. Falk, R.S., Error estimates for approximation of a class of a variational inequalities, *Math. Comp.*, 1974, vol. 28, pp. 963–971.
11. Chen, Z. and Nochetto, R., Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems, *Numer. Math.*, 2000, vol. 4, pp. 527–548.
12. Repin, S.I. and Sauter, S.A., *Accuracy of Mathematical Models — Dimension Reduction, Homogenization, and Simplification*, Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2020.
13. Repin, S.I., A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals, *Math. Comp.*, 2000, vol. 69, no. 230, pp. 481–500.
14. Repin, S.I., A posteriori identities for measures of deviation from exact solutions of nonlinear boundary value problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 6, pp. 934–956.
15. Repin, S. and Valdman, J., Error identities for variational problems with obstacles, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 2018, Bd. 98, no. 4, S. 635–658.
16. Apushkinskaya, D.E. and Repin, S.I., Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution, *Interfaces Free Bound*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 511–531.
17. Apushkinskaya, D.E. and Repin, S.I., Biharmonic obstacle problem: guaranteed and computable error bounds for approximate solutions, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 11, pp. 1823–1838.
18. Apushkinskaya, D. and Repin, S., Functional a posteriori error estimates for the parabolic obstacle problem, *Comput. Methods Appl. Math.*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 259–276.
19. Tanaka, K., Sekine, K., Mizuguchi, M., and Oishi, S., Sharp numerical inclusion of the best constant for embedding $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ on bounded convex domain, *J. Comput. Appl. Math.*, 2017, vol. 311, pp. 306–313.
20. Rossi, J.D., Teixeira, E.V., and Urbano, J.V., Optimal regularity at the free boundary for the infinity obstacle problem, *Interfaces Free Bound.*, 2015, vol. 17, no. 3, pp. 381–398.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1422–1428

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ПАМЯТЬ СРЕДЫ

© 2024 г. А. В. Звягин[1], М. И. Струков[2]

Воронежский государственный университет

e-mail: [1]zvyagin.a@mail.ru, [2]mixail.strukov12@gmail.com

Поступила в редакцию 04.03.2024 г., после доработки 24.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Исследована слабая разрешимость начально-краевой задачи, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров с учётом памяти среды вдоль траектории движения частиц, определяемой полем скоростей. При доказательстве разрешимости использованы аппроксимационно-топологический подход и теория регулярных лагранжевых потоков.

Ключевые слова: слабое решение, теорема существования, вязкоупругая жидкость

DOI: 10.31857/S0374064124100103, EDN: JSZTMX

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega\in\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, на временно́м промежутке $[0,T]$, $T>0$, начально-краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_0\Delta v-\mu_1\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-2\mu_1\operatorname{Div}\bigg(\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\bigg)-$$

$$-2\mu_1\operatorname{Div}\Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho\mathcal{E}(v)\Big)-\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}\operatorname{Div}\int\limits_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds+\nabla p=f, \qquad (1)$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad t,\tau\in[0,T],\quad x\in\Omega, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}v(t,x)=0,\quad t\in[0,T],\quad x\in\Omega, \qquad (3)$$

$$v|_{t=0}=v_0,\quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0. \qquad (4)$$

Здесь $v(x,t)=(v_1,\ldots,v_n)$ — вектор-функция скорости движения частицы среды; $p=p(x,t)$ — функция давления; $f=f(x,t)$ — вектор-функция плотности внешних сил; $z(\tau,t,x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы жидкости, находящейся в момент времени t в точке x; $\mu_0,\mu_1>0$, $\mu_2\geqslant 0$, $0<\alpha<1$ — некоторые константы; $\mathcal{E}(v)=(\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$, $\mathcal{E}_{ij}(v)=(\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i)/2$ — тензор скоростей деформаций; $W(v)=(W_{ij}(v))_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$, $W_{ij}(v)=(\partial v_i/\partial x_j-\partial v_j/\partial x_i)/2$ — тензор завихрённости; $W_\rho(v)=\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x-y)W(y)\,dy$, $\rho\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n}\rho(y)\,dy=1$ и $\rho(x)=\rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами;

$\Gamma(1-\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(1-\alpha)=\int_0^\infty t^{-\alpha}e^{-t}\,dt$. Через $\mathrm{Div}\,A$ обозначена дивергенция тензора $A=(a_{ij})_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$, т.е. вектор

$$\mathrm{Div}\,A=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{1j}}{\partial x_j},\ldots,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{nj}}{\partial x_j}\right).$$

Задача (1)–(4) возникает, например, при изучении движения воды с добавлением в неё небольшого количество полимеров. В таких средах равновесное состояние устанавливается не мгновенно после изменения внешних условий, а с некоторым запаздыванием, которое характеризуется значением времени релаксации. Это запаздывание объясняется процессами внутренней перестройки. Отметим, что первая теоретическая модель движения водного раствора полимеров, учитывающая их релаксационные свойства, была сформулирована в работах [1, 2], поэтому рассматриваемую в данной статье модель часто называют *моделью Павловского* [3–5].

В изучаемой модели используется реологическое соотношение со сглаженной объективной производной Яуманна (см. [6–8]), а также с дробной производной Капуто (см. [9, 10]). Заметим, что математические модели со сглаженной объективной производной Яуманна является частным случаем модели Ривлина–Эриксена для описания реологических свойств так называемых жидкостей второго порядка [11]. Модель Ривлина–Эриксена используется при расчёте выдавливания вязкоупругого полимера из экструдера на горизонтальную плоскость. Движения данных жидкостей описываются очень сложными системами уравнений, поэтому в настоящее время установлены только некоторые теоремы существования для локальных случаев или при малых данных. Наличие дробной производной Капуто обеспечивает учёт памяти жидкости. Интегральная модель учитывает все предшествующие состояния вязкоупругой среды, как бы далеко ни отстояли они от текущего момента времени. Такие модели используются при значительном влиянии эффектов памяти и большом времени релаксации. Цель данной статьи — исследовать вопрос слабой разрешимости начально-краевой задачи (1)–(4).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций с компактным носителем. Пусть множество $\mathcal{V}=\{v(x)=(v_1,\ldots,v_n)\in C_0^\infty(\Omega)\colon\ \mathrm{div}\,v=0\}$, V^0 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$, V^1 — замыкание по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ и $V^2=W_2^2(\Omega)\cap V^1$.

