

ISSN 0374-0641

Том 60, Номер 9

Сентябрь 2024

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ • Том 60 • № 9 • 2024



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 9, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Смена устойчивости инвариантных многообразий дифференциальных систем
с разномасштабными переменными
О. С. Кипкаева, Е. А. Щепаккина 1155
-

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Существование и единственность решений нелинейных функционально-интегральных
уравнений Ито
Р. И. Кадиев, А. В. Поносов 1167
- Объёмные сингулярные интегральные уравнения для задач низкочастотного рассеяния
электромагнитных волн в анизотропных структурах
А. Б. Самохин, А. С. Самохина, И. А. Юрченко 1190
-

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- О существовании равновесия в модели Дикмана–Лоу в случае кусочно-константных ядер
М. В. Николаев, А. А. Никитин 1205
- Интегро-дифференциальные уравнения в задаче рассеяния электромагнитных волн
на диэлектрическом теле, покрытом графеном
Ю. Г. Смирнов, О. В. Кондырев 1216
-

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Построение передаточной функции оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой
полуплоскости с покрытием
А. А. Бобылев 1225
- Использование вейвлетов Хаара для решения одномерного гиперсингулярного
интегрального уравнения
Д. А. Когтенов, Н. Л. Замарашкин 1241
- Двухточечный метод коллокации численного решения одномерных гиперсингулярных
интегральных уравнений на неравномерных разбиениях
А. С. Ненашев 1261

Сходимость метода кусочно-линейных аппроксимаций и коллокаций для двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения на множестве с границей

А. В. Сетуха

1276

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928

СМЕНА УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ
МНОГООБРАЗИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ
С РАЗНОМАСШТАБНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

© 2024 г. О. С. Кипкаева¹, Е. А. Щепакина²

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

e-mail: ¹kipkaeva.os@ssau.ru, ²shchepakina@ssau.ru

Поступила в редакцию 31.05.2024 г., после доработки 31.05.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Рассмотрены инвариантные многообразия со сменой устойчивости дифференциальных систем с разномасштабными переменными, интерес к которым обусловлен их эффективным использованием при описании критических явлений в широком круге различных прикладных задач. Исследованы вопросы существования непрерывных инвариантных многообразий со сменой устойчивости в трёх критических случаях.

Ключевые слова: дифференциальная система, разномасштабные переменные, сингулярное возмущение, инвариантное многообразие, устойчивость, затягивание потери устойчивости

DOI: 10.31857/S0374064124090016, EDN: JYUGBN

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные системы с несколькими временными масштабами используются в большом количестве прикладных задач разнообразной природы [1–6]. Традиционные методы исследования таких систем не могут быть применены в критических случаях, связанных, например, с нарушением существования, единственности или непрерывности решений систем. Различным критическим случаям в дифференциальных системах с разномасштабными переменными посвящено много работ (см., например, [1, 7, 8] и библиографию в них), поскольку именно такие случаи часто являются особенно интересными с точки зрения приложений, так как связаны с критическими явлениями в моделируемых процессах.

В рамках данной работы рассматриваются три критических случая, приводящих к смене устойчивости и явлению затягивания потери устойчивости в дифференциальных системах [9–13], исследуются вопросы существования непрерывных инвариантных многообразий со сменой устойчивости для них. Первый случай связан с так называемыми *траекториями-утками* сингулярно возмущённых систем (см., например, пионерские работы [14, 15], а также [3, 5, 6, 8] и библиографию в них) и наблюдается при смене знака собственного значения матрицы Якоби быстрой подсистемы. Второй критический случай отвечает смене знака вещественной части пары комплексно-сопряжённых собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы (см. [9, 10, 12], а также обзор [13] и приведённую в нём библиографию).

Дополнительно к этим двум известным критическим случаям ниже рассматривается ещё один, связанный с переходом пары комплексно-сопряжённых собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы в пару вещественных собственных значений разных знаков.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим автономную сингулярно возмущённую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \mu, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y, \mu, \varepsilon) \quad (2)$$

с малым положительным параметром ε . Здесь x и y — векторные переменные, достаточно гладкие векторные функции f и g принимают значения, сравнимые с единицей, μ — вектор дополнительных параметров системы. Медленная и быстрая подсистемы описываются уравнениями (1) и (2) соответственно.

Во многих теоретических и прикладных задачах необходимо рассмотреть поведение системы в целом, а не её отдельных траекторий. Для исследования динамики системы эффективным инструментом являются методы теории инвариантных многообразий (см., например, работы [5, 6, 8] и библиографию в них). Напомним основные элементы этого подхода.

Определение 1. Непрерывная поверхность S_ε называется *инвариантным многообразием* системы (1), (2), если любая траектория системы, имеющая с S_ε по крайней мере одну общую точку, целиком лежит на S_ε .

В рамках данного исследования сосредоточим внимание на *медленных инвариантных многообразиях*, которые представляют собой инвариантные поверхности размерности переменной x , движение фазовой точки на которых осуществляется со скоростью порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Устойчивость или неустойчивость медленного инвариантного многообразия определяется устойчивостью или неустойчивостью его нулевого приближения ($\varepsilon = 0$) — так называемой медленной поверхности.

Определение 2. Поверхность S , описываемая уравнением

$$g(x, y, \mu, 0) = 0, \quad (3)$$

называется *медленной поверхностью*. Если её размерность равна единице, то она называется *медленной кривой*.

Пусть $y = \varphi(x, \mu)$ — изолированное решение уравнения (3).

Определение 3. Подмножество S *устойчиво*, если спектр матрицы Якоби

$$J = \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x, \mu), \mu, 0) \quad (4)$$

находится в левой открытой комплексной полуплоскости. Если есть по крайней мере одно собственное значение матрицы Якоби (4) с положительной вещественной частью, то подмножество медленной поверхности неустойчиво.

Как было отмечено выше, медленную поверхность можно рассматривать как приближение нулевого порядка медленного инвариантного многообразия. Это означает, что в ε -окрестности устойчивой части медленной поверхности существует устойчивое медленное инвариантное многообразие системы, а в ε -окрестности её неустойчивой части — неустойчивое медленное инвариантное многообразие.

Медленное инвариантное многообразие может сменить свою устойчивость в некоторых критических случаях, три из которых рассматриваются в данной работе. Как будет показано ниже, введение дополнительных условий на правые части системы позволяет построить непрерывное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости в этих критических случаях.

2. СЛУЧАЙ НУЛЕВОГО КОРНЯ

Рассмотрим систему (1), (2) со скалярным параметром μ , в которой положение равновесия быстрой подсистемы (2) становится неустойчивым с переходом одного вещественного собственного числа матрицы (4) через нулевое значение при изменении медленных переменных. Это означает, что медленное инвариантное многообразие системы теряет устойчивость, когда медленные переменные достигают поверхности (кривой или в скалярном случае точки) на S , на которой выполняется условие

$$\det \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x, \mu), \mu, 0) \right| = 0. \quad (5)$$

Частным случаем такой границы смены устойчивости является точка срыва (см. [2, с. 49; 6, § 8.2]).

Двигаясь по устойчивому медленному инвариантному многообразию и достигая поверхности (кривой или точки) срыва, фазовая точка системы срывается с медленного многообразия. Если специальным образом подобрать значение скалярного параметра μ , то удаётся склеить устойчивое и неустойчивое медленные инвариантные многообразия в одной точке поверхности срыва. При этом возникает непрерывная траектория, которая сначала проходит по устойчивому инвариантному многообразию, а затем непрерывным образом продолжает движение по неустойчивому инвариантному многообразию (оба раза проходятся расстояния порядка единицы). Такие траектории сингулярно возмущённых систем получили название *траекторий-уток* [14, 15].

Описанная техника склейки в точке срыва устойчивых и неустойчивых медленных инвариантных многообразий для построения траекторий-уток впервые была предложена в [16]. Математическое обоснование этого подхода для случая, когда медленное инвариантное многообразие системы (1), (2) может быть представлено в виде $y = h(x, \mu, \varepsilon) = \varphi(x, \mu) + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где $h(x, \mu, \varepsilon)$ является достаточно гладкой функцией от ε , а переменные x и y — скалярными, представлено в книге [5, гл. 1].

Траектории-утки и соответствующие значения параметра μ могут быть выбраны в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε . Вблизи медленной кривой траектории-утки экспоненциально близки и имеют одно и то же асимптотическое разложение по степеням ε . Аналогичное утверждение справедливо и для соответствующих значений параметров: любые два значения параметра μ , для которых существуют траектории-утки, имеют одни и те же асимптотические разложения, разница между которыми равна $\exp\{-c/\varepsilon\}$, где c — некоторое положительное число. Тогда можно констатировать единственность траектории-утки (и соответствующего значения параметра) для системы на плоскости [14, 15].

Но в случае $\dim x \geq 2$ ситуация существенно меняется: если дифференциальная система имеет траекторию-утку, то она имеет и однопараметрическое семейство траекторий-уток сразу, и выбор значения дополнительного параметра μ означает выбор точки на поверхности срыва, в которой склеены устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия. Математическое обоснование этого факта для случая $\dim x \geq 2$, $\dim y = 1$ см. в [8, гл. 8; 17].

Рассмотрим более общий случай, когда обе (медленная и быстрая) переменные являются векторами. Пусть автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым положительным параметром ε и дополнительным скалярным параметром μ для переменных x , y и z приведена с помощью стандартной процедуры исключения независимой переменной t к неавтономной форме

$$\frac{dy}{dx} = \mathcal{Y}(x, y, z_1, z_2, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_1}{dx} &= 2xz_1 + \mu + \mathcal{Z}_1(x, y, z_1, z_2, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{dz_2}{dx} &= A(x)z_2 + \mu B + \mathcal{Z}_2(x, y, z_1, z_2, \varepsilon). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь x и z_1 — скалярные переменные, $|z_1| \leq r$; $y \in \mathbb{R}^n$; $z_2 \in \mathbb{R}^m$ и $\|z_2\| \leq r$; ограниченная матрица $A(x)$ удовлетворяет условию Липшица, а её собственные числа $\lambda_i(x)$ таковы, что

$$\operatorname{Re} \lambda_i(x) \leq -2\beta < 0, \quad i = \overline{1, m};$$

B — постоянный вектор; параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| \leq \varepsilon^2 K; \tag{7}$$

непрерывные функции \mathcal{Y} , \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_2 удовлетворяют условиям

$$\|\mathcal{Y}(x, y, z_1, z_2, \varepsilon)\| \leq N, \tag{8}$$

$$|\mathcal{Z}_1(x, y, z_1, z_2, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon^2 + \varepsilon\|z\| + \|z\|^2), \tag{9}$$

$$\|\mathcal{Z}_2(x, y, z_1, z_2, \varepsilon)\| \leq M(\varepsilon^2 + \varepsilon\|z\| + \|z\|^2), \tag{10}$$

$$\|\mathcal{Y}(x, y, z_1, z_2, \varepsilon) - \mathcal{Y}(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \varepsilon)\| \leq M(\|y - \bar{y}\| + \|z - \bar{z}\|), \tag{11}$$

$$|\mathcal{Z}_1(x, y, z_1, z_2, \varepsilon) - \mathcal{Z}_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \varepsilon)| \leq M[(\varepsilon + \|\tilde{z}\|)\|z - \bar{z}\| + (\varepsilon^2 + \varepsilon\|\tilde{z}\| + \|\tilde{z}\|^2)\|y - \bar{y}\|], \tag{12}$$

$$\|\mathcal{Z}_2(x, y, z_1, z_2, \varepsilon) - \mathcal{Z}_2(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \varepsilon)\| \leq M[(\varepsilon + \|\tilde{z}\|)\|z - \bar{z}\| + (\varepsilon^2 + \varepsilon\|\tilde{z}\| + \|\tilde{z}\|^2)\|y - \bar{y}\|], \tag{13}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{z}\| = \max\{\|z\|, \|\bar{z}\|\},$$

где $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ обозначают, соответственно, модуль и норму в векторном пространстве, а константы M , N и K положительны.

Из (9) и (10) следует, что медленная поверхность (6) определяется уравнением $z \equiv 0$. Поверхность $x=0$ делит медленную поверхность на устойчивую ($x < 0$) и неустойчивую ($x > 0$) части, в ε -окрестности которых существуют, соответственно, устойчивое и неустойчивое медленные инвариантные многообразия [18–20], имеющие представление

$$z = h(x, y, \mu, \varepsilon), \quad h(x, y, \mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} h_1(x, y, \mu, \varepsilon) \\ h_2(x, y, \mu, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad h_1 \in \mathbb{R}, \quad h_2 \in \mathbb{R}^m,$$

где

$$|h_1(x, y, \mu, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{3/2}q, \quad |h_1(x, y, \mu, \varepsilon) - h_1(x, \bar{y}, \mu, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{3/2}\delta\|y - \bar{y}\|,$$

$$\|h_2(x, y, \mu, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2q, \quad \|h_2(x, y, \mu, \varepsilon) - h_2(x, \bar{y}, \mu, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2\delta\|y - \bar{y}\|, \quad q > 0, \quad \delta > 0.$$

Подходящим выбором μ выбираем точку с координатами $x=0$, $y=y^*$ на поверхности $x=0$ медленной поверхности для склейки этих многообразий. Траектория $y=\phi(x, \mu, \varepsilon)$, где $\phi(0, \mu, 0)=y^*$, после участка движения по устойчивому медленному инвариантному многообразию $z=h(x, y, \mu, \varepsilon)$ продолжает движение по неустойчивому многообразию.

Достаточные условия существования траектории-утки системы (6) сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (7)–(13). Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и q, δ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют $\mu = \mu^*(\varepsilon)$ и соответствующая $\mu^*(\varepsilon)$ траектория-утка, проходящая через точку $(x=0, y=y^*)$ медленного инвариантного многообразия.

Таким образом, траектория-утка может быть определена как одномерное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости, возникающее при особом выборе дополнительного параметра системы. Для построения многомерного инвариантного многообразия со сменой устойчивости, когда склейка устойчивого и неустойчивого многообразий осуществляется одновременно во всех точках поверхности срыва, вместо параметра μ необходима функция $\mu = \mu(y, \varepsilon)$ [8, гл. 8; 18; 19].

3. СЛУЧАЙ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Рассмотрим аналитическую быстро-медленную систему, полученную из (1), (2) перемасштабированием времени:

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, y, \mu, \varepsilon), \quad \frac{dy}{d\tau} = g(x, y, \mu, \varepsilon), \quad (14)$$

для которой особая точка уравнения быстрых движений становится неустойчивой с переходом пары собственных значений через мнимую ось при изменении медленных переменных.

Как и ранее, медленное инвариантное многообразие изменяет свою устойчивость, но, в отличие от предыдущего случая, граница устойчивости не является поверхностью (кривой или точкой) срыва, так как условие (5) не выполнено. Это означает, что траектория системы (14) не срывается с медленного инвариантного многообразия сразу же, она продолжает двигаться вдоль неустойчивой части медленной поверхности в течение времени порядка $O(\varepsilon^{-1})$ после пересечения границы устойчивости, и этот участок имеет расстояние порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Только после этого траектория срывается с медленного инвариантного многообразия и происходит переход к быстрому движению. Это явление затягивания потери устойчивости впервые было исследовано в статье [9] и в более общем случае рассмотрено в [10].

Заметим, что траектории, описанные выше, ведут себя подобно траекториям-уткам. Однако есть некоторое различие между этими двумя явлениями. Траектории-утки существуют в системах с конечной гладкостью, в то время как рассмотренное выше явление затягивания потери устойчивости происходит только в аналитических системах. Кроме того, траектории-утки относятся к редким явлениям и существуют для экспоненциально малого интервала значений дополнительного параметра, в то время как для затягивания потери устойчивости не нужно выбирать параметры. В случае затягивания потери устойчивости функция, описывающая медленное инвариантное многообразие, имеет разрыв первого рода, а в случае траектории-утки — бесконечный разрыв. Для того чтобы устранить этот разрыв первого рода с помощью построения глобального медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости, нужно выбрать пару дополнительных функций.

Рассмотрим быстро-медленную автономную систему для переменных x , y и z , которая приведена с помощью стандартной процедуры исключения независимой переменной t к неавтономной форме

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \mathcal{Y}(x, y, z, \varepsilon), \quad \frac{dz}{dx} = A(x)z + \mu(y, \varepsilon) + \mathcal{Z}(x, y, z, \mu(y, \varepsilon), \varepsilon). \quad (15)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^2$ и $\|z\| \leq r$, матрица $A(x)$ имеет вид

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2x & \nu \\ -\nu & 2x \end{pmatrix},$$

векторные функции

$$\mu(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mu_1(y, \varepsilon) \\ \mu_2(y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}(x, y, z, \mu(y, \varepsilon), \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_1(x, y, z, \mu_1(y, \varepsilon), \mu_2(y, \varepsilon), \varepsilon) \\ \mathcal{Z}_2(x, y, z, \mu_1(y, \varepsilon), \mu_2(y, \varepsilon), \varepsilon) \end{pmatrix}$$

и $\mathcal{Y}(x, y, z, \varepsilon)$ непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

$$\|\mathcal{Y}(x, y, z, \varepsilon)\| \leq N, \quad (16)$$

$$\|\mathcal{Z}(x, y, z, \mu(y, \varepsilon), \varepsilon)\| \leq M(\varepsilon + \varepsilon\|z\| + \|z\|^2), \quad (17)$$

$$\|\mathcal{Y}(x, y, z, \varepsilon) - \mathcal{Y}(x, \bar{y}, \bar{z}, \varepsilon)\| \leq M(\|y - \bar{y}\| + \|z - \bar{z}\|), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{Z}(x, y, z, \mu(y, \varepsilon), \varepsilon) - \mathcal{Z}(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\mu}(\bar{y}, \varepsilon), \varepsilon)\| \leq \\ & \leq M[(\varepsilon + \|\bar{z}\|)\|z - \bar{z}\| + (\varepsilon + \varepsilon\|\bar{z}\| + \|\bar{z}\|^2)\|y - \bar{y}\| + \varepsilon\|\mu - \bar{\mu}\|], \quad \|\bar{z}\| = \max\{\|z\|, \|\bar{z}\|\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\|\mu(y, \varepsilon)\| \leq \varepsilon K, \quad \|\mu(y, \varepsilon) - \mu(\bar{y}, \varepsilon)\| \leq \varepsilon L\|y - \bar{y}\|, \quad (20)$$

где M , N , K и L — положительные константы.

Имеет место следующая

Теорема 2 [12]. Пусть для системы (15) выполнены условия (16)–(20). Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и q, δ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют функция $\mu = \mu^*(y, \varepsilon)$ и медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости $z = h(x, y, \varepsilon)$, отвечающее $\mu^*(y, \varepsilon)$ и удовлетворяющее неравенствам

$$\|h(x, y, \varepsilon)\| \leq \varepsilon q, \quad \|h(x, y, \varepsilon) - h(x, \bar{y}, \varepsilon)\| \leq \varepsilon \delta \|y - \bar{y}\|.$$

Отметим, что в случае затягивания потери устойчивости, рассмотренном в [9, 10], склейка устойчивых и неустойчивых частей одномерного медленного инвариантного многообразия для случая $\dim y = 0$ требует два дополнительных параметра. Но для построения инвариантного многообразия со сменой устойчивости при $\dim y \geq 1$ необходима пара функций.

4. СЛУЧАЙ КРАТНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

Изучим случай, когда действительные (а также мнимые) части пары комплексно-сопряжённых собственных значений матрицы Якоби (4) обращаются в нуль одновременно, с последующим возникновением пары вещественных собственных значений разных знаков. Следует отметить, что эта бифуркация является одной из негрубых. Тогда могут возникнуть траектории, подобные траекториям-уткам. Рассмотрим этот случай на следующем примере.

Пример 1. Для системы

$$\dot{x} = 1, \quad \varepsilon \dot{y} = z, \quad \varepsilon \dot{z} = axy + bxz, \quad (21)$$

где a и b — константы, медленная кривая определяется вырожденной системой

$$z = 0, \quad axy + bxz = 0.$$

Отметим, что в данном случае медленная кривая совпадает с точным медленным инвариантным многообразием системы.

Собственные значения матрицы Якоби (4) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{bx \pm \sqrt{b^2 x^2 + 4ax}}{2}.$$

При положительных значениях a и b и $x < -4a/b^2$ собственные числа являются отрицательными вещественными, при $x \in (-4a/b^2, 0)$ — комплексно-сопряжёнными с отрицательной вещественной частью. При $x = 0$ вещественные части и коэффициенты при мнимой части этой пары комплексно-сопряжённых собственных значений одновременно обнуляются, т.е. возникает кратный нулевой корень. При $x > 0$ собственные числа становятся вещественными и имеют разные знаки. Таким образом, на интервале $x \in (-\infty, 0)$ медленное инвариантное многообразие системы (21) устойчиво, а на интервале $x \in (0, +\infty)$ — нет.

Аналогичный сценарий смены устойчивости медленным инвариантным многообразием при прохождении медленной переменной через нуль наблюдается и для $a < 0$ и $b < 0$, но уже не при возрастании x , а при убывании.

На рис. 1 и 2 продемонстрирован случай $a > 0$ и $b > 0$, а именно когда $a = 1$, $b = 1$ в системе (21), с начальными условиями $x(0) = -4.95$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1.5$ и значениями параметров $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 0.1$, $\alpha_3 = 1$, $\varepsilon = 0.01$. Ось x является точным инвариантным многообразием со сменой устойчивости. Траектория системы с начальной точкой в области влияния его устойчивой части быстро притягивается к многообразию и следует вдоль

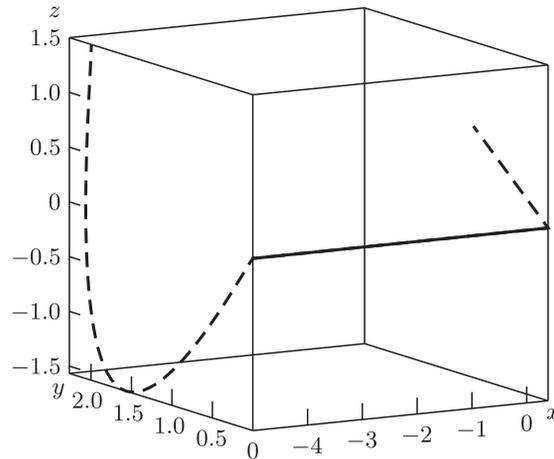


Рис. 1. Инвариантное многообразие со сменой устойчивости (сплошная линия) и траектория системы (21) (штриховая линия)

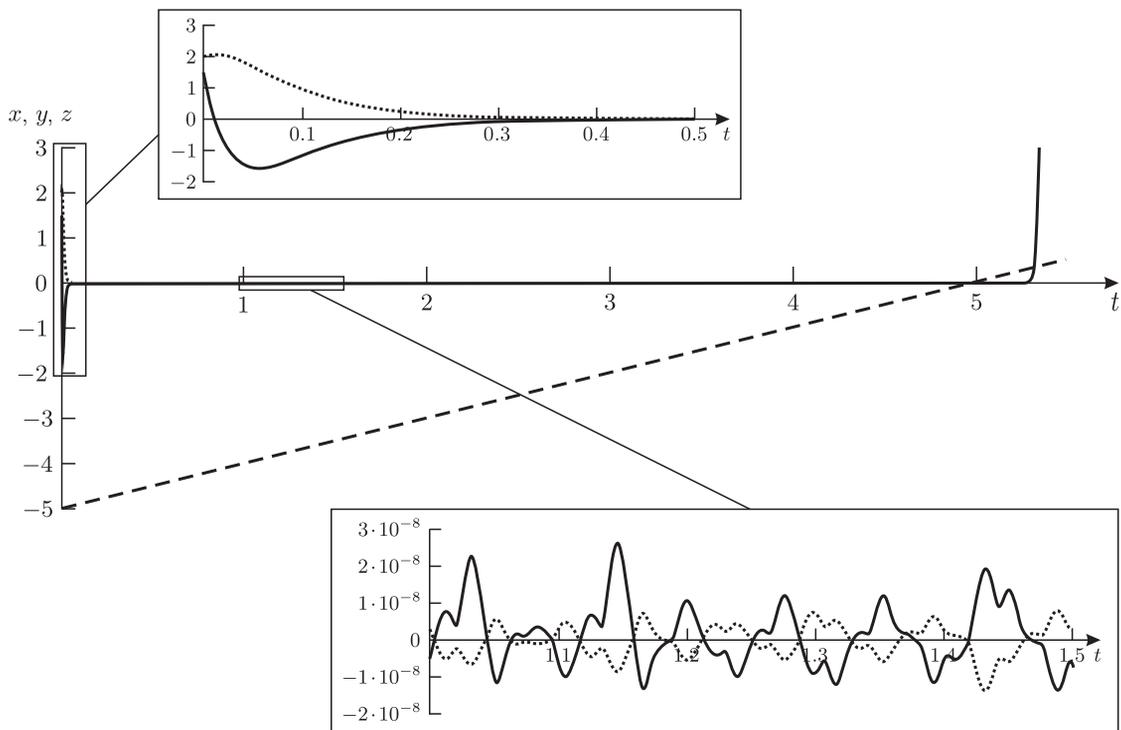


Рис. 2. Графики компонентов решения системы (21) в зависимости от времени: штриховая линия — $x(t)$, пунктирная линия — $y(t)$, сплошная линия — $z(t)$. На врезках приведены выделенные участки в увеличенном масштабе

него. При достижении $x = 0$ она попадает в область влияния неустойчивой части инвариантного многообразия, поэтому через некоторое время траектория срывается с медленного инвариантного многообразия, после чего следует участок быстрого движения.

Следующее утверждение является обобщением рассмотренного примера.

Теорема 3. *Для системы*

$$\dot{x} = 1, \quad \varepsilon \dot{y} = z, \quad \varepsilon \dot{z} = axy + bxz + f(x) + \mu, \quad (22)$$

где $f(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$, α_i ($i = \overline{0, k}$) и k — константы, существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует $\mu = \mu^*(\varepsilon)$ и точное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости

$$\begin{aligned} y &= y(x, \varepsilon) = A_0 x^{k-1} + A_1 x^{k-2} + \dots + A_{k-2} x + A_{k-1}, \\ z &= z(x, \varepsilon) = \varepsilon (A_0 (k-1) x^{k-2} + A_1 (k-2) x^{k-3} + \dots + 2A_{k-3} x + A_{k-2}), \end{aligned} \quad (23)$$

отвечающее $\mu^*(\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned} \mu^*(\varepsilon) &= -\alpha_k + \varepsilon^2 2A_{k-3}, \quad A_0 = -\alpha_0/a, \quad A_1 = -[\alpha_1 + \varepsilon b(k-1)A_0]/a, \\ A_2 &= -[\alpha_2 + \varepsilon b(k-2)A_1]/a, \quad A_3 = -[\alpha_3 + \varepsilon b(k-3)A_2 - \varepsilon^2(k-1)(k-2)A_0]/a, \\ A_4 &= -[\alpha_4 + \varepsilon b(k-4)A_3 - \varepsilon^2(k-2)(k-3)A_1]/a, \quad \dots, \quad A_{k-1} = -[\alpha_{k-1} + \varepsilon bA_{k-2} - \varepsilon^2 6A_{k-4}]/a. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как

$$\varepsilon \dot{y} = \varepsilon \frac{\partial y(x, \varepsilon)}{\partial x} \dot{x}, \quad \varepsilon \dot{z} = \varepsilon \frac{\partial z(x, \varepsilon)}{\partial x} \dot{x},$$

то из (22) с учётом уравнений инвариантности [6, с. 26] для $y = y(x, \varepsilon)$ и $z = z(x, \varepsilon)$ имеем

$$z(x, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial y(x, \varepsilon)}{\partial x}, \quad (24)$$

$$axy(x, \varepsilon) + bxz(x, \varepsilon) + f(x) + \mu(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial z(x, \varepsilon)}{\partial x}. \quad (25)$$

Подставив выражение для $y(x, \varepsilon)$ из (23) в (24), получим

$$z(x, \varepsilon) = \varepsilon (A_0 (k-1) x^{k-2} + A_1 (k-2) x^{k-3} + \dots + 2A_{k-3} x + A_{k-2}).$$

Уравнение (25) с учётом (23) принимает вид

$$\begin{aligned} & ax(A_0 x^{k-1} + A_1 x^{k-2} + \dots + A_{k-2} x + A_{k-1}) + \\ & + \varepsilon bx(A_0 (k-1) x^{k-2} + A_1 (k-2) x^{k-3} + \dots + 2A_{k-3} x + A_{k-2}) + \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k + \mu = \\ & = \varepsilon^2 (A_0 (k-1)(k-2) x^{k-3} + A_1 (k-2)(k-3) x^{k-4} + \dots + 6A_{k-4} x + 2A_{k-3}). \end{aligned} \quad (26)$$

Правые и левые части уравнения (26) представляют собой многочлены от медленной переменной x . Приравнявая коэффициенты в (26) при одинаковых степенях x , получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \text{при } x^k & \quad aA_0 + \alpha_0 = 0, \\ \text{при } x^{k-1} & \quad aA_1 + \varepsilon b(k-1)A_0 + \alpha_1 = 0, \\ \text{при } x^{k-2} & \quad aA_2 + \varepsilon b(k-2)A_1 + \alpha_2 = 0, \\ \text{при } x^{k-3} & \quad aA_3 + \varepsilon b(k-3)A_2 + \alpha_3 = \varepsilon^2(k-1)(k-2)A_0, \\ \text{при } x^{k-4} & \quad aA_4 + \varepsilon b(k-4)A_3 + \alpha_4 = \varepsilon^2(k-2)(k-3)A_1, \quad \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x & \quad aA_{k-1} + \varepsilon bA_{k-2} + \alpha_{k-1} = \varepsilon^2 6A_{k-4}, \\ \text{при } x^0 & \quad \alpha_k + \mu = \varepsilon^2 2A_{k-3}. \end{aligned} \tag{27}$$

Из последнего равенства в (27) находим

$$\mu = \mu^*(\varepsilon) = -\alpha_k + \varepsilon^2 2A_{k-3}.$$

Коэффициенты A_0, \dots, A_{k-1} однозначно определяются из остальных равенств в (27), что завершает доказательство теоремы.

Продемонстрируем утверждение теоремы 3 на следующем примере.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 1, \quad \varepsilon \dot{y} = z, \quad \varepsilon \dot{z} = axy + bxz + f(x) + \mu, \tag{28}$$

где $f(x) = \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$, α_i ($i = \overline{0, 3}$) — константы.

Вырожденная система

$$z = 0, \quad axy + bxz + f(x) + \mu = 0$$

задаёт медленную кривую системы (28). Интервалы устойчивости, а также сценарий смены устойчивости медленной кривой такие же, как и в примере 1, так как матрицы Якоби (4) систем (21) и (28) совпадают.

Для $\mu = -\alpha_3 - 2(\alpha_0/a)\varepsilon^2$ система (28) имеет траекторию, подобную траектории-утке:

$$y = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \quad z = -\varepsilon(2A_0 x + A_1), \tag{29}$$

где

$$A_0 = -\frac{\alpha_0}{a}, \quad A_1 = -\frac{\alpha_1}{a} + \varepsilon \frac{2b\alpha_0}{a^2}, \quad A_2 = -\frac{\alpha_2}{a} + \varepsilon \frac{b\alpha_1}{a^2} - \varepsilon^2 \frac{2b^2\alpha_0}{a^3}.$$

Эта траектория, соответствующая точному решению системы (28), является точным медленным инвариантным многообразием со сменой устойчивости. Но, в отличие от траектории-утки, смена устойчивости медленным инвариантным многообразием при прохождении медленной переменной через нуль связана не со сменой знака вещественного собственного числа матрицы (4), а с возникновением её кратного нулевого собственного числа.

На рис. 3 показана траектория системы (28) с начальной точкой в области влияния устойчивой части точного инвариантного многообразия (29). Как и в примере 1, эта траектория

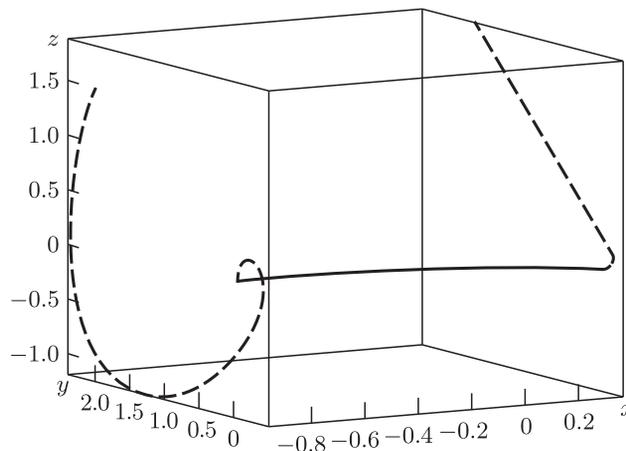


Рис. 3. Точное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости (29) (сплошная линия) и траектория системы (28) с начальным условием $x(0) = -0.95$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1.5$ (штриховая линия); $a = 1$, $b = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 0.1$, $\alpha_3 = 1$, $\varepsilon = 0.01$

быстро притягивается к многообразию и следует вдоль него. При достижении поверхности $x = 0$ она попадает в область влияния неустойчивой части инвариантного многообразия, поэтому спустя некоторое время траектория срывается с медленного инвариантного многообразия, а далее следует участок быстрого движения.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева, А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузov. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 106 с.
2. Мищенко, Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. — М. : Наука, 1975. — 247 с.
3. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах / Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Колесов, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. — М. : Физматлит, 1995. — 328 с.
4. Дмитриев, М.Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
5. Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. — М. : Физматлит, 2010. — 319 с.
6. Shchepakina, E. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell. — Cham; Berlin; Heidelberg; London : Springer, 2014. — 225 p.
7. Gu, Z.M. On singular singularly perturbed initial value problems / Z.M. Gu, N.N. Nefedov, R.E. O'Malley Jr. // SIAM J. Appl. Math. — 1989. — V. 49, № 1. — P. 1–25.
8. Singular Perturbation and Hysteresis / Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii, V.A. Sobolev. — Philadelphia : SIAM, 2005. — 360 p.
9. Шишкова, М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных / М.А. Шишкова // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 209, № 3. — С. 576–579.
10. Нейштадт, А.И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось / А.И. Нейштадт // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 5. — С. 300–301.
11. Butuzov, V.F. Singularly perturbed boundary value problems for systems of Tichonov's type in case of exchange of stabilities / V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, K.R. Schneider // J. Differ. Equat. — 1999. — V. 159, № 2. — P. 427–446.
12. Щепакина, Е.А. Два вида смены устойчивости интегральных многообразий / Е.А. Щепакина // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 713–716.
13. Нейштадт, А.И. Динамические эффекты, связанные с потерей устойчивости положений равновесия и периодических траекторий / А.И. Нейштадт, Д.В. Трещев // Успехи мат. наук. — 2021. — Т. 76, № 5. — С. 147–194.
14. Chasse au canard / E. Benoit, J.L. Callot, F. Diener, M. Diener // Collectanea Mathematica. — 1981. — V. 31–32, № 1–3. — P. 37–119.
15. Звонкин, А.К. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений / А.К. Звонкин, М.А. Шубин // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, № 2. — С. 77–127.
16. Gorelov, G.N. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory / G.N. Gorelov, V.A. Sobolev // Combustion and Flame. — 1991. — V. 87. — P. 203–210.
17. Соболев, В.А. Траектории-утки в одной задаче теории горения / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 9. — С. 1175–1184.
18. Shchepakina, E. Integral manifolds, canards and black swans / E. Shchepakina, V. Sobolev // Nonlin. Anal. A. — 2001. — V. 44. — P. 897–908.

19. Щепакина, Е.А. Медленные интегральные многообразия со сменой устойчивости в случае векторной быстрой переменной / Е.А. Щепакина // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 10. — С. 1358–1364.
20. Shchepakina, E.A. Black swans and canards in self-ignition problem / E.A. Shchepakina // Nonlin. Anal.: Real World Appl. — 2003. — V. 4. — P. 45–50.

**STABILITY CHANGE OF INVARIANT MANIFOLDS
OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH MULTI-SCALE VARIABLES**

© 2024 / O. S. Kipkaeva¹, E. A. Shchepakina²

Samara National Research University, Russia
e-mail: ¹kipkaeva.os@ssau.ru, ²shchepakina@ssau.ru

The paper considers invariant manifolds with a change in stability of differential systems with different-scale variables. The interest in such manifolds is explained by their widespread use in applied problems. The questions of the existence of continuous invariant manifolds with a change in stability are investigated in three critical cases.

Keywords: differential system, multi-scale variables, singular perturbation, invariant manifold, stability, delayed stability loss

REFERENCES

1. Vasileva, A.B. and Butuzov, V.F., *Singularly Perturbed Equations in Critical Cases*, Madison: Mathematics Research Center University of Wisconsin, 1980.
2. Mishchenko, E.F. and Rozov, N.Kh., *Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations*, New York: Plenum Press, 1980.
3. Mishchenko, E.F., Kolesov, Yu.S., Kolesov, A.Yu., and Rozov, N.Kh., *Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems*, New York: Plenum Press, 1995.
4. Dmitriev, M.G. and Kurina, G.A., Singular perturbations in control problems, *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43.
5. Sobolev, V.A. and Shchepakina, E.A., *Redukciya modelej i kriticheskie yavleniya v makrokinetike* (Reduction of models and critical phenomena in macrokinetics), Moscow: Fizmatlit, 2010.
6. Shchepakina, E., Sobolev, V., and Mortell, M.P., *Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications*, Cham; Berlin; Heidelberg; London: Springer, 2014.
7. Gu, Z.M., Nefedov, N.N., and O'Malley, R.E. Jr., On singular singularly perturbed initial value problems, *SIAM J. Appl. Math.*, 1989, vol. 49, no. 1, pp. 1–25.
8. Mortell, M.P., O'Malley, R.E., Pokrovskii, A., and Sobolev, V.A. (eds), *Singular Perturbation and Hysteresis*, Philadelphia: SIAM, 2005.
9. Shishkova, M.A., Examination of a system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1973, vol. 209, no. 3, pp. 576–579.
10. Neustadt, A.I., Asymptotic investigation of the loss of stability by an equilibrium as a pair of eigenvalues slowly cross the imaginary axis, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1985, vol. 40, pp. 190–191.
11. Butuzov, V.F., Nefedov, N.N., and Schneider, K.R., Singularly perturbed boundary value problems for systems of Tichonov's type in case of exchange of stabilities, *J. Differ. Equat.*, 1999, vol. 159, no. 2, pp. 427–446.
12. Shchepakina, E.A., Two forms of stability change for integral manifolds, *Differ. Equat.*, 2004, vol. 40, no. 5, pp. 766–769.
13. Neishtadt, A.I. and Treschev, D.V., Dynamical phenomena connected with stability loss of equilibria and periodic trajectories, *Russ. Math. Surv.*, 2021, vol. 76, no. 5, pp. 883–926.
14. Benoit, E., Callot, J.L., Diener, F., and Diener, M., Chasse au canard, *Collectanea Mathematica*, 1981, vol. 31–32, no. 1–3, pp. 37–119.
15. Zvonkin, A.K. and Shubin, M.A., Nonstandard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations, *Russ. Math. Surv.*, 1984, vol. 39, no. 2, pp. 69–131.

16. Gorelov, G.N. and Sobolev, V.A., Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory, *Combustion and Flame*, 1991, vol. 87, pp. 203–210.
17. Sobolev, V.A. and Shchepakina, E.A., Duck trajectories in a problem of combustion theory, *Differ. Equat.*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1177–1186.
18. Shchepakina, E. and Sobolev, V., Integral manifolds, canards and black swans, *Nonlin. Anal. A*, 2001, vol. 44, pp. 897–908.
19. Shchepakina, E.A., Slow integral manifolds with stability change in the case of a fast vector variable, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 10, pp. 1446–1452.
20. Shchepakina, E.A., Black swans and canards in self-ignition problem, *Nonlin. Anal.: Real World Appl.*, 2003, vol. 4, pp. 45–50.

УДК 517.968.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО

© 2024 г. Р. И. Кадиев¹, А. В. Поносов²¹Дагестанский государственный университет, г. Махачкала¹Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, г. Махачкала²Норвежский университет естественных наук, г. Ос, Норвегияe-mail: ¹kadiev_r@mail.ru, ²arkadi@nmbu.no

Поступила в редакцию 22.04.2024 г., после доработки 18.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Рассмотрен новый класс интегральных уравнений Ито, который содержит как многие классические задачи, например задачу Коши для дифференциальных уравнений целого и дробного порядков со стохастическими возмущениями и без них, так и некоторые менее известные и малоизученные виды уравнений, введенные за последнее время. Найдены достаточно общие условия, гарантирующие существование и единственность решений таких уравнений с учетом их особенностей. В статье использовано специальное обобщенное условие Липшица, которое в силу своей гибкости позволяет получать эффективные признаки разрешимости в терминах правых частей уравнений. Рассмотрены многочисленные примеры, охватывающие, в частности, дифференциальные уравнения Ито дробного порядка с последствием и без него, уравнения с дробными винеровскими процессами, уравнения Ито с несколькими шкалами времени, а также их обобщения.

Ключевые слова: стохастическое уравнение, дробная производная, последствие

DOI: 10.31857/S0374064124090027, EDN: JYISHF

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается следующее стохастическое уравнение типа Гаммерштейна с сингулярными и несингулярными ядрами и нелинейными вольтерровыми операторами:

$$x(t) = \kappa(t) + \sum_{i=1}^m \int_0^t K_i(t, s)(F_i x)(s) ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t K_{ij}(t, s)(G_{ij} x)(s) dB_i(s), \quad (1)$$

где $x(t)$, $\kappa(t)$ — случайные n -мерные процессы, B_i — независимые в совокупности скалярные винеровские процессы, K_i , K_{ij} — детерминированные борелевские функции со значениями в пространстве $n \times n$ -матриц, а F_i и G_{ij} — вольтерровы операторы, обеспечивающие зависимость решений уравнений от предыстории. Здесь первый интеграл является интегралом Лебега, а второй — интегралом Ито. В большинстве формулировок уравнение (1) предполагается заданным на конечном интервале $[0, T]$, но на самом деле все результаты, согласно следствию 1, верны и для полуоси $t \geq 0$. Точные условия на коэффициенты уравнения (1) будут приведены в п. 2.

Нелинейные детерминированные интегральные уравнения типа Гаммерштейна имеют долгую историю. Известна большая роль этих уравнений в классических задачах физики и

техники. В связи с расширением сферы приложений интегральных уравнений, в частности, к задачам биологии и математической экономики, различные обобщения уравнений Гаммерштейна становятся всё более популярными в литературе. Ниже приведён краткий обзор стохастических вариантов таких уравнений, а также их приложений. Именно этому типу уравнений Гаммерштейна в первую очередь и посвящена настоящая статья.

А. Модели с дробными производными и стохастическими возмущениями. Дифференциальные уравнения дробного порядка находят множество применений в современных областях теоретической физики, механики и прикладной математики. Это связано, в частности, с тем, что дробное математическое исчисление является основным инструментом для описания физических систем, которые обладают памятью и нелокальностью, из-за чего дифференциальные модели дробного порядка и стали популярными в приложениях. Невозможно дать полный обзор имеющейся литературы на эту тему, поэтому мы ограничимся упоминанием монографии [1]. С другой стороны, стохастические дифференциальные уравнения также описывают реальные и практически важные процессы, изучаемые современной физикой, биологией, иммунологией, экономикой, кибернетикой и т.д., поэтому многие авторы включают в уравнения дробного порядка стохастические возмущения (см., например, [2]).

Основная схема выглядит следующим образом: если детерминированное уравнение

$$({}^C D_{0+}^\alpha x)(t) = f(t, x(t)) \quad (\alpha > 0)$$

с дробной производной Капуто в его левой части подвергнуть стохастическому возмущению с помощью белого шума $\dot{B}(t)$, то получится формально записанное уравнение вида

$$({}^C D_{0+}^\alpha x)(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))\dot{B}(t)$$

или

$$d^\alpha x(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad (2)$$

где d^α — дробный дифференциал Капуто. При этом переход от (2) к корректно определённом интегральному уравнению (1) основан на формуле дробного интегрирования [1]

$$({}^C D_{0+}^\alpha x)(t) = f(t) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{x^{(k)}(0)t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds$ — гамма-функция, а $l = \alpha$, если $\alpha \in \mathbb{N}$, и $l = [\alpha] + 1$, если $\alpha \notin \mathbb{N}$. Эта формула даёт возможность перейти от дифференциальной формы (2) к интегральной

$$x(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{x^{(k)}(0)t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) dB(s),$$

и тогда под решением уравнения (2) понимается случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий этому интегральному уравнению [2].

Производную Капуто можно заменить на производную Римана–Лиувилля [1] или Жюмари [3], что влияет только на вид функции κ в соответствующем уравнении (1).

В. Модели, включающие дробные (фракционные) винеровские процессы. Этот популярный класс моделей получил развитие в первую очередь в связи с их применениями в финансовой математике (см., например, монографию [4], а также обширную библиографию в ней). Примером может служить уравнение вида

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB^\beta(t), \quad (3)$$

где B^β — дробный винеровский процесс с параметром Хёрста β ($0.5 < \beta < 1$). Заметим, что без ограничения общности можно считать B^β записанным в форме Римана–Лиувилля, так как эта форма отличается от стандартной на прогрессивно измеримый случайный процесс с абсолютно непрерывными траекториями (см., например, [5]), поэтому его можно включить в первое слагаемое в правой части уравнения (3). Это замечание позволяет записать уравнение (3) в виде интегрального уравнения (1), используя известную формулу [4]

$$\int_0^t \xi(s) dB^\beta(s) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1/2)} \int_0^t \xi(s)(t-s)^{\beta-1/2} dB(s).$$

Тогда уравнение (3) в интегральном виде будет следующим:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) dB(s),$$

где $\alpha = \beta + 1/2$. Под решением уравнения (3) понимается случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий этому интегральному уравнению, как предложено, например, в работе [6] и во многих других, чтобы избежать технических трудностей, связанных с интегрированием по дробному винеровскому процессу [4].

С. Стохастические модели с несколькими шкалами времени. Модели вида

$$dx(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t, x(t))(dt)^{\alpha_i} + g(t, x(t))dB(t) \quad (0 < \alpha_i < 1) \quad (4)$$

были впервые рассмотрены в статье [7]. Здесь $(dt)^{\alpha_i}$ — дифференциалы типа Жюмари, определяющие независимые шкалы времени $T_i(t) = t^{\alpha_i}$ (см. их описание, например, в работе [3]). Переход от (4) к интегральному уравнению (1) основан на формуле [3, 7]

$$\int_{t_0}^t \xi(t) (dt)^\alpha = \alpha \int_{t_0}^t \xi(s)(t-s)^{\alpha-1} dt,$$

что снова даёт частный случай уравнения (1):

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} f_i(s, x(s)) ds + \int_0^t g(s, x(s)) dB(s).$$

Комбинируя модели А–С, можно получить и более общие интегральные уравнения (1) с сингулярными ядрами K_i, K_{ij} вида $\text{const}(t-s)^{\alpha-1}$ ($0 < \alpha < 1$). В дополнение к работе [7] здесь можно упомянуть публикации [3, 8].

Д. Модели, включающие однородные сингулярные ядра. В этом случае в уравнении (1) предполагается, что $K_i(t, s) = K_i(t-s)$ и $K_{ij}(t, s) = K_{ij}(t-s)$. Уравнения такого типа используются в различных приложениях, например, в теории турбулентности, в моделях энергетических рынков, теории финансовых рынков и т.д. (соответствующие ссылки можно найти в работах [6, 9]).

Е. Модели, включающие обобщённые дробные производные. В статьях [10, 11] предложено обобщение дробной производной Капуто и начато изучение (детерминированных) дифференциальных уравнений с такими производными.

Пусть

$$({}^C D_{0+}^{\alpha, \psi} x)(t) = f(t, x(t)) \quad (\alpha > 0), \tag{5}$$

где

$$({}^C D_{0+}^{\alpha, \psi} x)(t) := \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{n - \alpha - 1} \left(\frac{1}{\psi'(s)} \frac{d}{ds} \right)^n x(s) ds,$$

$l = \alpha$, если $\alpha \in \mathbb{N}$, и $l = [\alpha] + 1$, если $\alpha \notin \mathbb{N}$, а $\psi'(t) > 0$. Очевидно, что $\psi(t) = t$ даёт обычную производную Капуто, но при переходе от (5) к интегральному уравнению вида (1), основанному на формуле дробного интегрирования [11]

$$({}^C D_{0+}^{\alpha, \psi} x)(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{x^{(k)}(0) (\psi(t) - \psi(0))^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} f(s) ds,$$

получаются неоднородные ядра вида $K(t, s) = \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}$ ($\alpha > 0$).

В [11] уравнения такого типа применены к задачам демографического роста.

Ф. Модели, включающие мультифракционные винеровские процессы. В работе [12] рассмотрены дробные винеровские процессы с индексом Хёрста, зависящим от времени, названные мультифракционными винеровскими процессами. В [13] изучены обыкновенные стохастические уравнения, включающие такие процессы, с целью их дальнейшего применения в финансовой математике.

Следуя [13], положим

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + dB^\theta(t), \tag{6}$$

где мультифракционный винеровский процесс $B^\theta(t)$ задан в форме Римана–Лиувилля:

$$B^\theta(t) := c(\theta(t)) \int_0^t (t-s)^{\theta(t)-1/2} dB(s),$$

$c(u)$ и $\theta(t)$ — положительные, измеримые и ограниченные скалярные функции, причём $\theta(t)$ имеет значения в замкнутом интервале $[c, d] \subset (0, 1)$. При переходе к интегральному уравнению получаем

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s)) ds + c(\theta(t)) \int_0^t (t-s)^{\theta(s)-1/2} dB(s),$$

что даёт пример неоднородных сингулярных ядер вида $K(t, s) = c(\theta(t))(t-s)^{\theta(t)-1/2}$.

Отметим, что работы [12, 13] тесно связаны с более ранней публикацией [14], где было введено понятие дробной производной Капуто переменного порядка. Соответствующие формулы дифференцирования и интегрирования, предложенные в [14], записываются следующим образом:

$$({}^C D_{0+}^{\alpha(t)} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(t)} f(s) ds \quad \text{и} \quad I_{0+}^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(t))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(t)-1} f(s) ds,$$

что приводит к детерминированным уравнениям вида

$$({}^C D_{0+}^{\alpha(t)} x)(t) = f(t, x(t)) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha(t))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(t)-1} f(s, x(s)) ds \tag{7}$$

с неоднородными ядрами $K(t, s)$. Уравнения такого типа используются в некоторых физических моделях [15].

Г. Фракционные модели с последствием. Многие математические модели, особенно в биологии и экономике, требуют учёта эффектов последствия, а следовательно, и соответствующего математического аппарата, который изложен, например, в монографии [16] в виде теории функционально-дифференциальных уравнений. Добавление стохастических возмущений приводит в этом случае к стохастическим функционально-дифференциальным уравнениям. Развивая эти идеи, мы в данной работе включили последствие в уравнение (1), рассматривая нелинейные вольтерровы операторы F_i и G_{ij} самого общего вида. Некоторые весьма частные случаи были ранее рассмотрены в работах [2] (стохастические уравнения с дифференциалом Капуто и общим последствием, т.е. уравнения вида А) и [6] (уравнения с дробным винеровским процессом и постоянным запаздыванием, т.е. уравнения вида В). Насколько известно авторам, стохастические уравнения вида С–F, отличные от обыкновенных дифференциальных уравнений, ранее не изучались.

Отметим новые аспекты статьи.

1. Рассмотрен новый широкий класс стохастических уравнений типа Гаммерштейна с сингулярными и несингулярными ядрами и нелинейными вольтерровыми операторами общего вида, который включает в себя как сравнительно более изученные классы уравнений, например, уравнения вида А или В, так и малоизученные классы, такие как уравнения вида С–F. Кроме того, в этот класс входят многие стохастические уравнения типа Гаммерштейна, не сводящиеся напрямую к каким-либо дифференциальным уравнениям.

2. Доказана теорема существования и единственности для уравнений этого нового класса, значительно обобщающая большинство известных результатов для каждого конкретного класса из списка уравнений А–F. Более подробное описание новизны полученных результатов и их детальное сравнение с ранее известными приведено в п. 4 (следствия 2–9).

3. Особое внимание в статье уделено уравнениям с последствием. Это продиктовано как многими актуальными, так и потенциальными приложениями, а также явной недооценённостью теории такого типа фракционных уравнений в литературе. Основной результат статьи (теорема 1 из п. 3) охватывает последствие самого общего вида, а в следствиях 3 и 4 обсуждаются уравнения с более конкретными видами последствия — неограниченными, распределёнными и случайными.