Введём шкалу пространств V^β (см. [12, § 4.2]), $\beta\in\mathbb{R}$. Для этого рассмотрим проектор Лере $P\colon L_2(\Omega)\to V^0$ и оператор $A=-P\Delta$, определённый на $D(A)=V^2$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряжённым положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$ — собственные значения оператора A. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через $E_\infty=\left\{v=\sum_{j=1}^n v_je_j : v_j\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^β, $\beta\in\mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\beta}=\left(\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^\beta|v_k|^2\right)^{1/2}$, где $v=\sum_{k=1}^\infty v_ke_k$. В [13, лемма 4.5] показано, что на пространстве V^β, $\beta>-1/2$, эта норма эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{W_2^\beta(\Omega)}$ пространства $W_2^\beta(\Omega)$. Через $V^{-\beta}=(V^\beta)^*$, $\beta\in\mathbb{N}$, будем обозначать сопряжённое пространство к V^β. Определим пространство, в котором будет доказана разрешимость задачи (1)–(4):

$$W_1=\{v\colon v\in L_\infty(0,T,V^1),\ \ v'\in L_2(0,T,V^{-1})\}.$$

Заметим, что для корректной постановки начально-краевых задач необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v, другими словами, чтобы уравнение (1) имело единственное решение для поля скоростей v. Однако существование решений уравнения (2) при фиксированном v известно лишь в случае $v\in L_1(0,T;C(\overline{\Omega}))$, и это решение единственно для $v\in L_1(0,T;C(\overline{\Omega}))$ таких, что $v|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0$ (см., например, [14]). Поэтому даже для сильных решений, частные производные которых, входящие в уравнение (2), содержатся в $L_2(0,T,L_2(\Omega))$, траектории движения не определяются однозначно. Одно из возможных решений этой проблемы — регуляризация поля скоростей в каждый момент времени t с помощью усреднения по переменной x и определение траекторий $z(\tau,t,x)$ для регуляризованного поля скоростей (см. [15]). Однако в работах [16–18] была исследована разрешимость интегральной задачи Коши (2) в случае, когда скорость v принадлежит пространству Соболева, и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков — обобщения понятия классического решения.

Определение 1. *Регулярным лагранжевым потоком* (РЛП), порождённым v, называется функция $z(\tau,t,x)$, $(\tau,t,x)\in[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) для п.в. $x\in\overline{\Omega}$ и $t\in[0,T]$ функция $\gamma(\tau)=z(\tau,t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (2);

2) для любых $t,\tau\in[0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B\subset\overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо равенство $m(z(\tau,t,B))=m(B)$;

3) для всех $t_i\in[0,T]$, $i=1,2,3$, и п.в. $x\in\overline{\Omega}$ справедливо $z(t_3;t_1,x)=z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x))$.

Теорема 1. *Пусть* $v\in L_1(0,T;W_p^1(\Omega))$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $\operatorname{div}v(t,x)=0$, $(t,x)\in[0,T]\times\Omega$ *и* $v|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0$. *Тогда существует единственный регулярный лагранжевый поток* $z\in C(D;L)$, *порождённый* v, *где* $C(D;L)$ — *банахово пространство непрерывных функций на* $D=[0,T]\times\times[0,T]$ *со значениями в метрическом пространстве* L *измеримых на* Ω *вектор-функций. Более того,* $z(\tau;t,\overline{\Omega})\subset\overline{\Omega}$ *с точностью до множества меры нуль и* $\partial z(\tau;t,x)/\partial\tau=v(\tau,z(\tau;t,x))$, $t,\tau\in[0,T]$, *при п.в.* $x\in\Omega$.

Таким образом, в силу теоремы 1 для каждого $v\in L_2(0,T;V^1)$ и для п.в. $x\in\Omega$ уравнение (2) имеет единственное решение $z(v)$ в классе РЛП. Сформулируем определение слабого решения для изучаемой начально-краевой задачи.

Определение 2. Пусть $f\in L_2(0,T;V^{-1})$ и $v_0\in V^1$. *Слабым решением начально-краевой задачи* (1)–(4) называется функция $v\in W_1$, удовлетворяющая при любом $\varphi\in V^3$ и при п.в. $t\in(0,T)$ равенству

$$\int\limits_\Omega\frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\mu_0\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx+\mu_1\int\limits_\Omega\nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right):\nabla\varphi\,dx-$$

$$-\mu_1\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx-\mu_1\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx+$$

$$+2\mu_1\int_\Omega(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla\varphi dx+$$

$$+\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(v)(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right)=\langle f,\varphi\rangle \tag{5}$$

и начальному условию $v(0)=v_0$. Здесь $z(v)$ — РЛП, порождённый v. Для произвольных квадратных матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ используется символ $A:B=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 2. *Пусть* $f\in L_2(0,T;V^{-1})$ *и* $v_0\in V^1$. *Тогда начально-краевая задача (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение* $v\in W_1$.

Доказательство теоремы основано на аппроксимационно-топологическом подходе к исследованию математических задач гидродинамики, разработанном проф. В.Г. Звягиным (см. [13]).

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2

Введём семейство вспомогательных задач: найти функцию $v\in W_2=\{v\colon v\in C([0,T,V^3]),\ v'\in L_2(0,T,V^3)\}$, удовлетворяющую для любой $\varphi\in V^3$ и п.в. $t\in(0,T)$ начальному условию

$$v|_{t=0}=\xi v_0,\quad \xi\in[0,1],\quad v_0\in V^3, \tag{6}$$

и равенству

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx-\xi\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\mu_0\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx+\mu_1\int\limits_\Omega\nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right):\nabla\varphi\,dx-\\ -\varepsilon\int\limits_\Omega\nabla\left(\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right):\nabla(\Delta\varphi)\,dx-\xi\mu_1\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx-\\ -\xi\mu_1\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx+2\xi\mu_1\int\limits_\Omega(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla\varphi\,dx+\\ +\frac{\xi\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}\operatorname{Div}\left(\int\limits_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(v)(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right)=\langle\xi f,\varphi\rangle.\end{gathered} \tag{7}$$