4. Подчеркнём, что для доказательства основных результатов нам понадобилась новая техника, которая ранее не применялась другими авторами. Прежде всего, предложенный нами метод основан на новом нестандартном условии Липшица, адаптированном к особенностям рассматриваемых уравнений, которые содержат последствие общего вида. Поэтому в нашем условии Липшица правые части уравнения содержат линейный ограниченный оператор, тогда как другие авторы при своём анализе частных случаев рассматриваемого нами общего уравнения обычно использовали стандартное условие Липшица с постоянным коэффициентом, что значительно сужает эффективность анализа даже для случая уравнений без запаздывания. Действительно, если оператор в нашем условии Липшица тождественный, то получается обычное условие Липшица не с постоянным, а с переменным коэффициентом, что позволяет охватить самый общий случай даже линейных уравнений без запаздывания всех рассматриваемых типов. Далее, применение нестандартного условия Липшица основано на вольтерровости нелинейных операторов в правой части уравнения, что необходимо для подходящего разбиения отрезка на части для получения сжимающих операторов на каждом шаге построения решения. При этом важную роль играет выбор пространств решений, так как известно, что решения фракционных уравнений являются непрерывными только при дополнительных ограничениях. Кроме того, выбор пространств существенно зависит от свойств ядер рассматриваемого уравнения Гаммерштейна.

Отметим также, что в данной работе мы рассматриваем исключительно решения, реализующиеся на исходном вероятностном пространстве, т.е. сильные решения. В связи с этим отметим важную публикацию [13], посвящённую вопросам существования (без единственности) слабых решений, т.е. решений, реализующихся на расширенном вероятностном пространстве, для некоторых частных классов дифференциальных и интегральных уравнений, относящихся к типам А, D и F.

Статья организована следующим образом. В п. 1 приведены основные обозначения и определения. Некоторые свойства линейных операторов в пространствах прогрессивно измеримых случайных процессов доказаны в п. 2. В п. 3 доказана основная теорема существования и единственности, а в п. 4 она применена к конкретным примерам уравнения (1).

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В рамках статьи следующие параметры остаются фиксированными: $n \in \mathbb{N}$ — размерность фазового пространства уравнения, т.е. размер вектора решения уравнения; $m, m_i \in \mathbb{N}$; i — индекс, удовлетворяющий условиям $1 \leq i \leq m$; j — индекс, удовлетворяющий условиям $1 \leq j \leq m_i$; $T > 0$, $p \geq 2$, $q \geq 1$, $q_i \geq 1$, $q_{ij} \geq 1$, $\alpha_i > 0$, $\alpha_{ij} > 1/2$ — действительные числа.

Используются также следующие обозначения: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$; $|\cdot|$ — фиксированная норма в \mathbb{R}^n и $\|\cdot\|$ — матричная норма, согласованная с нормой $|\cdot|$; I_A — индикатор (характеристическая функция) множества A ; $\text{Bor}(M)$ — σ -алгебра всех борелевских подмножеств метрического пространства M ; L_q^n — пространство Лебега классов эквивалентности n -мерных функций на отрезке $[0, T]$; $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ — стохастический базис, здесь Ω — множество элементарных событий, \mathcal{F} — σ -алгебра событий на Ω , $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ — непрерывный справа неубывающий поток σ -подалгебр алгебры \mathcal{F} , P — вероятностная мера на \mathcal{F} , все σ -алгебры являются полными относительно этой меры; E — математическое ожидание, построенное по мере P ; $B(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$) — скалярный стандартный винеровский процесс; $B_i(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$) — скалярные стандартные и в совокупности независимые винеровские процессы; k_p^n — линейное пространство n -мерных \mathcal{F}_0 -измеримых случайных величин χ , удовлетворяющих условию $E|\chi|^p < \infty$ (нормой $\chi \in k_p^n$ является величина $(|\chi|^p)^{1/p}$); \mathcal{D}_p^n — линейное нормированное пространство всех n -мерных прогрессивно измеримых случайных процессов $x(\cdot)$ на отрезке $[0, T]$, удовлетворяющих условию $\sup_{0 \leq t \leq T} E|x(t)|^p < \infty$ (нормой $x \in \mathcal{D}_p^n$ является величина $(\sup_{0 \leq \nu \leq T} E|x(t)|^p)^{1/p}$).

Пусть J — отрезок $[0, T]$ или полуось \mathbb{R}_+ . Напомним, что *прогрессивно измеримым* (по отношению к стохастическому базису \mathcal{B}) называется случайный процесс $x(t, \omega)$ ($t \in J$, $\omega \in \Omega$), сужение которого на множество $[0, v] \times \Omega$ является $\text{Bor}([0, v]) \otimes \mathcal{F}_v$ -измеримым для любого $v \in J$.

Замечание 1. Строго говоря, пространство \mathcal{D}_p^n становится нормированным после отождествления случайных процессов x и y , для которых $\sup_{0 \leq \nu \leq T} E|x(t) - y(t)|^p = 0$. Поэтому все результаты о единственности в настоящей статье следует понимать именно с точки зрения этого отождествления. Кроме того, с формальной точки зрения во всех оценках \sup должен быть заменён на существенный супремум vraisup , но так как в каждом классе эквивалентности всегда найдётся функция, для которой $\sup = \text{vraisup}$, то для краткости будем использовать первое обозначение (\sup).

Отметим, что и σ -алгебры \mathcal{F}_t , и винеровские процессы заданы априори на всей полуоси \mathbb{R}_+ . Это связано с тем, что некоторые результаты об уравнении (1) и его частных случаях формулируются именно для полуоси. Если же условия утверждений приведены для отрезка $[0, T]$, то достаточно предположения, что \mathcal{F}_t и винеровские процессы заданы на этом отрезке.

Ниже используется хорошо известное неравенство (см., например, [3])

$$\left(E \left| \int_0^t f(s) dB(s) \right|^p \right)^{1/p} \leq c_p \left(E \left(\int_0^t |f(s)|^2 ds \right)^{p/2} \right)^{1/p}, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

где $f(s)$ — скалярный прогрессивно измеримый процесс с квадратично интегрируемыми на промежутке $[0, T]$ траекториями, а c_p — некоторое число, зависящее от p , но не зависящее от f и t .

Следующее определение обобщает классическое понятие детерминированного вольтеррова оператора [16].

Определение 1. Пусть J — отрезок $[0, T]$ или полуось \mathbb{R}_+ , а \mathcal{X}, \mathcal{Y} — два линейных пространства прогрессивно измеримых случайных процессов на J . Оператор $\mathcal{V}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется *вольтерровым*, если для любого момента остановки τ такого, что $\tau(t) \in J$ почти наверное (п.н.), и для любых случайных процессов $x, y \in \mathcal{X}$ из того, что $x(t) = y(t)$ при $t \in [0, \tau]$ п.н., будет следовать $(\mathcal{V}x)(t) = (\mathcal{V}y)(t)$ при $t \in [0, \tau]$ п.н.

2. СВОЙСТВА АССОЦИИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим оператор распределённого запаздывания, играющий ключевую роль во многих приложениях (особенно в биологических и экологических):

$$(Hz)(t) = \int_0^t d_s \mathcal{R}(t, s) z(s). \quad (9)$$

Лемма 1. *Предположим, что функция \mathcal{R} удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) значения $\mathcal{R}(t, s)$ ($0 \leq s \leq t \leq T$) являются $n' \times n$ -матрицами;
- 2) $\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$ является измеримой по Борелю;
- 3) $\sup_{0 \leq t \leq T} \text{Var}_0^t \mathcal{R}(t, \cdot) < \infty$.

Тогда оператор (9) является линейным ограниченным и вольтерровым оператором, действующим из пространства \mathcal{D}_p^n в пространство $\mathcal{D}_p^{n'}$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для случая $n = n' = 1$, предположив, что $(Hz)(t) = \int_0^t z(s) d_s \mathcal{R}(t, s)$, где $\mathcal{R}(t, s)$ — скалярная функция.

Пусть $z \in \mathcal{D}_p^1$. Легко видеть, что $(Hz)(t)$ является прогрессивно измеримым случайным процессом на отрезке $[0, T]$. Далее, положив $\text{Var}_0^t[\mathcal{R}(t, \cdot)](s) \equiv \bar{\mathcal{R}}(t, s)$, получим

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} E \left| \int_0^t z(s) d_s \mathcal{R}(t, s) \right|^p &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left(E \int_0^t |z(s)|^p d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \times \left(\int_0^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right)^{p-1} \right) \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^t E |z(s)|^p d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right) \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right)^{p-1} \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{0 \leq s \leq t} E |z(s)|^p \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right) \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right)^{p-1} \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} E |x(t)|^p \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right)^p \leq \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \text{Var}_0^t \mathcal{R}(t, \cdot) \right)^p \sup_{0 \leq t \leq T} E |z(t)|^p. \end{aligned}$$

Таким образом, $H z \in \mathcal{D}_p^1$ и $\|H z\|_{\mathcal{D}_p^1} \leq C \|z\|_{\mathcal{D}_p^1}$, где $C = \sup_{0 \leq t \leq T} \text{Var}_0^t \mathcal{R}(t, \cdot) < \infty$, что доказывает ограниченность оператора H (в силу его очевидной линейности) на пространстве \mathcal{D}_p^1 . Вольтерровость оператора H очевидна. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь оператор случайного запаздывания (оператор внутренней суперпозиции согласно терминологии [16])

$$(Hz)(t) = z(h(t))I_{\{h(t) \geq 0\}}. \tag{10}$$

В детерминированных моделях функция $h(t) \leq t$ является неслучайной, но в стохастических моделях естественно предположить её случайным процессом, что накладывает определённые ограничения на её измеримость: при каждом t случайная величина $h(t)$ должна быть моментом остановки на стохастическом базисе \mathcal{B} (см. условие 2 леммы 2).

Лемма 2. *Предположим, что $h(t)$, $t \in [0, T]$, — $\text{Vor}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ -измеримая скалярная функция, удовлетворяющая условиям*

1) $h(t) \leq t$ п.н., $t \in [0, T]$;

2) $h^{-1}(B) \in \text{Vor}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_v$ для любого $v \in [0, T]$ и любого борелевского множества $B \subset (-\infty, v]$.

Тогда (10) является линейным ограниченным и вольтерровым оператором в пространстве \mathcal{D}_p^n .

Доказательство. Достаточно проверить утверждение для $n = 1$. Пусть $z \in \mathcal{D}_p^1$. Известно, что $(Hz)(t)$ будет прогрессивно измеримым процессом на отрезке $[0, T]$. Из оценки

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E|x(h(t))I_{\{h(t) \geq 0\}}|^p \leq \sup_{0 \leq t \leq T} E|x(t)|^p$$

следует, что $H z \in \mathcal{D}_p^1$. В силу этой же оценки и линейности оператора H он ограничен на пространстве \mathcal{D}_p^1 . Вольтерровость оператора H очевидна. Лемма доказана.

Наконец, рассмотрим два интегральных оператора, аналогичных операторам в правой части уравнения (1). Первый из них соответствует детерминированной части этого уравнения:

$$(Kz)(t) = \int_0^t K(t, s)z(s) ds. \tag{11}$$

Лемма 3. *Пусть функция K удовлетворяет следующим условиям:*

1) значения $K(t, s)$ ($0 \leq s, t \leq T$) являются $n \times n$ -матрицами;

2) является детерминированной и измеримой по Борелю;

3) $C := \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K(t, s)\| ds < \infty$.

Тогда оператор (11) — линейный ограниченный и вольтерров оператор в пространстве \mathcal{D}_p^n с нормой, не превосходящей C .

Доказательство. Пусть $z \in \mathcal{D}_p^n$. Тогда $(Hz)(t)$ является прогрессивно измеримым случайным процессом на отрезке $[0, T]$. Применяя интегральное неравенство Минковского [17, теорема 202], получаем для любого $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \left(E \left| \int_0^t K(t, s)z(s) ds \right|^p \right)^{1/p} &\leq \int_0^t (E \|K(t, s)\|^p |z(s)|^p)^{1/p} ds \leq \int_0^t \|K(t, s)\| (E |z(s)|^p)^{1/p} ds \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq t} (E |z(s)|^p)^{1/p} \int_0^t \|K(t, s)\| ds = \left(\sup_{0 \leq s \leq t} E |z(s)|^p \right)^{1/p} \int_0^t \|K(t, s)\| ds \leq \|z\|_{\mathcal{D}_p^n} \int_0^t \|K(t, s)\| ds. \end{aligned}$$

Следовательно, $Kz \in \mathcal{D}_p^n$ и $\|Kz\|_{\mathcal{D}_p^n} \leq C \|z\|_{\mathcal{D}_p^n}$, где $C = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K(t, s)\| ds < \infty$. Так как линейность и вольтерровость оператора K очевидна, то утверждение доказано.

Рассмотрим теперь интегральный оператор, входящий в стохастическую часть уравнения (1):

$$(\mathcal{K}'z)(t) = \int_0^t K(t, s)z(s) dB(s). \quad (12)$$

Лемма 4. Пусть функция K удовлетворяет следующим условиям:

- 1) значения $K(t, s)$ ($0 \leq s, t \leq T$) являются $n \times n$ -матрицами;
- 2) является детерминированной и измеримой по Борелю;
- 3) $C := \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K(t, s)\|^2 ds < \infty$.

Тогда оператор (12) — линейный ограниченный и вольтерров оператор в пространстве \mathcal{D}_p^n с нормой, не превосходящей $c_p \sqrt{C}$, где c_p — константа из неравенства (8).

Доказательство. Пусть $z \in \mathcal{D}_p^n$. Тогда $\mathcal{K}'z$ является прогрессивно измеримым случайным процессом на отрезке $[0, T]$. Используя интегральное неравенство Минковского и неравенство (8), будем иметь

$$\begin{aligned} \left(E \left| \int_0^t K(t, s)z(s) dB(s) \right|^p \right)^{1/p} &\leq c_p \left(E \left(\int_0^t \|K(t, s)\|^2 |z(s)|^2 ds \right)^{p/2} \right)^{1/p} \leq \\ &\leq c_p \left(\int_0^t (\|K(t, s)\|^p E|z(s)|^p)^{2/p} ds \right)^{1/2} \leq c_p \sup_{0 \leq s \leq t} (E|z(s)|^p)^{1/p} \left(\int_0^t \|K(t, s)\|^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c_p \|z\|_{\mathcal{D}_p^n} \left(\int_0^t \|K(t, s)\|^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

поэтому $\mathcal{K}'z \in \mathcal{D}_p^n$ и $\|\mathcal{K}'z\|_{\mathcal{D}_p^n} \leq c_p \sqrt{C} \|z\|_{\mathcal{D}_p^n}$. Линейность и вольтерровость оператора \mathcal{K}' очевидна, что и завершает доказательство леммы.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Определим условия существования и единственности решения уравнения (1) как на конечном отрезке $[0, T]$ (см. теорему 1), так и на полуоси \mathbb{R}_+ (см. следствие 1). В первом случае под решением будем понимать случайный процесс $x \in \mathcal{D}_p^n$, удовлетворяющий (1) $P \times \mu$ -почти всюду на $[0, T]$. Во втором случае решением будет прогрессивно измеримый на \mathbb{R}_+ случайный процесс, принадлежащий при каждом T пространству \mathcal{D}_p^n и удовлетворяющий уравнению (1) $P \times \mu$ -почти всюду на \mathbb{R}_+ .

Наиболее интересным для приложений и одновременно технически наиболее сложным является случай сингулярных ядер K_i, K_{ij} , хотя полученные ниже результаты справедливы и для многих несингулярных ядер. В общем случае решения уравнений вида (1) не обязательно имеют непрерывные траектории, поэтому важной проблемой при доказательстве существования решений является выбор пространств для соответствующих операторов. Ранее нами при изучении задачи существования и единственности решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений без дробных производных и дробных винеровских процессов применялась техника функциональных контракторов, что позволило обобщить стандартные условия Липшица и охватить важные классы стохастических уравнений с последствием. Ниже также используем эти идеи.

Определение 2. Пусть вольтерров оператор V переводит случайные процессы из \mathcal{D}_p^n в прогрессивно измеримые процессы и пусть существуют линейный ограниченный оператор

$Q: \mathcal{D}_p^n \rightarrow \mathcal{D}_p^n$ и измеримая детерминированная функция $\Psi(t) \geq 0, t \in [0, T]$, для которых выполняется неравенство

$$|(Vx)(t) - (Vy)(t)| \leq \Psi(t)|(Q(x - y))(t)| \tag{13}$$

при всех $x, y \in \mathcal{D}_p^n$ и μ -почти всех $t \in [0, T]$. Тогда будем говорить, что оператор V удовлетворяет обобщённому условию Липшица с оператором Q и функцией Ψ .

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. Пусть для уравнения (1) выполняются следующие условия на отрезке $[0, T]$:

- 1) $\kappa \in \mathcal{D}_p^n$;
- 2) операторы F_i, G_{ij} удовлетворяют обобщённым условиям Липшица с линейными ограниченными операторами $Q_i, Q_{ij}: \mathcal{D}_p^n \rightarrow \mathcal{D}_p^n$ и функциями $\Psi_i \in L^1_{q_i}, \Psi_{ij} \in L^1_{2q_{ij}}$ соответственно;
- 3) $F_i \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n, G_{ij} \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$, где $\hat{0}$ – нулевой элемент пространства \mathcal{D}_p^n ;
- 4) константы

$$C_i := \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_i(t, s)\|^{q_i} ds < \infty, \quad C_{ij} := \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_{ij}(t, s)\|^{2q_{ij}} ds < \infty.$$

Тогда это уравнение имеет единственное решение, принадлежащее пространству \mathcal{D}_p^n .

Установим сначала справедливость следующей леммы.

Лемма 5. Пусть выполнены условия 2)–4) теоремы 1. Тогда для любых действительных чисел $a, b, 0 \leq a < b \leq T$, оператор $\mathcal{V}_{a,b}$ действует в пространстве \mathcal{D}_p^n и для любых $y_1, y_2 \in \mathcal{D}_p^n$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{V}_{a,b}y_1 - \mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} \leq \gamma_{a,b}\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_{a,b}y)(t) &:= \sum_{i=1}^m \int_0^t K_i(t, s)I_{a,b}(s)(F_iy)(s) ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t K_{ij}(t, s)I_{a,b}(s)(G_{ij}y)(s) dB_i(s), \\ \gamma_{a,b} &:= \sum_{i=1}^m C_i^{q_i-1} \|Q_i\|_{\mathcal{D}_p^n} \left(\int_a^b (\Psi_i(s))^{q_i} ds \right)^{1/q_i} + c_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij}^{q_{ij}-1} \|Q_{ij}\|_{\mathcal{D}_p^n} \left(\int_a^b (\Psi_{ij}(s))^{2q_{ij}} ds \right)^{1/2q_{ij}}, \end{aligned}$$

$I_{a,b}(t) := I_{[a,b]}, t \in [0, T]$ – индикатор отрезка $[a, b]$.

Отметим, что конечность рассматриваемых ниже интегралов Лебега и Ито заранее не предполагается, но будет автоматически вытекать из последующих оценок.

Доказательство. Воспользуемся очевидным неравенством

$$\left(E \left| \sum_{k=1}^l a_k \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^l (E|a_k|^p)^{1/p},$$

справедливым для любых n -мерных случайных величин $a_k, k = \overline{1, l}$, и получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_{a,b}y_1 - \mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} &\leq \sum_{i=1}^m \sup_{0 \leq t \leq T} \left(E \left| \int_0^t K_i(t, s)I_{a,b}(s)[(F_iy_1)(s) - (F_iy_2)(s)] ds \right|^p \right)^{1/p} + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(E \left| \int_0^t K_{ij}(t, s)I_{a,b}(s)[(G_{ij}y_1)(s) - (G_{ij}y_2)(s)] dB_i(s) \right|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Используя неравенство (8), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_{a,b}y_1 - \mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} &\leq \sum_{i=1}^m \sup_{0 \leq t \leq T} \left(E \left(\int_0^t \|K_i(t,s)\| I_{a,b}(s) |(F_i y_1)(s) - (F_i y_2)(s)| ds \right)^p \right)^{1/p} + \\ &+ c_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(E \left(\int_0^t \|K_{ij}(t,s)\|^2 I_{a,b}(s) |(G_{ij} y_1)(s) - (G_{ij} y_2)(s)|^2 ds \right)^{p/2} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

В силу обобщённого условия Липшица (13) для операторов F_i, G_{ij} имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_{a,b}y_1 - \mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} &\leq \sum_{i=1}^m \sup_{0 \leq t \leq T} \left(E \left(\int_0^t \|K_i(t,s)\| I_{a,b}(s) \psi_i(s) |(Q_i(y_1 - y_2))(s)| ds \right)^p \right)^{1/p} + \\ &+ c_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(E \left(\int_0^t \|K_{ij}(t,s)\|^2 |I_{a,b}(s)(\psi_{ij}(s))|^2 |(Q_{ij}(y_1 - y_2))(s)|^2 ds \right)^{p/2} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Лемма 3 позволяет получить оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_{a,b}y_1 - \mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} &\leq \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} \sum_{i=1}^m \|Q_i\|_{\mathcal{D}_p^n} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_i(t,s)\| I_{a,b}(s) \Psi_i(s) ds + \\ &+ c_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \|Q_{ij}\|_{\mathcal{D}_p^n} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^t \|K_{ij}(t,s)\|^2 I_{a,b}(s) (\Psi_{ij}(s))^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Наконец, из неравенства Гёльдера выводим

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{V}_{a,b}y_1 - \mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} \leq \\ &\leq \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} \sum_{i=1}^m \|Q_i\|_{\mathcal{D}_p^n} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_i(t,s)\|^{q_i-1} ds \right)^{\frac{q_i-1}{q_i}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t I_{a,b}(s) (\Psi_i(s))^{q_i} ds \right)^{\frac{1}{q_i}} + \\ &+ c_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \|Q_{ij}\|_{\mathcal{D}_p^n} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_{ij}(t,s)\|^{2q_{ij}-1} ds \right)^{\frac{q_{ij}-1}{2q_{ij}}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t I_{a,b}(s) (\Psi_{ij}(s))^{2q_{ij}} ds \right)^{\frac{1}{2q_{ij}}} \leq \\ &\leq \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} \sum_{i=1}^m C_i^{\frac{q_i-1}{q_i}} \|Q_i\|_{\mathcal{D}_p^n} \left(\int_a^b (\Psi_i(s))^{q_i} ds \right)^{\frac{1}{q_i}} + c_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij}^{\frac{q_{ij}-1}{2q_{ij}}} \|Q_{ij}\|_{\mathcal{D}_p^n} \left(\int_a^b (\Psi_{ij}(s))^{2q_{ij}} ds \right)^{\frac{1}{2q_{ij}}} = \\ &= \gamma_{a,b} \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}, \end{aligned}$$

что доказывает справедливость (14). Из неравенства (14) следует, что для проверки действия оператора $\mathcal{V}_{a,b}$ в пространстве \mathcal{D}_p^n достаточно показать, что $\mathcal{V}_{a,b}\hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$. Но это непосредственно вытекает из лемм 3 и 4, согласно которым

$$\int_0^{\cdot} K_i(\cdot, s) I_{a,b}(s) (F_i \hat{0})(s) ds \quad \text{и} \quad \int_0^{\cdot} K_{ij}(\cdot, s) I_{a,b}(s) (G_{ij} \hat{0})(s) dB_i(s)$$

принадлежат пространству \mathcal{D}_p^n , поскольку $F_i \hat{0}, G_{ij} \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$ в силу условия 3) теоремы 1. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что функция $\gamma_{a,b}$ не убывает по аргументу b , так что существует конечное разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = T$ отрезка $[0, T]$, для которого $\gamma_{t_{\nu-1}, t_\nu} < 1$ ($\nu = \overline{1, l}$). Рассмотрим последовательность операторных уравнений

$$x_\nu(t) = x_{\nu-1}(t) + (\mathcal{V}_{t_{\nu-1}, t_\nu} x_\nu)(t), \quad t \in [0, T], \quad \nu = \overline{1, l}, \tag{15}$$

где $x_0(t) = \kappa(t)$.

В силу леммы 5 и выбора последовательности $\{t_\nu\}$ операторы в правой части (15) действуют в пространстве \mathcal{D}_p^n и являются сжимающими. Поэтому мы можем итеративно построить последовательность решений $\{x_\nu\}$ такую, что $x_\nu(t)$ удовлетворяет ν -му уравнению (15) и, кроме того, $x_\nu(t) = x_{\nu-1}(t)$ на отрезке $[0, t_{\nu-1}]$. Если предположить, что $x_{\nu-1}$ удовлетворяет уравнению $x_{\nu-1} = \kappa + \mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}} x_{\nu-1}$ на отрезке $[0, T]$, то, подставив это равенство в (15), получим

$$x_\nu = \kappa + \mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}} x_{\nu-1} + \mathcal{V}_{t_{\nu-1}, t_\nu} x_\nu = \kappa + \mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}} x_\nu + \mathcal{V}_{t_{\nu-1}, t_\nu} x_\nu = \kappa + \mathcal{V}_{0, t_\nu} x_\nu$$

в силу свойства вольтерровости оператора \mathcal{V}_{0, t_ν} и совпадения $x_\nu(t)$ и $x_{\nu-1}(t)$ на отрезке $[0, t_{\nu-1}]$. По индукции заключаем, что случайный процесс $x_l \in \mathcal{D}_p^n$ удовлетворяет уравнению $x_l = \kappa + \mathcal{V}_{0, T} x_l$ на отрезке $[0, T]$. Поскольку это уравнение совпадает с уравнением (1), то существование решения доказано.

Для доказательства единственности снова применим метод индукции. Пусть уравнение $x_{\nu-1} = \kappa + \mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}} x_{\nu-1}$ имеет единственное решение в пространстве \mathcal{D}_p^n , в то время как уравнение $x_\nu = \kappa + \mathcal{V}_{0, t_\nu} x_\nu$ имеет два решения $x_\nu^{(1)}$ и $x_\nu^{(2)}$ в этом пространстве. Тогда

$$x_\nu^{(k)} = \kappa + \mathcal{V}_{0, t_\nu} x_\nu^{(k)} = \kappa + \mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}} x_\nu^{(k)} + \mathcal{V}_{t_{\nu-1}, t_\nu} x_\nu^{(k)}, \quad k = 1, 2.$$

Заметим, что $(\mathcal{V}_{t_{\nu-1}, t_\nu} x_\nu^{(k)})(t) = 0$ п.н. на отрезке $[0, t_{\nu-1}]$, так что $x_\nu^{(k)}(t) = \kappa(t) + (\mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}} x_\nu^{(k)})(t)$ п.н. при $t \in [0, t_{\nu-1}]$, $k = 1, 2$. В силу предположенной единственности имеем $x_\nu^{(1)}(t) = x_\nu^{(2)}(t) = x_{\nu-1}(t)$ п.н. при $t \in [0, t_{\nu-1}]$. Используя вольтерровость оператора $\mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}}$, получаем

$$(\mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}} x_\nu^{(1)})(t) = (\mathcal{V}_{0, t_{\nu-1}} x_\nu^{(2)})(t) := \varphi(t) \quad \text{п.н.} \quad t \in [0, t_{\nu-1}].$$

Тогда $x_\nu^{(1)}$ и $x_\nu^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям

$$x_\nu^{(k)} = \kappa + \varphi + \mathcal{V}_{t_{\nu-1}, t_\nu} x_\nu^{(k)}, \quad k = 1, 2,$$

оператор в левой части которых является сжимающим, поэтому $x_\nu^{(1)}(t) = x_\nu^{(2)}(t)$ п.н.

После l шагов мы получим единственность решения уравнения $x = \kappa + \mathcal{V}_{0, T} x$, которое совпадает с уравнением (1). Теорема 1 доказана.

Отметим, что теорема 1 существенно обобщает основной результат статьи [18], где правые части уравнения (1) не содержат последствий, а Ψ_i и Ψ_{ij} являются константами.

Сформулируем теперь утверждение теоремы 1 для случая полусоси \mathbb{R}_+ (следствие 1). С этой целью для каждого интервала $[0, T]$ введём следующие обозначения:

если X, Y — линейные пространства прогрессивно измеримых случайных процессов, заданных на \mathbb{R}_+ , то X_T, Y_T содержат все прогрессивно измеримые на $[0, T]$ случайные процессы, состоящие из сужений процессов из пространств X, Y на $[0, T]$ соответственно;

R^T — оператор расширения с $[0, T]$ на \mathbb{R}_+ ; P^T — оператор сужения с \mathbb{R}_+ на $[0, T]$; заметим, что поскольку возможны различные расширения случайных процессов с $[0, T]$ на \mathbb{R}_+ , то для определённости под расширением случайного процесса x с $[0, T]$ на \mathbb{R}_+ будем понимать случайный процесс, совпадающий с x на $[0, T]$ и равный $x(T)$ на $[T, +\infty)$;

если $\mathcal{V}: X \rightarrow Y$ — некоторый оператор и оператор R^T действует из пространства X_T в пространство X , то через \mathcal{V}^T обозначим оператор, определяемый равенством $\mathcal{V}^T = P^T \mathcal{V} R^T$; отметим, что \mathcal{V}^T — оператор, действующий из пространства X_T в пространство Y_T , и если оператор \mathcal{V} вольтерров, то оператор \mathcal{V}^T также вольтерров.

Пусть уравнение (1) задано на промежутке \mathbb{R}_+ . Рассмотрим следующее уравнение на каждом отрезке $[0, T]$:

$$x(t) = \kappa^T(t) + \sum_{i=1}^m \int_0^t K_i(t, s) (F_i^T x)(s) ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t K_{ij}(t, s) (G_{ij}^T x)(s) dB_i(s), \quad (16)$$

предполагая, что $\kappa^T := P^T \kappa \in \mathcal{D}_p^n$, $F_i^T := P^T F_i R^T: \mathcal{D}_p^n \rightarrow \mathcal{D}_p^n$, $G_{ij}^T := P^T G_{ij} R^T: \mathcal{D}_p^n \rightarrow \mathcal{D}_p^n$.

Нетрудно проверить, используя вольтерровость операторов F_i, G_{ij} , что если $x(t)$ — решение уравнения (1) на \mathbb{R}_+ такое, что $P^T x \in \mathcal{D}_p^n$, то $(P^T x)(t)$ будет решением уравнения (16), и наоборот, если $\bar{x}(t)$ — решение уравнения (16), то $x(t) := (R^T \bar{x})(t)$ будет решением уравнения (1) на \mathbb{R}_+ , удовлетворяющим на отрезке $[0, T]$ условию $P^T x \in \mathcal{D}_p^n$. Следовательно, если уравнение (16) однозначно разрешимо при любом $T \in (0, +\infty)$, то уравнение (1) будет однозначно разрешимым на \mathbb{R}_+ . Поэтому справедливо

Следствие 1. Пусть для уравнения (16) при любом $T > 0$ выполняются следующие условия:

- 1) $\kappa^T \in \mathcal{D}_p^n$;
- 2) операторы F_i^T, G_{ij}^T удовлетворяют обобщённым условиям Липшица с линейными ограниченными операторами $Q_i^T, Q_{ij}^T: \mathcal{D}_p^n \rightarrow \mathcal{D}_p^n$ и функциями $\Psi_i^T \in L_{q_i}^1, \Psi_{ij}^T \in L_{2q_{ij}}^1$ соответственно;
- 3) $F_i^T \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n, G_{ij}^T \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$, где $\hat{0}$ — нулевой элемент пространства \mathcal{D}_p^n ;
- 4) константы

$$C_i := \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_i(t, s)\|_{\frac{q_i}{q_i-1}} ds < \infty, \quad C_{ij} := \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_{ij}(t, s)\|_{\frac{2q_{ij}}{q_{ij}-1}} ds < \infty.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение на всей полуоси \mathbb{R}_+ такое, что его сужение на любой отрезок $[0, T]$ принадлежит пространству \mathcal{D}_p^n .

Условия существования и единственности решений уравнения (1) на полуоси \mathbb{R}_+ являются важными для многих задач, например, при изучении вопросов устойчивости решений этого уравнения и его частных случаев.

4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим конкретный класс уравнений вида (1). Множество, на котором доказывается существование решений, всегда предполагается конечным и равным $[0, T]$, а решение на этом промежутке — принадлежащим пространству \mathcal{D}_p^n . Отметим, что в силу следствия 1 все результаты этого пункта остаются справедливыми и для полуоси при очевидных изменениях в формулировках.

Следствие 2. Пусть в уравнении (1) $K_i(t, s) = (t-s)^{\alpha_i-1}$, $K_{ij}(t, s) = (t-s)^{\alpha_{ij}-1}$, а операторы F_i, G_{ij} удовлетворяют условиям 2), 3) теоремы 1, где

$$q_i > \max\{\alpha_i^{-1}, 1\}, \quad q_{ij} > \max\{(2\alpha_{ij}-1)^{-1}, 1\}.$$

Тогда для любого $\kappa \in \mathcal{D}_p^n$ уравнение (1) имеет единственное решение.

Следствие 2 является обобщением соответствующих результатов о дробных уравнениях из работ [2] (для конечномерного случая) и [6], хотя бы потому, что включает, например, случайные правые части и случайные запаздывания.

Доказательство. Необходимо проверить только условие 4) теоремы 1. Имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_i(t, s)\|^{q_i} ds = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t (t-s)^{(\alpha_i-1)q_i(q_i-1)^{-1}} ds = \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{t^{\beta_i}}{\beta_i} = \frac{T^{\beta_i}}{\beta_i} < \infty,$$

так как $\beta_i := (\alpha_i - 1)q_i(q_i - 1)^{-1} + 1 = (q_i\alpha_i - 1)(q_i - 1)^{-1} > 0$, и

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_{ij}(t, s)\|^{2q_{ij}} ds = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t (t-s)^{2(\alpha_{ij}-1)q_{ij}(q_{ij}-1)^{-1}} ds = \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{t^{\beta_{ij}}}{\beta_{ij}} = \frac{T^{\beta_{ij}}}{\beta_{ij}} < \infty,$$

так как $\beta_{ij} := 2(\alpha_{ij} - 1)q_{ij}(q_{ij} - 1)^{-1} + 1 = (q_{ij}(2\alpha_{ij} - 1) - 1)(q_{ij} - 1)^{-1} > 0$. Следствие доказано.

В следствиях 3 и 4 ниже речь идёт о начальной задаче для уравнений с распределёнными и случайными запаздываниями соответственно. Оба типа начальных задач являются частными случаями уравнения (1), поскольку, как будет показано, сводятся к этому уравнению с помощью техники, описанной в монографии [16].

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} x(t) = & x(0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} f_i(s, (H_i x)(s)) ds + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1} g_{ij}(s, (H_{ij} x)(s)) dB_i(s), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{17}$$

где $f_i(t, \omega, v)$, $g_{ij}(t, \omega, v)$ — n -мерные случайные функции, которые при каждом $v \in \mathbb{R}^{nl}$ прогрессивно измеримы по переменным $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, а при $P \otimes \mu$ -почти всех (t, ω) непрерывны по v , и начальное условие

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in \mathbb{R}_-, \tag{18}$$

где φ — заданный случайный процесс на \mathbb{R}_- .

Под решением $x(t)$, $t \leq T$, задачи (17), (18) понимается n -мерный случайный процесс, сужение которого на отрезок $[0, T]$ принадлежит пространству \mathcal{D}_p^n и который удовлетворяет условию (18).

Начнём с уравнения, включающего распределённое запаздывание.

Следствие 3. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) φ — $(\text{Bor}(\mathbb{R}_-) \otimes \mathcal{F}_0)$ -измеримый n -мерный случайный процесс;
- 2) существуют измеримые неотрицательные функции $\Psi_i(t)$, $\Psi_{ij}(t)$ ($t \in [0, T]$), $\Psi_i \in L_{q_i}^1$, $\Psi_{ij} \in L_{2q_{ij}}^1$, где $q_i > \max\{\alpha_i^{-1}, 1\}$, $q_{ij} > \max\{(2\alpha_{ij} - 1)^{-1}, 1\}$, для которых $P \otimes \mu$ -почти всюду справедливы неравенства

$$|f_i(t, u) - f_i(t, v)| \leq \Psi_i(t)|u - v| \quad u \quad |g_{ij}(t, u) - g_{ij}(t, v)| \leq \Psi_{ij}(t)|u - v|$$

при любых $u, v \in \mathbb{R}^{nl}$ и $t \in [0, T]$;

3) $(H_i z)(t) = \int_{-\infty}^t d_s \mathcal{R}_i(t, s) z(s)$, $(H_{ij} z)(t) = \int_{-\infty}^t d_s \mathcal{R}_{ij}(t, s) z(s)$, где борелевские функции $\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{ij}$, заданные на множестве $[0, T] \times (-\infty, t]$ и принимающие значения в пространстве $(nl) \times n$ -матриц, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \text{Var}_0^t \mathcal{R}_i(t, \cdot) < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \text{Var}_0^t \mathcal{R}_{ij}(t, \cdot) < \infty, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} E \left| f_i \left(t, \int_{-\infty}^0 d_s \mathcal{R}_i(t, s) \varphi(s) \right) \right|^p < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} E \left| g_{ij} \left(t, \int_{-\infty}^0 d_s \mathcal{R}_{ij}(t, s) \varphi(s) \right) \right|^p < \infty. \end{aligned}$$

Тогда для любого $x(0) \in k_p^n$ задача (17), (18) имеет единственное решение.

Доказательство. Покажем, как начальная задача (17), (18) может быть записана в виде уравнения (1). Для этого положим

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \in \mathbb{R}_-, \end{cases} \quad \varphi_-(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T], \\ \varphi(t), & t \in \mathbb{R}_-, \end{cases} \quad (19)$$

где $x \in [0, T]$, и определим операторы F_i и G_{ij} по формулами

$$F_i x = f_i(\cdot, H_i x_+ + H_i \varphi_-), \quad G_{ij} x = g_{ij}(\cdot, H_{ij} x_+ + H_{ij} \varphi_-). \quad (20)$$

Непосредственно из этих формул следует (см. монографию [16]), что $x \in \mathcal{D}_p^n$ является решением уравнения (1) с операторами (20), ядрами $K_i(t, s) = (t-s)^{\alpha_i-1}$, $K_{ij}(t, s) = (t-s)^{\alpha_{ij}-1}$ и случайным процессом $\kappa(t) = x(0)$ тогда и только тогда, когда процесс $x_+(t) + \varphi_-(t)$ ($t \leq T$) является решением начальной задачи (17), (18).

Для применения следствия 2 необходимо проверить выполнение условий 2), 3) теоремы 1. Пусть $x, y \in \mathcal{D}_p^n$. Из условия 3) следствия 3 и леммы 1 вытекает, что F_i и G_{ij} переводят случайные процессы из \mathcal{D}_p^n в прогрессивно измеримые процессы. Кроме того,

$$\begin{aligned} |(F_i x)(t) - (F_i y)(t)| &= |f_i(t, (H_i x_+)(t) + (H_i \varphi_-)(t)) - f_i(t, (H_i y_+)(t) + (H_i \varphi_-)(t))| \leq \\ &\leq \Psi_i(t) |(H_i x_+)(t) - (H_i y_+)(t)| = \Psi_i(t) |Q_i(x - y)(t)|, \end{aligned}$$

где операторы $(Q_i z)(t) = (H_i x_+)(t) = \int_0^t d_s \mathcal{R}_{0i}(t, s) x(s)$ удовлетворяют всем условиям леммы 1, а значит, являются линейными ограниченными операторами в пространстве \mathcal{D}_p^n . Тем самым операторы F_i удовлетворяют условию 2) теоремы 1. Аналогично доказывается, что и операторы G_{ij} , определённые формулами (20), удовлетворяют условию 2) теоремы 1.

Остаётся проверить выполнение условия 3) теоремы 1. Пусть $\hat{0}$ — нулевой элемент из \mathcal{D}_p^n . Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} E |(F_i \hat{0})(t)|^p &= \sup_{0 \leq t \leq T} E |f_i(t, (H_i \hat{0}_+)(t) + (H_i \varphi_-)(t))|^p = \\ &= \sup_{0 \leq t \leq T} E |f_i(t, (H_i \varphi_-)(t))|^p = \sup_{0 \leq t \leq T} E \left| f_i \left(t, \int_{-\infty}^0 d_s \mathcal{R}_i(t, s) \varphi(s) \right) \right|^p < \infty \end{aligned}$$

в силу условия 3). Следовательно, $F_i \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$. Аналогично проверяется, что $G_{ij} \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$, и это завершает доказательство.

Далее рассмотрим начальную задачу (17), (18) со случайными запаздываниями.

Следствие 4. Пусть выполнены условия 1), 2) следствия 3 и условие

3а) $(H_i z)(t) = (x(h_i^1(t)), \dots, x(h_i^l(t)))$, $(H_{ij} z)(t) = (x(h_{ij}^1(t)), \dots, x(h_{ij}^l(t)))$, где скалярные случайные процессы $h_i^k(t)$, $h_{ij}^k(t)$ ($k = \overline{1, l}$) удовлетворяют условиям 1), 2) леммы 2, а также условиям

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} E \left| f_i(t, \varphi(h_i^1(t))I_{\{h_i^1(t) < 0\}}, \dots, \varphi(h_i^l(t))I_{\{h_i^l(t) < 0\}} \right|^p < \infty, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} E \left| g_{ij}(t, \varphi(h_{ij}^1(t))I_{\{h_{ij}^1(t) < 0\}}, \dots, \varphi(h_{ij}^l(t))I_{\{h_{ij}^l(t) < 0\}} \right|^p < \infty. \end{aligned}$$

Тогда для любого $x(0) \in \mathcal{D}_p^n$ уравнение со случайными запаздываниями

$$\begin{aligned} x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} f_i(s, x(h_i^1(t)), \dots, x(h_i^l(t))) ds + \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})} \int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1} g_{ij}(s, x(h_{ij}^1(t)), \dots, x(h_{ij}^l(t))) dB_i(s) \quad (t \in [0, T]) \end{aligned} \quad (21)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее равенству (18).

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 3, с той лишь разницей, что линейные операторы Q_i в обобщённом условии Липшица задаются формулами $(Q_i z)(t) = (x(h_i^1(t))I_{\{h_i^1(t) \geq 0\}}, \dots, x(h_i^l(t))I_{\{h_i^l(t) \geq 0\}})$, так что они являются, как и аналогичные операторы Q_{ij} , ограниченными операторами из пространства \mathcal{D}_p^n в пространство \mathcal{D}_p^{ln} . Соотношения $F_i \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$ и $G_{ij} \hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$ непосредственно следуют из условия 3а). Следствие доказано.

Замечание 2. Условия 3) и 3а) на начальный процесс φ из следствий 3 и 4 соответственно будут выполнены, если, например, φ ограничен в существенном константой C и

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E \left(\sup_{|x| \leq C} |f_i(t, x)|^p \right) < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} E \left(\sup_{|x| \leq C} |g_{ij}(t, x)|^p \right) < \infty.$$

Однако возможны и другие комбинации ограничений на φ , f_i , g_{ij} , поэтому мы сформулировали условия 3) и 3а) в самом общем виде.

Теорема 1 приводит к новым результатам и для уравнений без запаздывания, прежде всего, нелинейных

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} f_i(s, x(s)) ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1} g_{ij}(s, x(s)) dB_i(s), \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

но также и линейных

$$\begin{aligned} x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} [A_i(s)x(s) + \tilde{f}_i(s)] ds + \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1} [A_{ij}(s)x(s) + \tilde{g}_{ij}(s)] dB_i(s), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (23)$$

так как в обоих случаях коэффициенты являются случайными.

Следствие 5. Пусть для уравнения (22) выполнены следующие условия:

1) $f_i(t, \omega, v)$, $g_{ij}(t, \omega, v)$ — n -мерные случайные функции, которые при каждом $v \in \mathbb{R}^n$ прогрессивно измеримы по переменным $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, а при $P \otimes \mu$ -почти всех (t, ω) непрерывны по v ;

2) существуют измеримые неотрицательные функции $\Psi_i(t)$, $\Psi_{ij}(t)$ ($t \in [0, T]$), $\Psi_i \in L_{q_i}^1$, $\Psi_{ij} \in L_{2q_{ij}}^1$, $q_i > \max\{\alpha_i^{-1}, 1\}$, $q_{ij} > \max\{(2\alpha_{ij} - 1)^{-1}, 1\}$, для которых $P \otimes \mu$ -почти всюду справедливы неравенства

$$|f_i(t, u) - f_i(t, v)| \leq \Psi_i(t)|u - v| \quad \text{и} \quad |g_{ij}(t, u) - g_{ij}(t, v)| \leq \Psi_{ij}(t)|u - v|$$

при любых $u, v \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [0, T]$;

3) для нулевого n -мерного вектора $\bar{0}$ справедливо $f_i(\cdot, \bar{0}) \in \mathcal{D}_p^n$, $g_{ij}(\cdot, \bar{0}) \in \mathcal{D}_p^n$.

Тогда для любого $x(0) \in k_p^n$ уравнение (22) имеет единственное решение.

Доказательство основывается на следствии 4, если положить

$$h_i^k(t) = h_{ij}^k(t) = t, \quad k = \overline{1, l}.$$

Из следствия 5 непосредственно вытекает

Следствие 6. Пусть для уравнения (23) выполнены следующие условия:

1) $A_i(\omega, t)$, $A_{ij}(\omega, t)$ — $n \times n$ -матрицы, которые являются прогрессивно измеримыми случайными процессами на отрезке $[0, T]$;

2) $P \times \mu$ -почти всюду справедливы неравенства

$$\|A_i(t)\| \leq \Psi_i(t), \quad \|A_{ij}(t)\| \leq \Psi_{ij}(t), \quad t \in [0, T],$$

для некоторых измеримых неотрицательных функций $\Psi_i(t)$, $\Psi_{ij}(t)$ на $[0, T]$, принадлежащих пространствам $L_{q_i}^1$ и $L_{2q_{ij}}^1$ соответственно, где

$$q_i > \max\{\alpha_i^{-1}, 1\}, \quad q_{ij} > \max\{(2\alpha_{ij} - 1)^{-1}, 1\};$$

3) $\hat{f}_i \in \mathcal{D}_p^n$, $\hat{g}_{ij} \in \mathcal{D}_p^n$.

Тогда для любого $x(0) \in k_p^n$ уравнение (23) имеет единственное решение.

Следствия 2–4 могут быть непосредственно применены к моделям А–С из введения и их обобщениям А*–С*, рассмотренным ниже. Для этого достаточно дословно применить формулировки этих следствий, так как операторы F_i , G_{ij} в этих моделях отличаются от соответствующих операторов в уравнении (1) и его частных случаях (17)–(22) на постоянные множители. Уравнения из А*–С* предполагаются заданными или на отрезке $[0, T]$, или на всей полуоси \mathbb{R}_+ .

Для моделей D–F из введения и их обобщений D*–F*, рассмотренных ниже, соответствующие следствия будут сформулированы явным образом.

А*. Уравнения с дробными производными, стохастическими возмущениями и последствием. Уравнение

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} (F_i x)(s) ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})} \int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1} (G_{ij} x)(s) dB_i(s) \quad (24)$$

можно рассматривать как обобщение уравнений вида (2). Следствие 2, применённое к уравнению (24), обобщает результаты статьи [2] (для случая \mathbb{R}^n).

*B**. Уравнения с последствием, включающие дробные винеровские процессы. Переход к уравнению

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t (F_i x)(s) ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\beta_{ij} + 1/2)} \int_0^t (t-s)^{\beta_{ij}-1/2} (G_{ij} x)(s) dB_i^{\beta_{ij}}(s) \quad (25)$$

от его дифференциальной версии

$$dx(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t, (H_i x)(t)) dt + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}(t, (H_{ij} x)(t)) dB_i^{\beta_{ij}}(t),$$

являющейся обобщением (3) и требующей начального условия (18), осуществляется по формулам (19) и (20). Следствие 2, применённое к уравнению (25), обобщает, в частности, результаты статьи [6] для уравнений с запаздыванием и дробным винеровским процессом.

*C**. Стохастические уравнения с последствием и несколькими шкалами времени. Рассмотрим уравнение (обобщение уравнения (4))

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} (F_i x)(s) ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t (G_{ij} x)(s) dB_i(s). \quad (26)$$

Его дифференциальным аналогом является

$$dx(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t, (H_i x)(t)) (dt)^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}(t, (H_{ij} x)(t)) dB(t)$$

с начальным условием (18). Переход к задаче (26), (18) осуществляется по формулам (19) и (20). Следствие 2, применённое к уравнению (26), обобщает результаты статей [7, 19].

*D**. Уравнения с последствием, включающие однородные сингулярные ядра. Пусть

$$x(t) = \kappa(t) + \sum_{i=1}^m \int_0^t K_i(t-s) (F_i x)(s) ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t K_{ij}(t-s) (G_{ij} x)(s) dB_i(s), \quad t \in [0, T]. \quad (27)$$

Следствие 7. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 1 и условие

4а) столбцы матриц K_i и K_{ij} принадлежат пространствам $L_{q_i(q_i-1)^{-1}}^n$ и $L_{2q_{ij}(q_{ij}-1)^{-1}}^n$ соответственно.

Тогда уравнение (27) имеет единственное решение, принадлежащее пространству \mathcal{D}_p^n .

Доказательство. В случае однородных ядер условие 4а) эквивалентно условию 4) теоремы 1, так как

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_i(t-s)\|_{\frac{q_i}{q_i-1}} ds = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_i(s)\|_{\frac{q_i}{q_i-1}} ds = \int_0^T \|K_i(s)\|_{\frac{q_i}{q_i-1}} ds < \infty,$$

и аналогично

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_{ij}(t-s)\|_{\frac{2q_{ij}}{q_{ij}-1}} ds < \infty.$$

Следствие доказано.

Следствие 7 обобщает основной результат статьи [6].

*E**. Уравнения с последствием, включающие обобщённые дробные производные. На отрезке $[0, T]$ рассмотрим уравнение (1), где

$$K_i(t, s) = \psi'_i(s)(\psi_i(t) - \psi_i(s))^{\alpha_i-1}, \quad K_{ij}(t, s) = \psi'_{ij}(s)(\psi_{ij}(t) - \psi_{ij}(s))^{\alpha_{ij}-1}, \quad (28)$$

функции ψ_i и ψ_{ij} имеют непрерывные производные на $[0, T]$, причём $\psi'_i(t) > 0$, $\psi'_{ij}(t) > 0$, $t \in [0, T]$. Очевидно, что это уравнение является, с одной стороны, стохастическим обобщением уравнения (5), а с другой — превращается в уравнение из следствия 2, если положить $\psi_i(t) = \psi_{ij}(t) = t$.

Следствие 8. Пусть операторы F_i, G_{ij} удовлетворяют условиям 2), 3) теоремы 1, где

$$q_i > \max\{\alpha_i^{-1}, 1\}, \quad q_{ij} > \max\{(2\alpha_{ij} - 1)^{-1}, 1\}.$$

Тогда для любого $\kappa \in \mathcal{D}_p^n$ уравнение (1), где K_i и K_{ij} определены формулами (28), имеет единственное решение.

Доказательство. Необходимо проверить только выполнение условия 4) из теоремы 1 для

$$C_i := \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_i(t, s)\|^{q_i} ds = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \psi'_i(s)^{q_i} (\psi_i(t) - \psi_i(s))^{q_i(\alpha_i-1)} ds.$$

Если $\alpha_i \geq 1$, то $C_i < \infty$ в силу непрерывности K_i на множестве $[0, T] \times [0, T]$.

Предположим, что $0 < \alpha_i < 1$ и зафиксируем константу $m > 0$, для которой $\psi'_i(s) \geq m > 0$, $s \in [0, T]$, $i = \overline{1, m}$, что гарантировано непрерывностью производных на этом отрезке. Тогда $\psi'_i(t)/m \geq 1$, так что

$$\left(\frac{\psi'_i(t)}{m}\right)^{q_i(\alpha_i-1)} \leq \frac{\psi'_i(t)}{m} \quad \text{и} \quad C_i \leq m^\beta \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \psi'_i(s)(\psi_i(t) - \psi_i(s))^{q_i(\alpha_i-1)} ds, \quad \beta = \frac{q_i\alpha_i - 2\alpha_i + 1}{q_i - 1}.$$

Подстановка $u = \psi_i(t) - \psi_i(s)$ позволяет вычислить интеграл, тогда

$$C_i \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{m^\beta(q_i - 1)}{q_i(\alpha_i - 1) + q_i - 1} (\psi(t) - \psi(0))^{q_i(\alpha_i-1)+1} = \frac{m^\beta(q_i - 1)}{q_i\alpha_i - 1} (\psi(T) - \psi(0))^{q_i\alpha_i-1} < \infty.$$

Аналогично показывается, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|K_{ij}(t, s)\|^{q_{ij}} ds < \infty.$$

Следствие доказано.

Следствие 8 обобщает теорему существования и единственности из статьи [11].

*F**. Уравнения с последствием, включающие мультифракционные винеровские процессы. Рассмотрим уравнение (1) на отрезке $[0, T]$, где

$$K_i(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\theta_i(t))} (t - s)^{\theta_i(t)-1} \quad \text{и} \quad K_{ij}(t, s) = c_{ij}(\theta_{ij}(t))(t - s)^{\theta_{ij}(t)-1/2}, \quad (29)$$

которое является обобщением как стохастического уравнения (6), так и детерминированного уравнения (7).

Следствие 9. Пусть $c_{ij}(u)$ ($u > 0$), $\theta_i(t)$, $\theta_{ij}(t)$ ($t \in [0, T]$) являются борелевскими ограниченными скалярными функциями, причём $\theta_i(t) \geq \alpha_i$, $\theta_{ij}(t) \geq \delta_{ij} > 0$ для всех $t \in [0, T]$. Пусть операторы F_i , G_{ij} удовлетворяют условиям 2), 3) теоремы 1, где

$$q_i > \max\{\alpha_i^{-1}, 1\}, \quad q_{ij} > \max\{(2\delta_{ij})^{-1}, 1\}.$$

Тогда для любого $\kappa \in \mathcal{D}_p^n$ уравнение (1), где K_i и K_{ij} определены формулами (29), имеет единственное решение.

Доказательство. Очевидно, что в условиях следствия функции $1/\Gamma(\theta_i(t))$ и $c_{ij}(\theta_{ij}(t))$ являются ограниченными на отрезке $[0, T]$. Рассмотрим функции $(t-s)^{\theta_i(t)-1}$ и $(t-s)^{\theta_{ij}(t)-1/2}$:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t (t-s)^{\frac{q_i(\theta_i(t)-1)}{q_i-1}} ds = \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{t^{\gamma_i(t)}}{\gamma_i(t)} \leq \frac{q_i-1}{q_i\alpha_i-1} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} t^{\gamma_i(t)} \right) < \infty, \quad \gamma_i(t) = \frac{q_i\theta_i(t)-1}{q_i-1},$$

так как $q_i\theta_i(t)-1 \geq q_i\alpha_i-1 > 0$ и

$$\frac{q_i\alpha_i-1}{q_i-1} \leq \gamma_i(t) \leq \frac{1+q_i \sup_{0 \leq t \leq T} \theta_i(t)}{q_i-1},$$

а $\theta_i(t)$ ограничены на отрезке $[0, T]$; аналогично

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t (t-s)^{\frac{2q_{ij}(\theta_{ij}(t)-1/2)}{q_{ij}-1}} ds = \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{t^{\gamma_{ij}(t)}}{\gamma_{ij}(t)} \leq \frac{q_{ij}-1}{2q_{ij}\delta_{ij}-1} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} t^{\gamma_{ij}(t)} \right) < \infty,$$

$$\gamma_{ij}(t) = \frac{2q_{ij}\theta_{ij}(t)-1}{q_{ij}-1},$$

поскольку $2q_{ij}\theta_{ij}(t)-1 \geq 2q_{ij}\delta_{ij}-1 > 0$,

$$\frac{2q_{ij}\delta_{ij}-1}{q_{ij}-1} \leq \gamma_{ij}(t) \leq \frac{1+2q_{ij} \sup_{0 \leq t \leq T} \theta_{ij}(t)}{q_{ij}-1},$$

а $\theta_{ij}(t)$ ограничены на отрезке $[0, T]$. Это завершает проверку условия 4) из теоремы 1. Остальные условия теоремы 1 и следствия 9 одинаковы.

Следствие 9 формально не обобщает результат о существовании слабых решений для уравнений, рассмотренных в статье [13], но распространяет теорему существования и единственности на уравнения значительно более общего вида.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен класс стохастических уравнений типа Гаммерштейна с сингулярными и несингулярными ядрами, включающий многие встречающиеся в литературе типы дифференциальных и интегральных уравнений с дробными дифференциалами и последствием. Доказана теорема существования и единственности, которая обобщает известные результаты для соответствующих частных классов уравнений.

В дальнейшем авторы планируют изучить вопрос о моментной непрерывности решений уравнения вида (1), а также исследовать важные для приложений задачи стохастической устойчивости для таких уравнений, используя развитый в работах [3, 20] подход, альтернативный методу функционалов Ляпунова–Разумихина.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Herrmann, R. Fractional Calculus: an Introduction for Physicists / R. Herrman. — 3rd ed. — Singapore : World Sci. Publ., 2018. — 261 p.
2. Li, Y. The existence and asymptotic behavior of solutions to fractional stochastic evolution equations with infinite delay / Y. Li, Y. Wang // J. Differ. Equat. — 2019. — V. 266. — P. 3514–3558.
3. Ponomov, A. A novel algorithm for asymptotic stability analysis of some classes of stochastic time-fractional Volterra equations / A. Ponomov, L. Idels, R.I. Kadiev // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2023. — V. 126. — Art. 107491.
4. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications./ F. Biagini, Y. Hu, B. Øksendal, T. Zhang. — London : Springer, 2008. — 330 p.
5. El Euch, O. The characteristic function of rough Heston models / O. El Euch, M. Rosenbaum // Math. Finance. — 2019. — V. 29, № 1. — P. 3–38.
6. El-Borai, M.M. On some fractional stochastic delay differential equations / M.M. El-Borai, K. El-Nadi, H.A. Fouad // Comput. Math. Appl. — 2010. — V. 59. — P. 1165–1170.
7. Pedjeu, J.-C. Stochastic fractional differential equations: modeling, method and analysis / J.-C. Pedjeu, G.S. Ladde // Chaos, Solitons, Fractals. — 2012. — V. 45. — P. 279–293.
8. Ding, X.-L. Analytical solutions for multi-time scale fractional stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and their applications / X.-L. Ding, J.J. Nieto // Entropy. — 2018. — V. 20. — Art. 63.
9. A weak solution theory for stochastic Volterra equations of convolution type / E. Abi Jaber, C. Cuchiero, M. Larsson, S. Pulido // Ann. Appl. Probab. — 2021. — V. 31, № 6. — P. 2924–2952.
10. Almeida, A. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function / A. Almeida // Comm. Nonlin. Sci. Num. Simul. — 2017. — V. 44. — P. 460–481.
11. Almeida, R. Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications / R. Almeida, A.B. Malinowska, M.T.T. Monteiro // Math. Methods Appl. Sci. — 2018. — V. 41. — Art. 336352.
12. Peltier, R.-F. Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results / R.-F. Peltier, J.L. Vehel // INRIA. — 1995. — Art. 0074045.
13. Harang, F.A. Girsanov theorem for multifractional Brownian processes / F.A. Harang, T.K. Nilssen, F.N. Proske // Int. J. Prob. Stoch. Processes. — 2022. — V. 94, № 8. — P. 1137–1165.
14. Samko, S.G. Integration and differentiation to a variable fractional order / S.G. Samko, B. Ross // Integr. Transf. Spec. Func. — 2007. — V. 1, № 4. — P. 277–300.
15. Lorenzo, C. Variable order and distributed order fractional operators / C. Lorenzo, T. Hartley // Nonlin. Dyn. — 2002. — V. 29. — P. 57–98.
16. Azbelev, N.V. Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications / N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatulina. — New York : Hindawi, 2007. — 318 p.
17. Hardy, G.H. Inequalities / G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya. — 2nd ed. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1988. — 324 p.
18. Dai, X.J. Well-posedness and EM approximations for non-Lipschitz stochastic fractional integro-differential equations / X.J. Dai, W.P. Bu, A.G. Xiao // J. Comp. Appl. Math. — 2019. — V. 356. — P. 377–390.
19. On existence and continuity results of solution for multi-time scale fractional stochastic differential equation / A. Alkhazzan, J. Wang, C. Tunc [et al.] // Qual. Th. Dynam. Sys. — 2023. — V. 22. — Art. 49.
20. Кадиев, Р.И. Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями / Р.И. Кадиев, А.В. Поносов // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 579–590.

**EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS
OF NONLINEAR FUNCTIONAL INTEGRAL ITÔ EQUATIONS**

© 2024 / R. I. Kadiev¹, A. Ponosov²

¹*Dagestan State University, Makhachkala, Dagestan*

¹*Dagestan Federal Research Center of RAS, Makhachkala, Dagestan*

²*Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway*

e-mail: ¹kadiev_r@mail.ru, ²arkadi@nmbu.no

A new class of Itô integral equations is considered, which contains many classical problems, for example, the Cauchy problem for differential equations of integer and fractional order with and without stochastic perturbations, as well as some less known and little-studied types of equations that have been introduced recently. The purpose of the study is to find sufficiently general conditions that guarantee the existence and the uniqueness of solutions to such equations, taking into account their specific features. The article therefore proposes to use a special generalized Lipschitz condition, which, due to its flexibility, allows one to obtain effective solvability criteria in terms of the right-hand sides of equations. Numerous examples are considered, covering in particular Itô differential equations of fractional order with aftereffect and without aftereffect, equations with fractional Wiener processes, Itô equations with several time scales, as well as their generalizations.

Keywords: stochastic equation, fractional derivative, aftereffect

REFERENCES

1. Herrmann, R., *Fractional Calculus: an Introduction for Physicists*, Singapore: World Sci. Publ., 2018.
2. Li, Y. and Wang, Y., The existence and asymptotic behavior of solutions to fractional stochastic evolution equations with infinite delay, *J. Differ. Equat.*, 2019, vol. 266, pp. 3514–3558.
3. Ponosov, A., Idels, L., and Kadiev, R.I., A novel algorithm for asymptotic stability analysis of some classes of stochastic time–fractional Volterra equations, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2023, vol. 126, art. 107491.
4. Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., and Zhang, T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, London: Springer, 2008.
5. El Euch, O. and Rosenbaum, M., The characteristic function of rough Heston models, *Math. Finance*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 3–38.
6. El-Borai, M.M., El-Nadi, K., and Fouad, H.A., On some fractional stochastic delay differential equations, *Comput. Math. Appl.*, 2010, vol. 59, pp. 1165–1170.
7. Pedjeu, J.-C. and Ladde, G.S., Stochastic fractional differential equations: modeling, method and analysis, *Chaos, Solitons, Fractals*, 2012, vol. 45, pp. 279–293.
8. Ding, X.-L., Ding, X.-L., and Nieto, J.J., Analytical solutions for multi–time scale fractional stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and their applications, *Entropy*, 2018, vol. 20, art. 63.
9. Abi Jaber, E., Cuchiero, C., Larsson, M., and Pulido, S., A weak solution theory for stochastic Volterra equations of convolution type, *Ann. Appl. Probab.*, 2021, vol. 31, no. 6, pp. 2924–2952.
10. Almeida, A., A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, *Comm. Nonlin. Sci. Num. Simul.*, 2017, vol. 44, pp. 460–481.
11. Almeida, R., Malinowska, A.B., and Monteiro, M.T.T., Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2018, vol. 41, art. 336352.
12. Peltier, R.-F. and Vehl, J.L., Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results, *INRIA*, 1995, art. 0074045.
13. Harang, F.A., Nilssen, T.K., and Proske, F.N., Girsanov theorem for multifractional Brownian processes, *Int. J. Prob. Stoch. Processes*, 2022, vol. 94, no. 8, pp. 1137–1165.
14. Samko, S.G. and Ross, B., Integration and differentiation to a variable fractional order, *Integr. Transf. Spec. Func.*, 2007, vol. 1, no. 4, pp. 277–300.
15. Lorenzo, C. and Hartley, T., Variable order and distributed order fractional operators, *Nonlin. Dyn.*, 2002, vol. 29, pp. 57–98.
16. Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., and Rakhmatulina, L.F., *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, New York: Hindawi, 2007.

17. Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Pólya, G., *Inequalities. 2nd ed.*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
18. Dai, X.J., Bu, W.P., and Xiao, A.G., Well-posedness and EM approximations for non-Lipschitz stochastic fractional integro-differential equations, *J. Comp. Appl. Math.*, 2019, vol. 356, pp. 377–390.
19. Alkhazzan, A., Wang, J., Tunc, C. [et al.] On existence and continuity results of solution for multi-time scale fractional stochastic differential equation, *Qual. Th. Dynam. Sys.*, 2023, vol. 22, art. 49.
20. Kadiev, R.I. and Ponosov, A.V., Positive invertibility of matrices and stability of Itô delay differential equations, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 571–582.

УДК 517.968+517.956.22

ОБЪЁМНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ НИЗКОЧАСТОТНОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУРАХ

© 2024 г. А. Б. Самохин¹, А. С. Самохина², И. А. Юрченков³^{1,3}МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва²Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москваe-mail: ¹absamokhin@yandex.ru, ²asamokhina@yandex.ru, ³yurchenkov@mirea.ru

Поступила в редакцию 18.04.2024 г., после доработки 18.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Изучен спектр интегральных операторов объёмных сингулярных интегральных уравнений, описывающих задачи низкочастотного рассеяния электромагнитных волн в ограниченных трёхмерных анизотропных структурах. Представлена в явном виде область расположения спектра оператора на комплексной плоскости для низкочастотного случая. Описан обобщённый метод простой итерации, для применения которого необходимо знание области расположения спектра оператора на комплексной плоскости. Для дискретизации интегральных уравнений применён метод коллокации на равномерной сетке, что позволило, используя быстрое дискретное преобразование Фурье, построить алгоритм быстрого умножения матрицы системы линейных уравнений на вектор. Приведены результаты численного решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: объёмное интегральное уравнение, быстрое преобразование Фурье, обобщённый метод простой итерации, спектр оператора

DOI: 10.31857/S0374064124090035, EDN: JYFDCO

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматриваются объёмные сингулярные интегральные уравнения, для решения которых можно использовать только численные методы. В этом случае интегральные уравнения должны быть аппроксимированы системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), при этом размерность матрицы СЛАУ, как правило, очень велика. Основными критериями эффективности вычислительного алгоритма решения СЛАУ являются число T арифметических операций для решения с заданной точностью и объём M требуемой памяти при реализации алгоритма. Для большинства реальных задач использование прямых методов решения СЛАУ практически невозможно, так как приводит к значительным вычислительным затратам. При использовании итерационных методов указанные критерии эффективности описываются следующими формулами:

$$M \sim M_A, \quad T \sim LT_A, \quad (1)$$

где M_A — количество элементов массива чисел, которые необходимы для алгоритма умножения матрицы СЛАУ на вектор; L — количество итераций для получения решения с заданной точностью; T_A — число арифметических операций для умножения матрицы СЛАУ на вектор. Для плотных матриц произвольного вида $M_A = N^2$, $T_A \sim N^2$. Однако для плотных матриц,

обладающих определёнными свойствами, эти величины могут быть значительно меньше. Нашей целью при построении вычислительных алгоритмов является минимизация величин L и T_A .

Ниже будем рассматривать задачи рассеяния, в которых диаметр области неоднородности (*диаметром области* называется максимальное расстояние между точками границы) значительно меньше длины волны электромагнитного поля. Тогда можно описать в явном виде область расположения спектра оператора интегрального уравнения на комплексной плоскости [1, с. 117–119; 2]. Поэтому для численного решения задачи можно использовать обобщённый метод простой итерации, который имеет в этом случае хорошую сходимость. Для дискретизации рассматриваемых интегральных уравнений будем применять метод коллокации на равномерной сетке, тогда матрица получившейся СЛАУ будет иметь структуру, близкую к теплоцевой. Далее, используя алгоритмы дискретного преобразования Фурье, получим значение T_A практически пропорциональным размерности матрицы СЛАУ. Численные результаты подтверждают эффективность предлагаемых вычислительных алгоритмов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующий класс задач электродинамики. В конечной трёхмерной области Q среда характеризуется тензор-функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, вне Q диэлектрическая проницаемость постоянна и изотропна, т.е. $\epsilon = \epsilon_0 = \text{const}$ и везде $\mu = \mu_0 = \text{const}$. Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем \vec{E}^0 с временной зависимостью в виде множителя $\exp\{-i\omega t\}$. Соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные функции \vec{E} и \vec{H} , удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_E^0, \quad \text{rot } \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} - \vec{J}_H^0 \tag{2}$$

и условию излучения на бесконечности. В уравнениях (2) \vec{J}_E^0, \vec{J}_H^0 — сторонние токи, порождающие внешнее поле \vec{E}^0 .

Поставленная задача может быть сведена к объёмному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля \vec{E} в области неоднородности Q [1, с. 22; 3]:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})\vec{E}(x) - p.v. \int_Q ((\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), \text{grad}) \text{grad } G(R) dy - \\ - k_0^2 \int_Q (\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y)G(R) dy = \vec{E}^0(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{3}$$

где символ $p.v.$ обозначает сингулярный интеграл [4, § 1], т.е. интеграл за вычетом бесконечно малого шара в окрестности точки $y = x$; $G(R)$ — функция Грина для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} G(R) = \exp\{ikR\}/(4\pi R), \quad R = |x - y|, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3); \\ \hat{\epsilon}_r = \hat{\epsilon}/\epsilon_0; \quad k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}. \end{aligned} \tag{4}$$

2. СПЕКТР ОПЕРАТОРА

Спектром оператора \hat{A} на комплексной плоскости \mathbb{C} называется множество таких точек λ , при которых оператор $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ не имеет всюду определённого обратного оператора в гильбертовом пространстве H [3]. Точки λ , при которых оператор $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ не является нётеровым оператором, принадлежат непрерывной части спектра оператора \hat{A} . Точки λ , при

которых существует нетривиальное решение уравнения $\hat{A}u - \lambda u = 0$, принадлежат дискретной части спектра оператора \hat{A} .

Запишем интегральный оператор уравнения (3) в символическом виде:

$$\hat{A}u \equiv u - \hat{S}(\hat{\varepsilon}_r - \hat{I}u), \quad (5)$$

где \hat{S} — символическая запись интегрального оператора, \hat{I} — единичный оператор, u — некоторый элемент гильбертова пространства. Очевидно, что

$$\hat{A} - \lambda \hat{I} = (1 - \lambda) \left[\hat{I} - \hat{S} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_r - \lambda \hat{I}}{1 - \lambda} - \hat{I} \right) \right]. \quad (6)$$

Из работ [2, 5] следует, что непрерывной части спектра оператора уравнения (3) принадлежит множество точек σ_1 на комплексной плоскости \mathbb{C} , определяемое формулой

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{n,m=1}^3 \varepsilon_{nm}(x) \beta_n \beta_m, \quad x \in Q, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \quad (7)$$

Из (7) ясно, что точка $\lambda = 1$ принадлежит σ_1 , поскольку (в силу гёльдер-непрерывности) на границе области Q тензор диэлектрической проницаемости становится скалярной величиной, т.е. $\varepsilon_{nm} = \delta_{nm} \varepsilon_0$.

Для изотропной среды имеем следующую формулу для точек непрерывного спектра:

$$\lambda = \varepsilon_r(x), \quad x \in Q.$$

Обозначим через σ односвязное множество на комплексной плоскости \mathbb{C} , которое содержит σ_1 и имеет среди всех односвязных множеств наименьшую меру. В работе [3] доказано, что в области $\sigma^+ = \mathbb{C} \setminus \sigma$ оператор из уравнения (3) будет фредгольмовым. Значит, точки $\lambda \in \sigma^+$ либо относятся к резольвентному множеству оператора \hat{A} , либо принадлежат дискретному спектру оператора.

В общем случае не представляется возможным достаточно точно описать область локализации дискретного спектра оператора в уравнении (3). Однако в одном частном случае, но практически очень важном, это удаётся сделать.

Будем рассматривать задачи низкочастотного рассеяния электромагнитных волн, т.е. задачи, в которых диаметр области Q значительно меньше длины волны.

Уравнение (3) имеет смысл при волновом числе $k_0 = 0$, т.е. для статического случая. Это обстоятельство принципиально отличает трёхмерные задачи от двумерных, для которых стационарные интегральные уравнения не допускают перехода к статическому случаю. Из уравнения (3) следует равенство

$$(\hat{A}(k_0) - \hat{A}(0))\vec{V} = -k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{V}(y)G(R) dy - \int_Q ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{V}(y), \text{grad}) \text{grad} G_0(R) dy, \quad (8)$$

где $\hat{A}(k_0)$ и $\hat{A}(0)$ — операторы интегральных уравнений для стационарного и статического случаев соответственно, а $G_0(R)$ определяется формулой

$$G_0(R) = \frac{\exp\{ik_0 R\} - 1}{4\pi R}.$$

Второй интегральный оператор в (8) не является сингулярным, поскольку ядро этого оператора не имеет особенностей и является гладкой функцией координат. Поэтому из (8) следует, что

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \|\hat{A}(k_0) - \hat{A}(0)\| = 0.$$

Значит, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Спектр интегрального оператора $\hat{A}(k_0)$ стремится к спектру оператора $\hat{A}(0)$, когда $k_0 \rightarrow 0$.*

Для статического случая интегро-дифференциальное уравнение, эквивалентное интегральному уравнению (3), записывается в следующем виде:

$$\vec{E}(x) - \text{grad div} \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I}) \vec{E}(y) (1/(4\pi R)) dy = \vec{E}^0(x). \tag{9}$$

Решение однородного уравнения (9) удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div}(\hat{\varepsilon}_r \vec{E}) = 0,$$

которые сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка относительно скалярной функции φ :

$$\text{div}(\hat{\varepsilon}_r \text{grad } \varphi) = 0, \tag{10}$$

где $\text{grad } \varphi = \vec{E}$.

Пусть ψ — всюду определённая дифференцируемая функция. Имеем очевидное тождество

$$\text{div}(\psi \hat{\varepsilon}_r \text{grad } \varphi) = \psi \text{div}(\hat{\varepsilon}_r \text{grad } \varphi) + (\text{grad } \psi, \hat{\varepsilon}_r \text{grad } \varphi). \tag{11}$$

Положим $\psi = \bar{\varphi}$. Тогда, интегрируя (11) по всему пространству и учитывая (10), а также теорему о дивергенции, получаем интегральное соотношение

$$\int (\hat{\varepsilon}_r \text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi) d\nu = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \tag{12}$$

где S_R — сфера радиуса R с центром в начале координат, n — нормаль к сфере. Поскольку φ — гармоническая функция вне области Q , то в окрестности бесконечно удалённой точки $\bar{\varphi} \partial \varphi / \partial n$ убывает не медленнее, чем R^{-3} . Следовательно, предел в правой части (12) равен нулю и любое решение однородного уравнения (10), а значит, и однородного уравнения (9) с $\vec{E} = \text{grad } \varphi$, удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int (\hat{\varepsilon}_r \text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi) d\nu = 0. \tag{13}$$

Из (6) ясно, что λ будет точкой дискретного спектра оператора уравнения (9), если существует ненулевое решение $\varphi(\lambda, x)$ уравнения (10) с диэлектрической проницаемостью

$$\hat{\varepsilon}_r^+(\lambda, x) = \frac{\hat{\varepsilon}_r(x) - \lambda \hat{I}}{1 - \lambda}. \tag{14}$$

Тогда из (13), (14) следует, что соответствующие значения λ определяются формулой

$$\lambda = \frac{\int (\hat{\varepsilon}_r \text{grad } \varphi(\lambda), \text{grad } \varphi(\lambda)) d\nu}{\int |\text{grad } \varphi|^2 d\nu}. \tag{15}$$

Очевидно, что найти соответствующие функции $\varphi(\lambda, x)$ не представляется возможным. Однако с помощью (6) можно определить область локализации точек дискретного спектра на комплексной плоскости \mathbb{C} .

Рассмотрим сначала изотропный случай. Из (15) имеем, что точки дискретного спектра описываются формулой

$$\lambda = \frac{\int \varepsilon_r |\text{grad } \varphi|^2 d\nu}{\int |\text{grad } \varphi|^2 d\nu}. \tag{16}$$

Выражение (16) напоминает формулу для центра масс плоской фигуры, который может находиться только внутри выпуклой оболочки плоской фигуры. Аналогично можно показать, что значения λ находятся только внутри выпуклой оболочки области значений диэлектрической проницаемости $\varepsilon_r(x)$, $x \in Q$, т.е. внутри выпуклой оболочки множества σ_1 . Обозначим это множество через σ_0 . Очевидно, что $\sigma \subseteq \sigma_0$. Значит, в области $\mathbb{C} \setminus \sigma_0$ могут быть только точки дискретного спектра. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для случая изотропной среды весь спектр оператора уравнения (9), а значит, и сингулярного оператора уравнения (3) при $k_0 = 0$, находится внутри области σ_0 комплексной плоскости.*

Отметим, что область σ_0 зависит только от значений диэлектрической проницаемости, но не зависит от геометрических характеристик области Q .

Для анизотропного случая ситуация сложнее ввиду выражения (15). Представим тензор-функцию $\hat{\varepsilon}_r(x)$ в следующем виде:

$$\hat{\varepsilon}_r(x) = \hat{\delta}_1(x) + i\hat{\delta}_2(x), \quad \hat{\delta}_1(x) = \frac{\hat{\varepsilon}_r(x) + \hat{\varepsilon}_r^*(x)}{2}, \quad \hat{\delta}_2(x) = \frac{\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{\varepsilon}_r^*(x)}{2i},$$

где символ $*$ обозначает тензор, сопряжённый к тензору $\hat{\varepsilon}_r(x)$. Очевидно, что тензоры $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ являются эрмитовыми для всех точек $x \in Q$, а значит, их собственные числа вещественные. Обозначим через $a_{\min}^{(1)}(x)$, $a_{\max}^{(1)}(x)$ и $a_{\min}^{(2)}(x)$, $a_{\max}^{(2)}(x)$ минимальные и максимальные собственные числа эрмитовых тензор-функций $\hat{\delta}_1(x)$ и $\hat{\delta}_2(x)$ соответственно.

Теорема 2. *Весь спектр оператора уравнения (9), а значит, и сингулярного оператора уравнения (3) при $k_0 = 0$, лежит внутри прямоугольника, стороны которого параллельны осям комплексной плоскости, а левая нижняя и правая верхняя вершины имеют координаты $(A_{\min}^{(1)}, A_{\min}^{(2)})$, $(A_{\max}^{(1)}, A_{\max}^{(2)})$, где $A_{\min}^{(n)} = \min a_{\min}^{(n)}(x)$, $A_{\max}^{(n)} = \max a_{\max}^{(n)}(x)$, $n = 1, 2$, $x \in Q$.*

Данное утверждение доказано в работе [1, с. 84]. Отметим, что теорема 2 даёт менее точную информацию об области локализации спектра по сравнению с изотропным случаем. Из теорем 1 и 2 следует, что если среда не имеет потерь, то весь спектр оператора находится вблизи отрезка на действительной оси комплексной плоскости.

Таким образом, теоремы 1 и 2 позволяют использовать полученную информацию о спектре и для задач низкочастотного рассеяния. Информация о спектре оператора имеет большое значение при построении эффективных численных методов и алгоритмов решения.

3. ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Для численного решения задач низкочастотного рассеяния электромагнитных волн будем использовать обобщённый метод простой итерации [1, с. 109–120; 3]. Опишем этот метод.

В банаховом пространстве E будем рассматривать линейное операторное уравнение

$$\hat{A}u = f, \tag{17}$$

где \hat{A} — ограниченный, а значит, и непрерывный оператор.

Запишем уравнение (17) в эквивалентном виде

$$u - \hat{B}_\mu u = f/\mu, \tag{18}$$

здесь линейный оператор

$$\hat{B}_\mu = \frac{\mu \hat{I} - \hat{A}}{\mu}, \tag{19}$$

$\mu \neq 0$ — произвольное комплексное число.

Определение. *Спектральным радиусом оператора \hat{B} называется число, определяемое формулой*

$$\rho_0 = \sup |\eta|, \quad \eta \in \sigma(\hat{B}),$$

где $\sigma(\hat{B})$ — спектральное множество оператора \hat{B} на комплексной плоскости, т.е. множество таких точек, при которых оператор не имеет всюду определённого обратного оператора.

В теории линейных операторов доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Линейное операторное уравнение $u - \hat{B}u = f$ имеет единственное решение при любом $f \in E$ и последовательные приближения $u_{n+1} = \hat{B}u_n + f$, $n = 0, 1, \dots$, сходятся к решению при любом начальном приближении $u_0 \in E$, если спектральный радиус оператора $\rho_0(\hat{B}) < 1$. При этом для сходимости итераций справедлива оценка*

$$\|u_n - u\| \leq C[\rho_0(\hat{B})]^n, \quad C = \text{const.} \tag{20}$$

Из теоремы 3 следует, что последовательные приближения

$$u_{n+1} = \hat{B}_\mu u_n + f/\mu, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{21}$$

сходятся к решению уравнения (18), а значит, и к (17), при любых $u_0, f \in E$, если спектральный радиус оператора \hat{B}_μ меньше единицы, т.е.

$$\rho_0(\mu) = \sup |\eta(\mu)| < 1, \quad \eta(\mu) \in \sigma(\hat{B}_\mu).$$

Из (19) ясно, что итерации (21) можно представить в следующем виде:

$$u_{n+1} = u_n - (\hat{A}u_n - f)/\mu, \quad n = 0, 1, \dots \tag{22}$$

Далее ответим на вопрос: при каком расположении спектра исходного оператора \hat{A} на комплексной плоскости можно указать такие комплексные числа μ , при которых итерации (22) сходятся к решению уравнения (17)? Несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Между точками спектра оператора \hat{A} и точками спектра оператора \hat{B}_μ существует взаимно-однозначное соответствие, которое задаётся формулой*

$$\eta = \frac{\mu - \lambda}{\mu}, \quad \lambda \in \sigma(\hat{A}), \quad \eta \in \sigma(\hat{B}_\mu). \tag{23}$$

Теорема 4. *Для существования комплексных μ , при которых итерации (22) сходятся к решению уравнения (17) при любых $u_0, f \in E$, необходимо и достаточно, чтобы начало координат комплексной плоскости находилось вне выпуклой оболочки спектра оператора \hat{A} .*

Доказательство данной теоремы представлено в работе [1, с. 111]. Пусть в рамках рассмотрения итерационного метода выполняется условие теоремы 4. Тогда естественно возникает вопрос нахождения итерационного параметра μ_0 , при котором сходимость итераций будет наилучшей. Из теоремы 3 следует, что итерации (22) будут сходиться к решению со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой определяется как

$$\rho_0(\mu) = \frac{\sup |\mu - \lambda|}{|\mu|}, \quad \lambda \in \sigma(\hat{A}). \tag{24}$$

Сходимость итераций будет наилучшей при таком значении μ , при котором функция $\rho_0(\mu)$ принимает наименьшее значение. Обозначим через S_μ круг на комплексной плоскости наименьшего радиуса R с центром в точке μ , которому принадлежат все точки спектра оператора \hat{A} . Очевидно, что $R = \sup |\mu - \lambda|$, $\lambda \in \sigma(\hat{A})$. Проведём из начала координат касательные к кругу S_μ , а угол между ними обозначим α . Тогда из (24) следует, что $\rho_0(\mu) = \sin(\alpha/2)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 5. Пусть начало координат на комплексной плоскости находится вне выпуклой оболочки спектра оператора \hat{A} . Обозначим через S_0 такой круг на комплексной плоскости, который содержит все точки спектра оператора \hat{A} и “виден” из начала координат под наименьшим углом α_0 . Тогда наилучшая сходимость итераций (22) к решению уравнения (17) будет при комплексной величине μ_0 , которая является центром круга S_0 . При этом итерации будут сходиться к решению как геометрическая прогрессия со знаменателем $\rho_0 = \sin(\alpha_0/2)$.

Заметим, что если \hat{A} — самосопряжённый и положительно определённый оператор, то изложенный метод хорошо известен. В этом случае спектр оператора находится на положительной части действительной оси комплексной плоскости. Тогда из теоремы 5 сразу получаем, что $\mu_0 = (M + m)/2$, где M и m — верхняя и нижняя границы спектра, что совпадает с классическим результатом.

Рассмотрим случай, когда спектр оператора лежит на прямолинейном отрезке, не содержащем начало координат. Отметим, что если отрезок лежит на луче, исходящем из начала координат, то центр искомого круга находится в середине отрезка. Рассмотрим общий случай расположения отрезка на комплексной плоскости. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ — точки на комплексной плоскости, обозначающие концы отрезка. Искомая окружность содержит хорду, проходящую через точки z_1 и z_2 , так как в противном случае можно построить окружность, которая будет видна из начала координат под меньшим углом, значит центр искомой окружности находится на прямой, перпендикулярной указанной хорде и проходящей через её середину.

Проводя соответствующие выкладки [1, с. 115–117], получаем значение μ_0 для произвольного прямолинейного отрезка, не содержащего начало координат:

$$\mu_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{i[Im(z_1 \bar{z}_2)(z_2 - z_1)]}{2[|z_1 \bar{z}_2| + Re(z_1 \bar{z}_2)]}.$$

Заметим, что геометрически точка μ_0 является точкой пересечения срединного перпендикуляра к заданному отрезку и окружности, проходящей через концы отрезка и начало координат. Радиус построенного круга S_0 с центром в точке μ_0 определяется формулой

$$R_0^2 = \frac{|z_1 - z_2|^2 |\bar{z}_1 z_2|}{2[|\bar{z}_1 z_2| + Re(\bar{z}_1 z_2)]}.$$

Отметим, что почти все доказательства для рассматриваемого итерационного метода были геометрическими, поскольку использование чисто аналитических методов для несамосопряжённого случая весьма затруднительно. Также поступим при построении конечного алгоритма нахождения искомого круга S_0 и соответствующего итерационного параметра μ_0 для заданной выпуклой оболочки спектра, не содержащей начало координат.

Пусть выпуклая оболочка спектра — произвольный выпуклый n -угольник на комплексной плоскости, что с практической точки зрения не ограничивает общность. Геометрически несложно показать, что по крайней мере две вершины многоугольника должны находиться на границе круга S_0 .

Для выпуклого многоугольника с числом вершин n опишем конечный алгоритм нахождения искомого круга S_0 , а значит, и наилучшего итерационного параметра μ_0 .

Шаг А. Число всех отрезков, соединяющих вершины многоугольника, равно $n(n-1)/2$. Последовательно рассматриваем эти отрезки и для каждого из них строим наилучший круг S_0 . Если для какого-либо отрезка окажется, что построенный круг содержит весь многоугольник, то это будет искомым кругом и алгоритм заканчивается. Если ни один построенный круг не содержит весь многоугольник, то переходим к шагу В.

Шаг В. Круг S_0 проходит через три вершины многоугольника. Число всех возможных треугольников, построенных на вершинах n -угольника, равно $n(n-1)(n-2)/6$. Искомый круг S_0 будет описанным кругом вокруг одного или нескольких треугольников. Последовательно рассматриваем все треугольники и для тех описанных окружностей, которые содержат весь многоугольник и не содержат начало координат, вычисляем углы, под которыми они видны из начала координат. Выбираем круг, который виден под наименьшим углом. Алгоритм завершён.

Доказательство шага А. Пусть σ — выпуклый многоугольник, в частности, прямолинейный отрезок, не содержащий начало координат, а $S_0(\sigma)$ — такой круг, который содержит этот многоугольник и виден из начала координат под наименьшим углом $\alpha_0(\sigma)$. Рассмотрим два выпуклых многоугольника σ_1 и σ_2 , не содержащих начало координат, причём $\sigma_1 \subset \sigma_2$. Очевидно, что $\alpha_0(\sigma_1) \leq \alpha_0(\sigma_2)$. Обозначим через σ_1 какой-либо отрезок многоугольника, построенный на его вершинах, а через σ_2 — весь многоугольник. Несложно видеть, что если для отрезка окажется, что построенный круг содержит весь многоугольник, то $S_0(\sigma_1) = S_0(\sigma_2)$ и $\alpha_0(\sigma_1) = \alpha_0(\sigma_2)$.

Доказательство шага В. Предположим, что искомый круг $S_0(\sigma)$ имеет только две вершины z_1 и z_2 n -угольника, где $n \geq 3$ на границе $S_0(\sigma)$. Обозначим через $\mu_0(z_1, z_2)$ центр наилучшего круга для отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2 . Поскольку алгоритм не закончился на шаге А, центр круга $S_0(\sigma)$ сдвинут по срединному перпендикуляру относительно точки $\mu_0(z_1, z_2)$. Согласно предположению вершины многоугольника, кроме z_1 и z_2 , находятся на конечном расстоянии от границы круга $S_0(\sigma)$. Тогда понятно, что, смещая центр круга $S_0(\sigma)$ в ту или другую сторону по срединному перпендикуляру к отрезку $[z_1, z_2]$, можно построить круг, который содержит внутри себя весь многоугольник и виден из начала координат под меньшим углом. Пришли к противоречию, откуда следует, что искомый круг $S_0(\sigma)$ имеет по крайней мере три вершины многоугольника на границе. Поскольку, согласно теореме 5, задача имеет решение, то по крайней мере одна окружность, описанная вокруг трёх вершин многоугольника, будет определять искомый круг $S_0(\sigma)$.

4. МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ

Перейдём к дискретизации интегрального уравнения (3), т.е. аппроксимации уравнения СЛАУ [6]. В прямоугольной декартовой системе координат определим параллелепипед Π , внутри которого находится область Q . Рёбра параллелепипеда параллельны осям координат, а длины ребер равны $N_l h_l$, $l = 1, 2, 3$, где h_l — шаги сетки по декартовым координатам.

Тогда параллелепипед Π можно представить как объединение ячеек (элементарных параллелепипедов) $\Pi(p)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_l = \overline{0, N_l - 1}$. Определим область \tilde{Q} как объединение N_Q ячеек, центры которых лежат внутри области Q . Узловые точки, в которых определяются значения функций, будем задавать в центрах ячеек и обозначать как $x(p)$, а значения функций в этих точках как $f(p)$.

Интегральное уравнение (3) будем аппроксимировать СЛАУ размерности $\sim N_Q$ относительно значений неизвестного поля $u(p)$ в узловых точках области Q :

$$u(p) - \sum_{y(q) \in Q} B(p-q)\eta(q)u(q) = u_0(p), \quad x(p) \in Q, \quad (25)$$

где

$$u(p) \equiv u(x(p)), \quad u_0(p) = u_0(x(p)), \quad u(q) \equiv u(y(q)),$$

$u(p)$ и $u_0(p)$ — векторы, а $B(p-q)$ и $\eta(q)$ — 3×3 -матрицы, которые определяются формулами

$$\eta_{mk}(q) = \varepsilon_{mk}(y(q)) - \delta_{mk},$$

$$B_{nm}(p-q) = \int_{\Pi_q} G(R) \left[\left(\frac{3}{R^2} - \frac{3ik_0}{R} - k_0^2 \right) \alpha_n \alpha_m + \left(k_0^2 + \frac{ik_0}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \delta_{nm} \right] dy, \quad p \neq q,$$

$$R = \left(\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i(p))^2 \right)^{1/2}, \quad \alpha_n = \frac{x_n(p) - y_n}{|x(p) - y|}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Для кубической равномерной сетки $B_{nm}(0, 0, 0) = -(1/3)I$, где I — единичная матрица.

Поскольку узловые точки находятся в центре ячеек, точность аппроксимации интегрального оператора $\sim h^2$, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$.

Из (25) следует, что основные вычислительные затраты при умножении матрицы СЛАУ на вектор (выполнение одной итерации) связаны с вычислением сумм вида

$$W(p) = \sum_{y(q) \in Q} B(p-q)V(q), \quad x(p) \in Q. \tag{26}$$

Для вычисления $W(p)$ в узловых точках $x(p) \in Q$ требуется выполнить $\sim N_Q^2$ арифметических операций, где N_Q^2 — число узловых точек в области Q . Для уменьшения числа арифметических операций будем применять технику быстрого умножения теплицевых матриц на вектор [7, 8].

Доопределим функцию $V(q)$ нулём в точках $x(q)$ параллелепипеда Π , не принадлежащих области Q . Рассмотрим следующие суммы:

$$W(p_1, p_2, p_3) = \sum_{q_1=0}^{N_1-1} \sum_{q_2=0}^{N_2-1} \sum_{q_3=0}^{N_3-1} B(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)V(q_1, q_2, q_3). \tag{27}$$

Очевидно, что при $x(p) \in Q$ значения $W(p)$ из (26) и (27) совпадают. В (27) матричная функция дискретного аргумента $B(p)$ определена для значений

$$-(N_1 - 1) \leq p_1 \leq (N_1 - 1), \quad -(N_2 - 1) \leq p_2 \leq (N_2 - 1), \quad -(N_3 - 1) \leq p_3 \leq (N_3 - 1).$$

Обозначим через Π_2 параллелепипед со сторонами $2N_1h_1$, $2N_2h_2$ и $2N_3h_3$. Продолжим матричную функцию дискретного аргумента $B(p_1, p_2, p_3)$ на все целочисленные значения p_1, p_2, p_3 , полагая её периодической по каждой переменной с периодами, соответственно, $2N_1, 2N_2, 2N_3$. При этом доопределим функции нулём в точках, где она не определена. Далее доопределим функцию дискретного аргумента $V(p_1, p_2, p_3)$ нулём во всех узловых точках Π_2 , не принадлежащих Π , и продолжим её на все целочисленные значения p_1, p_2, p_3 , полагая её периодической по каждой переменной с периодами, соответственно, $2N_1, 2N_2, 2N_3$.

Рассмотрим выражение

$$W(p_1, p_2, p_3) = \sum_{q_1=0}^{2N_1-1} \sum_{q_2=0}^{2N_2-1} \sum_{q_3=0}^{2N_3-1} B(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)V(q_1, q_2, q_3). \tag{28}$$

Учитывая изложенное, получаем, что при $x(p) \in Q$ значения функций (26) и (28) совпадают. Ниже через Π и Π_2 будем обозначать целочисленные параллелепипеды с числом дискретных аргументов по каждой оси N_1, N_2, N_3 и $2N_1, 2N_2, 2N_3$ соответственно. Теперь, проводя

дискретное преобразование Фурье по каждой переменной от обеих частей (28), будем иметь следующее равенство:

$$W^F(k_1, k_2, k_3) = B^F(k_1, k_2, k_3)V^F(k_1, k_2, k_3), \quad k \in \Pi_2. \quad (29)$$

Таким образом, для выполнения одной итерации при решении СЛАУ (25) необходимо выполнить быстрое прямое преобразование Фурье-функции $V(p_1, p_2, p_3)$ по каждой переменной и обратное преобразование Фурье-функции $W^F(k_1, k_2, k_3)$ (преобразование функции $B^F(k_1, k_2, k_3)$ выполняется один раз до начала итерационной процедуры). Число арифметических операций и объём требуемой памяти для выполнения одной итерации оцениваются формулами

$$T_A \sim N \text{ LOG}(N), \quad M_A \sim N, \quad N = N_1 N_2 N_3,$$

где $\text{LOG}(N)$ — целочисленный логарифм, т.е. сумма всех простых делителей числа N . При выборе шагов сетки и значений N_1, N_2, N_3 необходимо руководствоваться следующими критериями: во-первых, в пределах ячеек искомая функция мало меняется; во-вторых, область \tilde{Q} состоит из ячеек, центры которых находятся внутри Q и достаточно хорошо её описывают.

Согласно (1) другим важным критерием эффективности алгоритма, помимо значения T_A , является число итераций L , которое требуется для нахождения решения с заданной точностью. В качестве примера рассмотрим значения L для низкочастотного рассеяния [9] на однородном анизотропном кристалле. Тензор диэлектрической проницаемости такого тела в декартовой системе координат, оси которых параллельны главным осям кристалла, представим, например, в виде $\varepsilon_{11} = 5, \varepsilon_{22} = 3, \varepsilon_{33} = 2$, а остальные компоненты тензора равны нулю. Тогда, согласно теореме 2, весь спектр оператора уравнения (3) лежит вблизи отрезка $[1, c. 117; 5]$ на действительной оси комплексной плоскости. В этом случае итерационный параметр для обобщённого метода простой итерации $\mu_0 = 3$. Тогда итерации (22) при $\mu = \mu_0 = 3$ будут сходиться к решению уравнения со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $\rho_0 = 2/3$. При значении числа итераций $L = 40$ невязка решения задачи уменьшится в более чем миллион раз. Этот пример показывает эффективность использования обобщённого метода простой итерации для решения задач низкочастотного рассеяния.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При проведении численных экспериментов для демонстрации возможностей предложенного подхода были рассмотрены два варианта исходной постановки задачи (3).

В первом варианте исследуется качество решения исходной задачи при неизменных физических параметрах (линейный размер объёмной области решения $l_n = 1, n = 1, 2, 3$, волновое число $k_0 = 1$) с изменением параметра степени дискретизации задачи N_Q в пределах от 10^4 до 10^6 разбиений. Будем рассматривать качество решения задачи (25) и сходимость итераций при изменении дискретизации области решения в случае постановки задачи как с затуханием в среде, т.е. при комплексных значениях коэффициентов тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, так и без затухания, т.е. с вещественным тензором $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ в обоих случаях постоянным, для упрощения, на всей объёмной области решения [10].

В качестве функции внешнего излучения возьмём модель плоской волны, распространяющейся вдоль одной координаты, $\vec{E}^0(x) = f = (\exp\{ikx_1\}, 0, 0)$.

В рамках данного сравнительного моделирования обозначим критерий останова в виде метрики

$$\frac{\|u_{n+1} - u_n\|}{\|f\|} \leq 10^{-5}. \quad (30)$$

Данная метрика отслеживается в процессе итерационного метода (22), ограничивая число итераций вплоть до достижения заранее заданной точности приближённого решения. Также для итерационного метода возможно ограничивать сверху максимальное число итераций в качестве гиперпараметра метода.

На рис. 1 приведены результаты тестового моделирования задачи с диэлектрической проницаемостью среды $\hat{\varepsilon}_{11} = 5 + i3$, $\hat{\varepsilon}_{22} = 3 + i2$, $\hat{\varepsilon}_{33} = 2 + i1$ — графики сходимости итераций по метрике (30) в зависимости от числа итераций при различных значениях дискретизации объёмной области решения: $N_Q = 27\,000$ и 10^6 . Наблюдаются стабильное изменение ключевой метрики итерационного метода и равномерная сходимость, как и заявлено, с одним основанием геометрической прогрессии ρ_0 . По оси ординат была выбрана логарифмическая шкала с основанием 10 для более наглядной визуализации показательной сходимости итераций по метрике (30).

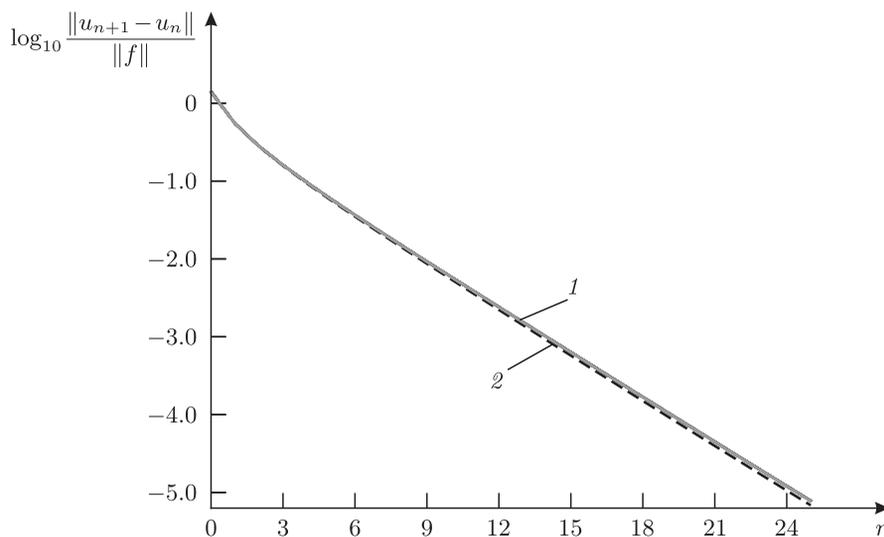


Рис. 1. График сходимости итераций при $k_0 = 1$: 1 — $N_Q = 27\,000$, $N_l = 30$, $l = 1, 2, 3$; 2 — $N_Q = 10^6$, $N_l = 100$, $l = 1, 2, 3$

Конечная полученная норма невязки $\|\hat{A}u_L - f\|$ для $N_l = 30$ равна $7.486 \cdot 10^{-6}$, а для $N_l = 100$ — $6.529 \cdot 10^{-7}$, что показывает повышение конечной точности решения.

В результате решения поставленной задачи (3), (4) на основе обобщённого метода простой итерации (22) получаем векторное поле приближённого решения $u_L \approx \vec{E}(x)$ в точках центров элементарных разбиений $x(p) \in Q$ исходного куба. Решение в виде массива векторов возможно визуализировать в виде векторного поля направлений полученного приближения электрического поля на области решения задачи. Сделаем это на срезе куба плоскостью $x_3 = 0$. Представленные визуализации для различной степени дискретизации исходной области решения показывают проекцию векторов на плоскость Ox_1x_2 .

На первой визуализации (рис. 2, а) показано векторное поле приближённого решения при $N_Q = 27\,000$, т.е. по 30 разбиений вдоль каждой оси при линейных размерах трёхмерной области $l_n = 1$, $n = 1, 2, 3$, с центром в точке $(0, 0, 0)$. Волновое число $k_0 = 1$, диэлектрическая проницаемость задана диагональным тензором диэлектрической проницаемости со значениями на диагонали $\varepsilon_{11} = 5 + i3$, $\varepsilon_{22} = 3 + i2$, $\varepsilon_{33} = 2 + i1$.

На второй визуализации (рис. 2, б) показано векторное поле приближённого решения при $N_Q = 125\,000$, т.е. по 50 разбиений вдоль каждой оси при тех же параметрах моделируемой задачи.

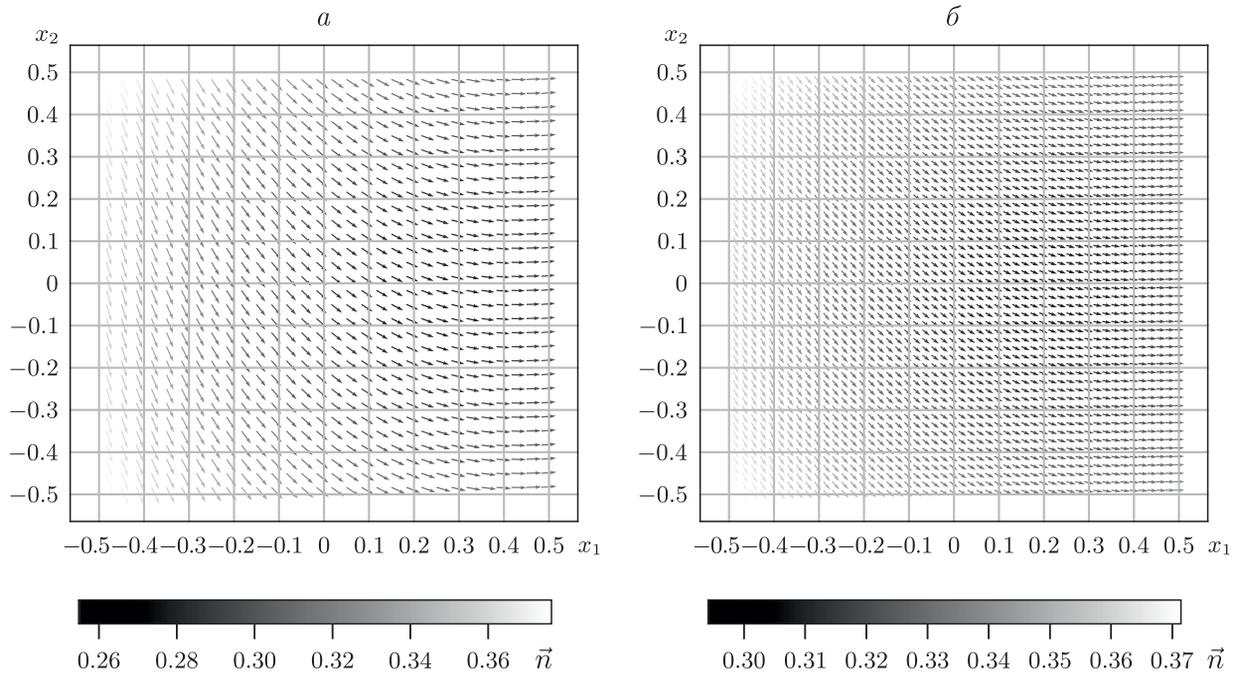


Рис. 2. Векторные поля приближения u_L при $N_l = 30$ (а) и $N_l = 50$ (б), $l = 1, 2, 3$

На визуализациях (см. рис. 2) моделировался квазистатический случай излучения, в котором колебания излучения незначительны по сравнению с мощностью волны. Видно, что при распространении волны в положительном направлении оси x_1 произошло преломление волны и её распространение продолжилось с уменьшением нормы векторов \vec{n} векторного поля в точках центров элементарных разбиений. Приведённые визуализации векторного поля полученного решения качественно воспроизводятся при увеличении дискретизации задачи и становятся менее доступными для восприятия.