Введём следующие операторы:

$$J\colon V^3\to V^{-3},\quad \langle Jv,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega v\varphi\,dx,\quad v,\varphi\in V^3;$$

$$A\colon V^1\to V^{-1},\quad \langle Av,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx,\quad v,\varphi\in V^1;$$

$$N\colon V^3\to V^{-3},\quad \langle Nv,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\nabla(\Delta v):\nabla(\Delta\varphi)\,dx,\quad v,\varphi\in V^3;$$

$$B_1\colon L_4(\Omega)^n\to V^{-1},\quad \langle B_1(v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx,\quad v\in L_4(\Omega)^n,\quad \varphi\in V^1;$$

$$B_2\colon V^1\to V^{-3},\quad \langle B_2(v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx,\quad v\in V^1,\quad \varphi\in V^3;$$

$$B_3\colon V^1\to V^{-3},\quad \langle B_3(v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx,\quad v\in V^1,\quad \varphi\in V^3;$$

$$B_4\colon V^1\to V^{-3},\quad \langle B_4(v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla\varphi\,dx,\quad v\in V^1,\quad \varphi\in V^3;$$

$$C\colon V^1\times[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}\to V^{-1},\quad (C(v,z)(t),\varphi)=\left(\int\limits_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right),$$

$$v\in V^1,\quad z\in[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega},\quad \varphi\in V^3,\quad t\in(0,T);$$

$$L\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3,\quad L(v)=\big((J-\varepsilon N+\mu_1 A)v'+\mu_0 Av, v|_{t=0}\big);$$

$$K\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3,\quad K(v)=\big(B_1(v)+\mu_1B_2(v)+\mu_1B_3(v)-2\mu_1B_4(v),0\big);$$

$$G\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3,\quad G(v)=\left(\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}C(v,z),0\right).$$

Таким образом, поиск решения уравнения (7), удовлетворяющего начальному условию (6), эквивалентен нахождению решения операторного уравнения

$$L(v)=\xi(K(v)-G(v)+(f,v_0)).\tag{8}$$

Лемма. *Справедливы следующие свойства:*

1) оператор $L\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3$ обратим и обратный оператор непрерывен;

2) оператор $K\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3$ компактен;

3) отображение $C\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3$ является L-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского.

Для решений операторного равенства (8) справедливы следующие априорные оценки.

Теорема 3. *Если $v\in W_2$ — решение операторного уравнения (8) для некоторого $\xi\in[0,1]$, то справедливы оценки*

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T],V^3)}\leqslant C_1(\varepsilon),\quad \varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}\leqslant C_2,\tag{9}$$

$$\mu_1\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}\leqslant C_3,\quad \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_4.\tag{10}$$

В (9) $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Все решения уравнения (8) в силу априорных оценок (9) лежат в шаре $B_R\subset W_2$, а значит, определена степень для уплотняющих векторных полей (см. [19, 20]), отличная от нуля. Следовательно, существует хотя бы одно решение $v\in W_2$ уравнения (8) при $\xi=1$. Отсюда вытекает, что аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение.

В силу оценок (10) получаем сходимости: $v_m\rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$, $v_m\rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$, $v'_m\rightharpoonup v'_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m\to+\infty$. Сильную сходимость $v_m\to v_*$ в $C([0,T],L_4(\Omega))$ получаем в силу теоремы Симона. В работах [17, 18] установлена следующая сходимость РЛП: последовательность $z^m(\tau;t,x)$ сходится к $z(\tau;t,x)$ по мере Лебега на множестве $[0,T]\times\Omega$ относительно (τ,x) равномерно по $t\in[0,T]$.

Используя полученные сходимости и переходя к пределу в интегральном равенстве (7) при $\xi=1$, получаем, что предельная функция v^* удовлетворяет интегральному равенству (5) и начальному условию $v(0)=v_0$. Это и завершает доказательство теоремы 2.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-10026).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Войткунский, Я.И. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств / И.Я. Войткунский, В.Б. Амфилохиев, В.А. Павловский // Тр. Ленинград. ордена Ленина кораблестроит. ин-та. — 1970. — Т. 69. — С. 19–26.
2. Павловский, В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В.А. Павловский // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809–812.
3. Пухначев, В.В. О модели Войткунского–Амфилохиева–Павловского движения водных растворов полимеров / В.В. Пухначев, О.А. Фроловская // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. — 2018. — Т. 300. — С. 176–189.
4. Frolovskaya, O.A. Analysis of the models of motion of aqueous solutions of polymers on the basis of their exact solutions / O.A. Frolovskaya, V.V. Pukhnachev // Polymer. — 2018. — V. 10. — P. 684.
5. Звягин, А.В. Слабая разрешимость нелинейно-вязкой модели Павловского / А.В. Звягин // Изв. вузов. Математика. — 2022. — № 6. — С. 87–93.
6. Звягин, А.В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 245–249.
7. Звягин, А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Сиб. мат. журн. — 2018. — Т. 59, № 5. — С. 1066–1085.
8. Zvyagin, A.V. Attractors for model of polymer solutions motion / A.V. Zvyagin // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2018. — V. 38, № 12. — P. 6305–6325.
9. Звягин, А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта / А.В. Звягин // Изв. РАН. Сер. матем. — 2021. — Т. 85, № 1. — С. 66–97.
10. Звягин, А.В. О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А.В. Звягин, Е.И. Костенко // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1710–1714.
11. Rivlin, R.S. Stress deformation relations for isotropic materials / R.S. Rivlin, J.L. Ericksen // Arch. Rational Mech. Anal. — 1955. — V. 4. — P. 323–425.
12. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. — Новосибирск : Научная книга, 1999. — 350 с.
13. Звягин, В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, М.В. Турбин. — М. : КРАСАНД УРСС, 2012. — 416 с.
14. Orlov, V.P. On mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V.P. Orlov, P.E. Sobolevskii // Differ. Integral Equat. — 1991. — V. 4. — P. 103–115.
15. Звягин, В.Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 12. — С. 1633–1645.
16. DiPerna, R.J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.L. Lions // Invent. Math. — 1989. — V. 98, № 3. — P. 511–547.
17. Crippa, G. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow / G. Crippa, C. de Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 616. — P. 15–46.
18. Crippa, G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields / G. Crippa // Boll. Unione Mat. Ital. — 2008. — V. 1, № 2. — P. 333–348.
19. Садовский, Б.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы / Б.Н. Садовский // Успехи мат. наук. — 1972. — Т. 27, № 1. — С. 81–146.
20. Дмитриенко, В.Т. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В.Т. Дмитриенко, В.Г. Звягин // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 801–812.

ON WEAK SOLVABILITY OF MATHEMATICAL MODEL DESCRIBING THE MOTION OF POLYMER SOLUTIONS WITH MEMORY

A. V. Zvyagin[1], M. I. Strukov[2]

Voronezh State University, Russia
e-mail: [1]zvyagin.a@mail.ru, [2]mixail.strukov12@gmail.com

The weak solvability of the initial-boundary value problem describing the motion of weakly concentrated aqueous polymer solutions taking into account the memory of the fluid is considered in the paper. In this model the memory is considered along the trajectory of fluid particles, determined by the velocity field. The topological approximation approach and the theory of regular Lagrangian flows are used.

Keywords: weak solution, existence theorem, viscoelastic fluid

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23–71–10026).

REFERENCES

1. Voitkunskii, Y.I., Amfilokhiev, V.B., and Pavlovskii, V.A., Equations of motion of a fluid, with its relaxation properties taken into account, *Trudy Leningrad. Korablestr. Inst.*, 1970, vol. 69, pp. 19–26.
2. Pavlovskii, V.A., Theoretical description of weak aqueous polymer solutions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1971, vol. 200, pp. 809–812.
3. Pukhnachev, V.V. and Frolovskaya, O.A., On the Voitkunskii–Amfilokhiev–Pavlovskii model of motion of aqueous polymer solutions, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 300, pp. 168–181.
4. Frolovskaya, O.A. and Pukhnachev, V.V., Analysis of the models of motion of aqueous solutions of polymers on the basis of their exact solutions, *Polymer*, 2018, vol. 10, p. 684.
5. Zvyagin, A.V., Weak solvability of the nonlinearly viscous Pavlovskii model, *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 6, pp. 73–78.
6. Zvyagin, A.V., Optimal control problem for a stationary model of low concentrated aqueous polymer solutions, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 246–250.
7. Zvyagin, A.V., Study of solvability of a thermoviscoelastic model describing the motion of weakly concentrated water solutions of polymers, *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 5, pp. 843–859.
8. Zvyagin, A.V., Attractors for model of polymer solutions motion, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2018, vol. 38, no. 12, pp. 6305–6325.
9. Zvyagin, A.V., Investigation of the weak solubility of the fractional Voigt alpha-model, *Izv. Math.*, 2021, vol. 85, no. 1, pp. 61–91.
10. Zvyagin, A.V. and Kostenko, E.I., On the existence of feedback control for one fractional Voigt model, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1778–1783.
11. Rivlin, R.S. and Ericksen, J.L., Stress deformation relations for isotropic materials, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1955, vol. 4, pp. 323–425.
12. Fursikov, A.V., *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications*, Providence: Amer. Math. Soc., 2000.
13. Zvyagin, V.G. and Turbin, M.V., *Matematicheskiye voprosy gidrodinamiki vyazkouprugikh sred* (Mathematical Questions in the Hydrodynamics of Viscoelastic Media), Moscow: KRASAND URSS, 2012.
14. Orlov, V.P. and Sobolevskii, P.E., On mathematical models of a viscoelasticity with a memory, *Differ. Integral Equat.*, 1991, vol. 4, pp. 103–115.
15. Zvyagin, V.G. and Dmitrienko, V.T., On weak solutions of a regularized model of a viscoelastic fluid, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 1731–1744.
16. DiPerna, R.J. and Lions, P.L., Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.*, 1989, vol. 98, no. 3, pp. 511–547.
17. Crippa, G. and de Lellis, C., Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow, *J. Reine Angew. Math.*, 2008, vol. 616, pp. 15–46.
18. Crippa, G., The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 333–348.
19. Sadovskii, B.N., Limit-compact and condensing operators, *Russ. Math. Surv.*, 1972, vol. 27, no. 1, pp. 85–155.
20. Dmitrienko, V.T. and Zvyagin, V.G., Homotopy classification of a class of continuous mappings, *Math. Notes*, 1982, vol. 31, no. 5, pp. 404–410.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1429–1434

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С ДАННЫМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Т. Е. Моисеев[1], А. А. Холомеева[2]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: [1]tsmoissev@mail.ru, [2]kholomeeva@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 28.12.2023 г., после доработки 20.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследован вопрос разрешимости задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с граничными условиями, заданными на параллельных характеристиках в области гиперболичности уравнения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, краевая задача, задача Геллерстедта

DOI: 10.31857/S0374064124100119, EDN: JSPCVF

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в области $D=D^+\cup D_1\cup D_2$ уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Область эллиптичности D^+ уравнения (1) представляет собой единичный полукруг в верхней полуплоскости: $D^+=\{(r,\theta)\colon 0<r<1,\ 0<\theta<\pi\}$; $D_1\cup D_2$ — область гиперболичности, где D_1 — треугольник в нижней полуплоскости, ограниченный осью Ox и отрезками $\gamma_1=\{(x,y)\colon y=-x-1,\ -1<x<-1/2\}$, $\gamma_2=\{(x,y)\colon y=x,\ -1/2<x<0\}$, D_2 — треугольник в нижней полуплоскости, ограниченный осью Ox и отрезками $\gamma_3=\{(x,y)\colon y=-x,\ 0<x<1/2\}$, $\gamma_4=\{(x,y)\colon y=x-1,\ 1/2<x<1\}$.

Исследуем задачу типа Геллерстедта о нахождении функции

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D^+)\cap C^2(D_1)\cap C^2(D_2),$$

удовлетворяющей уравнению (1) в области D, неоднородному граничному условию на полуокружности

$$u(\cos\theta,\sin\theta)=f(\theta),\quad \theta\in[0,\pi], \tag{2}$$

где $f(\theta)$ — функция из класса Гёльдера на отрезке $[0,\pi]$, $f(\pi)=0$, и условиям на параллельных характеристиках γ_1 и γ_3:

$$u(x,y)|_{\gamma_1}=0, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{\gamma_3}=0. \tag{4}$$

Классическую постановку задачи Геллерстедта см. в книгах [1, с. 328; 2, с. 6].