Во втором варианте исследуется зависимость сходимости итераций обобщённого итерационного метода от значения волнового числа. Приводятся картины сходимости зависимости метрики относительной нормы разности приближений (30) от числа итераций в каждом из предлагаемых точечных значений волнового числа. Картины сходимости исследуются на той же области решений при $N_Q = 27\,000$. На графике сходимостей (рис. 3) итераций для задачи с вещественным тензором $\hat{\epsilon}$ видим качественно отличающуюся картину для одной и той же постановки задачи при увеличении волнового числа k_0 : скорость сходимости итераций, а именно количество итераций обобщённого метода простой итерации, растёт для обеспечения требуемой точности $\|u_n - u_{n-1}\|/\|f\| < 10^{-5}$. Также видно, что сходимость имеет экспоненциальный характер, что показано линеаризацией зависимости в полулогарифмической шкале. Скорость сходимости итераций при различных значениях параметра волнового числа k_0 отличается основанием показательной монотонно убывающей функции сходимости, как и было показано в (20).

Приведём также картину сходимости итераций при тех же значениях волнового числа для комплексного тензора $\hat{\epsilon}$ (рис. 4). Видно, что для $k_0 \leq 2.75$ картина сходимости является убывающей. Это говорит о том, что задача в данном диапазоне значений параметра всё ещё является квазистатической, а также что спектр оператора лежит в границах окружности, образованной диагональными значениями тензора $\hat{\epsilon}$, или значение найденного итерационного параметра μ_0 всё ещё является подходящим для проведения итерационной процедуры, хотя

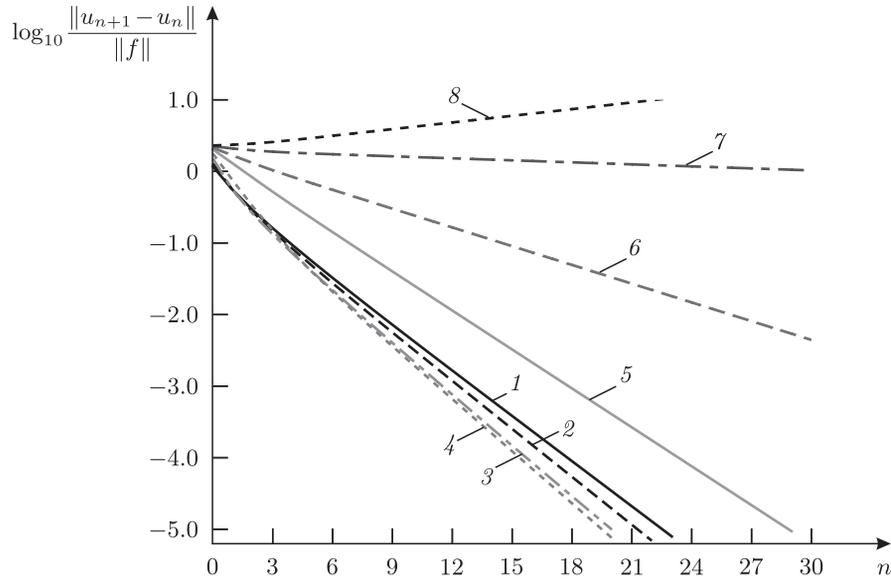


Рис. 3. Графики сходимости итераций для $\hat{\varepsilon}_{11} = 5 + i0$, $\hat{\varepsilon}_{22} = 3 + i0$, $\hat{\varepsilon}_{33} = 2 + i0$ при различных значениях волнового числа k_0 : 0.25 (кривая 1); 0.75 (кривая 2); 1.25 (кривая 3); 1.75 (кривая 4); 2.25 (кривая 5); 2.50 (кривая 6); 2.75 (кривая 7); 2.90 (кривая 8)

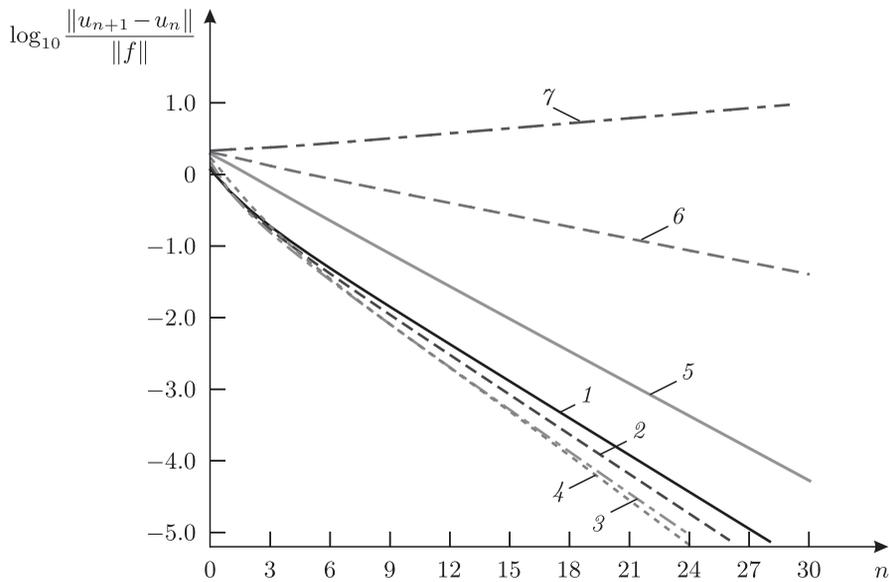


Рис. 4. Графики сходимости итераций для среды $\hat{\varepsilon}_{11} = 5 + i3$, $\hat{\varepsilon}_{22} = 3 + i2$, $\hat{\varepsilon}_{33} = 2 + i1$ при различных значениях волнового числа k_0 : 0.25 (кривая 1); 0.75 (кривая 2); 1.25 (кривая 3); 1.75 (кривая 4); 2.25 (кривая 5); 2.50 (кривая 6); 2.75 (кривая 7)

и не оптимальным. Для $k_0 < 2.25$ наблюдаем характер сходимости, схожий с характером сходимости для эксперимента в первом варианте (см. рис. 1) для значения $k_0 = 1$. Для $k_0 \in [2.25, 2.75)$ видим замедление темпов сходимости по метрике (30). Этот эффект может говорить о неоптимальном выборе параметра или увеличивающемся с его ростом радиусе выпуклой оболочки спектра оператора. При $k_0 > 2.75$ моделирование при заданных линейных размерах l_n , $n = 1, 2, 3$, и значениях $\hat{\varepsilon}$ невозможно.

При изменении параметра l (линейных размеров моделируемой кубической области) картины сходимости методов для фиксированного и изменяющегося значений k_0 будут совпадать. При увеличении линейных размеров области спектр исходного оператора из уравнения (3) будет “расползаться”, и при определённом значении l случай уже перестанет быть квазистатическим, т.е. внешний источник излучения уже будет в определённом смысле колебательным, а не монотонным.

Описанные выше варианты численных экспериментов показывают качественную картину эффективности работы предложенной численной схемы и итерационного метода в рамках решаемой задачи. При моделировании с помощью данной схемы также доступен выбор большего числа элементарных разбиений, по сравнению с используемым в настоящей работе $N_Q \gg 10^6$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самохин, А.Б. Объемные интегральные уравнения электродинамики / А.Б. Самохин. — М. : Техносфера, 2021. — 218 с.
2. Будко, Н.В. Обобщённый метод простой итерации для решения объёмных сингулярных интегральных уравнений задач низкочастотного рассеяния / Н.В. Будко, А.Б. Самохин, А.А. Самохин // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 9. — С. 1198–1202.
3. Самохин, А.Б. Объёмные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трёхмерных диэлектрических структурах / А.Б. Самохин // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 9. — С. 1215–1230.
4. Mikhlin, S.G. Singular Integral Equations / S.G. Mikhlin, S. Prosdorf. — New York : Akademie-Verlag, 1986. — 528 p.
5. Budko, N.V. Transverse electric scattering on inhomogeneous objects: spectrum of integral operator and preconditioning / N.V. Budko, A.B. Samokhin // SIAM J. Sci. Comput. — 2006. — V. 28, № 2. — P. 682–700.
6. Самохин, А.Б. Методы дискретизации объёмных сингулярных интегральных уравнений электромагнетизма / А.Б. Самохин, А.С. Самохина, Ю.В. Шестопапов // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 9. — С. 1251–1261.
7. Самохин, А.Б. Численные методы решения многомерных интегральных уравнений математической физики с ядрами, зависящими от разности аргументов / А.Б. Самохин // Радиотехника и электроника. — 2005. — Т. 50, № 2. — С. 208–212.
8. Samokhin, A.B. Iteration and discretization methods for solving the volume integral equations / A.B. Samokhin // IEEE Transactions A (Fundamentals and Materials). — 2009. — V. 129, № 10. — P. 669–774.
9. Приходько, В.Ю. Дифракция низкочастотных волн на упругих тонкостенных оболочках вращения / В.Ю. Приходько, До Ву Минь Тханг // Russ. Technol. J. — 2020. — V. 8, № 6. — P. 157–166.
10. Коваленко, А.Н. Алгебраические модели полосковых линий в многослойной диэлектрической среде / А.Н. Коваленко, А.Н. Жуков // Russ. Technol. J. — 2018. — V. 6, № 3. — P. 54–71.

VOLUME SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR PROBLEMS OF LOW-FREQUENCY SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN ANISOTROPIC STRUCTURES

© 2024 / A. B. Samokhin¹, A. S. Samokhina², I. A. Yurchenkov³

^{1,3}MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

²V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

e-mail: ¹absamokhin@yandex.ru, ²asamokhina@yandex.ru, ³yurchenkov@mirea.ru

This paper deals with volume singular integral equations describing the problems of low-frequency scattering of electromagnetic waves in bounded three-dimensional anisotropic structures. The spectrum of integral operators is studied. The domain of the operator spectrum on the complex plane for the low-frequency case is presented explicitly. The generalized method of simple iteration is described, for application of which it is necessary to know the area of the operator spectrum on the complex plane. The collocation method on a uniform grid is used to discretize the integral equations. This allows, using a fast discrete Fourier transform, to construct an algorithm for fast multiplication of the matrix of a system of linear equations by a vector. The results of numerical solution of the considered problems are given.

Keywords: volume integral equations, fast Fourier transform, generalized method of simple iteration, spectrum of operator

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20087).

REFERENCES

1. Samokhin, A.B., *Ob'yomnye integral'nye uravneniya elektrodinamiki* (Volume Integral Equations of Electrodynamics), Moscow: Technosfera, 2021.
2. Budko, N.V., Samokhin, A.B., and Samokhin, A.A., A generalized overrelaxation method for solving singular volume integral equations in low-frequency scattering problems, *Differ. Uravn.*, 2005, vol. 41, no. 9, pp. 1198–1202.
3. Samokhin, A.B., Volume singular integral equations for problems of scattering on three-dimensional dielectric structures, *Differ. Uravn.*, 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1215–1230.
4. Mikhlin, S.G. and Prosdorf, S., *Singular Integral Equations*, New York: Akademie-Verlag, 1986.
5. Budko, N.V. and Samokhin, A.B., Transverse electric scattering on inhomogeneous objects: spectrum of integral operator and preconditioning, *SIAM J. Sci. Comput.*, 2014, vol. 28, no. 2, pp. 682–700.
6. Samokhin, A.B., Samokhina, A.S., and Shestopalov, Y.V., Discretization methods for three-dimensional singular integral equations of electromagnetism, *Differ. Uravn.*, 2018, vol. 54, no. 9, pp. 1251–1261.
7. Samokhin, A.B., Numerical methods for solving integral equations of mathematical physics with kernels depending on the difference of arguments, *J. Commun. Technol. Electron.*, 2005, vol. 50, no. 2, pp. 208–212.
8. Samokhin, A.B., Iteration and discretization methods for solving the volume integral equations, *IEEJ Trans. A (Fundamentals and Materials)*, 2009, vol. 129, no. 10, pp. 669–774.
9. Prikhodko, V.Yu. and Do Vu Minh Thang, Diffraction of low-frequency waves on elastic thin-walled shells of rotation, *Russ. Technol. J.*, 2020, vol. 8, no. 6, pp. 157–166.
10. Kovalenko, A.N. and Zhukov, A.N., Algebraic models of strip lines in a multilayer dielectric medium, *Russ. Technol. J.*, 2018, vol. 6, no. 3, pp. 54–71.

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.968.4

**О СУЩЕСТВОВАНИИ РАВНОВЕСИЯ
В МОДЕЛИ ДИКМАНА–ЛОУ В СЛУЧАЕ
КУСОЧНО-КОНСТАНТНЫХ ЯДЕР**

© 2024 г. М. В. Николаев¹, А. А. Никитин²

^{1,2}Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

²Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

e-mail: ¹nikolaev.mihail@inbox.ru, ²nikitin@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г., после доработки 02.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Для модели логистической динамики, разработанной У. Дикманом и Р. Лоу, проведён анализ нелинейного интегрального уравнения, описывающего состояние равновесия одновидового сообщества при трёхпараметрическом замыкании третьего пространственного момента в случае, когда ядра разброса и конкуренции представляют собой кусочно-постоянные функции. Установлены достаточные условия разрешимости этого уравнения.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, популяционная динамика

DOI: 10.31857/S0374064124090041, EDN: JXVOWU

1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В статье анализируется модель динамики биологических сообществ, предложенная У. Дикманом и Р. Лоу в работах [1; 2], и рассматривается одновидовой случай, при этом основной интерес представляет так называемое состояние равновесия, т.е. состояние, при котором глобальные усреднённые характеристики сообщества перестают меняться во времени. Основным предметом изучения модели является возникающее нелинейное интегральное уравнение, описывающее состояние равновесия. Ставится вопрос о нахождении условий его разрешимости в случае, когда пространственная неоднородность модели имеет наиболее простую из возможных конфигураций.

Данное исследование является продолжением анализа, начатого в работе [3], для замыкания третьего пространственного момента более общего вида.

Приведём краткое описание модели. Пусть некоторое одновидовое сообщество неподвижных организмов обитает в пространстве \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$). Свойства каждого индивида описываются следующими гомогенными по пространству параметрами: $d \geq 0$ — естественная смертность, $s > 0$ — агрессивность, $b > d$ — плодовитость; а также двумя функциями: $m(x)$ — ядро разброса, $w(x)$ — ядро конкуренции. Указанные ядра принадлежат классу

$$\mathcal{K}_n = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L_1} = 1, f(x) = F(\|x\|) \geq 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0 \right\} \quad (1)$$

и являются плотностями вероятности событий рождения новых особей и смерти существующих особей от конкуренции с сородичами соответственно. Данные параметры полностью описывают сообщество на локальном уровне.

Для описания глобального состояния сообщества используются так называемые пространственные моменты — статистические характеристики групп индивидов, усреднённые

по всевозможным конфигурациям сообщества в данный момент времени t . Ниже рассматриваются три из них:

- 1) $N(t)$ — средняя плотность особей;
- 2) $C(x, t)$ — средняя плотность пар особей, в которых второй индивид сдвинут на x относительно первого;
- 3) $T(x, y, t)$ — средняя плотность троек особей, в которых второй индивид сдвинут на x , а третий — на y относительно первого.

Динамика первых двух моментов удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= (b-d)N(t) - s \int_{\mathbb{R}^n} C(y, t)w(y) dy, \\ \dot{C}(x, t) &= bm(x)N(t) + \int_{\mathbb{R}^n} bm(y)C(x+y, t) dy - (d+sw(x))C(x, t) - \int_{\mathbb{R}^n} sw(y)T(x, y, t) dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\dot{\cdot}$ обозначает производную по переменной t , с дополнительным условием на бесконечности

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} C(x, t) = N^2(t). \quad (3)$$

Вывод указанных уравнений можно найти, например, в [2]. Стационарная точка системы (2) называется *состоянием равновесия сообщества*. В состоянии равновесия пространственные моменты перестают зависеть от времени, поэтому всюду далее аргумент t не указывается.

Систему динамики можно расширять на моменты сколь угодно большого порядка, однако она всегда будет зависеть от момента следующего порядка. Кроме того, именно первые два момента несут самую существенную информацию о пространственной структуре сообщества. Учитывая эти два факта, имеет смысл замкнуть третий пространственный момент, т.е., используя эвристические соображения, вывести дополнительное соотношение, выражающее T через N и C , и подставить его в (2). Необходимые свойства, а также примеры замыкания были рассмотрены, в частности, в работе [4]. В настоящей статье будет использовано трёхпараметрическое замыкание второго порядка вида

$$T(x, y) = \tilde{\alpha} \frac{C(x)C(y)}{N} + \tilde{\beta} \frac{C(x)C(y-x)}{N} + \tilde{\gamma} \frac{C(y)C(y-x)}{N} - \tilde{\beta}N^3, \quad (4)$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha/(\alpha + \gamma)$, $\tilde{\beta} = \beta/(\alpha + \gamma)$ и $\tilde{\gamma} = \gamma/(\alpha + \gamma)$, параметры $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ и $\alpha + \gamma > 0$.

Подставив (4) в (2) и рассмотрев состояние равновесия, после некоторых преобразований получим систему

$$\begin{aligned} N &= \frac{s}{b-d} \int_{\mathbb{R}^n} C(y)w(y) dy, \\ 0 &= bm(x)N + b \int_{\mathbb{R}^n} C(x-y)m(y) dy - (sw(x) + \tilde{\alpha}b + (1 - \tilde{\alpha})d)C(x) - \\ &\quad - \tilde{\beta} \frac{sC(x)}{N} \int_{\mathbb{R}^n} C(x-y)w(y) dy - \tilde{\gamma} \frac{s}{N} \int_{\mathbb{R}^n} C(x-y)w(y)C(y) dy + \tilde{\beta}sN^3, \end{aligned} \quad (5)$$

называемую *системой равновесия*.

2. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Будем исследовать случай, когда ядра разброса и конкуренции выглядят наиболее просто. Это позволит максимально упростить систему (5) и использовать её в дальнейшем для проверки различных гипотез, касающихся эволюции одновидовых сообществ, а также для корректировки численных методов. Исходя из определения класса (1), можно заключить, что искомые ядра должны равняться положительной константе в некотором шаре пространства \mathbb{R}^n и быть равными нулю всюду вне него.

Пусть r_m и r_w — некоторые положительные числа, которые будут нести смысл радиуса разброса и радиуса конкуренции соответственно. Обозначим через B_m шар пространства \mathbb{R}^n радиуса r_m с центром в нуле, B_w — шар радиуса r_w с центром в нуле, а μ_m и μ_w — объёмы этих шаров:

$$\mu_m = \frac{\pi^{n/2} r_m^n}{\Gamma(n/2 + 1)}, \quad \mu_w = \frac{\pi^{n/2} r_w^n}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

Поскольку L_1 -норма ядер равна единице, заключаем, что

$$m(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_m}, & \text{если } \|x\| \leq r_m, \\ 0, & \text{если } \|x\| > r_m, \end{cases} \quad w(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_w}, & \text{если } \|x\| \leq r_w, \\ 0, & \text{если } \|x\| > r_w. \end{cases} \quad (6)$$

Эти ядра называются *кусочно-постоянными* (или *кусочно-константными*). Подстановка (6) в (5) даёт

$$\begin{aligned} N &= \frac{s}{\mu_w(b-d)} \int_{B_w} C(y) dy, \\ 0 &= bm(x)N + \frac{b}{\mu_m B_m} \int C(x-y) dy - (sw(x) + \tilde{\alpha}b + (1 - \tilde{\alpha})d)C(x) - \\ &\quad - \tilde{\beta} \frac{sC(x)}{\mu_w N} \int_{B_w} C(x-y) dy - \tilde{\gamma} \frac{s}{\mu_w N} \int_{B_w} C(x-y)C(y) dy + \tilde{\beta} sN^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Сделаем в (7) замену переменной вида $Q(x) = C(x)/N^2 - 1$ и после некоторых преобразований получим систему

$$\begin{aligned} N &= \frac{b-d}{s + (s/\mu_w) \int_{B_w} Q(y) dy}, \\ 0 &= \frac{bm(x)}{N} + \frac{b}{\mu_m B_m} \int Q(x-y) dy - (sw(x) + \tilde{\alpha}b + (1 - \tilde{\alpha})d)Q(x) - \tilde{\beta} \frac{sNQ(x)}{\mu_w} \int_{B_w} Q(x-y) dy - \\ &\quad - \tilde{\gamma} \frac{sN}{\mu_w} \int_{B_w} Q(x-y)Q(y) dy - (\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) \frac{sN}{\mu_w} \int_{B_w} Q(x-y) dy - \tilde{\beta} sNQ(x) - sw(x), \end{aligned} \quad (8)$$

при этом условие (3) переходит в условие стремления функции $Q(x)$ к нулю на бесконечности. Видно, что в (8) первый момент N однозначно определяется через функцию $Q(x)$, поэтому мы можем свести систему к одному уравнению, считая, что N выражается через $Q(x)$ как

$$N(Q) = \frac{b-d}{s + (s/\mu_w) \int_{B_w} Q(y) dy}.$$

Запишем систему (8) в виде операторного уравнения, т.е. в виде $Q = \mathcal{A}Q$. Для этого введём обозначение

$$D(Q, x) = sw(x) + \tilde{\alpha}b + (1 - \tilde{\alpha})d + \tilde{\beta}sN(Q). \tag{9}$$

После подстановки (9) в (8) и алгебраических преобразований получим уравнение

$$Q(x) = \frac{b}{D(Q, x)} \left(\frac{m(x)}{N(Q)} + \frac{1}{\mu_m B_m} \int Q(x-y) dy \right) - \frac{s}{D(Q, x)} \left(w(x) + \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}}{\mu_w} N(Q) \int_{B_w} Q(x-y) dy \right) - \frac{sN(Q)}{\mu_w D(Q, x)} \left(\tilde{\beta} \int_{B_w} Q(x) \int Q(x-y) dy + \tilde{\gamma} \int_{B_w} Q(x-y) Q(y) dy \right), \tag{10}$$

которое будем называть *уравнением равновесия*. Вопрос разрешимости этого уравнения составляет основной предмет изучения данной статьи.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Прежде чем приступить к дальнейшему анализу уравнения равновесия (10), рассмотрим несколько вспомогательных утверждений, касающихся составляющих его частей. Введём обозначение

$$\mathfrak{B}^+(R) = \{f \in L_1(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L_1} \leq R, f(x) \geq 0\},$$

где $R > 0$, и будем считать, что неизвестная функция $Q(x)$ принадлежит множеству данного вида.

Лемма 1. *Если $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$, то*

$$\frac{b-d}{s(1+R/\mu_w)} \leq N(Q) \leq \frac{b-d}{s}.$$

Доказательство. Так как $Q(x) \geq 0$, то

$$0 \leq \int_{B_w} Q(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} Q(y) dy = \|Q\|_{L_1} \leq R.$$

Отсюда, в силу положительности чисел $b-d$ и s , заключаем, что

$$\frac{b-d}{s + (s/\mu_w)R} \leq \frac{b-d}{s + (s/\mu_w) \int_{B_w} Q(y) dy} \leq \frac{b-d}{s}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$, то*

$$d + \left(\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{1+R/\mu_w} \right) (b-d) \leq D(Q, x) \leq d + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})(b-d) + \frac{s}{\mu_w}.$$

Доказательство. Ясно, что $0 \leq sw(x) \leq s/\mu_w$. С учётом оценок из леммы 1 имеем

$$\tilde{\beta} \frac{b-d}{1+R/\mu_w} \leq \tilde{\beta}sN(Q) \leq \tilde{\beta}(b-d).$$

После применения указанных выше оценок к определению величины $D(Q, x)$ и перегруппировки слагаемых получаем утверждение леммы.

Докажем следующее утверждение о свойствах оператора свёртки с единицей.

Лемма 3. Пусть $B(r)$ — некоторый шар пространства \mathbb{R}^n радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Оператор \mathcal{C}_r , действующий на функции из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\mathcal{C}_r Q(x) = \int_{B(r)} Q(x-y) dy,$$

является компактным.

Доказательство. В силу линейности оператора нам достаточно показать, что образ единичного шара пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$ под действием оператора \mathcal{C}_r является предкомпактным. Воспользуемся критерием Рисса предкомпактности множеств в L_1 , согласно которому множество $M \subset L_1(\mathbb{R}^n)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равномерно непрерывно в среднем, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого элемента $f \in M$ и любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ с нормой, не превосходящей δ , выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Пусть $\|Q\|_{L_1} \leq 1$. Тогда, применив теорему Фубини и стандартные интегральные неравенства, получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}_r Q\|_{L_1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B(r)} Q(x-y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(r)} |Q(x-y)| dy dx = \int_{B(r)} \int_{\mathbb{R}^n} |Q(x-y)| dx dy = \\ &= \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)} \|Q\|_{L_1} \leq \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)}, \end{aligned}$$

т.е. образ единичного шара ограничен. Покажем, что он равномерно непрерывен в среднем. Для начала заметим, что оператор \mathcal{C}_r можно записать в альтернативной форме:

$$\mathcal{C}_r Q(x) = \int_{\mathbb{R}^n} Q(x-y) \chi_r(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} Q(y) \chi_r(x-y) dy,$$

где χ_r — характеристическая функция шара $B(r)$. При этом ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_r(x+h) - \chi_r(x)| dy \leq \varepsilon$$

как только $\|h\| \leq \delta$, поскольку указанный интеграл определяет меру симметрической разности шара $B(r)$ и его копии, сдвинутой на вектор h , а эта мера стремится к нулю, когда норма сдвига стремится к нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{C}_r Q(x+h) - \mathcal{C}_r Q(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Q(y)| |\chi_r(x+h-y) - \chi_r(x-y)| dy dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |Q(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_r(x+h) - \chi_r(x)| dx dy \leq \varepsilon \|Q\|_{L_1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим свойства нелинейных операторов, входящих в уравнение равновесия (10).

Лемма 4. Оператор самосвёртки \mathcal{S} , действующий на функции $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$ по правилу

$$\mathcal{S}Q(x) = \int_{B_w} Q(x-y)Q(y) dy,$$

является липшицевым с константой $2R$.

Доказательство. Пусть $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{B}^+(R)$. Тогда, применив теорему Фубини и стандартные интегральные неравенства, будем иметь

$$\begin{aligned} \|SQ_1 - SQ_2\|_{L_1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B_w} [Q_1(x-y)Q_1(y) - Q_2(x-y)Q_2(y)] dy \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_w} |Q_1(x-y)Q_1(y) - Q_2(x-y)Q_2(y)| dy dx = \\ &= \int_{B_w} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_1(x-y)Q_1(y) - Q_1(x-y)Q_2(y)| dx dy + \int_{B_w} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_1(x-y)Q_2(y) - Q_2(x-y)Q_2(y)| dx dy = \\ &= \int_{B_w} |Q_1(y) - Q_2(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Q_1(x-y)| dx \right) dy + \int_{B_w} |Q_2(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Q_1(x-y) - Q_2(x-y)| dx \right) dy = \\ &= \|Q_1 - Q_2\|_{L_1} \|Q_1\|_{L_1} + \|Q_2\|_{L_1} \|Q_1 - Q_2\|_{L_1} = (\|Q_1\|_{L_1} + \|Q_2\|_{L_1}) \|Q_1 - Q_2\|_{L_1} \leq 2R \|Q_1 - Q_2\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Аналогичным способом доказывается следующая

Лемма 5. Оператор \mathcal{P} умножения на свёртку, действующий на функции $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$ по правилу

$$\mathcal{P}Q(x) = Q(x) \int_{B_w} Q(x-y) dy,$$

является липшицевым с константой $2R$.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Далее найдём достаточные условия разрешимости уравнения равновесия (10). Ясно, что задача о нахождении решения этого уравнения равносильна задаче нахождения неподвижной точки задаваемого им оператора. Широко известны два принципа неподвижных точек: Банаха и Лере–Шаудера. Ниже воспользуемся их обобщением, предложенным М.А. Красносельским в статье [5].

Теорема 1 [5]. Пусть на некотором выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве B банахова пространства \mathbb{B} заданы операторы \mathcal{A} и \mathcal{B} , причём первый из них компактный, а второй — сжимающий. Пусть также при любых $x, y \in B$ выполнено условие $\mathcal{A}x + \mathcal{B}y \in B$. Тогда найдётся такой элемент $z \in B$, что $\mathcal{A}z + \mathcal{B}z = z$.

Теперь идея заключается в том, чтобы представить оператор, задаваемый уравнением равновесия (10), в виде суммы компактного и сжимающего операторов в некотором выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 6. Операторы \mathcal{B} и \mathcal{D} , задаваемые выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{B}Q(x) &= \frac{b}{D(Q, x)} \left(\frac{m(x)}{N(Q)} + \frac{1}{\mu_{m_{B_m}}} \int_{B_m} Q(x-y) dy \right), \\ \mathcal{D}Q(x) &= \frac{s}{D(Q, x)} \left(w(x) + \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}}{\mu_w} N(Q) \int_{B_w} Q(x-y) dy \right), \end{aligned}$$

являются компактными в $\mathfrak{B}^+(R)$ при любом $R > 0$.

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что сдвиг и умножение на отличное от нуля число не влияют на предкомпактность множества. Исходя из лемм 1 и 2, величины $N(Q)$ и $D(Q, x)$ равномерно отделены от нуля и бесконечности. Значит, компактность \mathcal{B} и \mathcal{D} напрямую следует из леммы 3, постулирующей компактность оператора \mathcal{C}_τ , который входит в определение указанных операторов. Лемма доказана.

Лемма 7. Оператор \mathcal{R} , определяемый выражением

$$\mathcal{R}Q(x) = \frac{sN(Q)}{\mu_w D(Q, x)} \left(\tilde{\beta}Q(x) \int_{B_w} Q(x-y) dy + \tilde{\gamma} \int_{B_w} Q(x-y)Q(y) dy \right),$$

является сжимающим в $\mathfrak{B}^+(R)$, где

$$R < \frac{\mu_w}{2} \frac{\alpha}{\beta + \gamma}.$$

Доказательство. Принимая во внимание леммы 1 и 2, можно показать, что для любого $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \left| \frac{sN(Q)}{\mu_w D(Q, x)} \right| &\leq \frac{b-d}{\mu_w \left(d + \left(\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{1+R/\mu_w} \right) (b-d) \right)} < \frac{b-d}{\mu_w (\tilde{\alpha}b + (1-\tilde{\alpha})d)} = \frac{b-d}{\mu_w (\tilde{\alpha}b + \tilde{\gamma}d)} \leq \\ &\leq \frac{b-d}{\mu_w (\tilde{\alpha}b - \tilde{\alpha}d + \tilde{\alpha}d + \tilde{\gamma}d)} = \frac{b-d}{\mu_w (\tilde{\alpha}(b-d) + (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})d)} \leq \frac{1}{\mu_w \tilde{\alpha}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{B}^+(R)$. Воспользуемся леммами 4 и 5 о липшицевости операторов самосвёртки и умножения на свёртку, а также найденной выше оценкой и получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}Q_1 - \mathcal{R}Q_2\|_{L_1} &< \frac{1}{\mu_w \tilde{\alpha}} (\tilde{\beta} \|\mathcal{P}Q_1 - \mathcal{P}Q_2\|_{L_1} + \tilde{\gamma} \|\mathcal{S}Q_1 - \mathcal{S}Q_2\|_{L_1}) \leq \\ &\leq \frac{2R(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma})}{\mu_w \tilde{\alpha}} \|Q_1 - Q_2\|_{L_1} = \frac{2R(\beta + \gamma)}{\mu_w \alpha} \|Q_1 - Q_2\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для сжимаемости оператора \mathcal{R} достаточно, чтобы

$$\frac{2R(\beta + \gamma)}{\mu_w \alpha} < 1,$$

откуда вытекает оценка R утверждения леммы.

Лемма 8. Если

$$\frac{b}{b-d} \geq \frac{\mu_m}{\mu_w} \geq 1 \tag{11}$$

и

$$\tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \leq \frac{1}{2+2R}, \tag{12}$$

то при любых $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{B}Q(x) - \mathcal{D}Q(x) - \mathcal{R}Q(x) \geq 0. \tag{13}$$

Доказательство. Умножим неравенство (13) на положительную (по лемме 2) величину $D(Q, x)$ и разделим на s . После этого, объединив отрицательные интегральные слагаемые под единый интеграл и упростив, получим равносильное неравенство вида

$$\frac{bm(x)}{sN(Q)} + \frac{b}{s\mu_m} \int_{B_m} Q(x-y) dy - w(x) - \frac{N(Q)}{\mu_w} \int_{B_w} (\tilde{\beta}(1+Q(x)) + \tilde{\gamma}(1+Q(y))) Q(x-y) dy \geq 0.$$

По лемме 1 $N(Q) \geq (b-d)/s$, поэтому с учётом (11)

$$\frac{bm(x)}{sN(Q)} - w(x) \geq \frac{b}{b-d}m(x) - w(x) \geq 0.$$

Тогда нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{b}{\mu_m} \int_{B_m} Q(x-y) dy - \frac{b-d}{\mu_w} \int_{B_w} (\tilde{\beta}(1+Q(x)) + \tilde{\gamma}(1+Q(y)))Q(x-y) dy \geq 0,$$

которое, исходя из (11), равносильно

$$\int_{B_m} Q(x-y) dy \geq \int_{B_w} (\tilde{\beta}(1+Q(x)) + \tilde{\gamma}(1+Q(y)))Q(x-y) dy,$$

что следует из условия (12). Лемма доказана.

Теорема 2 (о разрешимости уравнения равновесия). Пусть $2(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) > \alpha\gamma$,

$$\begin{aligned} \mu_w &\geq \frac{bs}{(b-d)^2} \frac{\alpha + \gamma}{\alpha} \frac{(\alpha + 2\beta + 2\gamma)^2}{2(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) - \alpha\gamma}, \\ R &< \frac{\mu_w}{2} \frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \end{aligned} \tag{14}$$

и выполнены условия (11), (12). Тогда уравнение равновесия (10) имеет хотя бы одно решение $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$. При этом если $d > 0$, то решение гарантированно нетривиальное.

Доказательство. Уравнение равновесия имеет вид $Q = \mathcal{B}Q - \mathcal{D}Q - \mathcal{R}Q$. По лемме 6 оператор $\mathcal{B} - \mathcal{D}$ компактен, а по лемме 7 оператор $-\mathcal{R}$ сжимающий в $\mathfrak{B}^+(R)$. Если мы сможем показать, что при любых $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{B}^+(R)$ выполнено

$$\mathcal{B}Q_1 - \mathcal{D}Q_1 - \mathcal{R}Q_2 \in \mathfrak{B}^+(R),$$

то по теореме 1 исходное уравнение будет иметь хотя бы одну неподвижную точку в $\mathfrak{B}^+(R)$. Лемма 8 гарантирует, что указанное выражение будет неотрицательным. Остаётся убедиться, что оно по норме не превосходит R .

Исследуем оценку снизу из леммы 2. Принимая во внимание выражение для R , имеем

$$1 + \frac{R}{\mu_w} < 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta + \gamma},$$

т.е.

$$\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{1 + R/\mu_w} > \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + \frac{\beta/(\alpha + \gamma)}{1 + \alpha/(2\beta + 2\gamma)} = \frac{\alpha(\alpha + 2\beta + 2\gamma) + 2\beta(\beta + \gamma)}{(\alpha + \gamma)(\alpha + 2\beta + 2\gamma)} = \xi.$$

Это значит, что при любом $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$ и любом $x \in \mathbb{R}^n$ верна оценка

$$\frac{1}{D(Q, x)} < \frac{1}{d + \xi(b-d)}.$$

Пусть $Q_1 \in \mathfrak{B}^+(R)$, тогда после применения теоремы Фубини, стандартных интегральных неравенств и указанной выше оценки получим

$$\|\mathcal{B}Q_1\|_{L_1} < \frac{b}{d + \xi(b-d)} \left(\frac{s(1 + R/\mu_w)}{b-d} + R \right).$$

С другой стороны,

$$\|\mathcal{D}Q_1\|_{L_1} \geq 0, \quad \|\mathcal{R}Q_2\|_{L_1} \geq 0.$$

С учётом неотрицательности выражения и неотрицательности каждого из его составляющих имеем

$$\|\mathcal{B}Q_1 - \mathcal{D}Q_1 - \mathcal{R}Q_2\|_{L_1} \leq \|\mathcal{B}Q_1\|_{L_1} - \|\mathcal{D}Q_1\|_{L_1} - \|\mathcal{R}Q_2\|_{L_1} \leq \|\mathcal{B}Q_1\|_{L_1}.$$

Для выполнения теоремы достаточно, чтобы последнее выражение не превосходило R , а это будет выполнено, по крайней мере, если

$$\frac{b}{d + \xi(b-d)} \left(\frac{s(1+R/\mu_w)}{b-d} + R \right) \leq R.$$

Домножим обе части неравенства на $d + \xi(b-d)$, перегруппируем слагаемые, а также подставим явное выражение для R :

$$\frac{bs}{b-d} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \right) \leq \frac{\mu_w}{2} \frac{\alpha}{\beta + \gamma} (\xi - 1)(b-d),$$

при этом

$$\xi - 1 = \frac{2(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) - \alpha\gamma}{(\alpha + \gamma)(\alpha + 2\beta + 2\gamma)} > 0.$$

В итоге

$$\frac{bs}{(b-d)^2} \frac{\alpha + 2\beta + 2\gamma}{\alpha(\xi - 1)} \leq \mu_w,$$

что равносильно условию (14).

Таким образом, в $\mathfrak{B}^+(R)$ уравнение равновесия имеет решение. Допустим, что оно тривиально, т.е. $Q = \theta$. Тогда

$$\theta(x) = \frac{b}{D(\theta, x)} \left(\frac{sm(x)}{b-d} + 0 \right) - \frac{s}{D(\theta, x)} (w(x) + 0) - \frac{b-d}{\mu_w D(\theta, x)} (0 + 0) = \frac{s}{D(\theta, x)} \left(\frac{bm(x)}{b-d} - w(x) \right),$$

где

$$D(\theta, x) = sw(x) + \tilde{\alpha}b + \tilde{\gamma}d + \tilde{\beta}(b-d) > 0.$$

Домножив обе части уравнения на $D(\theta, x)/s$ и проинтегрировав по всему пространству \mathbb{R}^n , получим

$$0 = \frac{b}{b-d} - 1,$$

что возможно, только если $d = 0$, т.е. в рамках теоремы решение уравнения равновесия нетривиально. Теорема доказана.

Пример выполнения условий теоремы. Рассмотрим одномерный случай. Пусть $d = b/100$, $s = b/300$, $\alpha = 5\gamma$, $\beta = 2\gamma$, $\gamma > 0$, $r_m = 10/33$, $r_w = 3/10$. При этих условиях $\mu_m = 2r_m = 20/33$, $\mu_w = 2r_w = 3/5$ и $R = (\mu_w/2)(\alpha/(\beta + \gamma)) = 1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} 2(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) - \alpha\gamma &= 2\gamma \cdot 3\gamma - 5\gamma \cdot \gamma = \gamma^2 > 0, \\ \frac{b}{b-d} &= \frac{100}{99} = \frac{\mu_m}{\mu_w} \geq 1, \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{6} < \tilde{\beta} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+2R}, \\ \frac{bs}{(b-d)^2} \frac{\alpha + \gamma}{\alpha} \frac{(\alpha + 2\beta + 2\gamma)^2}{2(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) - \alpha\gamma} &= \frac{100}{3 \cdot 99 \cdot 99} \frac{6}{5} \frac{121}{1} = \frac{4840}{9801} < \frac{3}{5} = \mu_w. \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведён анализ разрешимости уравнения (10), описывающего соотношение первого и второго равновесных пространственных моментов при трёхпараметрическом замыкании второго порядка вида (4) в случае, когда пространственная неоднородность разброса и конкуренции задаётся функциями наиболее простой структуры (6). Отметим, что хотя в работах, опубликованных ранее (см., например, [6, 7]), проводился анализ более сложных случаев, выбор кусочно-постоянных ядер позволил максимально упростить уравнение, что дало возможность провести более точное исследование его свойств.

Показано, что оператор, задаваемый уравнением равновесия (10), можно представить в виде суммы компактного и сжимающего операторов, действующих на множестве неотрицательных функций из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$, ограниченных по норме некоторым числом R . Определены достаточные условия на биологические параметры модели, описывающие плодовитость, агрессивность и смертность, а также параметры замыкания, гарантирующие существование нетривиального равновесия.

Отметим, что были найдены лишь достаточные условия разрешимости уравнения равновесия, поэтому поиск необходимых условий (а также анализ устойчивости решения по параметрам модели) может стать перспективным направлением дальнейших исследований. Немаловажной задачей является и анализ единственности решения. Кроме того, вид уравнения позволяет предполагать, что по крайней мере при некоторых наборах параметров его решение можно получить в явном виде.

Авторы выражают благодарность У. Дикману и Е. Галкину за постановку задачи и плодотворные обсуждения результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Результаты пп. 1, 2 настоящей работы получены Никитиным А.А. при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Результаты пп. 3, 4 получены авторами при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Law, R. Moment approximations of individual-based models / R. Law, U. Dieckmann // *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — P. 252–270.
2. Dieckmann, U. Relaxation projections and the method of moments / U. Dieckmann, R. Law // *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — P. 412–455.
3. Николаев, М.В. Исследование разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений, возникающей в модели логистической динамики в случае кусочно-константных ядер / М.В. Николаев, А.А. Никитин, У. Дикман // *Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления*. — 2024. — Т. 515, № 1. — P. 44–49.
4. Murrell, D. On moment closures for population dynamics in continuous space / D. Murrell, U. Dieckmann, R. Law // *J. Theor. Biol.* — 2004. — V. 229, № 3. — P. 421–432.
5. Красносельский, М.А. Два замечания о методе последовательных приближений / М.А. Красносельский // *Успехи мат. наук*. — 1955. — Т. 10, № 1 (63). — С. 123–127.

6. Николаев, М.В. Принцип Лере–Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения / М.В. Николаев, А.А. Никитин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 9. — С. 1209–1217.
7. Николаев, М.В. Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике / М.В. Николаев, А.А. Никитин, У. Дикман // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 499, № 1. — С. 35–39.

**ON THE EXISTENCE OF EQUILIBRIUM IN THE DIECKMANN–LAW’S MODEL
IN THE CASE OF THE PIECEWISE CONSTANT KERNELS**

© 2024 / M. V. Nikolaev¹, A. A. Nikitin²

^{1,2}*Lomonosov Moscow State University, Russia*

²*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia*

e-mail: ¹nikolaev.mihail@inbox.ru, ²nikitin@cs.msu.ru

The logistic dynamics model developed by U. Dieckmann and R. Law is considered in the article. The analysis of a nonlinear integral equation describing the equilibrium state of a single-species community with a three-parameter closure of the third spatial moment is carried out in the case when the dispersion and competition kernels are piecewise constant functions. Sufficient conditions for the mentioned equation solvability are established.

Keywords: nonlinear integral equation, population dynamics

FUNDING

The results in Sections 1, 2 were obtained by A. Nikitin with financial support from the Russian Science Foundation, project no. 22-11-00042. The results in Sections 3, 4 were obtained by the authors with support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Law, R. and Dieckmann, U., Moment approximations of individual-based models, in *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000, p. 252–270.
2. Dieckmann, U. and Law, R., Relaxation projections and the method of moments, in *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000, p. 412–455.
3. Nikolaev, M.V., Nikitin, A.A., and Dieckmann, U., Solvability analysis of the nonlinear integral equations system arising in the logistic dynamics model in the case of piecewise constant kernels, *Dokl. Math.*, 2024, vol. 109, no. 1, pp. 33–37.
4. Murrell, D., Dieckmann, U., and Law, R., On moment closures for population dynamics in continuous space, *J. Theor. Biol.*, 2004, vol. 229, no. 3, pp. 421–432.
5. Krasnosel’skii, M.A., Two remarks on the method of successive approximations, *Usp. Mat. Nauk*, 1955, vol. 10, no. 1 (63), pp. 123–127.
6. Nikolaev, M.V. and Nikitin, A.A., The Leray–Schauder principle applied to the study of a nonlinear integral equation, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 9, pp. 1164–1173.
7. Nikolaev, M.V., Dieckmann, U., and Nikitin, A.A., Application of special function spaces to the study of nonlinear integral equations arising in equilibrium spatial logistic dynamics, *Dokl. Math.*, 2021, vol. 104, no. 1, pp. 188–192.

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.968.78

**ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ, ПОКРЫТОМ ГРАФЕНОМ**

© 2024 г. Ю. Г. Смирнов¹, О. В. Кондырев²

Пензенский государственный университет

e-mail: ¹smirnovyug@mail.ru, ²kov20002204@mail.ru

Поступила в редакцию 21.03.2024 г., после доработки 21.03.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Рассмотрена задача о резонансных частотах диэлектрических тел, покрытых графеном, без учёта его нелинейности. Краевая задача сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений по поверхности графена. Доказано свойство фредгольмовости этой системы при выполнении достаточных условий. Установлена дискретность спектра оператор-функции, отвечающей системе интегро-дифференциальных уравнений, в области комплексной плоскости спектрального параметра (круговой частоты).

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, единственность, существование, фредгольмовость, уравнения Максвелла

DOI: 10.31857/S0374064124090053, EDN: JXKTJB

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи сопряжения для системы уравнений Максвелла имеют ряд важных приложений в электродинамике, в частности, при изучении процесса дифракции электромагнитных волн на диэлектрических телах (задачи дифракции), при исследовании собственных электромагнитных колебаний систем, состоящих из диэлектрических тел (задачи о резонансных частотах) и др. Основные типы этих задач исследованы достаточно подробно (см., например, работы [1–6]). Однако в последнее время появился интерес к краевым задачам со специальными условиями сопряжения, в которых предполагается наличие бесконечно тонкого слоя материала на поверхности раздела сред. В качестве примера такого материала можно рассмотреть графен, покрывающий диэлектрик [7–9], поскольку его слой имеет толщину в один атом, т.е. его можно считать бесконечно тонким. Но наличие графена на поверхности раздела сред изменяет условия сопряжения. В общем случае графен проявляет нелинейность в инфракрасном и терагерцевом диапазонах частот [10], во многих важных для приложений случаях ею можно пренебречь [11]. В настоящей статье будут рассмотрены линейные условия сопряжения.

Одним из наиболее известных методов решения задач сопряжения является метод сведения задачи к системе интегральных уравнений, что позволяет исследовать её свойства и разрешимость. Такой подход ориентирован на применение численных методов для поиска решения. Нередко переход к интегральным уравнениям приводит к понижению размерности решаемой задачи, что очень важно при реализации вычислительного алгоритма с точки зрения быстродействия и памяти компьютера. Кроме того, вычислительные алгоритмы, построенные для решения интегральных уравнений, легко распараллеливаются, что позво-

ляет использовать для их решения суперкомпьютеры. В работе [12] такой подход численно реализован для краевой задачи в скалярном случае с нелинейными условиями сопряжения.

В настоящей статье изучена система интегральных уравнений для задачи на собственные значения относительно спектрального параметра (круговой частоты). Заметим, что задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле, покрытом графеном, приводит к той же системе интегральных уравнений, но уже не однородной, а с некоторой ненулевой правой частью.

В открытых объёмных магнитодиэлектрических резонаторах могут существовать только комплексные резонансные частоты из-за излучения в свободное пространство [2, с. 384; 13, с. 34]. Это означает, что вещественные положительные характеристические числа у оператор-функции, отвечающей краевой задаче, отсутствуют, все комплексные резонансные частоты имеют отрицательную мнимую часть. Физическая интерпретация комплексных резонансных частот подробно изложена в книге [2, с. 385].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ограниченную область $\Omega_1 \in \mathbb{R}^3$ с границей Γ класса гладкости C^2 и диэлектрической ε_1 и магнитной μ_1 проницаемостью в области Ω_1 и ε_2, μ_2 — в $\Omega_2 := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$, причём $\varepsilon_i > 0$ и $\mu_i > 0, i = 1, 2$. Электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в области Ω_1 представим как $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$, а в области Ω_2 — как $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$. Для определения указанных компонент необходимо решить систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_2, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_2 \mathbf{H}_2 \quad \text{в } \Omega_2, \quad (2)$$

где ω — круговая частота.

На границе Γ должны выполняться условия сопряжения

$$[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}]_{\Gamma} = \sigma \mathbf{E}_{\tau}, \quad [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}]_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где $[\]_{\Gamma}$ — разность следов функции с разных сторон Γ ; $\boldsymbol{\nu}$ — вектор нормали к границе Γ , направленный в область Ω_2 ;

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3 |E_{\tau}|^2 \quad (4)$$

— нелинейная проводимость графена [10, 11], выраженная законом Керра; индекс τ — касательные компоненты. Будем считать, что $\sigma_1 \neq 0, \sigma_3 = 0$, т.е. рассматривать только линейный случай.

На бесконечности должны выполняться условия

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_2) + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_2)) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где \mathbf{e}_r — вектор нормали к единичной сфере, $r := |x|$ и $x = (x_1, x_2, x_3)$.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

Теорема 1. *Если $\operatorname{Re} \sigma \geq 0$ и $\omega > 0$, то задача (1)–(5) имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Вместе с полями $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ будем рассматривать комплексно-сопряжённые поля $\{\bar{\mathbf{E}}_1, \bar{\mathbf{H}}_1\}$ и $\{\bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{H}}_2\}$. Они удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_1 = +i\omega\varepsilon_1 \bar{\mathbf{E}}_1, \quad \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_1 = -i\omega\mu_1 \bar{\mathbf{H}}_1 \quad \text{в } \Omega_1,$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_2 = +i\omega\varepsilon_2 \bar{\mathbf{E}}_2, \quad \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_2 = -i\omega\mu_2 \bar{\mathbf{H}}_2 \quad \text{в } \Omega_2,$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{H}}_2)|_{\Gamma} - (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{H}}_1)|_{\Gamma} &= \overline{\sigma} \overline{\mathbf{E}}_{\tau}, \quad (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{E}}_2)|_{\Gamma} - (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{E}}_1)|_{\Gamma} = 0, \\ (\mathbf{e}_r \times \overline{\mathbf{E}}_2) + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \overline{\mathbf{H}}_2)) &= o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Применив лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\overline{\mathbf{E}}_1, \overline{\mathbf{H}}_1\}$ в области Ω_1 , получим

$$\int_{\Gamma} [\mathbf{E}_1 \cdot (\overline{\mathbf{H}}_1 \times \boldsymbol{\nu}_1) + \overline{\mathbf{E}}_1 \cdot (\mathbf{H}_1 \times \boldsymbol{\nu}_1)] ds = 0, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\nu}_1$ — единичная нормаль к поверхности Γ , направленная во внешность тела.

Пусть Σ_R — сфера такого радиуса R , что содержит в себе область Ω_1 . Тогда, применяя лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ и $\{\overline{\mathbf{E}}_2, \overline{\mathbf{H}}_2\}$ в области между поверхностью Γ и сферой Σ_R , будем иметь

$$\int_{\Gamma} [\mathbf{E}_2 \cdot (\overline{\mathbf{H}}_2 \times \boldsymbol{\nu}_2) + \overline{\mathbf{E}}_2 \cdot (\mathbf{H}_2 \times \boldsymbol{\nu}_2)] ds + \int_{\Sigma_R} [\mathbf{E}_2 \cdot (\overline{\mathbf{H}}_2 \times \mathbf{e}_r) + \overline{\mathbf{E}}_2 \cdot (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{e}_r)] ds = 0, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\nu}_1 = -\boldsymbol{\nu}_2 \equiv \boldsymbol{\nu}$.

Складывая (6) и (7) с учётом условий сопряжения на Γ , получаем

$$\operatorname{Re} \sigma \int_{\Gamma} |\mathbf{E}_{\tau}|^2 ds + \int_{\Sigma_R} [\mathbf{E}_2 \cdot (\overline{\mathbf{H}}_2 \times \mathbf{e}_r) + \overline{\mathbf{E}}_2 \cdot (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{e}_r)] ds = 0. \quad (8)$$

Перейдём к пределу при $R \rightarrow \infty$ в соотношении (8) и применим условия на бесконечности:

$$\operatorname{Re} \sigma \int_{\Gamma} |\mathbf{E}_{\tau}|^2 ds + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} |\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_2|^2 ds = 0. \quad (9)$$

Оба слагаемых в (9) неотрицательны, поэтому [14, с. 69, 75] $\mathbf{E}_2 \equiv 0$ и $\mathbf{H}_2 \equiv 0$ всюду в $\overline{\Omega}_2$. Из условий сопряжения находим, что

$$(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_1)|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{E}_{\tau} = 0, \quad (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_1)|_{\Gamma} = 0,$$

следовательно, в силу аналитичности полей $\mathbf{E}_1 \equiv 0$, $\mathbf{H}_1 \equiv 0$ всюду в Ω_1 . Таким образом, задача (1)–(5) имеет только тривиальное решение.

3. СИСТЕМА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Выразим компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} поля через комбинацию поверхностных электрических и магнитных диполей с помощью формул Стрэттона–Чу в области Ω_1 [4, с. 124]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\varepsilon_1} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}_1(y)) ds(y) - \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}_1(y)) ds(y), \\ \mathbf{H}_1 &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu_1} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}_1(y)) ds(y) - \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}_1(y)) ds(y), \end{aligned} \quad (10)$$

где $x \in \Omega_1$; и в области Ω_2 [4, с. 128]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\varepsilon_2} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}_2(y)) ds(y) + \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}_2(y)) ds(y), \\ \mathbf{H}_2 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu_2} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}_2(y)) ds(y) + \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}_2(y)) ds(y), \end{aligned} \quad (11)$$

где $x \in \Omega_2$. В (10) и (11)

$$\Phi_1(x, y) = \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1; \quad \Phi_2(x, y) = \frac{e^{ik_2|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2.$$

Выполнив замену

$$\mathbf{j}_1 = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{m}_1 = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_1; \quad \mathbf{j}_2 = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{m}_2 = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_2, \quad (12)$$

перепишем условия (3) в виде

$$\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1 = \sigma \mathbf{E}_\tau, \quad \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 = 0. \quad (13)$$

Выразим из условий (13) неизвестные $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ через \mathbf{j} и \mathbf{m} следующим образом:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}, \quad \mathbf{j}_1 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_1 + \sigma(\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{j} + \sigma(\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}). \quad (14)$$

Перепишем (10) и (11) с учётом (12) и (14):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \text{rot rot} \frac{1}{i\omega\varepsilon_1} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) \mathbf{j}(y) ds(y) - \text{rot} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) \mathbf{m}(y) ds(y), \\ \mathbf{H}_1 &= -\text{rot rot} \frac{1}{i\omega\mu_1} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) \mathbf{m}(y) ds(y) - \text{rot} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) \mathbf{j}(y) ds(y); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\text{rot rot} \frac{1}{i\omega\varepsilon_2} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) [\mathbf{j}(y) + \sigma(\mathbf{m}(y) \times \boldsymbol{\nu}(y))] ds(y) + \text{rot} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) \mathbf{m}(y) ds(y), \\ \mathbf{H}_2 &= \text{rot rot} \frac{1}{i\omega\mu_2} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) \mathbf{m}(y) ds(y) + \text{rot} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) [\mathbf{j}(y) + \sigma(\mathbf{m}(y) \times \boldsymbol{\nu}(y))] ds(y). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим выражения (15) и (16) в условия (3) и внесём ротор под интеграл по следующей формуле [5, с. 200]:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x) &= \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \mathbf{a}(y) ds(y), \\ \boldsymbol{\nu}(x) \times \text{rot} \mathbf{S}_{\pm}(x) &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \text{rot}_x (\Phi(x, y) \mathbf{a}(y)) ds(y) \pm \frac{1}{2} \mathbf{a}(x), \\ \lim_{h \rightarrow +0} \boldsymbol{\nu}(x) [\text{rot rot} \mathbf{S}(x + h\boldsymbol{\nu}(x)) - \text{rot rot} \mathbf{S}(x - h\boldsymbol{\nu}(x))] &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \text{rot}_x \text{rot}_x \left(\frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\varepsilon_2} + \frac{\Phi_1(x, y)}{i\omega\varepsilon_1} \right) \mathbf{j}(y) ds(y) - \\ & - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \text{rot}_x \text{rot}_x \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\varepsilon_2} \sigma(\mathbf{m}(y) \times \boldsymbol{\nu}(y)) ds(y) + \\ & + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \text{rot}_x (\Phi_2(x, y) + \Phi_1(x, y)) \mathbf{m}(y) ds(y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \left(\frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\mu_2} + \frac{\Phi_1(x, y)}{i\omega\mu_1} \right) \mathbf{m}(y) \, ds(y) + \\ & \quad + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x (\Phi_2(x, y) + \Phi_1(x, y)) \mathbf{j}(y) \, ds(y) + \\ & \quad + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x \Phi_2(x, y) \sigma(\mathbf{m}(y) \times \boldsymbol{\nu}(y)) \, ds(y) = \frac{1}{2} \sigma(\mathbf{m}(x) \times \boldsymbol{\nu}(x)). \end{aligned} \tag{17}$$

Введём операторы, действующие на касательное векторное поле:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i \mathbf{a} &= 2 \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x (\Phi_i(x, y) \mathbf{a}(y)) \, ds(y), \quad i = 1, 2; \\ \mathbf{T}_i \mathbf{a} &= 2 \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x (\Phi_i(x, y) \mathbf{a}(y)) \, ds(y), \quad i = 1, 2; \\ \mathbf{R} \mathbf{a} &= \mathbf{a} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{R} \mathbf{a} = \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать эти операторы в пространстве [5, с. 204]

$$C^{0,\alpha}(\operatorname{Div}, \Gamma) := \{ \mathbf{a} \in C_t^{0,\alpha}(\Gamma) : \operatorname{Div} \mathbf{a} \in C^{0,\alpha}(\Gamma) \}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

с нормой

$$\| \mathbf{a} \|_{C^{0,\alpha}(\operatorname{Div}, \Gamma)} := \| \mathbf{a} \|_{\alpha, \Gamma} + \| \operatorname{Div} \mathbf{a} \|_{\alpha, \Gamma}.$$

Лемма 1 [5, с. 206]. Операторы $\mathbf{M}_i : C^{0,\alpha}(\operatorname{Div}, \Gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\operatorname{Div}, \Gamma)$, $i = 1, 2$, являются компактными.

Лемма 2 [5, с. 206]. Операторы $\mathbf{T}_i : C^{0,\alpha}(\operatorname{Div}, \Gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\operatorname{Div}, \Gamma)$, $i = 1, 2$, являются ограниченными.

Лемма 3 [5, с. 207]. Имеет место равенство

$$\mathbf{T}_i^2 = k_i^2 (\mathbf{I} - \mathbf{M}_i^2), \quad k_i \neq 0, \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Лемма 4. Операторы \mathbf{T}_i , $i = 1, 2$, при $k_i \neq 0$ являются фредгольмовыми с нулевым индексом.

Доказательство. Из (18) следует, что оператор \mathbf{T}_i имеет левый и правый регуляризаторы [15, с. 6] (совпадающие с самим \mathbf{T}_i), поэтому \mathbf{T}_i почти обратим [16, с. 87] и, следовательно, фредгольмов [16, с. 89].

Вычислим индекс оператора. В силу леммы 3 имеем, с одной стороны,

$$\operatorname{ind} \mathbf{T}_i^2 = \operatorname{ind}(k_i^2 (\mathbf{I} - \mathbf{M}_i^2)) = \operatorname{ind}(k_i^2 \mathbf{I}) = 0,$$

а с другой —

$$\operatorname{ind} \mathbf{T}_i^2 = \operatorname{ind} \mathbf{T}_i + \operatorname{ind} \mathbf{T}_i = 2 \operatorname{ind} \mathbf{T}_i,$$

поэтому $\operatorname{ind} \mathbf{T}_i = 0$. Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{T}(k)$ — оператор \mathbf{T}_i с $k_i = k$. Пусть Λ — множество значений $k \in \mathbb{C}$, которые являются собственными значениями внутренней задачи Максвелла [4, с. 135]. Заметим, что Λ — дискретное не более чем счётное множество в \mathbb{C} .

Лемма 5. Если $k \notin \Lambda$, то оператор $\mathbf{T}(k) : C^{0,\alpha}(\operatorname{Div}, \Gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\operatorname{Div}, \Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, непрерывно обратим.

Доказательство следует из леммы 4 и результата [4, с. 152] о единственности решения уравнения при $k \notin \Lambda$.

Лемма 6. *Оператор-функция $T(k): C^{0,\alpha}(\text{Div}, \Gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\text{Div}, \Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, голоморфна в \mathbb{C} и фредгольмова с нулевым индексом.*

Доказательство. Голоморфность $T(k)$ следует из аналитичности функции $\Phi(x, y) = e^{ik|x-y|}/(4\pi|x-y|)$ по $k \in \mathbb{C}$. Фредгольмовость следует из леммы 4.

Домножим систему уравнений (17) на $i\omega$ и представим её в операторном виде:

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon_1^{-1} T_1 + \varepsilon_2^{-1} T_2)\mathbf{j} - \varepsilon_2^{-1} \sigma T_2(\mathbf{R} \mathbf{m}) + i\omega(M_1 + M_2)\mathbf{m} = 0, \\ & (\mu_1^{-1} T_1 + \mu_2^{-1} T_2)\mathbf{m} + i\omega(M_1 + M_2)\mathbf{j} + i\omega M_2(\sigma \mathbf{R} \mathbf{m}) - i\omega \sigma \mathbf{R} \mathbf{m} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Запишем (19) как систему

$$\begin{aligned} & (-\varepsilon_1^{-1} T_1 - \varepsilon_2^{-1} T_2)\mathbf{j} - \varepsilon_2^{-1} \sigma T_2(\mathbf{R} \mathbf{m}) + K_1 \mathbf{m} = 0, \\ & (\mu_1^{-1} T_1 + \mu_2^{-1} T_2)\mathbf{m} - i\sigma \omega \mathbf{R} \mathbf{m} + K_2 \mathbf{m} + K_3 \mathbf{j} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

с компактными операторами K_1, K_2, K_3 . Далее,

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) T_2 \mathbf{j} - \varepsilon_1^{-1} (T_1 - T_2) \mathbf{j} - \sigma \varepsilon_2^{-1} T_2(\mathbf{R} \mathbf{m}) + K_1 \mathbf{m} = 0, \\ & (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}) T_2 \mathbf{m} + \mu_1^{-1} (T_1 - T_2) \mathbf{m} - i\sigma \omega \mathbf{R} \mathbf{m} + K_2 \mathbf{m} + K_3 \mathbf{j} = 0. \end{aligned}$$

Поддействовав оператором T_2 на оба уравнения, получим систему

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) k_2^2 \mathbf{j} - \varepsilon_1^{-1} T_2 (T_1 - T_2) \mathbf{j} - \varepsilon_2^{-1} \sigma T_2^2(\mathbf{R} \mathbf{m}) + \tilde{K}_{11} \mathbf{j} + \tilde{K}_{12} \mathbf{m} = 0, \\ & (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}) k_2^2 \mathbf{m} + \mu_1^{-1} T_2 (T_1 - T_2) \mathbf{m} - i\sigma \omega T_2(\mathbf{R} \mathbf{m}) + \tilde{K}_{21} \mathbf{j} + \tilde{K}_{22} \mathbf{m} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

с компактными операторами \tilde{K}_{ij} , $i, j = 1, 2$.

Теорема 2. *Если выполняются условия*

$$\|T_2\| |\sigma\omega| + \mu_1^{-1} \|T_2\| \|T_1 - T_2\| < (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}) |k_2|^2, \tag{22}$$

$$\varepsilon_1^{-1} \|T_2\| \|T_1 - T_2\| < (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) |k_2|^2, \tag{23}$$

то оператор системы (21) фредгольмов с нулевым индексом.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 1 операторы

$$\begin{aligned} & -(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) k_2^2 \mathbf{I} - \varepsilon_1^{-1} T_2 (T_1 - T_2), \\ & (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}) k_2^2 \mathbf{I} + \mu_1^{-1} T_2 (T_1 - T_2) - i\sigma \omega T_2 \mathbf{R} \end{aligned}$$

обратимы, откуда, учитывая компактность операторов \tilde{K}_{ij} , $i, j = 1, 2$, и следует фредгольмовость оператора системы (21) с нулевым индексом.

Замечание. В силу леммы 5 если $k_2 \notin \Lambda$, то системы (20) и (21) эквивалентны.

Согласно [11] $\sigma(\omega)$ является аналитической функцией в области $\mathbb{C} \setminus \{\omega: \text{Im} \omega = \eta\}$ для некоторого $\eta > 0$, причём $|\omega\sigma(\omega)| \leq C_0$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, $|\text{Im} \omega - \eta| > \delta_0$ для некоторого $C_0 > 0$ и любого $\delta_0 > 0$.

Обозначим через $D \subset \mathbb{C}$ область значений ω , для которых выполняются неравенства (22) и (23). Такие значения ω есть по крайней мере тогда, когда $|\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2|$ мало и $|\sigma|$ также достаточно мало.

Обозначим через $A(\omega)$ оператор-функцию, определяемую системой (19): $A(\omega): B \rightarrow B$, $B := C^{0,\alpha}(\text{Div}, \Gamma) \times C^{0,\alpha}(\text{Div}, \Gamma)$, $\mathbf{u} = (j, m)^T$, $A(\omega)\mathbf{u} = 0$. Так как операторы T_i и M_i зависят от ω аналитически (голоморфные оператор-функции), то $A(\omega)$ голоморфна в области D . Тогда из теоремы 2 следует [17]

Теорема 3. *В области $D \setminus \{\omega: k_2 \in \Lambda\}$ оператор-функция $A(\omega): B \rightarrow B$ является фредгольмовой и имеет в D дискретный спектр, т.е. спектр $A(\omega)$ состоит из не более чем счётного множества изолированных характеристических чисел конечной алгебраической кратности.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи о рассеянии электромагнитных волн на диэлектрических телах, покрытых графеном, приводят к новому типу краевых задач электродинамики с видоизменёнными условиями сопряжения. В общем случае условия сопряжения становятся нелинейными [9]. Однако и случай линейных условий сопряжения пока не исследован достаточно подробно.

В статье получена новая система интегро-дифференциальных уравнений в задаче о распространении электромагнитных волн на диэлектрическом рассеивателе произвольной формы, покрытом графеном. Доказанная фредгольмовость системы (при некоторых ограничениях на параметры задачи) в специальных пространствах Гёльдера позволяет получать результаты о разрешимости как в задаче о резонансных частотах, так и в задаче дифракции электромагнитной волны на рассеивателе. Кроме того, система интегро-дифференциальных уравнений удобна для численного решения соответствующих задач.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М. : Наука, 1973. — 407 с.
2. Санчес-Паленсия, Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия ; пер. с англ. В.В. Житкова ; под ред. О.А. Олейник. — М. : Мир, 1984. — 472 с.
3. Nédélec, J.-C. Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems / J.-C. Nédélec. — New York; Berlin; Heidelberg : Springer, 2001. — 316 p.
4. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс ; пер. с англ. Ю.А. Еремина, Е.В. Захарова ; под ред. А.Г. Свешникова. — М. : Мир, 1987. — 311 с.
5. Colton, D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. — 3rd ed. — New York : Springer, 2013. — 420 p.
6. Смирнов, Ю.Г. Численное и аналитическое исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных резонаторов / Ю.Г. Смирнов, Ю.А. Петрова // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 9. — С. 1266–1273.
7. Смирнов, Ю.Г. О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном / Ю.Г. Смирнов, С.В. Тихов, Е.В. Гусарова // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. — 2022. — № 3. — С. 11–18.
8. Лерер, А.М. Численная оценка погрешности метода возмущения при решении задачи об отражении электромагнитной волны от нелинейного графенового слоя / А.М. Лерер // Радиотехника и электроника. — 2022. — Т. 67, № 9. — С. 855–858.

9. Smirnov, Y.G. The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene / Y.G. Smirnov, S.V. Tikhov // *Photonics*. — 2023. — № 10. — Art. 523.
10. Mikhailov, S.A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene / S.A. Mikhailov // *Phys. Rev. B*. — 2016. — V. 93, № 8. — Art. 085403.
11. Hanson, G.W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene / G.W. Hanson // *J. Appl. Phys.* — 2008. — V. 103, № 6. — Art. 064302.
12. Смирнов, Ю.Г. О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнения Гельмгольца / Ю.Г. Смирнов, О.В. Кондырев // *Дифференц. уравнения*. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1089–1097.
13. Диэлектрические резонаторы / М.Е. Ильченко, В.Ф. Взятыхшев, Л.Г. Гассанов [и др.]. — М. : Радио и связь, 1989. — 326 с.
14. Ильинский, А.С. Математические модели электродинамики и акустики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. — М. : Высшая школа, 1991. — 224 с.
15. Панич, О.И. Введение в общую теорию эллиптических кривых задач / О.И. Панич. — Киев : Вища школа, 1986. — 126 с.
16. Кириллов, А.А. Теоремы и задачи функционального анализа / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1988. — 396 с.
17. Гохберг, И.Ц. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше / И.Ц. Гохберг, Е.И. Сигал // *Мат. сб.* — 1971. — Т. 84, № 4. — С. 607–629.

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING ON A DIELECTRIC BODY COVERED WITH GRAPHENE

© 2024 / Yu. G. Smirnov¹, O. V. Kondyrev²

Penza State University, Russia

e-mail: ¹smirnovyug@mail.ru, ²kow20002204@mail.ru

We consider the determination of resonance frequencies of dielectric bodies coated with graphene. In the addressed problem statement, the graphene nonlinearity is not taken into account. The initial boundary-value problem for Maxwell's equations is reduced to a system of integro-differential equations on the graphene surface. We prove the Fredholm property of this system under certain sufficient conditions and establish the discreteness of the spectrum of an operator-valued function corresponding to this system in a certain region of the complex plane of the circular frequency spectral parameter.

Keywords: integro-differential equation, uniqueness, existence, Fredholm property, Maxwell's equation

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20087).

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya, O.A., *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* (Boundary Value Problems of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1973.
2. Sanches-Palensiya, E., *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, New York: Springer, 1980.
3. Nédélec, J.-C., *Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems*, New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2001.
4. Colton, D. and Kress, R., *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, New York: John Wiley & Sons, 1983.
5. Colton, D. and Kress, R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, New York: Springer, 2013.
6. Smirnov, Yu.G. and Petrova, Yu.A., Numerical and analytical study of the problem of electromagnetic oscillations in open inhomogeneous resonators, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 9, pp. 1258–1266.

7. Smirnov, Yu.G., Tihov, S.V., and Gusarova, E.V., On the propagation of electromagnetic waves in a dielectric layer coated with graphene, *Izv. vuzov. Povolzhsk. Reg. Fiz.-Mat. Nauki*, 2022, no. 3, pp. 11–18.
8. Lerer, A.M., Numerical evaluation of the errors of the perturbation method in solving the problem of the reflection of an electromagnetic wave from a nonlinear graphene layer, *J. Commun. Technol. Electron.*, 2022, vol. 67, no. 9, pp. 1063–1066.
9. Smirnov, Y.G. and Tikhov, S.V., The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene, *Photonics*, 2023, no. 10, art. 523.
10. Mikhailov, S.A., Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene, *Phys. Rev. B.*, 2016, vol. 93, no. 8, art. 085403.
11. Hanson, G.W., Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene, *J. Appl. Phys.*, 2008, vol. 103, no. 6, art. 064302.
12. Smirnov, Yu.G. and Kondyrev, O.V., On the fredholm property and solvability of a system of integral equations in the transmission problem for the Helmholtz equation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1095–1104.
13. П'ченко, М.Е., Vzyatyshev, V.F., Gassanov, L.G. [et al.], *Dielektricheskie rezonatory* (Dielectric Resonators), Moscow: Radio i svyaz', 1989.
14. П'инский, А.С., Kravcov, V.V., and Sveshnikov, A.G., *Matematicheskie modeli elektrodinamiki i akustiki* (Mathematical Models of Electrodynamics and Acoustics), Moscow: Vysshaya shkola, 1991.
15. Panich, O.I., *Vvedenie v obshchuyu teoriyu ellipticheskikh krevykh zadach* (Introduction to the General Theory of Elliptic Curve Problems), Kiev: Vishcha shkola, 1986.
16. Kirillov, A.A. and Gvishiani, A.D., *Teoremy i zadachi funkcional'nogo analiza* (Theorems and Problems of Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1988.
17. Gohberg, I.C. and Sigal, E.I., Operator generalization of the logarithmic residue theorem and Rouché's theorem, *Mat. Sb.*, 1971, vol. 84, no. 4, pp. 607–629.

УДК 519.624

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОКРЫТИЕМ

© 2024 г. А. А. Бобылев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: abobylov@gmail.com

Поступила в редакцию 08.06.2024 г., после доработки 08.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Рассматривается оператор Пуанкаре–Стеклова для однородной изотропной упругой полуплоскости со стратифицированным упругим покрытием, отображающий на части границы покрытия нормальные напряжения в нормальные перемещения. Для построения передаточной функции этого оператора используется вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. Дается определение и доказываются существование и единственность обобщенного решения вариационной задачи. Аппроксимация этой задачи проводится методом конечных элементов. Для численного решения полученной системы линейных алгебраических уравнений используется предобусловленный метод сопряженных градиентов. Проводится верификация разработанного вычислительного алгоритма.

Ключевые слова: оператор Пуанкаре–Стеклова, передаточная функция, упругая полуплоскость, стратифицированное покрытие

DOI: 10.31857/S0374064124090069, EDN: JWXCD0

ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений повышения триботехнических характеристик материалов является использование покрытий, представляющих собой гетерогенные структуры (композиты) с изменяющимся по глубине фазовым составом и, как следствие, физико-механическими свойствами. При исследовании локального контактного взаимодействия тел с покрытиями в качестве расчётной схемы, как правило, выбирается упругая полоса или слой, сцепленные с основанием. Подробный обзор основных результатов для неоднородных покрытий, лежащих на деформируемом основании, приведён в монографии [1, введение].

Необходимость учёта поверхностного микрорельефа контактирующих тел в виде волнистости или шероховатости приводит к постановке задач дискретного (множественного) контакта. В работе [2] рассмотрены задачи одностороннего дискретного контакта для однородной упругой полуплоскости, а в [3] — для однородной упругой полосы, сцепленной с недеформируемым основанием. С использованием оператора Пуанкаре–Стеклова (ОПС) получены вариационные формулировки этих задач в виде граничных вариационных неравенств и задач минимизации граничных функционалов, при численном решении которых требуется дискретизировать только часть границы области — зону возможного контакта, что существенно уменьшает размерность получаемых дискретных задач и снижает вычислительные затраты.

Для упругой области ОПС $Q: q_n \mapsto u_n$, отображающий на части Γ_q границы (в зоне возможного контакта) нормальные напряжения q_n в нормальные перемещения u_n , имеет вид

$$u_n(x_1) = \int_{\Gamma_q} g(x_1 - \xi_1) q_n(\xi_1) d\xi_1, \quad (1)$$

где $g(\cdot)$ — функция Грина. Получить представление этой функции в явном виде во многих случаях (в частности, для упругой полуплоскости со стратифицированным упругим покрытием) весьма затруднительно.

Учитывая, что правая часть равенства (1) является интегральным оператором типа свёртки, с помощью интегрального преобразования Фурье можно получить алгебраическое соотношение, связывающее трансформанты нормальных перемещений $\tilde{u}_n(\alpha)$ и нормальных напряжений $\tilde{q}_n(\alpha)$:

$$\tilde{u}_n(\alpha) = G(\alpha) \tilde{q}_n(\alpha), \quad (2)$$

где α — параметр преобразования Фурье, $G(\alpha) = \tilde{g}(\alpha)$ — трансформанта функции Грина. Функцию $G(\alpha)$, следуя [4], будем называть *передаточной функцией*. Действие ОПС сводится к выполнению прямого и обратного преобразований Фурье и перемножению трансформант.

Анализ известных подходов к построению передаточных функций ОПС для неоднородных упругих полос приведён в статье [5], там же предложен новый алгоритм вычисления передаточной функции, основанный на использовании вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений. Аппроксимация вариационных уравнений проводится методом конечных элементов. Для численного решения задачи применяется линейный одношаговый нестационарный итерационный метод, на каждом шаге которого методом прогонки решаются две системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трёхдиагональными матрицами. Предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающий сходимость итерационного процесса для любых значений параметра α преобразования Фурье. Разработанный в [5] вычислительный алгоритм использован при решении задач одностороннего дискретного контакта для многослойных [6] и функционально-градиентных [7] упругих полос, сцепленных с недеформируемым основанием.

Цель данной работы — обобщить алгоритм [5] на случай стратифицированной упругой полосы, сцепленной с однородной изотропной упругой полуплоскостью.

Постановка краевой задачи теории упругости, с помощью решения которой определяется ОПС, дана в п. 1. Краевая задача для трансформант перемещений, полученная в результате применения преобразования Фурье, приведена в п. 2. В п. 3 получена её вариационная формулировка, дано определение и доказаны существование и единственность обобщённого решения. Аппроксимация вариационной задачи методом конечных элементов приведена в п. 4. Для решения полученной СЛАУ в п. 5 предложен разработанный алгоритм предобусловленного метода сопряжённых градиентов (MSG), учитывающий структуру матрицы СЛАУ. Результаты верификации разработанного вычислительного алгоритма приведены в п. 6.

1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Сформулируем краевую задачу, с помощью которой вводится исследуемый ОПС. Пусть невесомая однородная изотропная упругая полуплоскость в неподвижной прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2 занимает область $\Omega_0 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \leq 0\}$. По всей своей границе Γ_0 полуплоскость сцеплена с покрытием — стратифицированной упругой полосой толщины h , занимающей область $\Omega_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \in \mathbb{R}, 0 \leq x_2 \leq h\}$.

Границу полосы $x_2 = h$ обозначим через Γ_1 . Параметры Ламе λ_0 и μ_0 материала полуплоскости являются постоянными в Ω_0 , а параметры Ламе материала полосы — произвольными ограниченными функциями координаты x_2 : $\lambda_1 = \lambda_1(x_2)$ и $\mu_1 = \mu_1(x_2)$. Требования к гладкости этих функций будут сформулированы ниже. Из физических соображений следует, что существуют постоянные $\lambda^* > 0$ и $\mu^* > 0$ такие, что

$$\lambda_0 \geq \lambda^*, \quad \mu_0 \geq \mu^*, \quad \lambda_1(x_2) \geq \lambda^*, \quad \mu_1(x_2) \geq \mu^*, \quad 0 \leq x_2 \leq h. \quad (3)$$

Под $u_i^{(n)}(\mathbf{x})$, $\sigma_{ij}^{(n)}(\mathbf{x})$, $i, j = 1, 2$, $n = 0, 1$, будем понимать, соответственно, компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в точке $\mathbf{x} \in \Omega_n$. Для упрощения обозначений всюду, где это возможно, говоря о параметрах, относящихся к конкретной области Ω_n , будем опускать индекс, указывающий на эту область.

Предполагается, что полуплоскость и полоса находятся в условиях плоской деформации, деформации малы, а массовые силы и напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряжённо-деформированное состояние областей Ω_n описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2}, & \sigma_{22} &= \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{2,2}, & \sigma_{12} &= \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \\ \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0, & \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 0 & \text{в } \Omega_n, & n = 0, 1. \end{aligned} \quad (4)$$

На части границы полосы $\Gamma_q \subset \Gamma_1$ приложена нормальная нагрузка:

$$\sigma_{22} = q, \quad \sigma_{21} = 0 \quad \text{на } \Gamma_q. \quad (5)$$

Остальная часть границы Γ_1 свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \setminus \Gamma_q. \quad (6)$$

Предполагается, что участок Γ_q границы является конечным, а главный вектор внешних усилий отличен от нуля и имеет ограниченную величину:

$$\text{diam } \Gamma_q < \infty, \quad 0 < \left| \int_{\Gamma_q} q d\Gamma_q \right| < +\infty. \quad (7)$$

Условия полного сцепления полуплоскости и полосы имеют вид

$$u_1^{(0)} = u_1^{(1)}, \quad u_2^{(0)} = u_2^{(1)}, \quad \sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{12}^{(1)}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{22}^{(1)} \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (8)$$

Для выделения класса единственности решения в рассматриваемой краевой задаче необходимо наложить дополнительные условия на поведение решения на бесконечности и на сцепления полуплоскости с покрытием как жёсткого целого.

В работе [8, § 90] для упругой полуплоскости рассмотрен случай, когда на бесконечности напряжения и вращение стремятся к нулю. Показано, что эти условия обеспечивают единственность поля напряжений. Если при этом отсутствуют массовые силы, а главный вектор внешних поверхностных усилий имеет ограниченную величину и отличен от нуля, то напряжения и соответствующие им перемещения имеют асимптотические представления

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad u_i(\mathbf{x}) = O(\ln |\mathbf{x}|), \quad i, j = 1, 2, \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Смещения $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ полуплоскости с покрытием как жёсткого целого находятся как

$$v_1(\mathbf{x}) = \lambda_1 - \omega x_2, \quad v_2(\mathbf{x}) = \lambda_2 + \omega x_1, \quad (10)$$

где λ_1 и λ_2 — компоненты поступательного перемещения, ω — поворот полуплоскости как жёсткого целого. Для соответствия со случаем, рассмотренным в [8, § 90], положим

$$\omega = 0. \quad (11)$$

2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСФОРМАНТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Аналогично [5] сформулируем краевую задачу для трансформант перемещений упругой полосы, решение которой используется для вычисления передаточной функции ОПС.

Введём преобразования Фурье от компонент перемещений и напряжений по формулам

$$\tilde{u}_k(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k(x_1, x_2) \exp\{-i\alpha x_1\} dx_1, \quad \tilde{\sigma}_{kl}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{kl}(x_1, x_2) \exp\{-i\alpha x_1\} dx_1. \quad (12)$$

Будем полагать, что все выполняемые далее преобразования Фурье (12) существуют.

Умножим уравнения (4) для области Ω_1 на $\exp\{-i\alpha x_1\}$ и проинтегрируем по x_1 на всей числовой прямой. В результате получим систему равенств, которые после интегрирования по частям превращаются в следующую систему соотношений относительно трансформант $\tilde{u}_k, \tilde{\sigma}_{kl}$ и их производных, рассматриваемых как функции переменной x_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= i\alpha(\lambda + 2\mu)\tilde{u}_1 + \lambda\tilde{u}'_2, & \tilde{\sigma}_{12} &= \mu(\tilde{u}'_1 + i\alpha\tilde{u}_2), & \tilde{\sigma}_{22} &= i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + (\lambda + 2\mu)\tilde{u}'_2, \\ i\alpha\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}'_{12} &= 0, & i\alpha\tilde{\sigma}_{12} + \tilde{\sigma}'_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Исключив из полученной системы трансформанты напряжений $\tilde{\sigma}_{kl}$, сделав замену

$$\tilde{u}_1(\alpha, x_2) = v_1(\alpha, x_2), \quad \tilde{u}_2(\alpha, x_2) = iv_2(\alpha, x_2) \quad (14)$$

и положив, что

$$\lambda(x_2) \in C^1[0, h], \quad \mu(x_2) \in C^1[0, h], \quad (15)$$

получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для трансформант перемещений упругой полосы:

$$-(\mu v'_1)' + \alpha(\mu v_2)' + \alpha\lambda v'_2 + \alpha^2(\lambda + 2\mu)v_1 = 0, \quad -((\lambda + 2\mu)v'_2)' - \alpha(\lambda v_1)' - \alpha\mu v'_1 + \alpha^2\mu v_2 = 0. \quad (16)$$

Применим далее преобразование Фурье к граничным условиям (5), (6), предполагая существование преобразования Фурье для тривиального продолжения функции $q(x_1)$ на Γ_1 :

$$\tilde{q}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1) \exp\{-i\alpha x_1\} dx_1. \quad (17)$$

В результате с учётом (13)–(15) получим краевые условия для системы (16) в точке $x_2 = h$:

$$\mu v'_1 - \alpha\mu v_2 = 0, \quad -(\lambda + 2\mu)v'_2 - \alpha\lambda v_1 = p, \quad (18)$$

где

$$p(\alpha) = i\tilde{\sigma}_{22}(\alpha, h) = i\tilde{q}(\alpha). \quad (19)$$

Далее сформулируем краевые условия в точке $x_2 = 0$. Для этого используем условия (8) и соотношения, связывающие компоненты перемещений и напряжений на границе Γ_0 упругой полуплоскости Ω_0 [9, § 2.4]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, 0) &= -\frac{S_1}{\pi} \int_{\Gamma_0} \sigma_{12}(\xi_1, 0) \ln|x_1 - \xi_1| d\xi_1 + S_2 \int_{\Gamma_0} \sigma_{22}(\xi_1, 0) \operatorname{sgn}(x_1 - \xi_1) d\xi_1 + \lambda_1, \\ u_2(x_1, 0) &= -\frac{S_1}{\pi} \int_{\Gamma_0} \sigma_{22}(\xi_1, 0) \ln|x_1 - \xi_1| d\xi_1 - S_2 \int_{\Gamma_0} \sigma_{12}(\xi_1, 0) \operatorname{sgn}(x_1 - \xi_1) d\xi_1 + \lambda_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$S_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0)/(2\mu_0(\lambda_0 + \mu_0)), \quad S_2 = 1/(4(\lambda_0 + \mu_0)).$$

Отметим, что соотношения (20) записаны с учётом (11).

Применим к равенствам (20) преобразование Фурье, полагая $\alpha \neq 0$. В результате получим алгебраические соотношения, связывающие трансформанты компонент перемещений и напряжений в точке $x_2 = 0$:

$$\tilde{u}_1 = S_1 \tilde{\sigma}_{12}/|\alpha| + 2iS_2 \tilde{\sigma}_{22}/\alpha, \quad \tilde{u}_2 = S_1 \tilde{\sigma}_{22}/|\alpha| - 2iS_2 \tilde{\sigma}_{12}/\alpha,$$

которые можно разрешить относительно трансформант напряжений:

$$\tilde{\sigma}_{12} = S_3 \tilde{u}_1 |\alpha| - iS_4 \tilde{u}_2 \alpha, \quad \tilde{\sigma}_{22} = S_3 \tilde{u}_2 |\alpha| + iS_4 \tilde{u}_1 \alpha,$$

где

$$S_3 = 2\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)/(\lambda_0 + 3\mu_0), \quad S_4 = 2\mu_0^2/(\lambda_0 + 3\mu_0). \tag{21}$$

Используя далее (13)–(15), получим краевые условия для системы (16) в точке $x_2 = 0$:

$$\mu v_1' - \alpha \mu v_2 = |\alpha| S_3 v_1 + \alpha S_4 v_2, \quad (\lambda + 2\mu) v_2' + \alpha \lambda v_1 = |\alpha| S_3 v_2 + \alpha S_4 v_1. \tag{22}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Если существуют преобразования Фурье (12) и (17), а также выполняются условия (15), то трансформанты компонент перемещений в области Ω_1 решения краевой задачи (3)–(11) с учётом (14) удовлетворяют краевой задаче (16), (18), (22).*

Определение 1. Решение краевой задачи (16), (18), (22), принадлежащее классу функций $[C^2(0, h)]^2 \cap [C^1[0, h]]^2$, называют *классическим решением*.

Лемма 1. *Передачная функция $G(\alpha)$ для $\alpha \neq 0$ вычисляется с помощью решения краевой задачи (16), (18), (22) по формуле*

$$G(\alpha) = -v_2(\alpha, h)/p(\alpha). \tag{23}$$

Доказательство. Выражение (23) следует из формул (2), (14), (17)–(19).

Следствие 1. *Передачная функция $G(\alpha)$ является вещественной функцией.*

Замечание. Случай $\alpha = 0$ в данной работе не рассматривается. Известно [10, § 6.5], что для упругой полуплоскости при $\alpha \rightarrow 0$ передачная функция $G(\alpha) \rightarrow \infty$. Вычислительные аспекты этого случая подробно рассмотрены, например, в работе [11].

3. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Переход к вариационной формулировке позволяет определить обобщённое решение задачи и ослабить требования (15) к гладкости исходных данных $\{\lambda(x_2), \mu(x_2)\}$. Далее будем полагать, что

$$\lambda(x_2) \in L_\infty(0, h), \quad \mu(x_2) \in L_\infty(0, h). \tag{24}$$

Вектор-функции $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ трансформант перемещений будем считать элементами функционального пространства $\mathbf{U} = U \times U$, где $U \equiv W_2^1(0, h)$ — пространство Соболева. Пространство \mathbf{U} является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{U}} = (v_1, w_1)_U + (v_2, w_2)_U, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbf{U}.$$

Введём на U билинейные и линейную формы

$$\begin{aligned} a_1(v, w) &= [\mu v', w'] + \alpha^2[(\lambda + 2\mu)v, w], & a_2(v, w) &= [(\lambda + 2\mu)v', w'] + \alpha^2[\mu v, w], \\ b_1(v, w) &= \alpha[\mu v, w'] - \alpha[\lambda v', w], & b_2(v, w) &= \alpha[\mu v', w] - \alpha[\lambda v, w'], \\ s_3(v, w) &= |\alpha|S_3v(0)w(0), & s_4(v, w) &= \alpha S_4v(0)w(0), & l_2(w) &= -p(\alpha)w(h), \end{aligned}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — стандартное скалярное произведение в пространстве $L_2(0, h)$.

Лемма 2. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, при выполнении условий (3) и (24) билинейные формы $a_1(\cdot, \cdot)$ и $a_2(\cdot, \cdot)$ являются непрерывными и положительно определёнными на U .

Доказательство. Симметричность билинейных форм очевидна, непрерывность несложно показать, используя условие (24), а коэрцитивность — неравенства (3).

Лемма 3. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (24) билинейные формы $b_1(\cdot, \cdot)$ и $b_2(\cdot, \cdot)$ являются непрерывными на U .

Доказательство. Непрерывность билинейных форм можно показать, используя условие (24), неравенство Коши–Буняковского и неравенство $rs \leq (r^2 + s^2)/2$, $r, s \in \mathbb{R}$.

Лемма 4. Если существует преобразование Фурье (17), то линейная форма $l_2(\cdot)$ непрерывна на U .

Доказательство следует из теоремы вложения Соболева $(W_2^1(0, h) \hookrightarrow C[0, h])$ [12, § 9].

Лемма 5. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (3) билинейные формы $s_3(\cdot, \cdot)$ и $s_4(\cdot, \cdot)$ являются симметричными и непрерывными на U .

Доказательство. Симметричность билинейных форм очевидна, а непрерывность следует из теоремы вложения Соболева $(W_2^1(0, h) \hookrightarrow C[0, h])$.

Лемма 6. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (3) билинейная форма $s_3(\cdot, \cdot)$ является неотрицательно определённой на U .

Доказательство следует из выполнения условий (3) и (21).

Рассмотрим далее вариационную задачу: для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, найти вектор-функцию $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in U$, удовлетворяющую системе вариационных уравнений

$$\begin{aligned} a_1(v_1, w_1) - b_1(v_2, w_1) + s_3(v_1, w_1) + s_4(v_2, w_1) &= 0 \quad \text{для любого } w_1 \in U, \\ a_2(v_2, w_2) - b_2(v_1, w_2) + s_3(v_2, w_2) + s_4(v_1, w_2) - l_2(w_2) &= 0 \quad \text{для любого } w_2 \in U. \end{aligned} \quad (25)$$

Теорема 2. Классическое решение (v_1, v_2) краевой задачи (16), (18), (22) является решением вариационной задачи (25).

Доказательство. Пусть w_1 и w_2 — две произвольные функции из пространства U . Умножим уравнения (16), соответственно, на w_1 и w_2 и далее проинтегрируем по отрезку $[0, h]$:

$$\begin{aligned} - \int_0^h (\mu v_1')' w_1 dx_2 + \alpha \int_0^h (\mu v_2)' w_1 dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_2' w_1 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h (\lambda + 2\mu) v_1 w_1 dx_2 &= 0, \\ - \int_0^h ((\lambda + 2\mu) v_2')' w_2 dx_2 - \alpha \int_0^h (\lambda v_1)' w_2 dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_1' w_2 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h \mu v_2 w_2 dx_2 &= 0. \end{aligned}$$

Первые два интеграла в каждом из полученных уравнений возьмём по частям:

$$\int_0^h \mu v_1' w_1' dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_2 w_1' dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_2' w_1 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h (\lambda + 2\mu) v_1 w_1 dx_2 + [(-\mu v_1' + \alpha \mu v_2) w_1] \Big|_0^h = 0,$$

$$\int_0^h (\lambda + 2\mu)v_2'w_2' dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_1 w_2' dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_1' w_2 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h \mu v_2 w_2 dx_2 - [((\lambda + 2\mu)v_2' + \alpha \lambda v_1)w_2] \Big|_0^h = 0,$$

откуда с учётом краевых условий (18) и (22) получим вариационные уравнения (25). Теорема доказана.

Определение 2. Решение вариационной задачи (25) называют *обобщённым решением краевой задачи* (16), (18), (22).

Используя известные приёмы [13, § 2.14], можно показать, что справедлива

Теорема 3. *Решение вариационной задачи (25), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщёнными), удовлетворяет (почти всюду) уравнениям (16) и краевым условиям (18), (22).*

Образует на \mathbf{U} билинейные и линейную формы

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= a_1(v_1, w_1) + a_2(v_2, w_2), & b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= b_1(v_2, w_1) + b_2(v_1, w_2), \\ s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= s_3(v_1, w_1) + s_3(v_2, w_2) + s_4(v_1, w_2) + s_4(v_2, w_1), & l(\mathbf{w}) &= l_2(w_2). \end{aligned}$$

Используя леммы 2–4, несложно показать, что имеют место следующие утверждения.

Лемма 7. *Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, при выполнении условий (3) и (24) билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и положительно определённой на \mathbf{U} .*

Лемма 8. *Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (24) билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$ является непрерывной на \mathbf{U} .*

Лемма 9. *Если существует преобразование Фурье (17), то линейная форма $l(\cdot)$ непрерывна на \mathbf{U} .*

Кроме того, справедлива

Лемма 10. *Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (3) билинейная форма $s(\cdot, \cdot)$ является непрерывной симметричной и неотрицательно определённой на \mathbf{U} .*

Доказательство. Непрерывность и симметричность билинейной формы следуют из леммы 5, а неотрицательную определённость можно показать, используя условия (3) и неравенства

$$0 < S_{34} = 2S_4/S_3 = 2\mu_0/(\lambda_0 + 2\mu_0) < 1. \quad (26)$$

Лемма доказана.

Введём на \mathbf{U} билинейную форму

$$k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (27)$$

и рассмотрим вариационную задачу: для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, найти вектор-функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, удовлетворяющую вариационному уравнению

$$k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - l(\mathbf{w}) = 0 \quad \text{для любого } \mathbf{w} \in \mathbf{U}. \quad (28)$$

Лемма 11. *Вариационное уравнение (28) эквивалентно системе уравнений (25).*

Доказательство. Путь $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — решение системы уравнений (25). Сложив эти уравнения, получим с учётом (27) вариационное уравнение (28). Обратно, выбирая в (28) $\mathbf{w} = (w_1, 0)$, получаем первое уравнение (25), а выбирая $\mathbf{w} = (0, w_2)$ — второе уравнение (25). Лемма доказана.

Разрешимость вариационной задачи (28) зависит от свойств билинейной формы $k(\cdot, \cdot)$. Покажем, что она является непрерывной и положительно определённой на \mathbf{U} .

Из лемм 7–10 следует

Лемма 12. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, при выполнении условий (24) билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является непрерывной на U .

Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 13. Билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является симметричной на U .

Для доказательства коэрцитивности билинейной формы $k(\cdot, \cdot)$ на U потребуется ряд вспомогательных утверждений. Введём гильбертово пространство вектор-функций $Y = [L_2(0, h)]^4$, оснащённое скалярным произведением

$$(\hat{y}, \check{y})_Y = [\hat{y}_1, \check{y}_1] + [\hat{y}_2, \check{y}_2] + [\hat{y}_3, \check{y}_3] + [\hat{y}_4, \check{y}_4], \quad \hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4), \quad \check{y} = (\check{y}_1, \check{y}_2, \check{y}_3, \check{y}_4) \in Y,$$

и определим оператор $j: U \rightarrow Y$ такой, что $jz = (z_1, z'_1, z_2, z'_2)$ для любого $z = (z_1, z_2) \in U$.

Зададим на Y билинейную форму

$$d(\hat{y}, \check{y}) = (D\hat{y}, \check{y})_Y, \tag{29}$$

где квадратная симметричная матрица-функция четвёртого порядка

$$D(x_2, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha^2(\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)) & 0 & 0 & \alpha\lambda(x_2) \\ 0 & \mu(x_2) & -\alpha\mu(x_2) & 0 \\ 0 & -\alpha\mu(x_2) & \alpha^2\mu(x_2) & 0 \\ \alpha\lambda(x_2) & 0 & 0 & \lambda(x_2) + 2\mu(x_2) \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 14. Для любых $\hat{z}, \check{z} \in U$ выполняется равенство

$$d(j\hat{z}, j\check{z}) = a(\hat{z}, \check{z}) - b(\hat{z}, \check{z}). \tag{30}$$

Матрицу-функцию $D(x_2, \alpha)$ при фиксированных значениях x_2 и α можно рассматривать как квадратную симметричную матрицу четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Современные системы компьютерной алгебры позволяют аналитически вычислить её собственные значения и соответствующие им собственные векторы. В данной работе с помощью системы SageMath установлено, что справедлива

Лемма 15. При выполнении условий (3) и (24) матрица $D(x_2, \alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, почти всюду на $[0, h]$ имеет четыре вещественных собственных значения:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = [(1 + \alpha^2)(\lambda + 2\mu) - \kappa]/2, \quad \omega_3 = \mu(1 + \alpha^2), \quad \omega_4 = [(1 + \alpha^2)(\lambda + 2\mu) + \kappa]/2,$$

которым соответствуют ортонормированные собственные векторы

$$f_1 = (0, 1, 1/\alpha, 0)/\gamma_1, \quad f_2 = (1, 0, 0, \theta - \vartheta)/\gamma_2, \quad f_3 = (0, 1, -\alpha, 0)/\gamma_3, \quad f_4 = (1, 0, 0, \theta + \vartheta)/\gamma_4,$$

где

$$\begin{aligned} \kappa &= [(1 - \alpha^2)^2(\lambda + 2\mu)^2 + 4\alpha^2\lambda^2]^{1/2}, \quad \theta = (\lambda + 2\mu)(1 - \alpha^2)/(2\alpha\lambda), \quad \vartheta = \kappa/(2\alpha\lambda), \\ \gamma_1 &= (1 + \alpha^2)^{1/2}/\alpha, \quad \gamma_2 = (1 + (\theta - \vartheta)^2)^{1/2}, \quad \gamma_3 = (1 + \alpha^2)^{1/2}, \quad \gamma_4 = (1 + (\theta + \vartheta)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Следствие 2. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, собственные значения матрицы $D(x_2, \alpha)$ ограничены почти всюду на $[0, h]$ и удовлетворяют условиям

$$\omega_4 > \omega_3 \geq \omega_2 > \omega_1 = 0. \tag{31}$$

Введём квадратную матрицу-функцию $\mathbf{F}(x_2, \alpha)$ четвёртого порядка, столбцами которой являются вектор-функции $\mathbf{f}_n(x_2, \alpha)$, $n = \overline{1, 4}$. При фиксированных значениях x_2 и α её можно рассматривать как квадратную матрицу четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Из известных результатов линейной алгебры [14, гл. 7] следует, что справедлива

Лемма 16. Матрица $\mathbf{F}(x_2, \alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, почти всюду на $[0, h]$ является ортогональной, т.е.

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^T \quad \text{и} \quad \|\mathbf{F}\mathbf{r}\|_{\mathbb{E}^4} = \|\mathbf{r}\|_{\mathbb{E}^4} \quad \text{для любого} \quad \mathbf{r} \in \mathbb{E}^4,$$

где \mathbb{E}^4 — евклидово пространство, и имеет место равенство

$$\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4).$$

Следствие 3. Для любого $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^4$ и $\mathbf{p} = \mathbf{F}^T \mathbf{r}$ выполняются равенства

$$(\mathbf{D}\mathbf{r}, \mathbf{r})_{\mathbb{E}^4} = (\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \mathbf{p}, \mathbf{p})_{\mathbb{E}^4} = \omega_2 p_2^2 + \omega_3 p_3^2 + \omega_4 p_4^2. \tag{32}$$

Лемма 17. Пусть $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ из условия

$$S_3 t_1^2 + 2S_4 t_1 t_2 + S_3 t_2^2 < \varepsilon \tag{33}$$

следует, что

$$t_i^2 < 2\varepsilon/S_3, \quad i = 1, 2. \tag{34}$$

Доказательство. Преобразуем условие (33) к виду

$$t_1^2 + S_{34} t_1 t_2 + t_2^2 < \varepsilon/S_3.$$

Выполнив замену переменных $t_1 = r \cos \varphi$ и $t_2 = r \sin \varphi$, получим неравенство

$$r^2(1 + S_{34} \sin(2\varphi)/2) < \varepsilon/S_3,$$

из которого с учётом оценки (26) следует неравенство (34).

Теорема 4. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является коэрцитивной на \mathbf{U} , т.е. существует постоянная $\varrho > 0$ такая, что

$$k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \varrho \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{U}}^2 \quad \text{для любого} \quad \mathbf{z} \in \mathbf{U}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{z} \in \mathbf{U} : \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{U}} = 1\}$, тогда можно положить

$$\varrho = \inf_{\mathbf{z} \in \mathbf{U}_1} k(\mathbf{z}, \mathbf{z}).$$

Из соотношений (27), (29), (30) и (32) следует, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbf{U}_1$ и $\mathbf{q} = \mathbf{F}^T j \mathbf{z}$ имеем

$$k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = [\omega_2 q_2, q_2] + [\omega_3 q_3, q_3] + [\omega_4 q_4, q_4] + s(\mathbf{z}, \mathbf{z}).$$

Из этого равенства, леммы 10 и условий (31) следует, что $\varrho \geq 0$. Покажем, что $\varrho > 0$. Доказательство проведём методом от противного. Пусть $\varrho = 0$. Тогда, поскольку $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ ограничены почти всюду на $[0, h]$ (следствие 2), для любого $\varepsilon > 0$ существует $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in \mathbf{U}_1$ такой, что выполняются неравенства

$$s(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) < \varepsilon, \tag{35}$$

$$[\hat{q}_n, \hat{q}_n] < \varepsilon, \quad n = 2, 3, 4, \tag{36}$$

где

$$\hat{q}_2 = (\hat{z}_1 + (\theta - \vartheta)\hat{z}'_2)/\gamma_2, \quad (37)$$

$$\hat{q}_3 = (\hat{z}'_1 - \alpha\hat{z}_2)/\gamma_3, \quad (38)$$

$$\hat{q}_4 = (\hat{z}_1 + (\theta + \vartheta)\hat{z}'_2)/\gamma_4. \quad (39)$$

Из неравенства (35) и леммы 17 вытекает оценка

$$\hat{z}_2^2(0) < 2\varepsilon/(|\alpha|S_3). \quad (40)$$

Из равенств (37) и (39) следует, что

$$\hat{z}_1 = (\theta(\gamma_2\hat{q}_2 - \gamma_4\hat{q}_4) + \vartheta(\gamma_2\hat{q}_2 + \gamma_4\hat{q}_4))/(2\vartheta), \quad \hat{z}'_2 = -(\gamma_2\hat{q}_2 - \gamma_4\hat{q}_4)/(2\vartheta).$$

Возведём обе части каждого из этих равенств в квадрат и проинтегрируем по отрезку $[0, h]$. С помощью неравенств Коши–Буняковского и (36) несложно получить оценки

$$[\hat{z}_1, \hat{z}_1] < \hat{c}_1\varepsilon, \quad [\hat{z}'_2, \hat{z}'_2] < \hat{c}_4\varepsilon, \quad (41)$$

где $\hat{c}_1 > 0$ и $\hat{c}_4 > 0$ — константы, не зависящие от ε и \hat{z} .

Далее используем неравенство Фридрикса [15, гл. 18]

$$[\hat{z}_2, \hat{z}_2] \leq c_3[\hat{z}'_2, \hat{z}'_2] + c_0\hat{z}_2^2(0), \quad (42)$$

где $c_3 > 0$ и $c_0 > 0$ — константы, не зависящие от \hat{z}_2 . Из (42) и (40) следует оценка

$$[\hat{z}_2, \hat{z}_2] < \hat{c}_3\varepsilon, \quad (43)$$

где $\hat{c}_3 = c_3\hat{c}_4 + 2c_0/(|\alpha|S_3)$. Из равенства (38) имеем

$$\hat{z}'_1 = \gamma_3\hat{q}_3 + \alpha\hat{z}_2.$$

Возведём обе части этого равенства в квадрат и проинтегрируем по отрезку $[0, h]$. С помощью неравенства Коши–Буняковского и неравенств (36) и (43) получим оценку

$$[\hat{z}'_1, \hat{z}'_1] < \hat{c}_2\varepsilon, \quad (44)$$

где $\hat{c}_2 > 0$ — константа, не зависящая от ε и \hat{z} .

В результате из (41), (43) и (44) следует, что

$$\|\hat{z}\|_{\mathcal{U}}^2 < \hat{c}\varepsilon, \quad (45)$$

где $\hat{c} = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 + \hat{c}_4 > 0$ — константа, не зависящая от ε и \hat{z} . Выбрав в (45) $\varepsilon < 1/\hat{c}$, получим неравенство $\|\hat{z}\|_{\mathcal{U}} < 1$, противоречащее условию $\hat{z} \in \mathcal{U}_1$. Теорема доказана.