На линии изменения типа уравнения (1) зададим условие непрерывности производных искомого решения по x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,-0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,+0),\quad x\in(-1,0)\cup(0,1). \tag{5}$$

На градиент искомого решения накладывается следующее условие гладкости на всём замыкании области эллиптичности, кроме концевых точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$ линии изменения типа уравнения и начала координат $O(0,0)$: $\nabla u\in C^1(\overline{D^+})$. В точках A, B, O допускается наличие степенных особенностей порядка меньше единицы у первых частных производных решения.

Кроме того, на линии изменения типа уравнения зададим условия сопряжения

$$\frac{\partial u(x,+0)}{\partial y}=-\frac{\partial u(x,-0)}{\partial y},\quad x\in(-1,\,0);\quad \frac{\partial u(x,+0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,-0)}{\partial y},\quad x\in(0,\,1). \tag{6}$$

Условия (5) и (6) представляют собой аналог классического условия Франкля склеивания решения на линии изменения типа [3]. Задачи Геллерстедта с условиями сопряжения Франкля на линии изменения типа и с данными на внутренних или внешних характеристиках были изучены в работах [4–6]. Настоящая статья является продолжением исследований, начатых в [6].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Справедлива следующая

Лемма. *Решение задачи (1)–(6) удовлетворяет условию*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,-0)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0)=0,\quad x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

Доказательство повторяет доказательство соответствующей леммы в работе [6].

Из леммы следует, что решение $u(x,y)$ задачи (1)–(6) также является решением следующей краевой задачи для уравнения Лапласа в полукруге:

$$\begin{gathered}\triangle u(x,y)=0,\quad (x,y)\in D^+;\quad u(\cos\theta,\sin\theta)=f(\theta),\quad \theta\in[0,\pi];\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}=0,\quad x\in(-1,0);\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}=0,\quad x\in(0,1).\end{gathered} \tag{7}$$

Решение задачи (7) будем искать в виде $u(x,y)=U(x,y)+V(x,y)$, где

$$U(x,y)=\frac{u(x,y)+u(-x,y)}{2},\quad V(x,y)=\frac{u(x,y)-u(-x,y)}{2},$$

т.е. функция $U(x,y)$ будет чётной по переменной x, а $V(x,y)$ — нечётной по переменной x. Тогда введённые функции будут решениями следующих краевых задач в четверти круга $D_1^+=\{(r,\theta)\colon 0<r<1,\ 0<\theta<\pi/2\}$:

$$\begin{gathered}\triangle U(x,y)=0\ \text{ в }\ D_1^+,\quad U(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{f(\theta)+f(\pi-\theta)}{2},\quad \theta\in[0,\pi/2],\\ \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\quad y\in(0,1),\quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}=0,\quad x\in(0,1);\end{gathered} \tag{8}$$

$$\triangle V(x,y)=0 \text{ в } D_1^+,\quad V(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{f(\theta)-f(\pi-\theta)}{2},\quad \theta\in[0,\pi/2],$$
$$V(0,y)=0,\quad y\in(0,1),\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}=0,\quad x\in(0,1). \tag{9}$$

В полярной системе координат задачи (8) и (9) соответственно будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}=0 \text{ в } D_1^+,\quad U(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{f(\theta)+f(\pi-\theta)}{2},\quad \theta\in[0,\pi/2],$$
$$\frac{\partial U}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pi/2}=0,\quad \left(\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=0}=0,\quad r\in(0,\ 1),$$

и

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=0 \text{ в } D_1^+,\quad V(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{f(\theta)-f(\pi-\theta)}{2},\quad \theta\in[0,\pi/2],$$
$$V|_{\theta=\pi/2}=0,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=0}=0,\quad r\in(0,1).$$

Используя метод разделения переменных, найдём решения полученных задач:

$$U(r\cos\theta,r\sin\theta)=C+\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{\alpha}\cos(\alpha(\theta-\theta_0)),$$
$$V(r\cos\theta,r\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{\beta}\sin(\beta(\theta-\theta_1)).$$

С помощью спектрального метода [7] преобразуем решение задачи (8):

$$U(r\cos\theta,r\sin\theta)=C+\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{2n+1/2}\cos\bigl((2n+1/2)(\pi/2-\theta)\bigr), \tag{10}$$

где C – произвольная постоянная, а коэффициенты A_n однозначно определяются из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\bigl((2n+1/2)(\pi/2-\theta)\bigr)=\frac{f(\theta)+f(\pi-\theta)}{2}-C,\quad \theta\in[0,\pi/2].$$

Отметим, что система косинусов в формуле (10) образует базис, в отличие от решения аналогичной задачи в работе [6], где система косинусов образует базис только вместе с константой [7].

Для нахождения коэффициентов A_n используется биортогональная система в явном виде, полученная в статье [8]. Сделаем замену переменной $\theta=(\pi-\varphi)/2$ и получим равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos((n+1/4)\varphi)=\frac{f((\pi-\varphi)/2)+f((\pi+\varphi)/2)}{2}-C=\Phi(\varphi),\quad \varphi\in[0,\pi].$$

Применяя формулы [8], вычислим коэффициенты

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\varphi)h_n(\varphi)\,d\varphi,$$

где

$$h_n(\varphi)=\frac{2\sqrt{2\cos\varphi/2}}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}C_{-1/2}^{k}\cos((n-k)\varphi)-C_{-1/2}^{n}/2\right].$$

Вернёмся к переменной θ:

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\frac{f(\theta)+f((\pi-\theta)/2)}{2}-C\right)h_n(\theta)\,d\theta,$$

здесь

$$h_n(\theta)=\frac{2\sqrt{2\sin\theta}}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}C_{-1/2}^{k}\cos(n-k)(\pi-2\theta)-C_{-1/2}^{n}/2\right].$$

Ряд (10) даёт решение задачи (8). Пространство решений соответствующей однородной задачи одномерно. Так как в силу принципа максимума и принципа Зарембы–Жиро [1, с. 26] ненулевой экстремум решения достигается только в нуле, то разность двух таких решений с одинаковыми значениями в точке $(0,0)$ тождественно равна нулю в области D^+.