Поскольку билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и положительно определённой на \mathcal{U} , а линейная форма $l(\cdot)$ — непрерывной на \mathcal{U} , то из известных результатов (см. [16, гл. 2]) следует

Теорема 5. *Решение вариационной задачи (28) существует и единственно.*

4. КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Для аппроксимации вариационной задачи (28) применим метод конечных элементов. Пространство U аппроксимируем конечномерным подпространством $U^* \subset U$ кусочно-линейных функций. Разобьём отрезок $[0, h]$ на $M - 1$ двухузловых конечных элементов первого порядка и применим стандартную процедуру метода Бубнова–Галёркина к вариационному уравнению (28). В результате получим СЛАУ

$$KV = L, \quad (46)$$

где

$$K = A_s - B_s, \quad A_s = A + S_a, \quad B_s = B - S_b, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_1 \\ B_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$S_a = \begin{bmatrix} S_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_3 \end{bmatrix}, \quad S_b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S_4 \\ S_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}; \quad (47)$$

$A_1, A_2, B_1, B_2, S_3, S_4$ — квадратные матрицы порядка M , полученные в результате аппроксимации билинейных форм $a_1(\cdot, \cdot), a_2(\cdot, \cdot), b_1(\cdot, \cdot), b_2(\cdot, \cdot), s_3(\cdot, \cdot)$ и $s_4(\cdot, \cdot)$ соответственно; $L_2 \in \mathbb{R}^M$ — вектор, полученный в результате аппроксимации линейной формы $l_2(\cdot)$; $V \in \mathbb{R}^{2M}$ — вектор узловых значений искомой вектор-функции $v = (v_1, v_2) \in U$.

Лемма 18. Матрицы A_1, A_2, A, A_s и K являются симметричными и положительно определёнными, а матрица S_3 — симметричной и неотрицательно определённой.

Доказательство. Поскольку $U^* \subset U$, то справедливость леммы следует из положительной определённости билинейных форм $a_1(\cdot, \cdot), a_2(\cdot, \cdot), a(\cdot, \cdot), k(\cdot, \cdot)$ и неотрицательной определённости билинейной формы $s_3(\cdot, \cdot)$. Лемма доказана.

Для вычисления элементов матриц A_1, A_2, B_1 и B_2 применяются квадратурные формулы. Тип используемых формул определяется конкретным законом изменения упругих свойств (функций $\lambda(x_2)$ и $\mu(x_2)$) по толщине полосы. При наличии у функций $\lambda(x_2)$ и $\mu(x_2)$ разрывов первого рода, а именно такие разрывы могут быть у модулей упругости реальных слоистых тел, сетку конечных элементов следует адаптировать так, чтобы точки разрывов совпадали с узлами сетки. Такой подход позволяет применять при вычислении элементов указанных выше матриц квадратурные формулы для непрерывных функций.

Несложно показать, что при использовании двухузловых конечных элементов первого порядка матрицы A_1, A_2, B_1 и B_2 являются трёхдиагональными и, кроме того, $B_1 = B_2^T$. Матрицы S_3 и S_4 имеют всего по одному ненулевому элементу, расположенному на главной диагонали в строке, номер которой совпадает с номером узла конечно-элементной сетки, расположенного в точке $x_2 = 0$. Оба эти элемента имеют положительные значения.

5. ПРЕДОБУСЛОВЛЕННЫЙ МЕТОД СОПРЯЖЁННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Аналогично [5] для решения СЛАУ (46) можно использовать линейный одношаговый нестационарный итерационный метод. В [5] предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров этого метода, обеспечивающий его практическую сходимость, однако теоретическое доказательство сходимости отсутствует. В настоящей работе для решения СЛАУ (46) с симметричной и положительно определённой матрицей K применяется предобусловленный МСГ. В качестве предобуславливателя слева используется матрица A_s^{-1} . Отметим, что произведение $A_s^{-1}K$ самосопряжён по отношению к скалярному произведению, задаваемому матрицей A_s :

$$(V, W)_{A_s} \equiv (A_s V, W) = (V, A_s W).$$

Из соотношений (47) следует, что $\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{B}_s$, а вычисление матрично-векторных произведений $\mathbf{W} = \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{V}$ сводится к решению двух независимых СЛАУ:

$$\mathbf{A}_1^s \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{A}_2^s \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_2, \quad (48)$$

где $\mathbf{A}_1^s = \mathbf{A}_1 + \mathbf{S}_3$, $\mathbf{A}_2^s = \mathbf{A}_2 + \mathbf{S}_3$. Поскольку матрицы \mathbf{A}_1^s и \mathbf{A}_2^s являются трёхдиагональными, то для численного решения СЛАУ (48) применяется метод прогонки. Несложно показать, что в случае $\alpha \neq 0$ обе матрицы \mathbf{A}_1^s и \mathbf{A}_2^s имеют диагональное преобладание. Следовательно, алгоритм метода прогонки является корректным и устойчивым [17, гл. II].

Пусть \mathbf{V}_i , $i=0, 1, \dots$, — приближённое решение СЛАУ (46). Обозначим через $\mathbf{R}_i = \mathbf{L} - \mathbf{K}\mathbf{V}_i$ невязку исходной системы, а через $\mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{R}_i$ — невязку предобусловленной системы. Итерационный процесс МСГ для предобусловленной системы определяется как [18, гл. 9]

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i + \alpha_i \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{Q}_{i+1} + \beta_i \mathbf{P}_i,$$

где \mathbf{P}_i — вектор, задающий направление движения из точки \mathbf{V}_i , $\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}_0$; α_i , β_i — числовые множители, определяемые, соответственно, из условий попарной ортогональности векторов \mathbf{Q}_i и сопряжённости векторов \mathbf{P}_i . Используя далее стандартную схему преобразований МСГ, получим следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{B}_s)\mathbf{P}_i, \quad \alpha_i = (\mathbf{R}_i, \mathbf{Q}_i)/(\mathbf{R}_i, \mathbf{Y}_i), \quad \mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i + \alpha_i \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{Q}_{i+1} = \mathbf{Q}_i - \alpha_i \mathbf{Y}_i, \\ \mathbf{R}_{i+1} &= \mathbf{A}_s \mathbf{Q}_{i+1}, \quad \beta_i = (\mathbf{R}_{i+1}, \mathbf{Q}_{i+1})/(\mathbf{R}_i, \mathbf{Q}_i), \quad \mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{Q}_{i+1} + \beta_i \mathbf{P}_i. \end{aligned} \quad (49)$$

Отметим, что приведённая выше формула для вычисления α_i отличается от известной формулы [18, с. 3] из-за учёта структуры матриц \mathbf{A}_s и \mathbf{K} , определяемых соотношениями (47).

В качестве условия остановки итерационного процесса используется одно из следующих условий:

$$\|\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i-1}\| < \varepsilon_1 \|\mathbf{V}_i\|, \quad (50)$$

$$\|\mathbf{R}_{i+1}\| < \varepsilon_2,$$

где ε_1 , ε_2 — параметры, определяющие погрешность приближённого решения; $\|\cdot\|$ — одна из гёльдеровских норм: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_\infty$. Учитывая немонотонную сходимость алгоритма МСГ, целесообразно требовать выполнения условия (50) на нескольких последовательных итерациях.

Сходимость итерационного процесса (49) следует из общих результатов относительно сходимости предобусловленного МСГ [18, гл. 9] и свойств симметричности и положительной определённости матриц \mathbf{A}_s и \mathbf{K} .

6. ВЕРИФИКАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Разработанный алгоритм вычисления передаточной функции реализован на алгоритмическом языке FORTRAN 2008 в виде пакета модулей. При верификации вычислительного алгоритма и программного обеспечения в качестве тестовых выбирались краевые задачи для однородной изотропной упругой полуплоскости с упругим покрытием одного из следующих типов:

- однородная изотропная полоса;
- непрерывно-неоднородная полоса, параметры Ламе материала которой являются экспоненциальными функциями: $\lambda(x_2) = \lambda_c \exp\{\vartheta x_2\}$ и $\mu(x_2) = \mu_c \exp\{\vartheta x_2\}$, где λ_c , μ_c и ϑ — константы;
- кусочно-однородная полоса с полностью сцепленными слоями.

В работе [19] показано, что решение краевой задачи для системы уравнений (16) с краевыми условиями (18) вблизи точки $x_2 = h$ представляет собой решение типа погранслоя. Поэтому при решении задачи использовались адаптивные конечно-элементные сетки, для построения которых применялся алгоритм, предложенный в [5]. Задавались количество узлов сетки M и размер $l(\alpha)$ наименьшего конечного элемента, одним из узлов которого является точка $x_2 = h$. Размеры остальных элементов вычислялись таким образом, чтобы образовывать геометрическую прогрессию по мере удаления элементов от точки $x_2 = h$. С учётом результатов работы [19] для повышения точности решения полагалось $l(\alpha) = 10^{-5}s$, где $s = 2\pi/\alpha$ — длина волны, соответствующая волновому числу α . При решении тестовых задач количество узлов сетки выбиралось равным $M = 501$. Вычисления проводились с двойной точностью до выполнения условия (50) с нормой $\|\cdot\|_2$ и параметром $\varepsilon_1 = 10^{-8}$.

В качестве примера на рисунке приведены результаты расчётов для полуплоскости с покрытием первого типа (однородная полоса) для различных значений отношения модулей Юнга полуплоскости E_0 и полосы E_1 , и для безразмерных величин $\hat{G} = \alpha G(\alpha)/E^*$, $\hat{\alpha} = \alpha h$, где $E^* = 2(1 - \nu_1^2)/E_1$. Коэффициенты Пуассона полагались равными $\nu_0 = \nu_1 = 0.3$. Кривая 4 соответствует аналитическому решению [20, § 11] для однородной изотропной упругой полосы, сцепленной с недеформируемым основанием ($E_0/E_1 = \infty$):

$$G(\alpha) = \frac{E^* C_{22}(\alpha h)}{\alpha C_0(\alpha h)},$$

где $C_{22}(t) = 2\kappa \operatorname{sh}(2t) - 4t$, $C_0(t) = 2\kappa \operatorname{ch}(2t) + \kappa^2 + 1 + 4t^2$, $\kappa = 3 - 4\nu_1$.

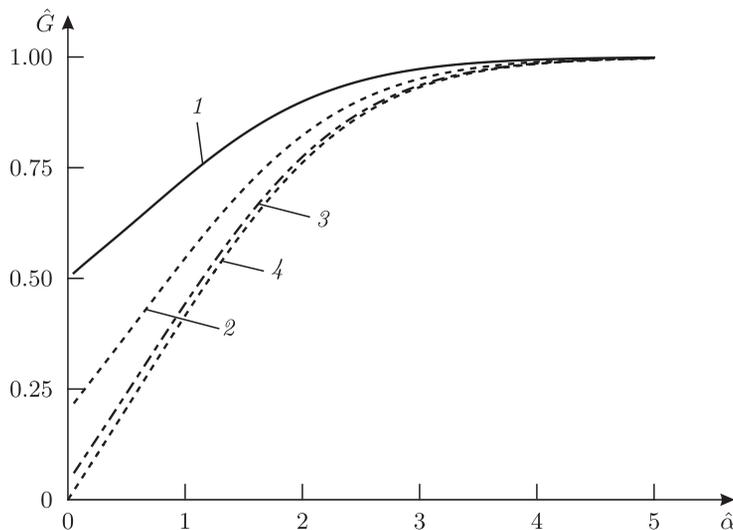


Рисунок. Результаты расчётов для полуплоскости с покрытием первого типа:
1 — $E_0/E_1 = 2$; 2 — $E_0/E_1 = 5$; 3 — $E_0/E_1 = 25$; 4 — $E_0/E_1 = \infty$

Для случая $E_0 = E_1$ (полуплоскость с покрытием из того же материала) известно аналитическое выражение для передаточной функции [10, § 6.5]

$$G(\alpha) = E^*/|\alpha|. \quad (51)$$

Сравнение аналитического (51) и полученного численного решений показало, что последнее содержит шесть верных значащих цифр.

Отметим, что выражение (51) совпадает с главным членом асимптотического разложения передаточной функции ОПС при $\alpha \rightarrow \infty$ для упругой полосы, сцепленной с недеформируемым

основанием, а два последующих члена этого разложения для однородной полосы равны нулю [19]. Относительное расхождение численных решений для $E_0/E_1 = 2, 5$ и 25 (см. кривые 1–3 на рисунке) с асимптотическим разложением (51) для $\alpha h = 5$ составило, соответственно, 0.12%, 0.22% и 0.31%.

Проведена также оценка вычислительной эффективности разработанного алгоритма решения СЛАУ (46). В таблице приведены усреднённые данные о количествах итераций и оценки числа операций итерационных процессов для трёх алгоритмов — алгоритма 1 из [5], предложенного в данной работе алгоритма 2 и стандартного алгоритма МСГ без предобуславливания (алгоритм 3). С учётом структуры матриц A_s и B_s общее количество операций (умножения и сложения) на одной итерации алгоритма 1 оценивается как $26M$, алгоритма 2 — как $41M$, а алгоритма 3 — как $32M$. Усреднение выполнялось для конечно-элементных сеток с одинаковым количеством узлов M по всем проведённым расчётам для 100 значений параметра α преобразования Фурье и указанных выше типов упругих покрытий. В качестве начального приближения решения использовался нулевой вектор.

Таблица. Количество итераций и оценка числа операций для трёх алгоритмов

Число узлов сетки M	Алгоритм 1		Алгоритм 2		Алгоритм 3	
	Количество итераций	Число операций	Количество итераций	Число операций	Количество итераций	Число операций
501	38	$988M$	23	$943M$	2499	$79\,968M$
1001	38	$988M$	23	$943M$	4173	$133\,536M$
2001	38	$988M$	23	$943M$	7164	$229\,248M$

Из приведённых в таблице данных следует, что минимальное количество итераций требуется для алгоритма 2, однако общее количество операций для алгоритмов 1 и 2 практически совпадает. Применение при решении рассматриваемой задачи предобуславливающей матрицы A_s^{-1} позволяет существенно уменьшить количество итераций. Кроме того, при использовании предобуславливания количество итераций оставалось неизменным при изменении числа конечных элементов в диапазоне 10^2 – 10^5 , тогда как для алгоритма без предобуславливания количество итераций увеличивалось почти пропорционально числу конечных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений позволило разработать эффективный алгоритм вычисления передаточной функции оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы стратифицированной упругой полосы, полностью сцепленной с однородной изотропной упругой полуплоскостью, нормальные напряжения в нормальные перемещения. Разработанный вычислительный алгоритм может быть применён и в более общем случае — при наличии на части границы полосы касательных напряжений, изменится лишь вид линейной формы $l(\mathbf{w})$.

Отметим также, что предложенный подход к вычислению передаточной функции может быть обобщён на случай, когда на границе раздела полуплоскости и полосы заданы граничные условия скользящей заделки.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.В. Белоконь [и др.]. — М. : Физматлит, 2006. — 240 с.
2. Бобылев, А.А. Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости / А.А. Бобылев // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2022. — № 2. — С. 154–172.
3. Бобылев, А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы / А.А. Бобылев // Прикл. математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 3. — С. 404–423.
4. Ватульян, А.О. К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы / А.О. Ватульян, Д.К. Плотников // Прикл. математика и механика. — 2021. — Т. 85, № 3. — С. 283–293.
5. Бобылев, А.А. Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полосы / А.А. Бобылев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 1. — С. 115–129.
6. Бобылев, А.А. Алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для многослойной упругой полосы / А.А. Бобылев // Прикл. механика и техн. физика. — 2024. — Т. 65, № 2. — С. 230–242.
7. Бобылев, А.А. Задача одностороннего дискретного контакта для функционально-градиентной упругой полосы / А.А. Бобылев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2024. — № 2. — С. 58–69.
8. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Наука, 1966. — 708 с.
9. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон ; пер. с англ. В.Э. Наумова, А.А. Спектора ; под ред. Р.В. Гольдштейна. — М. : Мир, 1989. — 510 с.
10. Barber, J.R. Contact Mechanics / J.R. Barber. — Cham : Springer, 2018. — 585 p.
11. Ju, Y.Q. Spectral analysis of two-dimensional contact problems / Y.Q. Ju, T.N. Farris // ASME J. Tribol. — 1996. — V. 118, № 2. — P. 320–328.
12. Треногин, В.А. Функциональный анализ : учебник для вузов / В.А. Треногин. — 3-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2002. — 488 с.
13. Колтунов, М.А. Прикладная механика деформируемого твёрдого тела : учеб. пособие / М.А. Колтунов, А.С. Кравчук, В.П. Майборода. — М. : Высшая школа, 1983. — 349 с.
14. Годунов, С.К. Современные аспекты линейной алгебры / С.К. Годунов. — Новосибирск : Научная книга, 1997. — 390 с.
15. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис ; пер. с англ. под ред. К.И. Бабенко и Б.Е. Победри. — М. : Мир, 1985. — 590 с.
16. Лебедев, В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика : учеб. пособие / В.И. Лебедев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2005. — 296 с.
17. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. — М. : Наука, 1978. — 592 с.
18. Саад, Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем : учеб. пособие : в 2-х т. / Ю. Саад ; пер. с англ. Х.Д. Икрамова, В.В. Воеводина ; под ред. Х.Д. Икрамова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2014. — Т. 2. — 306 с.
19. Бобылев, А.А. О вычислении передаточной функции оператора Пуанкаре–Стеклова для функционально-градиентной упругой полосы / А.А. Бобылев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2023. — № 5. — С. 52–60.
20. Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. — М. : Наука, 1974. — 456 с.

CONSTRUCTION OF THE TRANSFER FUNCTION OF THE POINCARÉ–STEKLOV OPERATOR FOR A COATED ELASTIC HALF-PLANE

© 2024 / A. A. Bobylev

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: abobylov@gmail.com

For a homogeneous isotropic elastic half-plane with a stratified elastic coating we consider the Poincaré–Steklov operator that maps normal stresses into normal displacements on part of the boundary. To construct the transfer function of this operator, the variational formulation of the boundary value problem for transforms of displacements is used. A definition is given and the existence and uniqueness are proved for a generalized solution of the variational problem. This problem is approximated by the finite element method. To numerically solve the resulting system of linear algebraic equations, the preconditioned conjugate gradient method is used. The developed computational algorithm was verified.

Keywords: Poincaré–Steklov operator, transfer function, elastic half-plane, stratified coating

REFERENCES

1. Aizikovich, S.M., Aleksandrov, V.M., Belokon', A.V. [et al.], *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnyh sred* (Contact Problems in the Theory of Elasticity for Inhomogeneous Media), Moscow: Fizmatlit, 2006.
2. Bobylev, A.A., Application of the conjugate gradient method to solving discrete contact problems for an elastic half-plane, *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 317–332.
3. Bobylev, A.A., Algorithm for solving discrete contact problems for an elastic strip, *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1766–1780.
4. Vatulyan, A.O. and Plotnikov, D.K., On a study of the contact problem for an inhomogeneous elastic strip, *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1379–1387.
5. Bobylev, A.A., Numerical construction of the transform of the kernel of the integral representation of the Poincaré–Steklov operator for an elastic strip, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 119–134.
6. Bobylev, A.A., Algorithm for solving unilateral discrete contact problems for a multilayer elastic strip, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2024, vol. 65, no. 2.
7. Bobylev, A.A., The unilateral discrete contact problem for a functionally graded elastic strip, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2024, vol. 79, no. 2, pp. 56–68.
8. Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Dordrecht: Springer, 1977.
9. Johnson, K.L., *Contact Mechanics*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
10. Barber, J.R., *Contact Mechanics*, Cham: Springer, 2018.
11. Ju, Y.Q. and Farris, T.N., Spectral analysis of two-dimensional contact problems, *ASME J. Tribol.*, 1996, vol. 118, no. 2, pp. 320–328.
12. Trenogin, V.A., *Funktsional'nyj analiz* (Functional Analysis), Moscow: Fizmatlit, 2002.
13. Koltunov, M.A., Kravchuk, A.S., and Maiboroda, V.P., *Prikladnaya mekhanika deformiruемого tverdogo tela* (Applied Mechanics of Deformable Solids), Moscow: Vysshaya shkola, 1983.
14. Godunov, S.K., *Sovremennye aspekty lineinoi algebrы* (Modern Aspects of Linear Algebra), Novosibirsk: Nauch. Kniga, 1997.
15. Rektorys, K., *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, Dordrecht: Springer, 2012.
16. Lebedev, V.I., *Funktsional'nyj analiz i vychislitel'naya matematika* (Functional Analysis and Computational Mathematics), Moscow: Fizmatlit, 2005.
17. Samarskii, A.A. and Nikolaev, E.S., *Metody resheniya setochnykh uravnenii* (Methods for Solving Grid Equations), Moscow: Nauka, 1978.
18. Saad, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
19. Bobylev, A.A., Computing a transfer function of the Poincaré–Steklov operator for a functionally graded elastic strip, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2023, vol. 78, no. 5, pp. 134–142.
20. Vorovich, I.I., Aleksandrov, V.M., and Babeshko, V.A., *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* (Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory), Moscow: Nauka, 1974.

УДК 519.642.7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ ХААРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. Д. А. Когтнев¹, Н. Л. Замарашкин²

Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

e-mail: ¹kogtnev.da@phystech.edu, ²nikolai.zamarashkin@gmail.com

Поступила в редакцию 15.04.2024 г., после доработки 15.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Разработан численный метод решения одномерного гиперсингулярного интегрального уравнения, использующий аппроксимации матриц разреженными матрицами. Этот метод имеет тот же порядок сходимости, что и известные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений, но является более эффективным как по числу арифметических операций, так и по объёму памяти.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, вейвлет Хаара, кратномасштабный метод для интегрального уравнения

DOI: 10.31857/S0374064124090071, EDN: JWONRU

ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов решения краевой задачи для уравнений с частными производными является сведение её к граничному интегральному уравнению [1–3]. Существенное достоинство этого метода — снижение размерности в пространстве неизвестных: размерность граничного интегрального уравнения на единицу меньше, чем размерность исходной дифференциальной задачи, что приводит к меньшей размерности линейных систем, возникающих при дискретизации интегральных уравнений. С другой стороны, матрицы систем в граничных интегральных уравнениях являются плотными, что затрудняет их решение.

Снижение вычислительных затрат в методе граничных интегральных уравнений остаётся важной задачей. Применение мозаично-скелетонных приближений для матриц позволяет уменьшить размер памяти, необходимой для хранения матриц, и упростить алгоритм умножения матрицы на вектор. Тем не менее вопросы построения эффективных предобуславливателей остаются открытыми.

Использование вейвлетов в качестве базисных функций при численном решении интегральных уравнений позволяет получать матрицы, которые хорошо приближаются разреженными матрицами. Впервые такой эффект был продемонстрирован в работе [4]. В книге [5] можно найти наиболее полное изложение теории применения вейвлетов для решения интегральных уравнений Фредгольма.

Аппроксимация плотных матриц разреженными позволяет уменьшить сложность численного решения интегральных уравнений как по необходимому объёму памяти, так и по числу арифметических операций.

В данной статье используются вейвлеты Хаара для решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Хотя с точки зрения приложений наиболее важны двумерные векторные интегральные уравнения, возникающие, например, в задаче рассеяния [3], ниже

рассматриваются одномерные скалярные гиперсингулярные уравнения. Результаты исследования одномерной задачи могут быть полезны для построения аналогичных методов в двумерном случае. Мы совершенствуем известный метод коллокаций с кусочно-постоянными аппроксимациями [2]. Вейвлеты Хаара образуют ортогональный базис в этом пространстве, поэтому их удобно использовать для модификации метода коллокаций.

Цель работы заключается в построении численного метода решения того же порядка сходимости, что и метод коллокаций, но требующего не более $o(N^2)$ памяти и $O(N^2)$ арифметических операций и использующего аппроксимацию матрицы разреженной матрицей. По аналогии с [5–7] доказываются теоремы о сходимости метода и о степени заполненности разреженной матрицы. Оценивается сложность предложенных алгоритмов. Теоретические результаты иллюстрируются численными экспериментами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функция g непрерывна на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируема на интервале (a, b) . *Гиперсингулярным интегралом* в смысле конечного значения по Адамару функции g в точке $c \in (a, b)$ называется предел

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x-c)^2} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{g(x)}{(x-c)^2} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{g(x)}{(x-c)^2} dx - \frac{2g(c)}{\varepsilon} \right).$$

Если $g \equiv 1$, то справедлива формула

$$\int_a^b \frac{ds}{(s-s_0)^2} = \frac{1}{a-s_0} - \frac{1}{b-s_0}. \quad (1)$$

Нас будет интересовать решение гиперсингулярного интегрального уравнения

$$\int_a^b \frac{g(s)}{(s-s_0)^2} ds + \int_a^b K(s_0, s)g(s) ds = f(s_0), \quad s_0 \in (a, b), \quad (2)$$

где $K \in H^\mu[a, b]^2$ и $f \in H^\mu[a, b]$ — заданные функции, g — неизвестная функция, $H^\mu[a, b]$ и $H^\mu([a, b] \times [a, b])$ — пространства функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\mu \in (0, 1]$ на отрезке $[a, b]$ и в квадрате $[a, b] \times [a, b]$ соответственно, а первый интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару.

Характеристическим гиперсингулярным интегральным уравнением называется уравнение вида

$$\int_a^b \frac{g(s)}{(s-s_0)^2} ds = f(s_0), \quad s_0 \in (a, b), \quad f \in H^\mu[a, b]. \quad (3)$$

Назовём *классом D* линейное пространство функций, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $g(s) \in C[a, b]$;
- 2) $g(a) = g(b) = 0$;
- 3) g дифференцируема на интервале (a, b) ;
- 4) производная функции g представима в виде

$$g'(x) = \frac{g^*(x)}{(x-a)^\beta(b-x)^\beta},$$

где $\beta \in (0, 1)$, $g^* \in H^\theta[a, b]$, $\theta \in (0, 1]$.

Характеристическое уравнение (3) имеет единственное решение в классе D [2, п. 4.4.3]. Решение уравнения (2) также ищется в классе функций D . Далее будем полагать, что $\mu \leq 1/2$. Ответ на вопрос о разрешимости уравнения (2) даёт следующая

Лемма 1 [2, лемма 4.11]. *Для уравнения (2) имеет место альтернатива Фредгольма: либо уравнение (2) имеет решение в классе функций D для любой правой части $f \in H^\mu[a, b]$, либо соответствующее однородное уравнение (т.е. уравнение (2) с нулевой правой частью) имеет ненулевые решения.*

Всюду далее будем рассматривать случай однозначной разрешимости уравнения (2). Если оно имеет единственное решение $g \in D$ для любой правой части $f \in H^\mu[a, b]$, то выполнено условие $g \in H^{1/2}[a, b]$ и справедлива оценка

$$\|g\|_{H^{1/2}[a,b]} \leq C \|f\|_{C[a,b]}$$

с константой C , зависящей только от μ [2, п. 4.4.3].

2. ПРОСТРАНСТВА СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Введём на отрезке $[a, b]$ две системы точек:

$$s_{0i} = a + ih, \quad i = \overline{0, N+1}; \quad s_i = a + (i - 1/2)h, \quad i = \overline{1, N+1},$$

где $h = (b - a)/(N + 1)$ и N — некоторое натуральное число. Множества точек s_{0i} и s_i будем обозначать как E_0 и E соответственно. Точки s_{0i} называются *точками коллокации*.

Введём пространство функций $C^h[a, b]$, состоящее из функций f , удовлетворяющих условиям:

1) функция f определена на отрезке $[a, b]$ всюду, возможно за исключением подмножества E ;

2) функция f непрерывна на каждом интервале (s_i, s_{i+1}) , $i = \overline{1, N}$.

Заметим, что имеет место вложение $C[a, b] \subset C^h[a, b]$.

Также введём N -мерное пространство функций $\mathbb{X} = \mathbb{X}^h$, состоящее из функций $\varphi(s)$ таких, что

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & s \in [s_{00}, s_1] \cup (s_{N-1}, s_{0N}), \\ \varphi_i, & s \in (s_i, s_{i+1}), \end{cases}$$

где φ_i — некоторые константы, $i = \overline{1, N}$.

Пусть функция $\varphi \in D$. Рассмотрим величину

$$S(\varphi, s_0) = \int_a^b \frac{\varphi(s)}{(s - s_0)^2} ds,$$

которую можно приближать в узлах сетки s_{0i} , $i = \overline{1, N}$, с помощью квадратурной формулы

$$\tilde{S}(\varphi, s_{0i}) = \sum_{j=1}^N \varphi(s_{0j}) \left(\frac{1}{s_j - s_{0i}} - \frac{1}{s_{j+1} - s_{0i}} \right),$$

при этом выполнена оценка [2, п. 4.3.2]

$$|S(\varphi, s_{0i}) - \tilde{S}(\varphi, s_{0i})| \leq \frac{Ch^\nu}{(s_{0i} - a)(b - s_{0i})}, \quad \nu \in (0, 1). \tag{4}$$

Здесь и далее под C подразумевается некая положительная константа, не зависящая от h .

Второй интеграл в уравнении (2) будем приближать с помощью квадратурной формулы

$$\int_a^b B(s_{0i}, s)g(s)ds \approx \sum_{j=1}^N g(s_{0j}) \int_{s_j}^{s_{j+1}} B(s_{0i}, s) ds,$$

для которой справедлива оценка [2, п. 4.4.3]

$$\left| \sum_{j=1}^N g(s_{0j}) \int_{s_j}^{s_{j+1}} B(s_{0i}, s) ds - \int_a^b B(s_{0i}, s)g(s) ds \right| \leq C \|g\|_{H^{1/2}[a,b]} h^{1/2}, \quad (5)$$

где $g \in H^{1/2}[a, b]$, $B \in H^\mu[a, b]^2$, $\mu \in (0, 1]$.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Численное решение уравнения (2) будем искать в пространстве \mathbb{X}^h . Пусть g_i — значение численного решения на интервале $[s_i, s_{i+1})$, $i = \overline{1, N}$. Числа g_i находятся из линейной системы

$$Ag = f, \quad (6)$$

где $A = \tilde{G} + \tilde{B}$, $\tilde{G}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $f \in \mathbb{R}^N$, причём

$$\tilde{G}_{ij} = \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{ds}{(s - s_{0i})^2} = \frac{1}{s_j - s_{0i}} - \frac{1}{s_{j+1} - s_{0i}}, \quad (7)$$

$$\tilde{B}_{ij} = \int_{s_j}^{s_{j+1}} K(s_{0i}, s) ds, \quad (8)$$

$$f_i = f(s_{0i}),$$

где $f(s_{0i})$ — значение функции из правой части уравнения (2) в точке коллокации s_{0i} . Описанный выше метод принято называть *методом коллокаций*. Мы также будем называть его *методом коллокаций с плотными матрицами*. Известно, что метод коллокаций сходится, причём выполнена оценка

$$|g(s_{0i}) - g_i| \leq C(h^\nu + h^{1/2}), \quad (9)$$

где $g(s_{0i})$ — значение точного решения уравнения (2) в точке коллокации s_{0i} , а $\nu \in (0, 1)$ — некоторая константа [2, п. 4.4.3].

Рассмотрим некоторые свойства матрицы \tilde{G} . Прежде всего, матрица \tilde{G} невырождена. Далее, пусть вектор g является решением системы

$$\tilde{G}g = f$$

с некоторой правой частью $f \in \mathbb{R}^N$. Тогда для всех $i = \overline{1, N}$ выполнена оценка [2, п. 4.4.2]

$$|g_i| \leq \max_{j=1, \dots, N} \frac{f_j}{q_j}, \quad q_j = \frac{1}{s_{0j} - a} + \frac{1}{b - s_{0j}} > 0. \quad (10)$$

Из неравенства (10) следует оценка

$$\|\tilde{G}^{-1}\|_\infty \leq C = \max_{x \in [a, b]} \frac{|(b-x)(a-x)|}{b-a}. \quad (11)$$

Нам также понадобятся свойства матрицы $I + \tilde{K}$, где $\tilde{K} = \tilde{G}^{-1}\tilde{B}$. Известно [2, п. 4.4.2], что существует константа $h_1 > 0$ такая, что при всех $h < h_1$ матрица $I + \tilde{K}$ обратима, причём

$$\|(I + \tilde{K})^{-1}\|_\infty \leq C. \tag{12}$$

4. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХААРА

Рассмотрим вектор $x \in \mathbb{R}^N$, где $N = 2^n$ с некоторым натуральным числом n . *Дискретным преобразованием Хаара* будем называть линейное преобразование $\mathcal{H}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, которое задаётся алгоритмом 1, имеющим сложность порядка $O(N)$.

Алгоритм 1 Хаар(N, x)

- 1: if $N > 1$ then
 - 2: $y := 0$
 - 3: for $i = 1, \dots, N/2$ do
 - 4: $y_i := (x_{2i} + x_{2i+1})/2$
 - 5: $y_{N/2+i} := (x_{2i} - x_{2i+1})/2$
 - 6: end for
 - 7: $x := y$
 - 8: Хаар(N/2, x)
 - 9: end if
-

Матрицу этого преобразования будем обозначать как H . Видно, что H имеет блочный вид

$$H = [H_0 \ H_1 \ \dots \ H_n]^T, \tag{13}$$

где матрицы $H_0 \in \mathbb{R}^{1 \times N}$, $H_i \in \mathbb{R}^{2^{i-1} \times N}$, $i = \overline{1, n}$, и определяются как

$$H_0 = \left[\frac{1}{2^n} \ \dots \ \frac{1}{2^n} \ \frac{1}{2^n} \ \dots \ \frac{1}{2^n} \right], \tag{14}$$

$$H_1 = \left[\frac{1}{2^n} \ \dots \ \frac{1}{2^n} \ -\frac{1}{2^n} \ \dots \ -\frac{1}{2^n} \right], \tag{15}$$

$$H_2 = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2^{n-1}} & \dots & -\frac{1}{2^{n-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} & \dots & -\frac{1}{2^{n-1}} \end{array} \right], \tag{16}$$

$$\dots$$

$$H_n = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]. \tag{17}$$

Введём также блочную матрицу

$$\tilde{H} = [\tilde{H}_0 \ \tilde{H}_1 \ \dots \ \tilde{H}_n]^T,$$

где

$$\tilde{H}_0 = 2^n H_0, \quad \tilde{H}_i = 2^{n-i+1} H_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

и матрицу

$$\tilde{H}^T = [\tilde{H}_0^T \quad \tilde{H}_1^T \quad \dots \quad \tilde{H}_n^T].$$

Легко проверить, что для матриц H и \tilde{H} справедливы соотношения

$$\tilde{H}^T H = I, \quad H^T \tilde{H} = I,$$

где I — единичная матрица порядка N .

Из выражений (14)–(18) следует, что

$$\|H_i\|_\infty = 1, \quad i = \overline{0, n}, \quad (19)$$

$$\|\tilde{H}_i^T\|_\infty = 1, \quad i = \overline{0, n}. \quad (20)$$

Для элементов матрицы H будем использовать трёхиндексную нумерацию: H_{ijk} , где $i = \overline{0, n}$ — номер блока H_i , $k = \overline{1, N}$ — номер столбца в блоке H_i , $j = \overline{1, m(i)}$, — номер строки в блоке H_i ,

$$m(i) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2^{i-1}, & i > 1. \end{cases}$$

Аналогичную нумерацию будем применять и для элементов матрицы \tilde{H} .

5. ПЕРЕХОД К БАЗИСУ ИЗ ВЕЙВЛЕТОВ ХААРА В МЕТОДЕ КОЛЛОКАЦИЙ

В пространстве \mathbb{X}^h введём базис $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, где

$$\xi_i(s) = \begin{cases} 1, & s \in [s_i, s_{i+1}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим линейный оператор $J: \mathbb{X}^h \rightarrow C^h[a, b]$, определённый формулой

$$\begin{aligned} (J\xi_i)(s_0) &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\xi_i(s)}{(s-s_0)^2} ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} K(s_0, s) \xi_i(s) ds = \\ &= \frac{1}{s_i - s_0} - \frac{1}{s_{i+1} - s_0} + \int_{s_j}^{s_{j+1}} K(s_0, s) ds, \quad s_0 \in [a, b] \setminus E. \end{aligned} \quad (22)$$

Введём также пространство линейных функционалов $\mathbb{L}^h = \langle \delta_i : i = \overline{1, N} \rangle$ над пространством $C^h[a, b]$, где δ_i задают линейные функционалы, действующие по правилу

$$\langle \delta_i, \varphi \rangle = \varphi(s_{0i}), \quad \varphi \in C^h[a, b]. \quad (23)$$

Пусть $\{c_i\}_{i=1}^N$ обозначают коэффициенты разложения линейного функционала $l \in \mathbb{L}^h$ по базису $\{\delta_i\}_{i=1}^N$. Носителем линейного функционала l будем называть множество

$$\text{supp } l = \bigcup_{i: c_i \neq 0} s_{0i}.$$

На пространстве \mathbb{L}^h введём норму $\|l\| = \max_{i=\overline{1, N}} |c_i|$.

Выражения (21)–(23) позволяют представить матрицу и правую часть линейной системы (6) в виде

$$A_{ij} = \langle \delta_i, J\xi_j \rangle, \quad f_i = \langle \delta_i, f \rangle, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (24)$$

где f — правая часть гиперсингулярного уравнения (2). Таким образом, мы сформулировали метод коллокаций в терминах базисных функций и линейных функционалов.

Всюду далее будем полагать, что $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. В пространствах \mathbb{X}^h и \mathbb{L}^h введём, соответственно, базисы $\{w_{ij}\}$ и $\{l_{ij}\}$:

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^N \tilde{H}_{ijk} \xi_k, \quad l_{ij} = \sum_{k=1}^N H_{ijk} \delta_k, \quad (25)$$

где $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m(i)}$. По построению функция w_{00} является тождественно равной единице. Функции w_{ij} при $i > 0$ называются *вейвлетами Хаара*.

Запишем численную схему, использующую новые базисы. Обозначим через $u \in \mathbb{R}^N$ вектор коэффициентов разложения решения по базису $\{w_{ij}\}$. Вектор u будем находить из линейной системы

$$Mu = b, \quad (26)$$

где $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ и $b \in \mathbb{R}^N$, причём

$$M_{i'ij'j} = \langle l_{i'j'}, Jw_{ij} \rangle, \quad b_{ij} = \langle l_{ij}, f \rangle, \quad (27)$$

$i, i' = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m(i)}$ и $j' = \overline{1, m(i')}$. В представленной записи каждая строка матрицы M имеет двухиндексный номер (i', j') , а каждый столбец — двухиндексный номер (i, j) .

Из формул (24)–(27) следует, что

$$M = HA\tilde{H}^T, \quad b = Hf,$$

здесь A и f — соответственно матрица и правая часть линейной системы (6). Решение g системы (6) и решение u системы (26) связаны соотношением

$$g = \tilde{H}^T u.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства функций w_{ij} и линейных функционалов l_{ij} . Обозначим $S_{ij} = \text{supp } w_{ij}$, $\hat{S}_{ij} = \text{supp } l_{ij}$. Из (13)–(17) и (25) следует справедливость следующих свойств:

- 1) $|w_{ij}(s)| = 1$, $s \in S_{ij}$;
- 2) $\|l_{ij}\| = 2^{n-i+1}$, $i > 0$;
- 3) при любом $i > 0$ выполнено

$$d_i := \text{meas}(S_{ik}) = 2^{-i+1}(b-a-h), \quad k = \overline{1, 2^{i-1}};$$

- 4) $\hat{S}_{ij} \subset S_{ij}$;
- 5) при всех i выполнено

$$\bigcup_{j=1}^{m(i)} S_{ij} = [a+h/2, b-h/2], \quad i = \overline{0, n};$$

- 6) при всех i выполнено

$$\text{meas}(S_{ij} \cap S_{ik}) = 0, \quad i = \overline{2, n}, \quad j \neq k;$$

7) при всех i выполнено

$$\bigcup_{j=1}^{m(i)} \hat{S}_{ij} = E_0, \quad i = \overline{0, n},$$

где E_0 — множество, определённое в п. 2;

8) функции w_{ij} и линейные функционалы l_{ij} при $i > 0$ имеют равные нулю моменты:

$$\int_{S_{ij}} w_{ij}(s) ds = 0, \quad \langle l_{ij}, \varphi \rangle = 0,$$

где $\varphi(s) \equiv 1, s \in [a, b]$.

6. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА С РАЗРЕЖЕННОЙ МАТРИЦЕЙ

Будем аппроксимировать матрицу M разреженной матрицей \tilde{M} , которую определим по правилу

$$\tilde{M}_{i'ij'j} = \begin{cases} M_{i'ij'j}, & \text{dist}(S_{i'j'}, S_{ij}) < \varepsilon_{i'}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\varepsilon_{i'}$ — заданный порог, а расстояние между множествами понимается в смысле

$$\text{dist}(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{x \in \Omega_1, y \in \Omega_2} |x - y|, \quad \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}.$$

Будем считать, что функция $K \in C^1([a, b] \times [a, b])$ и существует непрерывная производная $\partial^2 K(t, x) / \partial x \partial t \in C([a, b] \times [a, b])$.

Лемма 2. Пусть существует константа $r > 1$ такая, что при всех $i, i' = \overline{1, n}$ выполнено неравенство

$$\text{dist}(S_{i'j'}, S_{ij}) \geq r(d_i + d_{i'}). \tag{28}$$

Тогда найдётся положительная константа C такая, что при всех $i, i' = \overline{1, n}$ справедлива оценка

$$|M_{i'ij'j}| \leq \frac{C d_{i'} d_i}{2^{n-i'+1}} \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} \int_{S_{ij}} \frac{dx}{(x-t)^4}.$$

Доказательство. Условие (28) означает, что множества $\hat{S}_{i'j'}$ и S_{ij} не пересекаются, поэтому имеет место представление

$$(Jw_{ij})(t) = \int_{S_{ij}} \varphi(t, x) w_{ij}(x) dx, \quad t \in \hat{S}_{i'j'}, \tag{29}$$

где интеграл понимается как собственный интеграл Римана, и

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(x-t)^2} + K(t, x).$$

Обозначим $R(t, x) = \partial^2 \varphi(t, x) / \partial x \partial t$. Если t_0 и x_0 обозначают середины отрезков $\hat{S}_{i'j'}$ и S_{ij} соответственно, то

$$\varphi(t, x) = -\varphi(t_0, x_0) + \varphi(t, x_0) + \varphi(t_0, x) + (t-t_0)(x-x_0)\nu(t, x), \quad t \in \hat{S}_{i'j'}, \quad x \in S_{ij},$$

где

$$\nu(t, x) = \int_0^1 \int_0^1 R(t_0 + y_1(t-t_0), x_0 + y_2(x-x_0)) dy_1 dy_2.$$

Из выражения (29) и свойства 8) равенства нулю моментов следует, что

$$M_{i'ij'j} = \langle l_{i'j'}, \psi_{ij} \rangle, \tag{30}$$

где

$$\psi_{ij}(t) = \int_{S_{ij}} (t-t_0)(x-x_0)\nu(t,x)w_{ij}(x) dx, \quad t \in \hat{S}_{i'j'}.$$

Нам понадобится оценка

$$|\psi_{ij}(t)| \leq d_{i'}d_i \int_{S_{ij}} |\nu(t,x)w_{ij}(x)| dx, \quad t \in \hat{S}_{i'j'}. \tag{31}$$

По определению линейных функционалов $l_{i'j'}$ и множеств $\hat{S}_{i'j'}$ можем записать равенство

$$l_{i'j'} = \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} c_t \delta_t \tag{32}$$

с некоторыми коэффициентами c_t . Используя выражения (30)–(32), получаем

$$\begin{aligned} |\Delta M_{i'ij'j}| &\leq \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} |c_t \psi(t)| \leq \max_{t \in \hat{S}_{i'j'}} |c_t| \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} |\psi(t)| = \|l_{i'j'}\| \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} |\psi(t)| \leq \\ &\leq d_{i'}d_i \|l_{i'j'}\| \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} \int_{S_{ij}} |\nu(t,x)w_{ij}(x)| dx. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и свойств 1), 2) имеем

$$|M_{i'ij'j}| \leq \frac{d_{i'}d_i}{2^{n-i'+1}} \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} \int_{S_{ij}} |\nu(t,x)| dx. \tag{33}$$

Легко проверить, что при всех $(x, t) \in [a, b] \times [a, b]$, $x \neq t$, выполнено неравенство

$$|R(t, x)| \leq \frac{\Lambda}{(x-t)^4}$$

с константой

$$\Lambda = 6 + \max_{(t,x) \in [a,b] \times [a,b]} \left| (x-t)^4 \frac{\partial^2 K(t,x)}{\partial t \partial x} \right|.$$

Тогда, согласно интегральной теореме о среднем, для всех $t \in \hat{S}_{i'j'}$ и $x \in S_{ij}$ найдутся такие $t_1 \in \hat{S}_{i'j'}$ и $x_1 \in S_{ij}$, что

$$|\nu(t, x)| \leq \frac{\Lambda}{(x_1 - t_1)^4}. \tag{34}$$

Учитывая условие (28) и свойство 4), получаем, что для всех $t \in \hat{S}_{i'j'}$ и $x \in S_{ij}$ справедливо неравенство

$$|x_1 - t_1| \geq |x - t| - d_i - d_{i'} \geq (1 - r^{-1})|x - t|. \tag{35}$$

Объединяя неравенства (33)–(35), выводим требуемую оценку с константой

$$C = \frac{\Lambda}{(1 - r^{-1})^4}.$$

Лемма доказана.

Введём матрицу $\Delta M = M - \tilde{M}$, которую будем рассматривать как блочную матрицу, состоящую из блоков $\Delta M_{i'i} \in \mathbb{R}^{m(i') \times m(i)}$ вида $\Delta M_{i'i} = \{\Delta M_{i'ij'j}\}$, $i, i' = \overline{0, n}$. Из свойства 5) следует, что $S_{01} = [a + h/2, b - h/2]$. Это означает, что $\text{dist}(S_{01}, S_{ij}) = 0$ при всех $i = \overline{0, n}$,

$j = \overline{1, m(i)}$, поэтому $\Delta M_{0i} = \Delta M_{i0} = 0$ при любом выборе порогов ε_{i0} и ε_{0i} . Таким образом, матрица ΔM представима в виде

$$\Delta M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta M_{11} & \dots & \Delta M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \Delta M_{n1} & \dots & \Delta M_{nn} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Лемма 3. Для любого $r > 1$ существует константа $C > 0$ такая, что при любом выборе $\varepsilon = \varepsilon_{i' i} \geq r(d_{i'} + d_i)$, $i, i' = \overline{1, n}$, выполнено неравенство

$$\|\Delta M_{i' i}\|_\infty \leq C\varepsilon^{-3}d_{i'}d_i.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|\Delta M_{i' i}\|_\infty = \max_{j'=1, \dots, 2^{i'-1}} \sum_{j \in \mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon)} |M_{i' i j' j}|,$$

где

$$\mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon) = \{j = \overline{1, 2^{i'-1}} : \text{dist}(\hat{S}_{i' j'}, S_{ij}) > \varepsilon\}.$$

Тогда, используя лемму 2, получаем

$$\|\Delta M_{i' i}\|_\infty \leq \frac{Cd_{i'}d_i}{2^{n-i'+1}} \max_{j'=1, \dots, 2^{i'-1}} \sum_{t \in \hat{S}_{i' j'}} \sum_{j \in \mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon)} \int_{S_{ij}} \frac{dx}{(x-t)^4}. \tag{37}$$

Далее, в силу определения множества $\mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon)$ и равенства $\text{meas}(S_{ij} \cap S_{ik}) = 0$ при $j \neq k$ заключаем, что для всех $t \in \hat{S}_{i' j'}$ имеет место неравенство

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon)} \int_{S_{ij}} \frac{dx}{(x-t)^4} < \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{dx}{(x-t)^4} = \frac{2}{3\varepsilon^3}. \tag{38}$$

Объединяя неравенства (37), (38) и учитывая, что $|\hat{S}_{i' j'}| = 2^{n-i'+1}$ при всех $j' = \overline{1, 2^{i'-1}}$, получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть пороги $\varepsilon_{i' i}$, $i, i' = \overline{0, n}$, удовлетворяют условию

$$\varepsilon_{i' i} \geq \max\{r(d_{i'} + d_i), 2^{\lambda n/3 - \alpha i'/3 - \alpha i/3}\}$$

с некоторыми $\lambda > 0$, $\alpha > 3/2$ и $r > 1$ такими, что $2 - 2\alpha + \lambda > 0$. Тогда выполнено неравенство

$$\|\Delta A\|_\infty \leq Ch^\omega, \quad \omega = 2 - 2\alpha + \lambda.$$

Доказательство. Будем использовать равенство $\Delta A = \tilde{H}^T \Delta M H$. Обозначим $V = \Delta M H$. С учётом равенств (13), (36) можем записать матрицу V в блочном виде:

$$V = [0 \quad V_1 \quad \dots \quad V_n]^T,$$

где

$$V_{i'} = \sum_{i=1}^n \Delta M_{i' i} H_i, \quad i' = \overline{1, n}.$$

Условие $\varepsilon_{i'i} \geq r(d_{i'} + d_i)$ позволяет использовать лемму 3, в силу которой и равенства $\|H_i\|_\infty = 1$ (см. (19)) получаем оценку

$$\|V_{i'}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \|\Delta M_{i'i}\|_\infty \|H_i\|_\infty \leq C d_{i'} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i'i}^{-3} d_i.$$

Учитывая выражение для $\varepsilon_{i'i}$ и то, что $d_i = O(2^{-i})$ (см. свойство 3)), выводим

$$\|V_{i'}\|_\infty \leq C 2^{-\lambda n + (\alpha-1)i'} \sum_{i=1}^n 2^{(\alpha-1)i} \leq C 2^{(-\lambda + \alpha - 1)n + (\alpha-1)i'}.$$

Далее запишем

$$\Delta A = \tilde{H}^T V = \sum_{i=1}^n \tilde{H}_i^T V_i.$$

Так как $\|\tilde{H}_i^T\|_\infty = 1$ (см. (20)), имеем

$$\|\Delta A\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \|\tilde{H}_i^T\|_\infty \|V_i\|_\infty \leq C 2^{(-\lambda + \alpha - 1)n} \sum_{i=1}^n 2^{(\alpha-1)i} \leq C 2^{(-\lambda + 2\alpha - 2)n} = C 2^{-n\omega},$$

откуда, учитывая, что $2^{-n} = O(h)$, получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 4 условие $\varepsilon_{i'i} \geq r(d_{i'} + d_i)$ позволило использовать лемму 3, а условие $\varepsilon_{i'i} \geq 2^{\lambda n/3 - \alpha i'/3 - \alpha i/3}$ — свести оценку нормы $\|\Delta A\|_\infty$ к суммированию геометрических прогрессий. Теперь зададим более конкретное правило выбора порогов $\varepsilon_{i'i}$, удовлетворяющих этим двум условиям. Будем полагать, что пороги $\varepsilon_{i'i}$ выбираются по правилу

$$\varepsilon_{i'i} = \max\{2^{\lambda n/3 - \alpha i'/3 - \alpha i/3}, r(d_{i'} + d_i)\}, \quad i, i' = \overline{0, n}, \tag{39}$$

где $\lambda, \alpha > 0$ и $r > 1$ — заданные параметры.

Обозначим через $g_{ex} \in \mathbb{R}^N$ вектор с компонентами $g_{ex,k} = g(s_{0k})$, где $g(s_{0k})$ — значение точного решения уравнения (2) в точке коллокации s_{0k} , $k = \overline{1, N}$. Введём также вектор $u_{ex} = H g_{ex}$, имеющий блочный вид:

$$u_{ex} = [u_{ex,0} \quad u_{ex,1} \quad \dots \quad u_{ex,n}]^T = [H_0 g_{ex} \quad H_1 g_{ex} \quad \dots \quad H_n g_{ex}]^T. \tag{40}$$

Из определения блоков H_i и условия $g \in H^{1/2}[a, b]$ следует оценка

$$\|u_{ex,i}\|_\infty \leq 2^{-(i-1)/2} (b-a)^{1/2} |g|_{H^{1/2}[a,b]}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{41}$$

где $|g|_{H^{1/2}[a,b]} = \sup_{x,y \in [a,b], x \neq y} |g(x) - g(y)| / |x - y|^{1/2}$ — полунорма в пространстве $H^{1/2}[a, b]$.