Аналогично находим решение задачи (9):

$$V(r\cos\theta,r\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{2n+1/2}\sin\big((2n+1/2)(\pi/2-\theta)\big), \tag{11}$$

где коэффициенты B_n определяются из разложения

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\big((2n-1/2)(\pi/2-\theta)\big)=\frac{f(\theta)-f(\pi-\theta)}{2},\quad \theta\in[0,\pi/2].$$

Получив решение задачи в области D^+ в виде $u(x,y)=U(x,y)+V(x,y)$ и обозначив $\tau(x)=u(x,0)$, в силу непрерывности решения во всей области получим формулу для решения в области гиперболичности $D_1\cup D_2$:

$$u(x,y)=\tau(x+y)-\tau(-1).$$

Единственность построенного решения вытекает из упомянутых принципов максимума и Зарембы–Жиро для уравнения Лапласа. Решение $u(x,y)$ можно однозначно построить в виде биортогонального ряда в D^+, а далее однозначно продолжить на D_1 и D_2. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Задача (1)–(6) имеет решение, которое в области D^+ представимо в виде $u(x,y)=U(x,y)+V(x,y)$, где функции $U(x,y)$ и $V(x,y)$ определяются формулами (10) и (11) соответственно.*

Замечание 1. Из результатов работы [9] следует, что если в задаче (1)–(6) краевое условие (4) заменить на $u(x,y)|_{\gamma_3}=0$, то решение задачи существует и единственно.

Замечание 2. При $f(\theta)=0$, $\theta\in[0,\pi]$, соответствующая однородная задача (1)–(6) имеет нетривиальное решение.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00449).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
2. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М. : Наука, 1970. — 296 с.
3. Франкль, Ф.И. Новый пример плоскопараллельного околозвукового течения с прямым скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения / Ф.И. Франкль // Изв. вузов. Математика. — 1959. — № 2. — С. 244–246.
4. Моисеев, Т.Е. Задача Геллерстедта с обобщённым условием склеивания Франкля на линии изменения типа уравнения с данными на внешних характеристиках / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 2. — С. 239–246.
5. Моисеев, Т.Е. Задача Геллерстедта с неклассическими условиями склеивания градиента решения на линии изменения типа с данными на внутренних характеристиках / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1062–1068.
6. Моисеев, Е.И. О разрешимости задач Геллерстедта с данными на параллельных характеристиках / Е.И. Моисеев, Т.Е. Моисеев, А.А. Холомеева // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 10. — С. 1379–1384.
7. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1. — С. 177–179.
8. Моисеев, Е.И. О базисности систем синусов и косинусов / Е.И. Моисеев // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 4. — С. 794–798.
9. Моисеев, Т.Е. О решении задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 10. — С. 1454–1456.

ON ONE GELLERSTEDT PROBLEM WITH DATA ON PARALLEL CHARACTERISTICS

© 2024 / **T. E. Moiseev[1], A. A. Kholomeeva[2]**

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: [1]tsmoissev@mail.ru, [2]kholomeeva@cs.msu.ru

In this paper we consider the Gellerstedt problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation with boundary conditions on parallel characteristics in the hyperbolic part of the equation.

Keywords: mixed type equation, boundary value problem, Gellerstedt problem

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00449).

REFERENCES

1. Bitsadze, A.V., *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* (Some Classes of Partial Differential Equations), Moscow: Nauka, 1981.
2. Smirnov, M.M., *Uravneniya smeshannogo tipa* (Equations of the Mixed Type), Moscow: Vysshaya Shkola, 1985.
3. Frankl, F.I., New example of a plane-parallel transonic flow with a direct compression shock ending inside the flow, *Izv. vuzov*, 1959, no. 2, pp. 244–246.

4. Moiseev, T.E., Gellerstedt problem with a generalized Frankl matching condition on the type change line with data on external characteristics, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 240–247.
5. Moiseev, T.E., Gellerstedt problem with nonclassical matching conditions for the solution gradient on the type change line with data on internal characteristics, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 8, pp. 1023–1029.
6. Moiseev, E.I., Moiseev, T.E., and Kholomeeva, A.A., Solvability of the Gellerstedt problem with data on parallel characteristics, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 10, pp. 1346–1351.
7. Moiseev, E.I., On the basis property of a sine system, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 177–179.
8. Moiseev, E.I., The basis property for systems of sines and cosines, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1984, vol. 275, no. 4, pp. 794–798.
9. Moiseev, T.E., On the solution of the Gellerstedt problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Equat.*, 2012, vol. 48, no. 10, pp. 1433–1435.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1435–1440

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.98

ОБ ОЦЕНКАХ В УРАВНЕНИИ С ПАРАМЕТРОМ И РАЗРЫВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: d.potapov@spbu.ru

Поступила в редакцию 19.12.2023 г., после доработки 05.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Установлены оценки параметра и нормы разрывного нелинейного оператора для уравнения, рассматриваемого в вещественном рефлексивном банаховом пространстве. Данные оценки уточняют полученные ранее аналогичные оценки в задачах с параметром для уравнений эллиптического типа и обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.

Ключевые слова: разрывный оператор, параметр, оценки

DOI: 10.31857/S0374064124100129, EDN: JSNTUL

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения с параметром и некоторыми разрывными операторами исследованы в работах [1–3]. В данной статье будем рассматривать нелинейное уравнение с параметром и разрывным оператором в общей операторной постановке.

Пусть E – вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* – сопряжённое с E пространство, $A\colon E\to E^*$ – линейный самосопряжённый оператор, $T\colon E\to E^*$ – разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на E.

В работах [4–6] изучена проблема существования решений уравнения

$$Au=\lambda Tu \tag{1}$$

в зависимости от параметра $\lambda>0$. В [7] получена оценка сверху величины бифуркационного параметра, а в [8] рассмотрен вопрос об оценках нормы оператора A для такого уравнения с разрывным оператором T. В данной статье, являющейся продолжением этих исследований, конкретизируются оценки параметра λ и нормы оператора A в уравнении (1).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Через (z,x) будем обозначать значение функционала $z\in E^*$ на элементе $x\in E$. Приведём необходимые определения.

Определение 1. Линейный оператор $A\colon E\to E^*$ называется *самосопряжённым*, если $(Ax,h)=(Ah,x)$ для любых $x,h\in E$.

Определение 2. Оператор $A\colon E\to E^*$ называется *коэрцитивным*, если

$$(Au,u)\geqslant\alpha(\|u\|)\|u\|$$

для любого $u\in E$, где $\alpha\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ — непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция и $\lim_{t\to+\infty}\alpha(t)=+\infty$.

Определение 3. Оператор $A\colon E\to E^*$ называется *положительно определённым*, если существует постоянная $\alpha>0$ такая, что неравенство $(Au,u)\geqslant\alpha\|u\|^2$ верно для любого $u\in E$.

Определение 4. Отображение $T\colon E\to E^*$ называется *компактным* на E, если оно ограниченные множества из E переводит в предкомпактные в E^*.

Определение 5. Отображение $T\colon E\to E^*$ называется *монотонным* на E, если

$$(Tx-Ty,x-y)\geqslant 0$$

для любых $x,y\in E$.

Определение 6. Отображение $T\colon E\to E^*$ называется *антимонотонным*, если отображение $-T$ монотонно.

Определение 7. Отображение $T\colon E\to E^*$ называется *квазипотенциальным*, если существует функционал $f\colon E\to\mathbb{R}$, для которого верно равенство

$$f(x+h)-f(x)=\int\limits_0^1 (T(x+th),h)\,dt$$

для любых $x,h\in E$, при этом f называют *квазипотенциалом* оператора T.

Определение 8. Отображение $T\colon E\to E^*$ называется *ограниченным* на E, если существует постоянная $\beta>0$ такая, что $\|Tx\|\leqslant\beta$ для любого $x\in E$.

Определение 9. Элемент $x\in E$ называется *точкой разрыва* оператора $T\colon E\to E^*$, если найдётся значение $h\in E$, для которого либо $\lim_{t\to 0}(T(x+th),h)$ не существует, либо $\lim_{t\to 0}(T(x+th),h)\neq(Tx,h)$.

Определение 10. Элемент $x\in E$ называется *регулярной точкой* для оператора $T\colon E\to E^*$, если для некоторого $h\in E$ справедливо неравенство

$$\varlimsup_{t\to+0}(T(x+th),h)<0.$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) A — линейный самосопряжённый оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства E в сопряжённое пространство E^*;

2) отображение T компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом f) и ограниченное на E с константой $\beta>0$, $f(0)=0$ и для некоторого $u_0\in E$ значение $f(u_0)>0$;

3) уравнение (1) имеет ненулевое решение.

Тогда для параметра λ и нормы оператора A справедливы оценки

$$\lambda>\frac{1}{2\beta}\inf_{u\in U}\frac{(Au,u)}{\|u\|},$$

$$\frac{1}{2\beta}\|Tu\|\inf_{u\in U}\frac{(Au,u)}{\|u\|}<\|Au\|\leqslant\lambda\beta,$$

где $U=\{u\in E\colon f(u)>0\}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $U=\{u\in E\colon f(u)>0\}$. В силу условия 2) теоремы существует значение $u_0\in E$, для которого $f(u_0)>0$. Поэтому данное множество непусто.

Пусть $v\in U$. Тогда $g(\lambda)=(Av,v)/2-\lambda f(v)$ – линейная убывающая функция на $\mathbb{R}_+$, обращающаяся в нуль при $\lambda(v)=(Av,v)/(2f(v))$. Положим $\lambda_0=\lambda(v)$, $f^\lambda(v)=(Av,v)/2-\lambda f(v)$. Следовательно, для любого $\lambda>\lambda_0$ значение $f^\lambda(v)<0$.

Из квазипотенциальности и ограниченности отображения T получаем

$$f(v)=\int_0^1 (T(tv),v)\,dt \leqslant \beta\|v\|,$$

где β – положительная константа из неравенства $\|Tu\|\leqslant\beta$, справедливого для любого $u\in E$. Поэтому

$$\lambda>\frac{(Av,v)}{2f(v)}\geqslant\frac{(Av,v)}{2\beta\|v\|}.$$

Поскольку последние неравенства справедливы для произвольного $v\in U$, то

$$\lambda>\frac{1}{2\beta}\inf_{u\in U}\frac{(Au,u)}{\|u\|}.$$

Из уравнения (1) в силу ограниченности отображения T имеем

$$\|Au\|=\lambda\|Tu\|\leqslant\lambda\beta.$$

С другой стороны,

$$\|Au\|=\lambda\|Tu\|>\frac{1}{2\beta}\|Tu\|\inf_{u\in U}\frac{(Au,u)}{\|u\|}.$$

Теорема доказана.

Приведём условия, при которых выполняется условие 3) теоремы 1. Пусть пространство E представляет собой прямую сумму замкнутых подпространств $E_1=\ker A$ и E_2, причём существует постоянная $\alpha>0$ такая, что $(Au,u)\geqslant\alpha\|u\|^2$ для любого $u\in E_2$; если $E_1\neq\{0\}$, то

$$\lim_{u\in E_1,\,\|u\|\to+\infty} f(u)=-\infty;$$

для компактного отображения T выполняется неравенство

$$\lim_{t\to+0}(T(u+th)-Tu,h)\geqslant 0$$

для всех $u,h\in E$, а для антимонотонного отображения T любая точка разрыва оператора T при $\lambda>\lambda_0>0$ регулярная для $Au-\lambda Tu$. Тогда для любого $\lambda>\lambda_0$ уравнение (1) имеет ненулевое решение (см. теорему 2 из [4] и следствие 1 из [5]).

Кроме того, справедлива

Теорема 2. *Если A – положительно определённый оператор на всём пространстве E, то оператор $A-\lambda T$ коэрцитивный при любом $\lambda>0$, а если $E_1\neq\{0\}$, то оператор $A-\lambda T$ некоэрцитивный.*

Доказательство. Из положительной определённости оператора A с константой $\alpha>0$ и ограниченности отображения T с постоянной $\beta>0$ имеем

$$(Au,u)-\lambda(Tu,u)\geqslant\alpha\|u\|^2-\lambda\beta\|u\|=(\alpha\|u\|-\lambda\beta)\|u\|=\alpha(\|u\|)\|u\| \quad \text{для любого } u\in E,$$

где $\lim_{t\to+\infty}\alpha(t)=\lim_{t\to+\infty}(\alpha t-\lambda\beta)=+\infty$, т.е. оператор $A-\lambda T$ коэрцитивный на всём пространстве E.