Лемма 5. Пусть пороги $\varepsilon_{i'i}$ выбраны по правилу (39) с параметрами $\lambda > 0$ и $\alpha > 3/2$ такими, что $2 - 2\alpha + \lambda > 0$. Тогда выполнена оценка

$$\|\Delta A g_{ex}\|_\infty \leq C h^{\omega+1/2}, \quad \omega = 2 - 2\alpha + \lambda.$$

Доказательство. Будем пользоваться равенством

$$\Delta A g_{ex} = \tilde{H}^T \Delta M u_{ex}.$$

Обозначим $v = \Delta M u_{ex}$. Равенства (36), (40) позволяют записать вектор v в блочном виде

$$v = [0 \quad v_1 \quad \dots \quad v_n]^T,$$

где

$$v_{i'} = \sum_{i=1}^n \Delta M_{i'i} u_{ex,i}, \quad i' = \overline{1, n}.$$

Используя лемму 3 и оценку (41), получаем

$$\|v_{i'}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \Delta \|M_{i'i}\|_\infty \|u_{ex,i}\|_\infty \leq C d_{i'} \sum_{i=1}^n 2^{-i/2} \varepsilon_{i'}^{-3} d_i.$$

Учитывая выражение для $\varepsilon_{i'}$ и то, что $d_i = O(2^{-i})$ (см. свойство 3)), имеем

$$\|v_{i'}\|_\infty \leq C 2^{-\lambda n + (\alpha-1)i'} \sum_{i=1}^n 2^{(\alpha-3/2)i} \leq C 2^{(-\lambda + \alpha - 3/2)n + (\alpha-1)i'}.$$

Далее можем записать

$$\Delta A g_{ex} = \tilde{H}^T v = \sum_{i=1}^n \tilde{H}_i^T v_i.$$

Ввиду равенства $\|\tilde{H}_i^T\|_\infty = 1$ (см. (20)) получаем соотношения

$$\|\Delta A g_{ex}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \|\tilde{H}_i^T\|_\infty \|v_i\|_\infty \leq C 2^{(-\lambda + \alpha - 3/2)n} \sum_{i=1}^n 2^{(\alpha-1)i} \leq C 2^{(-\lambda + 2\alpha - 5/2)n} = C 2^{-n(\omega+1/2)},$$

откуда с учётом $2^{-n} = O(h)$ выводим требуемую оценку. Лемма доказана.

Численная схема, использующая аппроксимацию матрицы M разреженной матрицей \tilde{M} , основана на решении линейной системы

$$\tilde{M} \tilde{u} = b, \tag{42}$$

решив которую, можно перейти в базис кусочно-постоянных функций, вычислив вектор

$$\tilde{g} = \tilde{H}^T \tilde{u}.$$

Компоненты вектора \tilde{g} аппроксимируют значения точного решения уравнения (2) в точках коллокации.

Теорема 1. Пусть пороги $\varepsilon_{i'}$, $i, i' = \overline{0, n}$, выбраны по правилу (39) с параметрами $\lambda > 0$ и $\alpha > 3/2$ такими, что $2 - 2\alpha + \lambda > 0$. Тогда существует константа $h_0 > 0$ такая, что при всех $h \leq h_0$ линейная система (42) имеет единственное решение и выполнена оценка

$$\|g_{ex} - \tilde{g}\|_\infty \leq C(h^{1/2} + h^\nu + h^{\omega+1/2}), \quad \omega = 2 - 2\alpha + \lambda, \quad \nu \in (0, 1).$$

Другими словами, численная схема, использующая аппроксимацию матрицы разреженной матрицей, имеет порядок сходимости $O(h^{1/2} + h^\nu + h^{\omega+1/2}) = O(h^{1/2} + h^\nu)$ в абсолютной норме.

Доказательство. Матрица \tilde{M} подобна матрице \tilde{A} , значит, однозначная разрешимость системы (42) эквивалентна обратимости матрицы \tilde{A} . Будем использовать представление

$$\tilde{A} = A - \Delta A = \tilde{G} + \tilde{B} - \Delta A,$$

где \tilde{G} , \tilde{B} — матрицы, определяемые выражениями (7), (8). Матрица \tilde{G} обратима, поэтому обратимость матрицы \tilde{A} эквивалентна обратимости матрицы

$$I + \tilde{K} + \tilde{G}^{-1} \Delta A,$$

где $\tilde{K} = \tilde{G}^{-1}\tilde{B}$. Известно (см. п. 5), что при всех $h < h_1$ матрица $I + \tilde{K}$ обратима, поэтому при таких h обратимость матрицы \tilde{A} эквивалентна обратимости матрицы $I + F$, где

$$F = (I + \tilde{K})^{-1}\tilde{G}^{-1}\Delta A.$$

Используя оценки (11), (12) и лемму 4, получаем

$$\|F\|_\infty \leq \|(I + \tilde{K})^{-1}\|_\infty \|\tilde{G}^{-1}\|_\infty \|\Delta A\|_\infty \leq Ch^\omega \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

это означает, что найдётся положительная константа $h_0 \leq h_1$ такая, что при всех $h < h_0$ матрица $I + F$ обратима, причём выполняется оценка

$$\|(I + F)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - Ch^\omega}. \tag{43}$$

Таким образом, система (42) имеет единственное решение при всех $h < h_0$. Теперь докажем, что схема сходится с требуемым порядком.

Введём векторы $\Delta f_1, \Delta f_2 \in \mathbb{R}^N$ по формулам

$$\Delta f_{1,i} = \int_a^b \frac{g(s)}{(s - s_{0i})^2} ds - (\tilde{G}g_{ex})_i, \quad \Delta f_{2,i} = \int_a^b K(s_{0i}, s)g(s) ds - (\tilde{B}g_{ex})_i, \quad i = \overline{1, N},$$

где g — точное решение уравнения (2). Из оценок (4), (5) следует, что

$$|\Delta f_{1,i}| \leq \frac{Ch^\nu}{(s_{0i} - a)(b - s_{0i})}, \tag{44}$$

$$|\Delta f_{2,i}| \leq C\|g\|_{H^{1/2}[a,b]}h^{1/2}, \tag{45}$$

где $i = \overline{1, N}$, $\nu \in (0, 1)$. В силу равенств $Ag_{ex} = (\tilde{G} + \tilde{B})g_{ex} = f + \Delta f_1 + \Delta f_2$, $\tilde{A}\tilde{g} = (\tilde{G} + \tilde{K} - \Delta A)\tilde{g} = f$ можем записать

$$\tilde{A}(g_{ex} - \tilde{g}) = (\tilde{G} + \tilde{B} - \Delta A)(g_{ex} - \tilde{g}) = \Delta f_1 + \Delta f_2 - \Delta Ag_{ex}.$$

Отсюда следует, что при $h < h_0$

$$g_{ex} - \tilde{g} = (I + F)^{-1}(I + \tilde{K})^{-1}\tilde{G}^{-1}(\Delta f_1 + \Delta f_2 - \Delta Ag_{ex}).$$

Используя оценки (11), (12), (43), получаем

$$\|g_{ex} - \tilde{g}\|_\infty \leq C\|\tilde{G}^{-1}\Delta f_1\|_\infty + C\|\Delta f_2\|_\infty + C\|\Delta Ag_{ex}\|_\infty. \tag{46}$$

Из оценок (10), (44) находим

$$\|\tilde{G}^{-1}\Delta f_1\|_\infty \leq Ch^\nu, \quad \nu \in (0, 1). \tag{47}$$

Далее, из оценки (45) следует, что

$$\|\Delta f_2\|_\infty \leq Ch^{1/2}. \tag{48}$$

Наконец, из леммы 5 вытекает неравенство

$$\|\Delta Ag_{ex}\|_\infty \leq Ch^{\omega+1/2}. \tag{49}$$

Объединив оценки (46)–(49), получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Утверждение теоремы состоит в том, что при подходящем выборе порогов $\varepsilon_{i'i}$ численная схема, использующая аппроксимацию матрицы M разреженной матрицей \tilde{M} , имеет порядок сходимости $O(h^{1/2} + h^\nu + h^{\omega+1/2})$. Из доказательства теоремы видно, что слагаемое порядка $O(h^{1/2} + h^\nu)$ связано с погрешностью квадратурных формул, а слагаемое порядка $O(h^{\omega+1/2})$ — с разреженной аппроксимацией. Таким образом, предлагаемый алгоритм имеет такой же порядок сходимости, что и метод коллокаций с плотной матрицей. На самом деле константы в слагаемых порядка $O(h^{1/2})$ и $O(h^\nu)$ в асимптотической оценке (9) и в теореме 1 отличаются на множитель $(1 - Ch_0^\omega)^{-1} \rightarrow 1$ при $h_0 \rightarrow 0$.

Теперь оценим степень разреженности матрицы \tilde{M} . Для этого рассмотрим матрицу \tilde{M} в таком же блочном виде, как и ранее матрицу ΔM :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{00} & \tilde{M}_{01} & \dots & \tilde{M}_{0n} \\ \tilde{M}_{10} & \tilde{M}_{11} & \dots & \tilde{M}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{M}_{n0} & \tilde{M}_{n1} & \dots & \tilde{M}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Через $\mathcal{N}(Y)$ обозначим число ненулевых элементов матрицы Y .

Теорема 2. Пусть пороги $\varepsilon_{i'i}$, $i, i' = \overline{0, n}$, выбраны по правилу (39) с параметрами $\lambda > 0$ и $3/2 < \alpha < 3$ такими, что $2 - 2\alpha/3 + \lambda/3 > 1$. Тогда

$$\mathcal{N}(\tilde{M}) = O(N^{2-2\alpha/3+\lambda/3}).$$

Доказательство. Оценим число ненулевых элементов в строке $\tilde{M}_{i'j'i}$ блока $\tilde{M}_{i'i}$, $i, i' = \overline{0, n}$. Пусть a', b' — соответственно начало и конец отрезка $S_{i'j'}$. Заметим, что если $\tilde{M}_{i'j'ij} \neq 0$, то имеет место вложение $S_{ij} \subset L$, где L — отрезок вида

$$L = [a' - \varepsilon_{i'i} - d_i, b' + \varepsilon_{i'i} + d_i].$$

При любом фиксированном i множества S_{ij} дизъюнкты (свойство 6)), поэтому

$$\mathcal{N}(\tilde{M}_{i'j'i}) \leq \frac{\text{meas}(L)}{\min_j \text{meas}(S_{ij})} = \frac{d_{i'} + 2d_i + 2\varepsilon_{i'i}}{d_i} = 2 + \frac{d_{i'}}{d_i} + \frac{2\varepsilon_{i'i}}{d_i}. \tag{50}$$

Для чисел $\varepsilon_{i'i}$ будем использовать оценку

$$\varepsilon_{i'i} = \max\{r(d_{i'} + d_i), 2^{\lambda n/3 - \alpha i' - \alpha i}\} < r(d_{i'} + d_i) + 2^{\lambda n/3 - \alpha i' / 3 - \alpha i / 3}. \tag{51}$$

Свойство 3) означает, что при всех $h < h_0$ выполнено неравенство

$$(b - a - h_0)2^{-i} < d_i < 2(b - a)2^{-i}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{52}$$

Объединив оценки (50)–(52), будем иметь

$$\mathcal{N}(\tilde{M}_{i'j'i}) \leq 2 + 2r + \frac{(2 + 4r)(b - a)}{b - a - h_0} 2^{i-i'} + \frac{2}{b - a - h_0} 2^{\lambda n/3 - \alpha i' / 3 + (1 - \alpha/3)i}.$$

Блок $\tilde{M}_{i'i}$ имеет не более $2^{i'}$ строк, поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\mathcal{N}(\tilde{M}_{i'i}) \leq 2^{i'} \mathcal{N}(\tilde{M}_{i'j'i}) \leq C(2^{i'} + 2^i + 2^{\lambda n/3 + (1 - \alpha/3)i' + (1 - \alpha/3)i}).$$

Далее оценим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\tilde{M}) &= \sum_{i=0}^n \sum_{i'=0}^n \mathcal{N}(\tilde{M}_{i'i}) \leq C \sum_{i=0}^n \sum_{i'=0}^n 2^i + C \sum_{i=0}^n \sum_{i'=0}^n 2^{i'} + C \sum_{i=0}^n \sum_{i'=0}^n 2^{\lambda n/3 + (1 - \alpha/3)i' + (1 - \alpha/3)i} \leq \\ &\leq 2C(n + 1)2^{n+1} + C2^{(2 - 2\alpha/3 + \lambda/3)n}. \end{aligned} \tag{53}$$

Так как $n = \log_2 N$, получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 следует, что метод, использующий аппроксимацию матрицы разреженной матрицей, имеет тот же порядок сходимости, что и метод коллокаций с плотной матрицей, а соответствующая разреженная матрица имеет число ненулевых элементов порядка $O(N^\gamma)$ с показателем $\gamma = 2 - 2\alpha/3 + \lambda/3 < 2$, если только пороги ε_{i^i} выбраны по правилу (39) с параметрами λ и α , удовлетворяющими условиям

$$\lambda > 0, \quad 3/2 < \alpha < 3, \quad \lambda < 2\alpha, \quad 2 - 2\alpha + \lambda > 0, \quad 2 - 2\alpha/3 + \lambda/3 > 1.$$

Легко убедиться, что данные условия совместны, выбрав, например, $\alpha = 5/2$ и $\lambda = 10/3$, тогда разреженная матрица будет иметь $O(N^{1+4/9})$ ненулевых элементов.

7. ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ

Линейную систему (42) будем решать методом GMRES [8] при отсутствии рестартов и преобуславливания. В качестве критерия останова используется условие, что относительная невязка принимает значение, меньшее заданного порога τ , не зависящего от N . Для m итераций потребуется $O(mN(\tilde{M}) + m^2N)$ арифметических операций [8]. Пусть $\mathcal{I}(N) = \mathcal{I}_\tau(N)$ — число итераций метода, необходимое для достижения относительной невязки меньшей τ . Тогда решение системы (42) потребует $O(\mathcal{I}(N)\mathcal{N}(\tilde{M}) + N\mathcal{I}^2(N))$ арифметических операций. В отсутствие теоретических оценок на величину $\mathcal{I}(N)$ нами будут использоваться дополнительные предположения.

Пример 1. Пусть $\alpha = 5/2$, $\lambda = 10/3$, $\tau = 10^{-8}$. Такой выбор параметров α , λ удовлетворяет условиям теоремы 1. При этом согласно теореме 2 $\mathcal{N}(\tilde{M}) = O(N^{1+4/9})$. Будем предполагать, что $\mathcal{I}(N) = O(1)$ (предположение согласуется с результатами численных экспериментов, см. табл. 1 в п. 8). GMRES в таком случае потребует $O(N^{1+4/9})$ арифметических операций.

Пример 2. Пусть $\alpha = 3$, $\lambda = 3$, $\tau = 10^{-8}$. При таком выборе параметров α , λ сходимость нового метода теоремой 1 не гарантируется, однако наблюдается в численных экспериментах (см. табл. 2 в п. 8). Из (53) следует, что $\mathcal{N}(\tilde{M}) = O(N \log N)$. Предположим, что $\mathcal{I}(N) = O(\log N)$. Это предположение не противоречит результатам численных экспериментов в табл. 2. GMRES при этом потребует $O(N \log^2 N)$ арифметических операций.

Наконец, рассмотрим вопрос формирования матрицы \tilde{M} . Перейдем к одноиндексной нумерации базисных функций: $w_p = w_{ij}$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m(i)}$, где $p = 1$ при $i = 0$, $j = 1$; $p = 1 + 2^{i-1} + j - 1$ иначе. Аналогичным образом перенумеруем линейные функционалы l_{ij} . Отсюда, с учётом (27), получаются выражения для матрицы M с одноиндексной нумерацией строк и столбцов: $M_{pq} = \langle l_p, Jw_q \rangle$, $p, q = \overline{1, N}$. Такую же одноиндексную нумерацию будем использовать и для матрицы \tilde{M} . Введём матрицу $W = A\tilde{H}^T$. Из (25), (27) получаем $W_{pq} = \langle \delta_p, Jw_q \rangle$, т.е.

$$W_{pq} = \int_{S_q} \frac{w_q(s)}{(s - s_{0p})^2} ds + \int_{S_q} K(s_{0p}, s)w_q(s) ds, \quad p, q = \overline{1, N}. \tag{54}$$

По построению функций w_p имеет место равенство $w_1(s) \equiv 1$, $s \in [a + h/2, b - h/2]$, и

$$w_p(s) = \begin{cases} 1, & s \in [a_p, c_p), \\ -1, & s \in [c_p, b_p), \quad p = \overline{2, N}. \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{55}$$

Для чисел a_p , b_p , c_p можно найти явные выражения с помощью (25). Из соотношений (1), (54), (55) получаем

$$W_{pq} = \frac{1}{a_q - s_{0p}} - \frac{2}{c_q - s_{0p}} + \frac{1}{b_q - s_{0p}} + \int_{a_q}^{c_q} K(s_{0p}, s) ds - \int_{c_q}^{b_q} K(s_{0p}, s) ds, \quad p = \overline{1, N}, \quad q = \overline{2, N}. \tag{56}$$

Выражение для W_{pq} при $q=1$ получается аналогично. Обозначим через M_p и W_p p -й столбец матриц M и W соответственно. Введём множество

$$P = \{(p, q) : \tilde{M}_{pq} \neq 0, p, q = \overline{1, N}\}.$$

Будем вычислять ненулевые элементы матрицы \tilde{M} по алгоритму 2.

Алгоритм 2 Вычисление матрицы \tilde{M}

```

1: for  $p = 1, \dots, N$  do
2:   Вычислить столбец  $W_p$ 
3:   Вычислить  $M_p = HW_p$ 
4:   for  $q = 1, \dots, N, (p, q) \in P$  do
5:      $\tilde{M}_{pq} := M_{pq}$ 
6:   end for
7: end for

```

Теорема 3. Пусть интегралы в выражении (56) можно вычислить, используя $O(1)$ арифметических операций. Тогда алгоритм 2 требует $O(N^2)$ арифметических операций.

Доказательство. Оценим сложность p -й итерации внешнего цикла. По условию теоремы каждый элемент столбца W_p можно вычислить за $O(1)$ арифметических операций, следовательно, вычисление всего столбца требует $O(N)$ операций. Вектор $M_p = HW_p$ можно вычислить с помощью дискретного преобразования Хаара за $O(N)$ арифметических операций. Внутренний цикл, начинающийся в строке 4, также имеет сложность $O(N)$. Таким образом, одна итерация внешнего цикла требует $O(N)$ арифметических операций. Всего проводится N итераций внешнего цикла, значит, алгоритм имеет сложность $O(N^2)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Алгоритм 2 требует $O(\mathcal{N}(\tilde{M}))$ памяти для хранения матрицы \tilde{M} и $O(N)$ дополнительной памяти для хранения столбцов W_p, M_p .

Замечание 2. Предположение, что интегралы в (56) можно вычислить, используя $O(1)$ арифметических операций, верно, если эти интегралы вычисляются аналитически без использования квадратурных формул. Это будет верно, если уравнение (2) окажется следствием краевой задачи для уравнения Лапласа. Тогда имеет место равенство $K(s_0, s) = \partial K^*(s_0, s) / \partial s$ с некоторой функцией K^* , для которой есть явное выражение [2, доказательство леммы 5.13]. Тогда интегралы в (56) можно выразить через значения функции K^* в трёх точках.

8. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^- = 1, \quad x \in \Gamma,$$

где кривая $\Gamma = \{(\cos s, \sin s) : s \in [0, \pi]\}$ — полуокружность. Решение этой задачи представимо в виде [2, п. 5.4.3]

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} g(y) ds, \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|},$$

причём для кривой Γ используется натуральная параметризация $y = y(s)$, неизвестная функция $g(s)$ является решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} g(y) ds = 1, \quad x = x(s_0), \quad s_0 \in (0, \pi), \tag{57}$$

здесь $x = x(s_0)$ — та же натуральная параметризация кривой Γ .

Уравнение (57) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{g(s)}{(s-s_0)^2} ds + \int_0^\pi K(s_0, s)g(s) ds = 1, \quad s_0 \in (0, \pi), \tag{58}$$

где

$$K(s_0, s) = \begin{cases} \frac{-\cos(s_0-s)}{2\pi(2-2\cos(s_0-s))} + \frac{\sin^2(s_0-s)}{\pi(2-2\cos(s_0-s))^2} - \frac{1}{2\pi(s_0-s)^2}, & s \neq s_0, \\ 0, & s = s_0. \end{cases}$$

Все численные эксперименты проводились для уравнения (58). В качестве “точного” рассматривалось решение на сетке $N = 65\,536$. В качестве оценки порядка сходимости будем использовать двоичный логарифм от отношения нормы разности между численным и точным решениями на сетке мелкости $2h$ и на сетке мелкости h . Для решения линейных систем использовался метод GMRES без рестартов и предобуславливания с критерием остановки $\tau = 10^{-8}$.

Результаты экспериментов при $\alpha = 5/2$, $\lambda = 10/3$, $r = 2$ представлены в табл. 1, где приводятся точность решения и порядок сходимости. Также нельзя не отметить быструю

Таблица 1. Сходимость метода коллокаций с разреженной матрицей ($\alpha = 5/2$, $\lambda = 10/3$)

N	Заполненность \tilde{M}	$\frac{\ \tilde{g} - g_{ex}\ _\infty}{\ g_{ex}\ _\infty}$	Порядок сходимости	Число итераций GMRES	Относительная невязка GMRES
256	0.23	0.103866	—	8	$2.5 \cdot 10^{-10}$
512	0.15	0.071602	0.537	8	$1.4 \cdot 10^{-9}$
1024	0.10	0.048661	0.557	8	$4.0 \cdot 10^{-9}$
2048	0.071	0.032395	0.587	8	$5.5 \cdot 10^{-9}$
4096	0.051	0.020877	0.634	8	$4.5 \cdot 10^{-9}$
8192	0.037	0.012726	0.714	8	$3.8 \cdot 10^{-9}$

Таблица 2. Сходимость метода коллокаций с разреженной матрицей ($\alpha = 3$, $\lambda = 3$)

N	Заполненность \tilde{M}	$\frac{\ \tilde{g} - g_{ex}\ _\infty}{\ g_{ex}\ _\infty}$	Порядок сходимости	Число итераций GMRES	Относительная невязка GMRES
256	0.23	0.10387	—	8	$1.9 \cdot 10^{-9}$
512	0.14	0.071603	0.537	9	$1.4 \cdot 10^{-9}$
1024	0.08	0.048657	0.557	10	$8.6 \cdot 10^{-10}$
2048	0.045	0.032389	0.587	11	$7.3 \cdot 10^{-10}$
4096	0.025	0.020872	0.634	12	$9.0 \cdot 10^{-10}$
8192	0.014	0.012723	0.714	12	$7.6 \cdot 10^{-9}$

сходимость метода GMRES. Как показывает эксперимент, аналогичную точность решения можно получить и при меньшей заполненности матрицы \tilde{M} . Возьмём $\alpha = 3$, $\lambda = 3$, $r = 2$. Такие значения параметров α и λ не удовлетворяют условиям теоремы 1. Согласно (53) при данном выборе α , λ число ненулей в разреженной матрице будет оцениваться в виде $\mathcal{N}(\tilde{M}) = O(N \log N)$. Эти результаты представлены в табл. 2. Точность решения при таком выборе α , λ почти идентична точности решения при $\alpha = 5/2$, $\lambda = 10/3$, а заполненность матрицы \tilde{M} существенно меньше.

На рис. 1 показан портрет матрицы M , нормированной на единицу в абсолютной норме, и шаблон разреженности матрицы \tilde{M} при $N = 1024$, $\lambda = 5/2$, $\alpha = 10/3$.

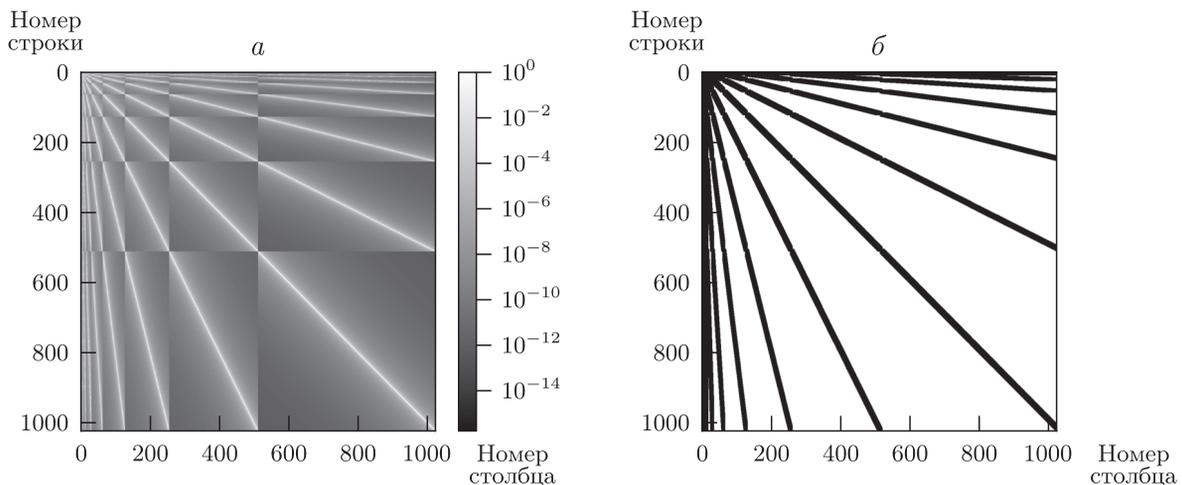


Рис. 1. Абсолютные значения матрицы M (а) и шаблон разреженности матрицы \tilde{M} (б) при $\lambda = 5/2$ и $\alpha = 10/3$

На рис. 2 представлены графики сходимости метода GMRES для $N = 4096$ при $\lambda = 5/2$, $\alpha = 10/3$ и при $\lambda = 3$, $\alpha = 3$. На графиках изображена зависимость относительной невязки от числа итераций.

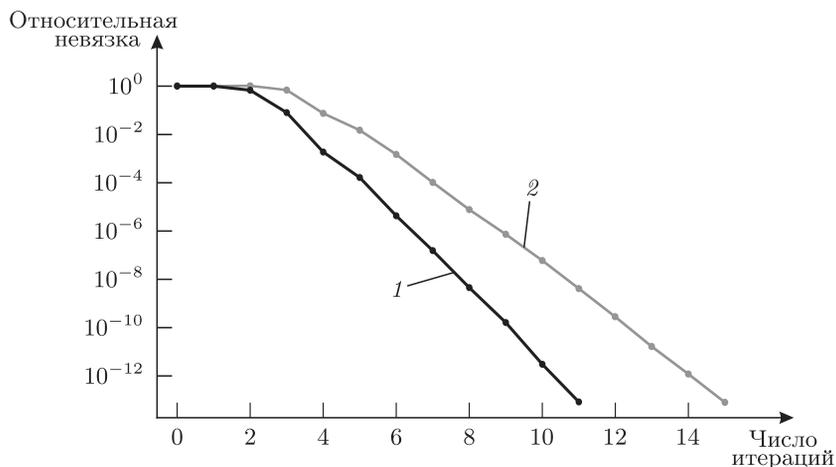


Рис. 2. Сходимость метода GMRES при $N = 4096$ при различных значениях λ и α : 1 — $\lambda = 5/2$, $\alpha = 10/3$; 2 — $\lambda = 3$, $\alpha = 3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен численный алгоритм решения одномерного гиперсингулярного уравнения, использующий в качестве базисных функций вейвлеты Хаара для получения разреженного приближения матрицы линейной системы. Алгоритм имеет тот же порядок сходимости, что и метод коллокаций с плотной матрицей. Новый метод не требует хранения плотной матрицы. Учитывая, что разреженный формат матриц даёт возможность асимптотически быстрого умножения матрицы на вектор на каждой итерации GMRES, а также быструю (по числу итераций) сходимость GMRES, наблюдаемую в численных экспериментах даже при больших размерах матриц, можно ожидать, что решение возникающих в новом методе линейных систем методом GMRES потребует много меньше арифметических операций (суммарно для всех итераций GMRES, необходимых для достижения заданной точности), чем прямой метод для систем, возникающих в методе коллокаций с плотными матрицами.

Теоретические результаты были подтверждены численными экспериментами. По сути, настоящая работа является адаптацией вейвлет-методов решения интегральных уравнений, приводящих к линейным системам с разреженными матрицами, на случай гиперсингулярных интегральных уравнений. Большой интерес представляет разработка аналогичных методов решения двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-286.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М. : Физматлит, 1958. — 545 с.
2. Сетуха, А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения / А.В. Сетуха. — М. : Аргмак-Медиа, 2014. — 256 с.
3. Захаров, Е.В. Численное решение трёхмерных задач дифракции элетромагнитных волн на системе идеально проводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений / Е.В. Захаров, Г.В. Рыжаков, А.В. Сетуха // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 55, № 9. — С. 1253–1263.
4. Beylkin, G. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. I / G. Beylkin, R. Koifman, V. Rokhlin // Comm. Pure Appl. Math. — 1991. — V. 44. — P. 141–183.
5. Chen, Z. Multiscale Methods for Fredholm Integral Equations / Z. Chen, C.A. Micchelli, Y. Xu. — Cambridge : Cambridge University Press, 2015.
6. Aparinov, A.A. Low rank methods of approximation in an electromagnetic problem / A.A. Aparinov, A.V. Setukha, S.L. Stavtsev // Lobachevskii J. Math. — 2019. — V. 40, № 11. — P. 1771–1780.
7. Amaratunga, K. Surface wavelets: a multiresolution signal processing tool for 3D computational modelling / K. Amaratunga, J.E. Castrillon-Candas // Int. J. Numer. Meth. Engng. — 2001. — V. 55, № 3. — P. 239–271.
8. Saad, Y. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M.H. Schultz // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — V. 7, № 3. — P. 856–869.

SOLVING OF ONE-DIMENSIONAL HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION
USING HAAR'S WAVELETS© 2024 / D. A. Kogtenev¹, N. L. Zamarashkin²*Marchuk Institute of Numerical Mathematics of RAS, Moscow, Russia*
e-mail: ¹kogtenev.da@phystech.edu, ²nikolai.zamarashkin@gmail.com

We constructed a numerical method for the one-dimensional hypersingular integral equation which uses sparse matrix approximations. This method has the same convergence order as conventional methods for hypersingular integral equations but the new method is more effective in both memory and arithmetic operations.

Keywords: hypersingular integral equation, Haar's wavelet, multiscale method for integral equation

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-286.

REFERENCES

1. Gakhov, F.D., *Boundary Value Problems*, Oxford: Pergamon Press, 1966.
2. Setukha, A.V., *Chislennyyi metody v integral'nykh uravneniyakh ee ikh prilozhenia* (Numerical Methods for Integral Equations and their Applications), Moscow: Argamak-Media, 2014.
3. Zakharov, E.V., Ryzhakov, G.V., and Setukha, A.V., Numerical solution of 3D problems of electromagnetic wave diffraction on a system of ideally conducting surfaces by the method of hypersingular integral equations, *Differ. Equat.*, 2014, vol. 55, no. 9, pp. 1240–1251.
4. Beylkin, G., Koifman, R., and Rokhlin, V., Fast wavelet transforms and numerical algorithms, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 2019, vol. 44, pp. 141–183.
5. Chen, Z., Micchelli, C.A., and Xu, Y., *Multiscale Methods for Fredholm Integral Equations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
6. Aparinov, A.A., Setukha, A.V., and Stavtsev, S.L., Low rank methods of approximation in an electromagnetic problem, *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 11, pp. 1771–1780.
7. Amaratunga, K. and Castrillon-Candas, J.E., Surface wavelets: a multiresolution signal processing tool for 3D computational modelling, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2001, vol. 55, no. 3, pp. 239–271.
8. Saad, Y. and Schultz, M.H., GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1986, vol. 7, no. 3, pp. 856–869.

УДК 519.642.7

ДВУХТОЧЕЧНЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ РАЗБИЕНИЯХ

© 2024 г. А. С. Ненашев

Научно-технологический университет “Сириус”, федеральная территория “Сириус”

Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

e-mail: nenashev.as@talantiuspeh.ru, nenashev_as@mail.ru

Поступила в редакцию 19.04.2024 г., после доработки 19.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Построена квадратурная формула для вычисления гиперсингулярного интеграла по отрезку с использованием концов интервалов разбиения отрезка в качестве узлов кусочно-постоянной интерполяции плотности интеграла, а также особым образом выбранных точек коллокации. Отличительной особенностью предложенной формулы является возможность вычисления значений интеграла от функций, имеющих конечное число точек разрыва первого рода на отрезке интегрирования. На основе полученной квадратурной формулы построена численная схема решения соответствующего характеристического гиперсингулярного интегрального уравнения при нерегулярном разбиении области поиска решения. Доказаны оценки скорости сходимости приближённых решений к точным в классе кусочно-гёльдеровских функций.

Ключевые слова: численный метод, гиперсингулярный интеграл, интегральное уравнение, квадратурная формула

DOI: 10.31857/S0374064124090088, EDN: JWKVJQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Метод интегральных уравнений находит широкое применение в ряде задач математической физики [1]. Особое место занимают уравнения, содержащие интегральные операторы с сильной особенностью в ядре, — так называемые *гиперсингулярные уравнения*. В прикладных задачах необходимо исследовать вопросы принадлежности решения к определённому классу функций и оценки скорости сходимости некоторой численной схемы решения соответствующего интегрального уравнения. Для этого в первую очередь анализируется характеристическое уравнение, содержащее главную особенность интегрального оператора, в частности, в одномерном случае важную роль играет уравнение на отрезке

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b), \quad g(a) = g(b) = 0, \quad (1)$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару:

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x-x_0)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} \frac{g(x) dx}{(x-x_0)^2} + \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{g(x) dx}{(x-x_0)^2} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right).$$

При определённых условиях на функцию $g(x)$ [1, § 6] уравнение (1) эквивалентно следующему сингулярному уравнению относительно производной подынтегральной функции:

$$\int_a^b \frac{g'(x) dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b), \quad (2)$$

вместе с дополнительным условием

$$\int_a^b g'(x) dx = 0.$$

Для исследования уравнения (2) вводится класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера [2, § 3] в окрестности внутренних точек интервала (a, b) и допускающих интегрируемую степенную особенность на концах $\{a, b\}$.

Определение 1. Будем обозначать, что функция $\varphi \in H_{(a,b)}(\alpha)$, если существуют константы $A > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$ такие, что для любых $x, y \in (a, b)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq A|x - y|^\alpha. \quad (3)$$

Определение 2. Будем обозначать, что функция $\varphi \in H_{(a,b)}^*(\alpha)$, если существуют константы $0 < \lambda, \mu \leq 1$ и функция $\psi \in H_{(a,b)}(\alpha)$ такие, что для любого $x \in (a, b)$ φ представима в виде

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{1-\lambda}(b-x)^{1-\mu}}. \quad (4)$$

Для уравнения (2) показано [2, § 86], что если правая часть $f \in H_{(a,b)}^*(\alpha)$, то и его решение принадлежит тому же классу функций, т.е. $g' \in H_{(a,b)}^*(\alpha)$.

Среди численных методов решения уравнений вида (1) особое место занимает метод дискретных особенностей [1, § 13.5], являющийся разновидностью метода коллокации. Отличительная черта этого метода — использование равномерного разбиения интервала поиска решения или разбиения, диффеоморфного равномерному. Однако интересно создание численных схем, позволяющих искать приближённое решение интегральных уравнений на существенно неравномерных разбиениях. Такого рода схемы реализованы в [3–5], при этом в работах [4, 5] дано строгое обоснование скорости сходимости приближённого решения уравнения (1).

Следует отметить, что численные схемы в [3–5] эффективно работают при ограничении на правую часть: $f \in H_{(a,b)}^*(\alpha)$. Однако в ряде задач математической физики, в частности в моделировании источников питания проволочных антенн [6], возникает необходимость рассмотрения уравнения (1) в более широком классе функций:

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0) + \sum_{m=1}^M \frac{Q_m}{x_0 - q_m}, \quad x_0 \in (a, b) \setminus \bigcup_{m=1}^M \{q_m\}, \quad (5)$$

$$f \in H_{(a,b)}^*(\alpha), \quad q_m \in [a, b], \quad Q_m \in \mathbb{R}, \quad m = \overline{1, M}.$$

В работах [6, 7] анализируется характеристическое уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x) dx}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{x_0 - q}, \quad x_0 \in (-1, 1) \setminus \{q\}, \quad q \in [-1, 1]; \quad (6)$$

в [6] получено решение уравнения (6) в виде

$$g(x) = \arcsin x + \pi \operatorname{sgn}(q-x)/2, \quad x \in (-1, 1), \quad q \in [-1, 1], \quad (7)$$

а в [7] приведено обоснование применимости численного метода дискретных особенностей к решению уравнений вида (6). Опять отметим ограничение метода дискретных особенностей, связанное с равномерностью разбиения интервала поиска решения.

С другой стороны, анализ и численные исследования методов [3–5], построенных для неравномерных разбиений, показывают расходимость численного решения уравнения (6). Это обусловлено использованием аппроксимации производной искомой функции через конечную разность значений в точках коллокации на разных участках разбиения, что не подходит для функций, имеющих разрывы первого рода как в выражении (7).

В связи с этим интерес представляет возможность построения численной схемы решения уравнения типа (5), ориентированной на неравномерное разбиение интервала поиска решения, что является предметом исследования данной работы.

2. ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ

Для построения эффективной численной схемы решения уравнения (5) проанализируем соответствующее пространство решений. Нетрудно заметить, что справедлива следующая декомпозиция искомой функции $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{m=0}^M g_m(x), \quad (8)$$

где каждая из функций $g_m(x)$ удовлетворяет соответствующему интегральному уравнению

$$\int_a^b \frac{g_0(x) dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b), \quad f \in H_{(a,b)}^*(\alpha), \quad (9)$$

$$\int_a^b \frac{g_m(x) dx}{(x-x_0)^2} = \frac{Q_m}{x_0 - q_m}, \quad q_m \in [a, b], \quad x_0 \in (a, b) \setminus \{q_m\}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (10)$$

Примем для общности рассмотрения, что концы отрезка $[a, b]$ также входят в множество точек q_m , $m = \overline{1, M}$. Объединив свойства решений уравнения (9), а также системы уравнений (10) с учётом свойств решения характеристического уравнения (6), получим, что функция g на каждом из интервалов (q_m, q_{m+1}) удовлетворяет условию Гёльдера (3), а её производная g' на концах интервала (a, b) имеет интегрируемую степенную особенность типа (4).

Введём теперь строгое определение соответствующих классов функций.

Определение 3. Будем говорить, что функция φ является *кусочно-гёльдеровской на интервале* (a, b) и обозначать $\varphi \in PH_{(a,b)}(\alpha)$, если существуют константы $A > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$, а также конечный набор точек $a = q_1 < q_2 < \dots < q_{M-1} < q_M = b$ такие, что для любых $x, y \in (q_m, q_{m+1})$, $m = \overline{1, M-1}$, выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq A|x - y|^\alpha.$$

Обобщим данное определение для функций, имеющих интегрируемую степенную особенность на концах интервала (a, b) .

Определение 4. Будем обозначать, что функция $\varphi \in PH_{(a,b)}^*(\alpha)$, если существуют константы $0 < \lambda, \mu \leq 1$ и функция $\psi \in PH_{(a,b)}(\alpha)$ такие, что для любого $x \in (a, b)$ φ представима в виде (4).

Учитывая свойства разложения (8), в дальнейшем будем рассматривать решения уравнения (5) в пространстве функций g таких, что $g' \in PH_{(a,b)}^*(\alpha)$.

3. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим отрезок $[a, b]$, разбитый произвольным образом на N смежных интервалов точками $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$. Учитывая тот факт, что квадратурные формулы строятся для интегралов от функций, имеющих разрыв в конечном наборе точек q_1, \dots, q_M , введём дополнительное ограничение, что $\{q_1, \dots, q_M\} \subset \{x_1, \dots, x_N\}$. Данное требование означает, что подынтегральная функция не испытывает разрывов внутри каждого из интервалов разбиения (x_j, x_{j+1}) . Существенным преимуществом применения неравномерного разбиения в данном случае является тот факт, что для произвольного расположения точек разрыва q_1, \dots, q_M сложно подобрать равномерное разбиение, обеспечивающее попадание всех точек разрыва на узлы равномерной сетки.

Внутри каждого из интервалов разбиения (x_j, x_{j+1}) выберем две точки коллокации $x_{0j}^{(1)}$ и $x_{0j}^{(2)}$, правило выбора которых будет оговорено позже. В данной работе исследуются приближённые квадратурные формулы

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} \approx g(x_j^+) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} + \sum_{k=1, k \neq j}^N (\alpha_{j,k}^{(1)} g(x_k^+) + \beta_{j,k}^{(1)} g(x_{k+1}^-)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2}, \quad (11)$$

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_{0j}^{(2)})^2} \approx g(x_{j+1}^-) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(2)})^2} + \sum_{k=1, k \neq j}^N (\alpha_{j,k}^{(2)} g(x_k^+) + \beta_{j,k}^{(2)} g(x_{k+1}^-)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(2)})^2}, \quad (12)$$

$$\alpha_{j,k}^{(1,2)} = \frac{x_{k+1} - z_{jk}^{(1,2)}}{x_{k+1} - x_k}, \quad \beta_{j,k}^{(1,2)} = 1 - \alpha_{j,k}^{(1,2)}, \quad k \neq j, \quad (13)$$

$$z_{jk}^{(1,2)} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x dx}{(x - x_{0j}^{(1,2)})^2} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1,2)})^2} \right)^{-1}, \quad k \neq j, \quad (14)$$

где $g(x_k^+)$ и $g(x_k^-)$ — правый и левый пределы значения функции $g(x)$ в точке $x = x_k$ соответственно.

Установим следующее базовое свойство квадратурных формул (11), (12).

Теорема 1. Для констант $\alpha_{j,k}^{(1,2)}$ и $\beta_{j,k}^{(1,2)}$, заданных выражениями (13), (14), справедливо условие $\alpha_{j,k}^{(1,2)}, \beta_{j,k}^{(1,2)} \in [0, 1]$.

Доказательство. Так как точки коллокации $x_{0j}^{(1,2)} \notin [x_k, x_{k+1}]$ при $k \neq j$, то согласно обобщённой теореме о среднем для определённых интегралов

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x dx}{(x - x_{0j}^{(1,2)})^2} = z_{jk}^{(1,2)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1,2)})^2}, \quad x_k \leq z_{jk}^{(1,2)} \leq x_{k+1},$$

что совпадает с определением $z_{jk}^{(1,2)}$ в выражении (14). Отсюда с учётом формул (13) непосредственно вытекают ограничения на диапазон значений $\alpha_{j,k}^{(1,2)}$ и $\beta_{j,k}^{(1,2)}$. Теорема доказана.

4. ТОЧКИ КОЛЛОКАЦИИ

Для выбора точек коллокации будем использовать решения нелинейных уравнений

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_j) dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} = 0, \tag{15}$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_{j+1}) dx}{(x - x_{0j}^{(2)})^2} = 0 \tag{16}$$

относительно неизвестных $x_{0j}^{(1,2)} \in (x_j, x_{j+1})$. Исследуем вопрос разрешимости этих уравнений.

Теорема 2. Уравнения (15) и (16) имеют единственные решения, лежащие внутри интервала (x_j, x_{j+1}) и определяемые соотношениями

$$x_{0j}^{(1)} = \frac{x_j + \tau x_{j+1}}{1 + \tau}, \quad x_{0j}^{(2)} = \frac{\tau x_j + x_{j+1}}{1 + \tau}, \tag{17}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$ является единственным корнем трансцендентного уравнения

$$\tau = e^{-1-\tau}. \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала уравнение (15), представив его в виде

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_{0j}^{(1)}) dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} = (x_j - x_{0j}^{(1)}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2}.$$

Вычислив интегралы в уравнении, получим

$$\ln \left(\frac{x_{j+1} - x_{0j}^{(1)}}{x_{0j}^{(1)} - x_j} \right) = (x_j - x_{0j}^{(1)}) \left(\frac{1}{x_{0j}^{(1)} - x_{j+1}} - \frac{1}{x_{0j}^{(1)} - x_j} \right), \quad -\ln \left(\frac{x_{0j}^{(1)} - x_j}{x_{j+1} - x_{0j}^{(1)}} \right) = 1 + \frac{x_{0j}^{(1)} - x_j}{x_{j+1} - x_{0j}^{(1)}},$$

$$-\ln \tau = 1 + \tau,$$

где

$$\tau = \frac{x_{0j}^{(1)} - x_j}{x_{j+1} - x_{0j}^{(1)}}.$$

Таким образом, получено уравнение (18). Заметим, что с учётом введённого обозначения для τ принадлежность $x_{0j}^{(1)}$ интервалу (x_j, x_{j+1}) эквивалентно условию $\tau \in \mathbb{R}_+$. Кроме того, справедливо выражение для $x_{0j}^{(1)}$ из соотношений (17).

Исследуем теперь вопрос разрешимости уравнения (18), представив его в следующем виде:

$$\tau = f(\tau), \quad f(\tau) = e^{-1-\tau}.$$

Функция $f(\tau)$ переводит полное метрическое пространство $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ в себя, при этом $f(0) \neq 0$. Кроме того, $|f'(\tau)| \leq 1/e < 1$ при $\tau \geq 0$, т.е. отображение $f(\tau)$ является сжимающим и, соответственно, имеет единственную неподвижную точку [8, с. 48], которая и является искомым значением $\tau > 0$. Поэтому исходное уравнение (15) также имеет единственное решение, лежащее строго внутри интервала (x_j, x_{j+1}) .

Обратимся теперь к уравнению (16). Заметим, что при заменах $x_j \leftrightarrow x_{j+1}$ и $x_{0j}^{(2)} \rightarrow x_{0j}^{(1)}$ оно переходит в уравнение (15), поэтому для него справедливы аналогичные утверждения о существовании и единственности решения, а также соотношения (17) с учётом введённых подстановок. Теорема доказана.

5. СХОДИМОСТЬ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Исследуем свойства функций, производные которых являются кусочно-гёльдеровскими с интегрируемыми особенностями на краях (4).

Нам потребуется следующее неравенство [2, § 5], справедливое для любых $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ и $\theta \in (0, 1]$:

$$|\sigma_1^\theta - \sigma_2^\theta| \leq |\sigma_1 - \sigma_2|^\theta.$$

Теорема 3. Пусть функция $g(x)$ имеет производную, представимую в виде

$$g'(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{1-\lambda}(b-x)^{1-\mu}}, \quad \psi \in H_{(c,d)}(\alpha), \quad (c, d) \subseteq (a, b), \quad 0 < \lambda, \mu \leq 1.$$

Тогда $g \in H_{(c,d)}(\min\{\lambda, \mu\})$ и для любых $x, y \in (c, d)$ существует константа $B > 0$ такая, что

$$|g(x) - g(y) - g'(y)(x-y)| \leq \frac{B|x-y|^{1+\beta}}{(y-a)(b-y)}, \tag{19}$$

где $\beta = \min\{\alpha, \lambda, \mu\}$.

Доказательство. Представим производную функции $g(x)$ следующим образом:

$$g'(x) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{\psi(x)(b-x)^\mu}{(x-a)^{1-\lambda}} + \frac{\psi(x)(x-a)^\lambda}{(b-x)^{1-\mu}} \right) = \frac{\psi_1(x)}{(x-a)^{1-\lambda}} + \frac{\psi_2(x)}{(b-x)^{1-\mu}} = g'_1(x) + g'_2(x),$$

где согласно свойствам гёльдеровских функций [2, § 5] $\psi_1 \in H_{(c,d)}(\beta_1)$, $\beta_1 = \min\{\alpha, \mu\}$ и $\psi_2 \in H_{(c,d)}(\beta_2)$, $\beta_2 = \min\{\alpha, \lambda\}$.

Исследуем отдельно свойства функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$. Для $g_1(x)$ справедлива оценка

$$|g_1(x) - g_1(y)| = \left| \int_x^y \frac{\psi_1(t) dt}{(t-a)^{1-\lambda}} \right| \leq \frac{C_1}{\lambda} |(y-a)^\lambda - (x-a)^\lambda| \leq \frac{C_1|x-y|^\lambda}{\lambda},$$

где $C_1 = \max_{x \in (c,d)}\{|\psi(x)|\}$, поэтому $g_1 \in H_{(c,d)}(\lambda)$. Далее рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= \frac{g_1(x) - g_1(y)}{x-y} - g'_1(y) = \int_0^1 [g'_1(y + \theta(x-y)) - g'_1(y)] d\theta = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\psi_1(y + \theta(x-y))}{(y + \theta(x-y) - a)^{1-\lambda}} - \frac{\psi_1(y)}{(y-a)^{1-\lambda}} \right) d\theta = \\ &= \frac{1}{y-a} \int_0^1 [\psi_1(y + \theta(x-y))(y + \theta(x-y) - a)^\lambda - \psi_1(y)(y-a)^\lambda] d\theta - \frac{1}{y-a} \int_0^1 \frac{\psi_1(y + \theta(x-y))\theta(x-y) d\theta}{(y + \theta(x-y) - a)^{1-\lambda}} = \\ &= \frac{1}{y-a} F_1(x, y) - \frac{1}{y-a} F_2(x, y). \end{aligned}$$

Для $F_1(x, y)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |F_1(x, y)| &\leq \int_0^1 |\psi_1(y + \theta(x-y))(y + \theta(x-y) - a)^\lambda - \psi_1(y)(y-a)^\lambda| d\theta \leq \\ &\leq C_2 \int_0^1 |\theta(x-y)|^\beta d\theta = C_2 \frac{|x-y|^\beta}{1+\beta}, \end{aligned}$$

где $\beta = \min\{\alpha, \lambda, \mu\}$.

Преобразуем $F_2(x, y)$:

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= \int_0^1 \frac{\psi_1(y + \theta(x - y))\theta(x - y) d\theta}{(y + \theta(x - y) - a)^{1-\lambda}} = \int_0^1 g'_1(y + \theta(x - y))\theta(x - y) d\theta = \\ &= \int_0^1 \theta \frac{dg_1(y + \theta(x - y))}{d\theta} d\theta = g_1(x) - \int_0^1 g_1(y + \theta(x - y)) d\theta. \end{aligned}$$

Для $|F_2(x, y)|$ справедлива оценка

$$|F_2(x, y)| \leq |g_1(x) - g_2(y)| + \int_0^1 |g_1(y + \theta(x - y)) - g_1(y)| d\theta \leq C_1 \frac{|x - y|^\lambda}{1 + \lambda} + C_1 \frac{|x - y|^\lambda}{(1 + \lambda)^2}.$$

Объединяя оценки для $|F_1(x, y)|$ и $|F_2(x, y)|$, получаем

$$|G_1(x, y)| \leq B_1 \frac{|x - y|^\beta}{y - a},$$

откуда непосредственно следует, что

$$|g_1(x) - g_1(y) - g'_1(y)(x - y)| \leq B_1 \frac{|x - y|^{1+\beta}}{y - a}.$$

Проведя аналогичные рассуждения относительно $g_2(x)$, будем иметь, что $g_2 \in H_{(c,d)}(\mu)$ и

$$|g_2(x) - g_2(y) - g'_2(y)(x - y)| \leq B_2 \frac{|x - y|^{1+\beta}}{b - y}.$$

Объединив две последние оценки, получим справедливость соотношения (19). Кроме того, с учётом свойств гёльдеровских функций [2, § 5]

$$g = (g_1 + g_2) \in H_{(c,d)}(\min\{\lambda, \mu\}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос сходимости квадратурных формул (11), (12).

Теорема 4. Для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на N произвольных частей последовательностью точек $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$, удовлетворяющего условию

$$h_{\max} \leq \gamma h_{\min}, \tag{20}$$

где $h_{\max} = \max_{i=\overline{1,N}}\{h_i\}$, $h_{\min} = \min_{i=\overline{1,N}}\{h_i\}$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, и функции $g(x)$, имеющей производную $g' \in PH_{(a,b)}^*(\alpha)$, справедливы оценки

$$\left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} - S_N^{(1)}(x_{0j}^{(1)}) \right| \leq C_1 \frac{h_{\max}^\beta}{(x_{0j}^{(1)} - a)(b - x_{0j}^{(1)})}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{21}$$

$$\left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_{0j}^{(2)})^2} - S_N^{(2)}(x_{0j}^{(2)}) \right| \leq C_2 \frac{h_{\max}^\beta}{(x_{0j}^{(2)} - a)(b - x_{0j}^{(2)})}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{22}$$

где $\beta = \min\{\alpha, \lambda, \mu\}$,

$$S_N^{(1)}(x_{0j}^{(1)}) = g(x_j^+) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} + \sum_{k=1, k \neq j}^N (\alpha_{j,k}^{(1)} g(x_k^+) + \beta_{j,k}^{(1)} g(x_{k+1}^-)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2}, \quad (23)$$

$$S_N^{(2)}(x_{0j}^{(2)}) = g(x_{j+1}^-) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(2)})^2} + \sum_{k=1, k \neq j}^N (\alpha_{j,k}^{(2)} g(x_k^+) + \beta_{j,k}^{(2)} g(x_{k+1}^-)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(2)})^2}, \quad (24)$$

коэффициенты $\alpha_{j,k}^{(1,2)}$, $\beta_{j,k}^{(1,2)}$ определяются соотношениями (13), (14), а точки коллокации $x_{0j}^{(1)}$ и $x_{0j}^{(2)}$ — соотношениями (15)–(18).