В случае когда $E_1\neq\{0\}$ для $0\neq u\in E_1$ и $0\neq t\in\mathbb{R}$, имеем

$$\frac{(A(tu),tu)-\lambda(T(tu),tu)}{|t|\,\|u\|}=\frac{-\lambda(T(tu),tu)}{|t|\,\|u\|}\leqslant\frac{\lambda(T(tu),tu)}{|t|\,\|u\|}\leqslant\frac{\lambda\beta\|tu\|}{|t|\,\|u\|}=\lambda\beta,$$

т.е. оператор $A-\lambda T$ некоэрцитивный. Теорема доказана.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ

Если A – положительно определённый оператор, то будут справедливы соответствующие теоремы для эллиптических и обыкновенных дифференциальных уравнений в коэрцитивном случае.

Действительно, выполнение условий теоремы 1 для эллиптических краевых задач с параметром и разрывными по фазовой переменной нелинейностями проверяется аналогично тому, как это сделано в [4, 5]. Поэтому для параметра и дифференциального оператора в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями имеют место аналогичные оценки [9], уточняющие оценки из [10–14].

Применив теорему 1 к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и разрывной правой частью, получим оценки параметра и дифференциального оператора, согласующиеся с оценками из [15].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rakotoson, J.M. Generalized eigenvalue problems for totally discontinuous operators / J.M. Rakotoson // Disc. Contin. Dyn. Syst. — 2010. — V. 28, № 1. — P. 343–373.
2. Chrayteh, H. Eigenvalue problems with fully discontinuous operators and critical exponents / H. Chrayteh, J.M. Rakotoson // Nonlin. Anal. — 2010. — V. 73, № 7. — P. 2036–2055.
3. Chrayteh, H. Qualitative properties of eigenvectors related to multivalued operators and some existence results / H. Chrayteh // J. Optim. Theory Appl. — 2012. — V. 155, № 2. — P. 507–533.
4. Павленко, В.Н. О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами / В.Н. Павленко, Д.К. Потапов // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 4. — С. 911–919.
5. Потапов, Д.К. О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае / Д.К. Потапов // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. — 2004. — № 4. — С. 125–132.
6. Потапов, Д.К. О числе решений в задачах со спектральным параметром для уравнений с разрывными операторами / Д.К. Потапов // Уфимск. мат. журн. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 56–62.
7. Потапов, Д.К. Оценка бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами / Д.К. Потапов // Уфимск. мат. журн. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 43–46.
8. Потапов, Д.К. Оценивание норм оператора в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными операторами / Д.К. Потапов // Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, вып. 4. — С. 41–45.
9. Потапов, Д.К. Об эллиптических уравнениях со спектральным параметром и разрывной нелинейностью / Д.К. Потапов // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. — 2012. — Т. 5, вып. 3. — С. 417–421.
10. Bonanno, G. Some remarks on a three critical points theorem / G. Bonanno // Nonlin. Anal. — 2003. — V. 54, № 4. — P. 651–665.
11. Bonanno, G. Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities / G. Bonanno, P. Candito // J. Differ. Equat. — 2008. — V. 244, № 12. — P. 3031–3059.

12. Потапов, Д.К. Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями / Д.К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 715–716.
13. Потапов, Д.К. О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями / Д.К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 1. — С. 150–152.
14. Потапов, Д.К. Оценки дифференциального оператора в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями / Д.К. Потапов // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 268–271.
15. Потапов, Д.К. Существование решений, оценки дифференциального оператора и "разделяющее" множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью / Д.К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 970–974.

ON ESTIMATIONS IN AN EQUATION WITH A PARAMETER AND A DISCONTINUOUS OPERATOR

 D. K. Potapov

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: d.potapov@spbu.ru

In a real reflexive Banach space, an equation with a parameter and a discontinuous nonlinear operator is considered. Both parameter estimations and operator norms are found for the equation. These estimations validate and define concretely the similar estimations obtained earlier in problems with a parameter for elliptic and ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides.

Keywords: discontinuous operator, parameter, estimations

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00069).

REFERENCES

1. Rakotoson, J.M., Generalized eigenvalue problems for totally discontinuous operators, *Disc. Contin. Dyn. Syst.*, 2010, vol. 28, no. 1, pp. 343–373.
2. Chrayteh, H. and Rakotoson, J.M., Eigenvalue problems with fully discontinuous operators and critical exponents, *Nonlin. Anal.*, 2010, vol. 73, no. 7, pp. 2036–2055.
3. Chrayteh, H., Qualitative properties of eigenvectors related to multivalued operators and some existence results, *J. Optim. Theory Appl.*, 2012, vol. 155, no. 2, pp. 507–533.
4. Pavlenko, V.N. and Potapov, D.K., Existence of a ray of eigenvalues for equations with discontinuous operators, *Siberian Math. J.*, 2001, vol. 42, no. 4, pp. 766–773.
5. Potapov, D.K., On an existence of a ray of eigenvalues for equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities in a critical case, *Vestn. Saint-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inf. Protsessy Upr.*, 2004, no. 4, pp. 125–132.
6. Potapov, D.K., On a number of solutions in problems with spectral parameter for equations with discontinuous operators, *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 56–62.
7. Potapov, D.K., Estimation of the bifurcation parameter in spectral problems for equations with discontinuous operators, *Ufa Math. J.*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 42–44.
8. Potapov, D.K., Estimation of operator norms in eigenvalue problems for equations with discontinuous operators, *Izv. Saratovskogo Univ. Novaya ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 41–45.
9. Potapov, D.K., On elliptic equations with spectral parameter and discontinuous nonlinearity, *J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys.*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 417–421.
10. Bonanno, G., Some remarks on a three critical points theorem, *Nonlin. Anal.*, 2003, vol. 54, no. 4, pp. 651–665.

11. Bonanno, G. and Candito, P., Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities, *J. Differ. Equat.*, 2008, vol. 244, no. 12, pp. 3031–3059.
12. Potapov, D.K., On an upper bound for the value of the bifurcation parameter in eigenvalue problems for elliptic equations with discontinuous nonlinearities, *Differ. Equat.*, 2008, vol. 44, no. 5, pp. 737–739.
13. Potapov, D.K., On the eigenvalue set structure for higher-order equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 155–157.
14. Potapov, D.K., Estimations of a differential operator in spectral parameter problems for elliptic equations with discontinuous nonlinearities, *Vestn. Samarskogo Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010, no. 5 (21), pp. 268–271.
15. Potapov, D.K., Existence of solutions, estimates for the differential operator, and a “separating” set in a boundary value problem for a second-order differential equation with a discontinuous nonlinearity, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 967–972.