Доказательство. Докажем сначала оценку для квадратурной формулы $S_N^{(1)}$. Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} - S_N^{(1)}(x_{0j}^{(1)}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{g(x) - g(x_j^+)}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} dx + \\ &+ \sum_{k=1, k \neq j}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{g(x) - \alpha_{j,k}^{(1)} g(x_k^+) - \beta_{j,k}^{(1)} g(x_{k+1}^-)}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} dx = I_1 + I_2, \\ I_1 &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{g(x) - g(x_j^+)}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{g(x) - g(x_{0j}^{(1)}) - g'(x_{0j}^{(1)})(x-x_{0j}^{(1)})}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} dx - \\ &- (g(x_j^+) - g(x_{0j}^{(1)}) - g'(x_{0j}^{(1)})(x_j - x_{0j}^{(1)})) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} + g'(x_{0j}^{(1)}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x-x_j) dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} = I_{1,1} - I_{1,2} + I_{1,3}. \end{aligned}$$

Заметим, что с учётом соотношения (15) справедливо, что $I_{1,3} = 0$. Из теоремы 3 следует

$$\begin{aligned} |I_{1,1}| &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{|g(x) - g(x_{0j}^{(1)}) - g'(x_{0j}^{(1)})(x-x_{0j}^{(1)})|}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} dx \leq \\ &\leq \frac{B}{(x_{0j}^{(1)} - a)(b-x_{0j}^{(1)})} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{|x-x_{0j}^{(1)}|^{1+\beta} dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \leq \frac{2Bh_j^\beta}{\beta(x_{0j}^{(1)} - a)(b-x_{0j}^{(1)})}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} |I_{1,2}| &\leq |g(x_j^+) - g(x_{0j}^{(1)}) - g'(x_{0j}^{(1)})(x_j - x_{0j}^{(1)})| \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{Bh_j^{1+\beta}}{(x_{0j}^{(1)} - a)(b-x_{0j}^{(1)})} \left(\frac{1}{x_{j+1} - x_{0j}^{(1)}} + \frac{1}{x_{0j}^{(1)} - x_j} \right). \end{aligned}$$

Из соотношений (17) находим

$$x_{0j}^{(1)} - x_j = \frac{\tau h_j}{1 + \tau}, \quad x_{j+1} - x_{0j}^{(1)} = \frac{h_j}{1 + \tau},$$

поэтому

$$|I_{1,2}| \leq \frac{Bh_j^\beta(1+\tau)^2}{\tau(x_{0j}^{(1)}-a)(b-x_{0j}^{(1)})}.$$

Объединяя оценки для $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{1,3}$, получаем

$$|I_1| \leq \frac{A_1 h_{\max}^\beta}{(x_{0j}^{(1)}-a)(b-x_{0j}^{(1)})}.$$

Оценим теперь значение I_2 . Введём обозначение $d_j^{(1)} = \min\{x_{0j}^{(1)}-a, b-x_{0j}^{(1)}\}$. Заметим, что $d_j^{(1)} \geq \tau h_j/(1+\tau)$. Разобьём множество $K = \{k \in \mathbb{N} : k = \overline{1, N}, k \neq j\}$ на два подмножества:

$$K_1 = \{k \in K : (x_k, x_{k+1}) \subseteq (x_{0j}^{(1)} - d_j^{(1)}/2, x_{0j}^{(1)} + d_j^{(1)}/2)\}, \quad K_2 = K \setminus K_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k \in K_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{g(x) - \alpha_{j,k}^{(1)} g(x_k^+) - \beta_{j,k}^{(1)} g(x_{k+1}^-)}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} dx + \sum_{k \in K_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{g(x) - \alpha_{j,k}^{(1)} g(x_k^+) - \beta_{j,k}^{(1)} g(x_{k+1}^-)}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} dx = \\ &= I_{2,1} + I_{2,2}. \end{aligned}$$

Обозначим центр отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ как c_k , тогда

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \sum_{k \in K_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{g(x) - g(c_k) - g'(c_k)(x - c_k)}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} dx - \\ &- \sum_{k \in K_1} \alpha_{j,k}^{(1)} (g(x_k^+) - g(c_k) - g'(c_k)(x_k - c_k)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} - \\ &- \sum_{k \in K_1} \beta_{j,k}^{(1)} (g(x_{k+1}^-) - g(c_k) - g'(c_k)(x_{k+1} - c_k)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} + \\ &+ \sum_{k \in K_1} g'(c_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\alpha_{j,k}^{(1)}(x - x_k) + \beta_{j,k}^{(1)}(x - x_{k+1})}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} dx = I_{2,1,1} - I_{2,1,2} - I_{2,1,3} + I_{2,1,4}. \end{aligned}$$

С учётом выражений для коэффициентов $\alpha_{j,k}^{(1)}$ и $\beta_{j,k}^{(1)}$ выполняется равенство

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\alpha_{j,k}^{(1)}(x - x_k) + \beta_{j,k}^{(1)}(x - x_{k+1})}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} dx = 0,$$

поэтому $I_{2,1,4} = 0$. Далее, из теоремы 3 следует

$$|I_{2,1,1}| \leq \sum_{k \in K_1} \frac{Bh_k^{1+\beta}}{(c_k - a)(b - c_k)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} \leq \frac{2Bh_{\max}^{1+\beta}}{(b - a)(d_j^{(1)}/2)} \sum_{k \in K_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x - x_{0j}^{(1)})^2} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{4Bh_{\max}^{1+\beta}}{(b-x_{0j}^{(1)})(x_{0j}^{(1)}-a)} \left(\int_{\min\{x_{0j}^{(1)}-d_j/2, x_j\}}^{x_j} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} + \int_{x_{j+1}}^{\max\{x_{0j}^{(1)}+d_j/2, x_{j+1}\}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{4Bh_{\max}^{1+\beta}}{(b-x_{0j}^{(1)})(x_{0j}^{(1)}-a)} \left(\frac{4}{d_j} + \frac{1}{x_{0j}^{(1)}-x_j} + \frac{1}{x_{j+1}-x_{0j}^{(1)}} \right) \leq \frac{A_2 h_{\max}^\beta}{(b-x_{0j}^{(1)})(x_{0j}^{(1)}-a)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} |I_{2,1,2} + I_{2,1,3}| &\leq \sum_{k \in K_1} \alpha_{j,k}^{(1)} |g(x_k^+) - g(c_k) - g'(c_k)(x_k - c_k)| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} + \\ &+ \sum_{k \in K_1} \beta_{j,k}^{(1)} |g(x_{k+1}^-) - g(c_k) - g'(c_k)(x_{k+1} - c_k)| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \leq \\ &\leq \sum_{k \in K_1} \frac{Bh_k^{1+\beta}}{(c_k-a)(b-c_k)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \leq \frac{A_2 h_{\max}^\beta}{(b-x_{0j}^{(1)})(x_{0j}^{(1)}-a)}. \end{aligned}$$

Объединяя результаты для $I_{2,1,2}$, $I_{2,1,3}$, $I_{2,1,4}$, получаем оценку

$$|I_{2,1}| \leq \frac{2A_2 h_{\max}^\beta}{(b-x_{0j}^{(1)})(x_{0j}^{(1)}-a)}.$$

Оценим теперь $I_{2,2}$ с учётом того, что $g \in H_{(x_k, x_{k+1})}(\min\{\lambda, \mu\}) \subseteq H_{(x_k, x_{k+1})}(\beta)$, $k = \overline{1, N}$. Заметим, что для всех интервалов $(x_k, x_{k+1}) \not\subseteq (x_{0j}^{(1)} - d_j^{(1)}/2, x_{0j}^{(1)} + d_j^{(1)}/2)$, $k \neq j$, справедлива цепочка неравенств

$$\inf_{x \in (x_k, x_{k+1})} |x - x_{0j}^{(1)}| \geq \frac{d_j^{(1)}}{2} - h_{\max} \geq \frac{d_j^{(1)}}{2} - \frac{h_j}{\gamma} \geq \frac{d_j^{(1)}}{2} - \frac{1+\tau}{\tau\gamma} \inf_{x \in (x_k, x_{k+1})} |x - x_{0j}^{(1)}|,$$

поэтому

$$\inf_{x \in (x_k, x_{k+1})} |x - x_{0j}^{(1)}| \geq \left(1 + \frac{1+\tau}{\tau\gamma}\right)^{-1} \frac{d_j^{(1)}}{2} = \theta d_j^{(1)}, \quad \theta > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |I_{2,2}| &\leq \sum_{k \in K_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{|g(x) - \alpha_{j,k}^{(1)} g(x_k^+) - \beta_{j,k}^{(1)} g(x_{k+1}^-)| dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \leq \sum_{k \in K_2} A_3 h_k^\beta \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \leq \\ &\leq A_3 h_{\max}^\beta \sum_{k \in K_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \leq A_3 h_{\max}^\beta \left(\int_{-\infty}^{x_{0j}^{(1)} - \theta d_j} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} + \int_{x_{0j}^{(1)} + \theta d_j}^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(1)})^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{2A_3 h_{\max}^\beta}{\theta d_j} \leq \frac{2A_3 (b-a) h_{\max}^\beta}{\theta (b-x_{0j}^{(1)})(x_{0j}^{(1)}-a)}. \end{aligned}$$

Объединяя результаты для I_1 , $I_{2,1}$ и $I_{2,2}$, выводим оценку точности (21) квадратурной формулы (23). Доказательство оценки точности (22) квадратурной формулы (24) проводится аналогично. Теорема доказана.

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим теперь вопрос применимости квадратурных формул (23) и (24) к численному решению интегрального уравнения

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b). \tag{25}$$

Будем считать, что его решение лежит в пространстве функций g , производные которых удовлетворяют условию $g' \in PH_{(a,b)}^*(\alpha)$.

Запишем это уравнение в операторной форме:

$$Ag = f. \tag{26}$$

Пусть задано разбиение отрезка $[a, b]$ на N произвольных частей последовательностью точек $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$, которое будем обозначать как E^{N+1} . Ему соответствует последовательность точек коллокации $E_0^{2N} = (x_{01}^{(1)}, x_{01}^{(2)}, \dots, x_{0N}^{(1)}, x_{0N}^{(2)})$, однозначно определяемых соотношениями (15)–(18). Выберем такие разбиения E^{N+1} , что точки разрыва функции g принадлежат узлам E^{N+1} .

Введём операторы дискретизации в пространствах оригинала и образа оператора A из уравнения (26):

$$T_{2N}g = (g(x_1^+), g(x_2^-), g(x_2^+), \dots, g(x_N^-), g(x_N)^+, g(x_{N+1}^-))^T, \\ T'_{2N}f = (f(x_{01}^{(1)}), f(x_{01}^{(2)}), \dots, f(x_{0N}^{(1)}), f(x_{0N}^{(2)}))^T.$$

Будем искать приближённое решение уравнения (26) в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$A_{2N}\bar{g}_{2N} = T'_{2N}f, \tag{27}$$

где

$$\bar{g}_{2N} = (g_1, \dots, g_{2N})^T, \quad A_{2N} = \{a_{p,q}\}, \quad p, q = \overline{1, 2N}, \\ a_{2j+m-2, 2j+m-2} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2}, \quad a_{2j-1, 2j} = a_{2j, 2j-1} = 0, \\ a_{2j+m-2, k} = \begin{cases} \alpha_{j,l}^{(m)} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2}, & k = 2l-1, \\ \beta_{j,l}^{(m)} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2}, & k = 2l, \end{cases} \quad l \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j\}, \quad j = \overline{1, N}, \quad m = 1, 2,$$

а коэффициенты $\alpha_{j,l}^{(1,2)}$ и $\beta_{j,l}^{(1,2)}$ определяются соотношениями (13), (14).

Обозначим конечномерные пространства, в которых действует оператор A_{2N} , как X_{2N} и Y_{2N} , т.е.

$$X_{2N} \xrightarrow{A_{2N}} Y_{2N}.$$

Введём следующие нормы в пространствах X_{2N} и Y_{2N} :

$$\|\bar{g}_{2N}\|_{X_{2N}} = \max_{i=\overline{1, 2N}} \{|g_i|\}, \\ \|\bar{f}_{2N}\|_{Y_{2N}} = \max_{i=\overline{1, N}} \{|(x_{0i}^{(1)} - a)(b - x_{0i}^{(1)})|f_{2i-1}|, (x_{0i}^{(2)} - a)(b - x_{0i}^{(2)})|f_{2i}|\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 5. Для оператора A_{2N} справедливо неравенство

$$\|A_{2N}\bar{g}_{2N}\|_{Y_{2N}} \geq (b-a)\|\bar{g}_{2N}\|_{X_{2N}}.$$

Доказательство. В первую очередь отметим, что матрица оператора A_{2N} имеет диагональное преобладание. Действительно,

$$a_{2j-2+m,2j-2+m} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2} = \frac{1}{x_{0j}^{(m)}-x_{j+1}} - \frac{1}{x_{0j}^{(m)}-x_j} < 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad m = 1, 2,$$

т.е. диагональные элементы строго отрицательны. Внедиагональные элементы неотрицательны, так как равны нулю или являются интегралом от положительной функции. Кроме того, сумма элементов строки матрицы отрицательна, так как

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_{2j+m-2,k} &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2} + \sum_{l=1, l \neq j}^N \left[\alpha_{j,l}^{(m)} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2} + \beta_{j,l}^{(m)} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2} \right] = \\ &= \sum_{l=1}^N \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2} = \int_a^b \frac{dx}{(x-x_{0j}^{(m)})^2} = \frac{1}{x_{0j}^{(m)}-b} - \frac{1}{x_{0j}^{(m)}-a} = -\frac{b-a}{(x_{0j}^{(m)}-a)(b-x_{0j}^{(m)})} < 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2j+m-2}}^{2N} |a_{2j+m-2,k}| < |a_{2j+m-2,2j+m-2}|, \quad j = \overline{1, N}, \quad m = 1, 2.$$

Выберем теперь такие j^* и m^* , что значение $|g_{2j^*+m^*-2}|$ максимально, тогда

$$\begin{aligned} \|A_{2N}\bar{g}_{2N}\|_{Y_{2N}} &\geq (x_{0j^*}^{(m^*)}-a)(b-x_{0j^*}^{(m^*)}) \left| \sum_{k=1}^N g_k a_{2j^*+m^*-2,k} \right| \geq \\ &\geq (x_{0j^*}^{(m^*)}-a)(b-x_{0j^*}^{(m^*)}) |g_{2j^*+m^*-2}| \left(|a_{2j^*+m^*-2,k}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2j^*+m^*-2}}^{2N} |a_{2j^*+m^*-2,k}| \right) = \\ &= (x_{0j^*}^{(m^*)}-a)(b-x_{0j^*}^{(m^*)}) \|\bar{g}_{2N}\|_{X_{2N}} \left(-\sum_{k=1}^{2N} a_{2j^*+m^*-2,k} \right) = (b-a)\|\bar{g}_{2N}\|_{X_{2N}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Сформулируем теперь утверждение относительно оценки точности приближённого решения уравнения (25).

Теорема 6. Пусть задано точное решение $g(x)$ уравнения (25), производная которого удовлетворяет условию $g' \in PH_{(a,b)}^*(\alpha)$. На отрезке (a, b) задано разбиение E^{N+1} , удовлетворяющее условию (20), тогда справедлива следующая оценка точности приближённого решения, полученного из уравнения (27):

$$\|\bar{g}_{2N} - T_{2N}g\|_{X_{2N}} \leq Ch_{\max}^\beta, \quad \beta = \min\{\alpha, \lambda, \mu\}. \tag{28}$$

Доказательство. По результатам теорем 4, 5 получим

$$\begin{aligned} \|\bar{g}_{2N} - T_{2N}g\|_{X_{2N}} &\leq \frac{\|A_{2N}\bar{g}_{2N} - T_{2N}g\|_{Y_{2N}}}{b-a} = \frac{\|T'_{2N}Ag - T_{2N}g\|_{Y_{2N}}}{b-a} \leq \\ &\leq \frac{1}{b-a} \max_{j=1, N, m=1, 2} \left\{ (x_{0j}^{(m)} - a)(b - x_{0j}^{(m)}) \frac{C_m h_{\max}^\beta}{(x_{0j}^{(m)} - a)(b - x_{0j}^{(m)})} \right\} \leq Ch_{\max}^\beta. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

7. ПРИМЕР РАСЧЁТА

В качестве примера рассмотрим численное решение уравнения (6). Положим, что особая точка правой части $q=0$. Разобьём отрезок интегрирования $[-1, 1]$ так, что отрезок $[-1, 0]$ разбивается на N_1 равных частей, а отрезок $[0, 1]$ — на N_2 равных частей. При $N_1 \neq N_2$ получим нарушение равномерности разбиения в точке особенности $q=0$. Сравнительный анализ приближённого и точного решений приведён на рисунке при $N_1=20$ и $N_2=40$.

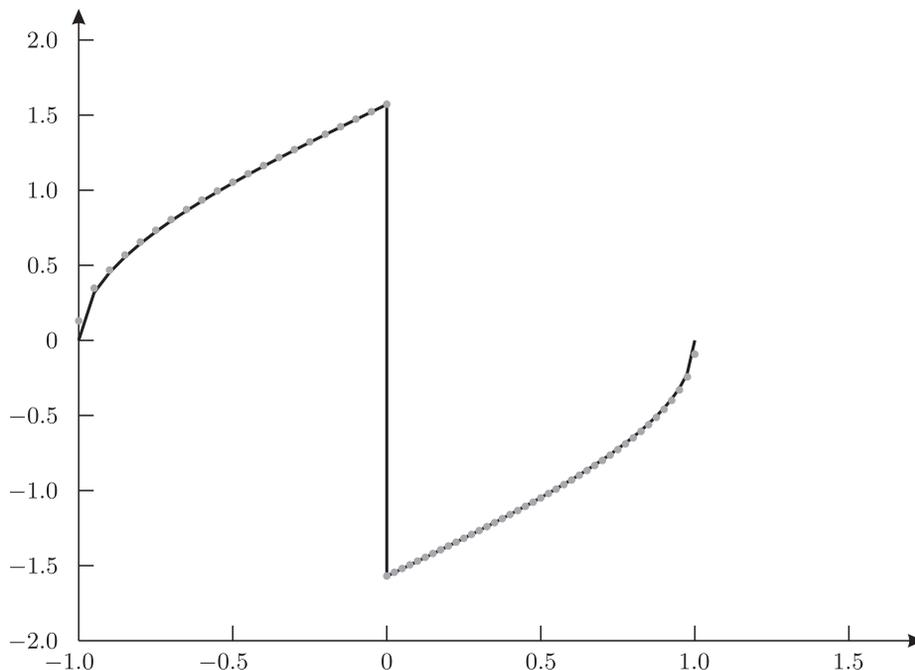


Рисунок. Точное решения уравнения (6) (линия) и приближённые значения, полученные на основе численного решения (точки)

Полученные результаты подтверждают эффективность применения предложенной численной схемы на неравномерных разбиениях в приложении к функциям, имеющим разрыв первого рода.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-10-2021-093.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифанов, И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн / И.К. Лифанов. — М. : ТОО “Янус”, 1995. — 519 с.
2. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Наука, 1968. — 511 с.
3. Дворак, А.В. Модифицированный метод дискретных вихрей для решения сингулярных интегральных уравнений на отрезке / А.В. Дворак, Е.М. Ивенина, С.В. Филимонов // Науч. вестн. Моск. гос. техн. ун-та гражданской авиации. — 2011. — С. 103–106.
4. Сету́ха, А.В. Сходимость численного метода решения гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке с применением кусочно-линейных аппроксимаций на неравномерной сетке / А.В. Сету́ха // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 237–249.
5. Ненашев, А.С. Модификация метода дискретных особенностей для неравномерных сеток в приложении к одномерным интегральным уравнениям с сильной особенностью в ядре / А.С. Ненашев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 8. — С. 1078–1089.
6. Лифанов, И.К. Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн / И.К. Лифанов, А.С. Ненашев // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 121–137.
7. Лифанов И.К. Исследование некоторых вычислительных схем для гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке / И.К. Лифанов, А.С. Ненашев // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 9. — С. 1270–1275.
8. Шилов, Г.Е. Математический анализ. Спец. курс / Г.Е. Шилов. — 2-е изд. — М. : Физматгиз, 1961. — 436 с.

**A TWO-POINT COLLOCATION METHOD FOR THE NUMERICAL SOLUTION
OF ONE-DIMENSIONAL HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS
ON NONUNIFORM PARTITIONS**

© 2024 / A. S. Nenashev

*Sirius University of Science and Technology, Krasnodar region, “Sirius” Federal Territory, Russia
Marchuk Institute of Numerical Mathematics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: nenashev.as@talantiuspeh.ru, nenashev_as@mail.ru*

A quadrature formula has been constructed for calculating the hypersingular integral over a segment, which uses the ends of the segment partition intervals as nodes of piecewise constant interpolation of the integral density, as well as specially selected collocation points. A distinctive feature of the proposed quadrature formula is the ability to calculate the integral of functions that suffer a finite number of discontinuities of the first kind on the integration interval. On the basis of quadrature formula constructed, a numerical scheme for solving the characteristic hypersingular integral equation on non-regular grid is developed. Estimate of the rate of convergence of approximate solutions to exact ones is proved in the class of piecewise Hölder functions.

Keywords: numerical method, hypersingular integral, integral equation, quadrature formula

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under agreement no. 075-10-2021-093.

REFERENCES

1. Lifanov, I.K., *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*, VSP, 1996.
2. Muskhelishvili, N.I., *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular Integral Equations), Moscow: Nauka, 1968.
3. Dvorak, A.V., Ivenina, E.M., and Filimonov, S.V., Modified discrete vortices method for singular integral equation on an interval, *Civil Aviation High Technologies*, 2011, pp. 103–106.

4. Setuha, A.V., Convergence of a numerical method for solving a hypersingular integral equation on a segment with the use of piecewise linear approximations on a nonuniform grid, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 234–247.
5. Nenashev, A.S., Modification of the discrete singularity method for nonuniform grids as applied to one-dimensional integral equations with a strong singularity in the kernel, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 1070–1081.
6. Lifanov, I.K. and Nenashev, A.S., Hypersingular integral equations and the theory of wire antennas, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 1, pp. 126–145.
7. Lifanov, I.K. and Nenashev, A.S., Analysis of some computational schemes for a hypersingular integral equation on an interval, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 9, pp. 1343–1348.
8. Shilov, G.E., *Matematicheskij analiz. Special'nyj kurs* (Mathematical Analysis. Special Course), Moscow: Fizmatgiz, 1961.

УДК 519.64+517.968.23

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ И КОЛЛОКАЦИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ С ГРАНИЦЕЙ

© 2024 г. А. В. Сетуха

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва
e-mail: setuhaav@rambler.ru

Поступила в редакцию 10.04.2024 г., после доработки 10.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Рассмотрено гиперсингулярное интегральное уравнение на выпуклом ограниченном множестве на плоскости с интегралом, понимаемым в смысле конечной части по Адамару. Уравнения такого типа, в частности, возникают при решении краевой задачи Неймана для уравнений Лапласа и Гельмгольца на плоском экране в случае, когда решение ищется в виде потенциала двойного слоя. Для численного решения уравнения применена численная схема, основанная на кусочно-линейной аппроксимации неизвестной функции по треугольной конформной сетке и методе коллокаций. Доказана равномерная сходимость численных решений к точному на сетке при стремлении максимального диаметра ячеек к нулю.

Ключевые слова: численные методы, гиперсингулярный интеграл, интегральное уравнение, квадратурная формула

DOI: 10.31857/S0374064124090096, EDN: JVUBJS

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматривается уравнение

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\varphi(y) dy}{|x-y|^3} + \int_{\Sigma} B(x,y)\varphi(y) dy = f(x), \quad x \in \Sigma^{\text{in}}, \quad (1)$$

где $\Sigma^{\text{in}} = \Sigma \setminus \partial\Sigma$ — внутренность множества $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ (замыкание выпуклой ограниченной области в пространстве \mathbb{R}^2), $\partial\Sigma$ — граница множества Σ (замкнутая кусочно-гладкая кривая класса C^2); $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ — точки на плоскости \mathbb{R}^2 ; $B(x, y)$ — заданная функция, которая либо является непрерывной по Гёльдеру, либо представляется в виде

$$B(x, y) = \frac{\tilde{B}(x, y)}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha < 2, \quad x, y \in \Sigma, \quad x \neq y, \quad (2)$$

$\tilde{B}(x, y)$ — непрерывная по Гёльдеру функция; $f(x)$ — заданная правая часть, которая предполагается непрерывной по Гёльдеру; φ — неизвестная функция. Первый интеграл в (1) понимается в смысле конечной части по Адамару, строгое определение такого интеграла и описание класса функций, в котором ищется решение, будут даны ниже. Уравнение (1)

может рассматриваться как в классе действительных функций, так и в классе комплексных функций действительного аргумента (функции B , f , φ имеют комплексные значения).

В аэродинамике для решения задач об обтекании тел идеальной несжимаемой жидкостью в конце 80-х годов XX в. был развит численный метод вихревых рамок. Позже было показано, что этот метод является методом численного решения поверхностного интегрального уравнения с гиперсингулярным интегралом относительно плотности потенциала двойного слоя с кусочно-постоянной аппроксимацией этой плотности (см., например, [1, с. 466, 473]). В случае плоского экрана Σ данное уравнение имеет вид (1) с $B=0$ (характеристическое уравнение), если поместить поверхность Σ на координатную плоскость Ox_1x_2 и рассматривать её как множество на плоскости. Для такого случая в статье [2] доказана сходимость метода вихревых рамок в предположении, что множество Σ аппроксимируется системой одинаковых прямоугольных ячеек (см. также [3, § 10.5]).

Упомянутый метод вихревых рамок может быть обобщён на задачи акустики о моделировании рассеяния заданного звукового поля на жёстком плоском экране [4–6], здесь возникает краевая задача Неймана для уравнения Гельмгольца. В случае плоского экрана Σ , если искать решение такой задачи в виде потенциала двойного слоя, возникает уравнение (1) с ядром B , имеющим особенность вида (2) с показателем $\alpha=1$ [7]. В статье [7] была доказана сходимость численного метода решения уравнения (1), основанная на кусочно-постоянной аппроксимации неизвестной функции, опять-таки на регулярной прямоугольной сетке.

Несмотря на успешное практическое применение описанного метода вихревых рамок в аэродинамике на достаточно произвольных расчётных сетках, получить его обоснование для таких сеток не удаётся. Вместе с тем при решении практических задач необходимо использовать универсальные расчётные сетки, к которым, в частности, относятся треугольные конформные сетки. В настоящее время хорошо отработаны методы аппроксимации такими сетками достаточно произвольных поверхностей. В связи с этим автором (совместно с Семеновым А.В.) в работах [8, 9] была построена численная схема решения гиперсингулярных граничных интегральных уравнений описанного типа на основе кусочно-линейной аппроксимации неизвестной функции на треугольной сетке. В [8] рассмотрена с теоретических позиций численная схема решения граничного интегрального уравнения с гиперсингулярным интегралом относительно плотности потенциала двойного слоя, возникающего при решении краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа в области, ограниченной гладкой замкнутой поверхностью, получено доказательство сходимости численных решений на сетке. В [9] эта же численная схема рассмотрена с точки зрения практической реализации применительно к краевой задаче Неймана как в области, ограниченной гладкой замкнутой поверхностью, так и на экране. При этом получены аналитические формулы для коэффициентов матрицы возникающей системы линейных уравнений. В частном случае плоского экрана построенная схема является численной схемой решения характеристического уравнения (1) (с $B=0$).

В настоящей статье доказываются сходимость такой численной схемы решения уравнения (1), основанной на кусочно-линейной аппроксимации неизвестной функции, при этом схема обобщена на случай полного уравнения (1), а также равномерная сходимость численных решений к точному на сетке: сначала для характеристического, а затем и для полного уравнений вида (1).

Отметим, что рассматриваемая численная схема формально выписывается и для плоской, и для неплоской поверхностей. Доказательство сходимости численной схемы для случая плоского экрана существенно отличается от ранее полученного в [8] доказательства сходимости численной схемы на замкнутой поверхности. В случае гладкой замкнутой поверхности основная сложность состояла в том, что поверхность неплоская и треугольные ячейки, аппроксимирующие поверхность, не лежат точно на самой поверхности. В рассматриваемом в

настоящей статье случае плоского экрана основная сложность состоит в учёте особенностей поведения точного решения вблизи края экрана (границы множества Σ , если его рассматривать как множество на плоскости) и анализе аппроксимации гиперсингулярного интеграла вблизи этого края.

2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

Пусть \mathbb{Z}_+^n — множество элементов вида $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим $D^\alpha f(x) = \partial^{|\alpha|} f(x) / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, где $f(x)$ — функция с вещественными или комплексными значениями, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. При этом будем считать, что $D^\alpha f \equiv f$ при $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$.

Пусть G — замыкание открытого множества в \mathbb{R}^n . Обозначим через $C[G]$ нормированное пространство действительных функций $f(x)$, определённых и непрерывных на множестве G , и через $C_C[G]$ нормированное пространство комплексных функций $f(x)$, определённых и непрерывных на множестве G , с нормой

$$\|f\|_{0,G} = \max_{x \in G} |f(x)|.$$

Будем обозначать как $H^\mu(G)$ (где $\mu \in (0, 1]$, G — открытое множество в \mathbb{R}^n или замыкание открытого множества в \mathbb{R}^n) нормированное пространство действительных функций $f(x)$, определённых на множестве G , для которых ограничено определяющее норму выражение

$$\|f\|_{\mu,G} = \sup_{x \in G} |f(x)| + \sup_{x,y \in G, x \neq y} |f(x) - f(y)| / |x - y|^\mu, \quad (3)$$

и через $H^{1,\mu}(G)$ (где $\mu \in (0, 1]$) нормированное пространство действительных функций $f(x)$, для которых ограничена норма

$$\|f\|_{1,\mu,G} = \sup_{x \in G} |f(x)| + \sum_{i=1}^n \|\partial f / \partial x_i\|_{\mu,G} \quad (4)$$

(в случае когда G — замыкание открытого множества, считаем, что частные производные по непрерывности доопределяются на границе этого множества).

Пусть также $H_C^\mu(G)$ и $H_C^{1,\mu}(G)$ — нормированные пространства комплексных функций $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \quad x \in G, \quad (5)$$

где f_1 и f_2 принадлежат пространству $H^\mu(G)$ или $H^{1,\mu}(G)$ соответственно, а норма определяется выражениями (3) и (4) соответственно.

Пусть $\Sigma \in \mathbb{R}^2$ — множество, на котором рассматривается уравнение (1). Обозначим $A = A(\Sigma)$ — линейное пространство действительных функций, определённых на множестве Σ , таких, что с некоторым $\mu \in (0, 1]$ выполнены условия: $f \in H^\mu(\Sigma)$, $f(x) = 0$ при $x \in \partial\Sigma$; для сужения функции f на любое замкнутое множество $\Sigma_1 \subset \Sigma^{\text{in}}$ выполнено условие $f \in H^{1,\mu}(\Sigma_1)$.

Пусть также $A_C = A_C(\Sigma)$ — множество комплексных функций вида (5), где $f_1, f_2 \in A(\Sigma)$.

Для функций $\varphi \in A_C$ определён интеграл в смысле конечного значения по Адамару

$$\int_{\Sigma} \frac{\varphi(y) dy}{|x-y|^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\Sigma \setminus U(x,\varepsilon)} \frac{\varphi(y) dy}{|x-y|^3} - \frac{2\pi\varphi(x)}{\varepsilon} \right), \quad (6)$$

где $U(x, \varepsilon)$ — окрестность точки x радиуса ε (открытый круг радиуса ε с центром в точке x на плоскости) [3, с. 131; 10].

Ниже рассматривается уравнение (1) для случая, когда функция $B(x, y)$ представляется в виде (2), где $\tilde{B} \in H_C^\mu(\Sigma \times \Sigma)$, $f \in H_C^\mu(G)$, $\mu \in (0, 1)$, и ищется решение $\varphi \in A_C(\nu, \Sigma)$ с некоторым $\nu \in (0, 1]$.

Применительно к полному уравнению (1) в основном будем рассматривать случай уравнения в классе комплексных функций, понимая, что все полученные результаты переносятся на случай действительных функций, если их рассматривать как комплексные функции с нулевой мнимой частью.

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РАЗРЕШИМОСТЬ

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\int_{\Sigma} \frac{\varphi(y) dy}{|x-y|^3} = f(x), \quad x \in \Sigma^{\text{in}}, \quad (7)$$

в классе действительных функций. Предполагаем, что $f \in H^\mu(\Sigma)$, $\mu \in (0, 1]$, — заданная правая часть, φ — неизвестная функция, которая ищется в классе $\varphi \in A$.

В статье [2] доказано, что уравнение (7) имеет единственное решение $\varphi \in A$, представимое в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi_1 \in H^{1,\mu}(\Sigma), \quad \varphi_2 \in C^\infty(\Sigma^{\text{in}}), \quad (8)$$

при этом выполнены оценки

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq C \|f\|_{\mu, \Sigma} \rho(x, \partial\Sigma)^{1/2}, \quad \|\varphi_1\|_{1,\mu, \Sigma} \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma}, \\ |D^\alpha \varphi_2(x)| &\leq C(\alpha) \|f\|_{\mu, \Sigma} \rho(x, \partial\Sigma)^{1/2-|\alpha|}, \quad \alpha \in Z_+^2, \quad |\alpha| \geq 1, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\rho(x, \partial\Sigma)$ — расстояние от точки $x \in \Sigma^{\text{in}}$ до края множества Σ , C и $C(\alpha)$ — некоторые константы, зависящие от множества Σ и значения μ .

Заметим, что при выполнении условий (8) справедливы условие $\varphi \in H^{1/2}(\Sigma)$ и оценка

$$\|\varphi\|_{1/2, \Sigma} \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma} \quad (10)$$

с некоторой константой C , зависящей от μ и Σ .

Отметим также, что уравнение (7) является частным случаем более общего уравнения вида

$$\int_{\Sigma} \varphi(y) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma, \quad F(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad (11)$$

где Σ — простая гладкая поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 , которая может быть замкнутой или разомкнутой с краем $\partial\Sigma$ (замкнутой кусочно-гладкой кривой); $d\sigma_y$ — элемент площади; $\vec{n}(x)$ — единичная нормаль к поверхности Σ в точке x ; $\partial/\partial n_x$ — производная по направлению вектора $\vec{n}(x)$, которая вычисляется как частная производная функции, зависящей от переменной x при фиксированном значении переменной y ; интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [3, § 4.1; 10; 11, с. 162, 170]. Такое уравнение, в частности, возникает при применении метода граничных интегральных уравнений к решению краевой задачи Неймана в области вне поверхности Σ и при условии, что решение ищется в виде потенциала двойного слоя.

Если Σ — плоская поверхность, лежащая в координатной плоскости Ox_1x_2 , то справедлива формула

$$\int_{\Sigma} \varphi(y) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} dy = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\varphi(y) dy}{|x-y|^3}, \quad x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma,$$

вытекающая из легко проверяемого равенства

$$\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|^3}, \quad x, y \in Ox_1x_2, \quad x \neq y,$$

поэтому уравнение (11) в случае такой плоской поверхности принимает вид (7).

Уравнение (11) было, в частности, рассмотрено в работах [8, 9], где для его численного решения предложена схема на основе триангуляции поверхности Σ , кусочно-линейной аппроксимации неизвестной функции и применении принципа коллокации. При этом в [7] получено обоснование сходимости построенной численной схемы для случая замкнутой гладкой поверхности Σ , а в [8] рассмотрены вопросы конструктивной реализации построенной численной схемы для случаев замкнутой или разомкнутой поверхности Σ .

В настоящей статье даётся обоснование сходимости указанной численной схемы для случая плоской поверхности Σ , удовлетворяющей сформулированным в начале статьи требованиям, при этом поверхность Σ рассматривается как множество на плоскости \mathbb{R}^2 .

4. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Приведём численную схему решения характеристического уравнения (7). Фактически это численная схема, построенная в работе [9] для уравнения (11), но записанная применительно к уравнению (7), рассматриваемому на множестве $\Sigma \in \mathbb{R}^2$.

Множество Σ аппроксимируем системой треугольных ячеек σ_i (считаем, что каждая ячейка σ_i — замкнутое множество на плоскости), $i = \overline{1, M}$. Обозначим через $\tilde{\Sigma}$ объединение всех ячеек σ_i . Предполагается, что треугольники σ_i , $i = \overline{1, M}$, образуют на множестве $\tilde{\Sigma}$ конформную сетку. Последнее требование означает, что пересечение любых двух различных треугольных ячеек есть либо отрезок, являющийся целой стороной в каждом из этих треугольников, либо точка, являющаяся их общей вершиной, либо пустое множество. Пусть h — диаметр разбиения.

Предположим, что рассматриваемое нами разбиение удовлетворяет следующим условиям с некоторыми константами C_Σ и $\theta > 0$:

i1) $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$, и при этом если $x \in \Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$, то $\rho(x, \partial\Sigma) \leq C_\Sigma h$, а площадь множества $\Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$ превосходит величины $C_\Sigma h^2$;

i2) если a — одна из сторон одной из ячеек σ_i и α — один из углов одной из ячеек σ_i , то

$$a \geq \theta h, \quad \sin \alpha \geq \theta. \quad (12)$$

Обозначим через $X = \{x_j \in \Sigma, j = 1, \dots, N\}$ множество всех различных вершин треугольников σ_i , не лежащих на границе множества $\partial\tilde{\Sigma}$. Будем называть такие вершины *внутренними*.

Сформируем для каждой внутренней вершины $x_j \in X$ множество треугольных ячеек σ_k^j таких, что $x_j \in \sigma_k^j$, $k = \overline{1, K_j}$, и пусть $\tilde{\Sigma}_j = \bigcup_{k=1}^{K_j} \sigma_k^j$ ($\tilde{\Sigma}_j$ — поверхность, объединяющая все ячейки, для которых точка x_j является одной из вершин).

Построим на приближённой поверхности $\tilde{\Sigma}$ систему базисных функций e_j , $j = \overline{1, N}$, пирамидального вида, каждая из которых является линейной функцией на каждом из треугольников σ_m , $m = \overline{1, M}$, и удовлетворяет условию

$$e_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}.$$

На каждом треугольнике $\sigma_k^j \in \tilde{\Sigma}_j$, $k = \overline{1, K_j}$, функция $e_j(x)$ принимает значение, равное единице, в точке x_j и значение, равное нулю, в двух других вершинах. На ячейках, не лежащих на поверхности $\tilde{\Sigma}_j$, выполнено равенство $e_j(x) \equiv 0$.

Пусть $\varphi \in A$ — некоторая функция, заданная на множестве Σ и пусть

$$(\mathbf{A}\varphi)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \varphi(y) \frac{1}{|x-y|^3} d\sigma_y, \quad x \in \Sigma^{\text{in}}. \tag{13}$$

Рассмотрим на множестве $\tilde{\Sigma}$ линейную на каждой из ячеек аппроксимации σ_i , $i = \overline{1, M}$, функцию

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^N \varphi(x_j) e_j(x), \quad x \in \tilde{\Sigma}. \tag{14}$$

Функция (14) является непрерывной на множестве $\tilde{\Sigma}$ и удовлетворяет условию $\tilde{\varphi}(x_i) = \varphi(x_i)$, $i = \overline{1, N}$. Далее запишем квадратурную формулу для значений интеграла $\mathbf{A}\varphi$ в точках $x_i \in X$, основанную на замене поверхности интегрирования Σ на поверхность $\tilde{\Sigma}$ и функции $\varphi(x)$ на функцию $\tilde{\varphi}(x)$ в подынтегральном выражении.

Поскольку функция $\tilde{\varphi}(x)$ не дифференцируема в точках x_i , простой такой замены недостаточно. Для каждой точки $x_i \in X$ при построении квадратурной формулы для значения интеграла в этой точке строится её окрестность $U_\varepsilon(x_i)$ радиуса $\varepsilon > 0$ и в этой окрестности при вычислении интеграла (13) функция $\tilde{\varphi}$ заменяется на постоянное значение $\varphi(x_i)$. Параметр ε выбирается так, чтобы выполнялось с некоторой константой C_ε условие

і3) справедлива оценка $h < C_\varepsilon \varepsilon$, при этом для каждого $i = \overline{1, N}$ имеет место соотношение $U_\varepsilon(x_i) \cap \sigma_j = \emptyset$, если точка x_i не является вершиной ячейки σ_j .

Отметим, что при выполнении условия і3) для каждого внутреннего узла x_i , $i = \overline{1, N}$, выполнено условие $U_\varepsilon(x_i) \subset \tilde{\Sigma}$.

Обозначим

$$J_{\varepsilon,i}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{U_\varepsilon(x_i)} \frac{1}{|x-y|^3} dy, \quad i = \overline{1, N}.$$

Заметим, что если рассматривать множество Σ как плоскую поверхность в пространстве с краем, помещённую в трёхмерное пространство, то для величины $J_{\varepsilon,i}(x)$ справедлива формула (закон Био–Савара [1, 10])

$$J_\varepsilon(x) = \vec{n}(x_i) \int_{S_\varepsilon(x_i)} \vec{\tau}(s) \times \vec{V}(x_i - y) ds, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S_\varepsilon(x_i), \tag{15}$$

где $S_\varepsilon(x_i)$ — окружность с центром в точке x_i радиуса ε , $\vec{\tau}(s)$ — положительный орт вектора касательной на контуре $S_\varepsilon(x_i)$ (направление обхода против часовой стрелки), $y = y(s)$, s — натуральный параметр, $\vec{n}(x_i)$ — вектор нормали к поверхности Σ в точке x_i ,

$$\vec{V}(x - y) = \text{grad}_x F(x - y) = \frac{y - x}{4\pi|x - y|^3}.$$

Тогда значение $J_{\varepsilon,i}(x_i)$ определено выражением (15), причём функция $J_{\varepsilon,i}$ является бесконечно дифференцируемой в точке $x = x_i$.

В результате получим следующую квадратурную формулу:

$$\mathbf{A}(x_i) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \varphi(x_j) \int_{\tilde{\Sigma} \setminus U_\varepsilon(x_i)} e_j(y) \frac{1}{|x-y|^3} d\sigma_y + \varphi(x_i) J_{\varepsilon,i}(x_i). \tag{16}$$

Записывая интегральное уравнение (7) в узлах коллокации $x_i \in X$ и заменяя интегральный оператор его приближением по формуле (16), получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных φ_i , аппроксимирующих значения функции φ в точках x_i , $i = \overline{1, N}$:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j = f_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (17)$$

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + \delta_i^j J_{\varepsilon, i}(x_i), \quad a_{ij}^0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma \setminus U_\varepsilon(x_i)} e_j(y) \frac{1}{|x-y|^3} d\sigma_y, \quad \delta_i^i = 1, \quad \delta_i^j = 0, \quad i \neq j,$$

$$f_i = f(x_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Вопрос о конструктивном вычислении коэффициентов системы (17) был рассмотрен в работе [9], где для коэффициентов a_{ij} были получены аналитические формулы.

В настоящей статье рассмотрим вопрос о сходимости на сетке решений системы (17) к решению уравнения (7).

5. ПОГРЕШНОСТЬ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ. ПОГРЕШНОСТЬ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Обозначим как $A' = A'(\mu, C_A)$, где $\mu \in (0, 1]$ и C_A — некоторые константы, множество функций $\varphi(x)$, определённых при $x \in \Sigma$, которые представляются в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi_1 \in H^{1, \mu}(\Sigma), \quad \varphi_2 \in C^2(\Sigma^{\text{in}}), \quad (18)$$

выполнены оценки

$$|\varphi(x)| \leq C_A \rho(x, \partial\Sigma)^{1/2}, \quad \|\varphi_1\|_{1, \mu, \Sigma} \leq C_A,$$

$$|\varphi_2(x)| \leq C_A, \quad |D^\alpha \varphi_2(x)| \leq C_A \rho(x, \partial\Sigma)^{1/2 - |\alpha|}, \quad \alpha \in Z_+^2, \quad |\alpha| = 1, 2, \quad x \in \Sigma^{\text{in}}. \quad (19)$$

Заметим, что если функция φ удовлетворяет условиям (8) и первой из оценок (9), то она лежит в классе A . Если функция φ является решением рассматриваемого уравнения (7) в классе A , то в силу условий (8) и оценок (9) выполнено условие $\varphi \in A'(\mu, C_A)$ с некоторыми $\mu \in (0, 1)$ и C_A .

Пусть $\varphi \in A'(\mu, C_A)$, $\mu \in (0, 1)$. Рассмотрим интегралы

$$I_i = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\varphi(y) dy}{|x_i - y|^3}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (20)$$

и их аппроксимации

$$\tilde{I}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi(x_j), \quad i = \overline{1, N}, \quad (21)$$

где x_i — внутренние узлы, a_{ij} — коэффициенты системы уравнений (17).

Получим оценку для разности

$$\Delta = I_i - \tilde{I}_i, \quad (22)$$

которую можно представить в виде

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \quad (23)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)}{|x_i - y|^3} dy, \quad \sigma_j^\varepsilon(x_i) = \sigma_j \setminus U_\varepsilon(x_i),$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{U_\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_i)}{|x_i - y|^3} dy, \quad \Delta_3 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma \setminus \tilde{\Sigma}} \frac{\varphi(y)}{|x_i - y|^3} dy,$$

$\tilde{\varphi}(y)$ — аппроксимация функции φ по формуле (14).

Лемма 1. Пусть $\sigma \in \mathbb{R}^2$ — выпуклое множество, $\varphi \in H^{1,\mu}(\sigma)$, $\|\varphi\|_{1,\mu,\sigma} = M$, $\mu \in (0, 1]$. Тогда для любых $x, y \in \sigma$ выполнена оценка

$$|\varphi(y) - \varphi(x) - (\text{grad } \varphi(x), x - y)| \leq M|x - y|^{1+\mu}. \quad (24)$$

Доказательство. Для доказательства оценки (24) запишем соотношение

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int_0^1 \psi'(t) dt, \quad \psi(t) = \varphi(z(t)), \quad z(t) = x + t(y - x).$$

Отсюда

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \left(\int_0^1 \text{grad } \varphi(z(t)) dt, y - x \right).$$

Поскольку $|z(t) - x| \leq |x - y|$ при $t \in [0, 1]$, имеем оценку (24). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть σ — треугольник с вершинами в точках a, b, c , для которого выполнены оценки (12) с некоторым $\theta > 0$, и пусть h — диаметр треугольника σ . Если $\varphi \in H^{1,\mu}(\sigma)$, $\|\varphi\|_{1,\mu,\sigma} = M$, $\mu \in (0, 1]$, и $\tilde{\varphi}(x)$ — линейная функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ при $x = a, b, c$, то в каждой точке $x \in \sigma$ выполнены оценки

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq CMh^{1+\mu}, \quad |\text{grad } \varphi(x) - \text{grad } \tilde{\varphi}(x)| \leq CMh^\mu, \quad (25)$$

где C — некоторая константа, зависящая только от θ и μ .

Доказательство. Через C будем обозначать некоторые константы, зависящие от θ и μ , причём в различных оценках значения констант могут быть различными.

Функция $\tilde{\varphi}(x)$ представима в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(a) + (\text{grad } \tilde{\varphi}, x - a),$$

где $\text{grad } \tilde{\varphi}$ — неизвестный постоянный вектор. Вектор $\vec{g} = \text{grad } \tilde{\varphi}$ можно найти из системы уравнений

$$(\vec{g}, b - a) = \beta, \quad (\vec{g}, c - a) = \gamma \quad (26)$$

с $\beta = \varphi(b) - \varphi(a)$, $\gamma = \varphi(c) - \varphi(a)$.

Далее, вектор

$$\vec{g} = \text{grad } \tilde{\varphi} - \text{grad } \varphi(a) \quad (27)$$

является решением системы (26) с

$$\beta = \varphi(b) - \varphi(a) - (\text{grad } \varphi(a), b - a), \quad \gamma = \varphi(c) - \varphi(a) - (\text{grad } \varphi(a), c - a),$$

и в силу оценки (24) имеем

$$|\beta| \leq Mh^{1+\mu}, \quad |\gamma| \leq Mh^{1+\mu}. \tag{28}$$

Получим оценку для модуля вектора \vec{g} — решения системы (26). Вектор \vec{g} ищем в виде $\vec{g} = g_1\vec{\tau}_1 + g_2\vec{\tau}_2$, где $\vec{\tau}_1 = (b-a)/|b-a|$, $\vec{\tau}_2$ — единичный вектор, ортогональный вектору $\vec{\tau}_1$. Тогда

$$g_1 = \frac{\beta}{|b-a|}, \quad g_2 = \frac{\gamma - g_1(\vec{\tau}_1, c-a)}{(\vec{\tau}_2, c-a)}.$$

Заметим, что $|c-a| \leq h$, и из оценок (12) следуют неравенства $|b-a| \geq \theta h$, $|(\vec{\tau}_2, c-a)| \geq \theta^2 h$. Тогда

$$|\vec{g}| \leq C(|\beta| + |\alpha|)/h.$$

Из оценок (28) для случая, когда вектор \vec{g} имеет вид (27), получаем

$$|\text{grad } \tilde{\varphi} - \text{grad } \varphi(a)| \leq CMh^\mu.$$

Теперь из условия $\varphi \in H^{1,\mu}(\sigma)$ и неравенства (24) получаем оценки (25). Лемма доказана.

Далее в этом пункте будем обозначать как C некоторые константы, зависящие только от множества Σ , параметров $\theta, C_\Sigma, C_\varepsilon$ из условий i1)–i3) и параметра $\mu \in (0, 1)$, причём в различных оценках значения констант C могут быть различными.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in A'(\mu, C_A)$, $\mu \in (0, 1)$, x_i — один из внутренних узлов. Тогда интеграл I_i , определяемый формулой (20), и его аппроксимация \tilde{I}_i , определяемая формулой (21), связаны оценкой

$$|I_i - \tilde{I}_i| \leq C \frac{C_A(h^{1/2} + h^\mu)}{\rho(x_i, \partial\Sigma)}, \tag{29}$$

где C — некоторая константа, зависящая только от параметра μ и параметров $\theta, C_\Sigma, C_\varepsilon$ из условий i1)–i3).

Доказательство. Сначала заметим, что если $\varphi \in A'(\mu, C_A)$, то

$$\varphi \in H^{1/2}(\Sigma), \quad \|\varphi\|_{1/2} \leq CC_A. \tag{30}$$

Действительно, пусть $x, y \in \Sigma$, причём $\rho(x, \partial\Sigma) \leq \rho(y, \partial\Sigma)$. Если $\rho(x, \partial\Sigma) \leq 2|x-y|$, то $\rho(y, \partial\Sigma) \leq 3|x-y|$, и тогда

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x)| + |\varphi(y)| \leq CC_A \rho(y, \partial\Sigma)^{1/2} \leq CC_A |x-y|^{1/2}.$$

Если $\rho(x, \partial\Sigma) \geq 2|x-y|$, то для любой точки z , лежащей на отрезке, соединяющем точки x и y , выполнено условие $\rho(z, \partial\Sigma) \geq |x-y|$, и тогда

$$|\text{grad } \varphi(z)| \leq C_A \rho(y, \partial\Sigma)^{-1/2} \leq C_A |x-y|^{-1/2},$$

а значит, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq CC_A |x-y|^{1/2}$. Тем самым условия (30) доказаны.

Теперь докажем оценку (29), представив разность (22) в виде (23) и оценив по отдельности слагаемые $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Пусть $R = \rho(x_i, \Sigma)$. Оценим разность Δ_1 . Если $R > 4h$, то разность Δ_1 представим в виде

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12},$$

$$\Delta_{11} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j: |x_i - x_j| < R/2} \int_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)}{|x_i - y|^3} dy, \quad \Delta_{12} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j: |x_i - x_j| \geq R/2} \int_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)}{|x_i - y|^3} dy.$$

Если $|x_i - x_j| < R/2$, то при $y \in \sigma_j$ выполнены оценки

$$|x_i - y| < R/2 + h \quad \text{и} \quad \rho(y, \partial\Sigma) \geq R/3.$$

Пусть φ_1 и φ_2 — слагаемые из представления функции φ в виде (18). Тогда сужения этих функций на ячейку σ_j удовлетворяют условиям

$$\varphi_1 \in H^{1,\mu}(\sigma_j), \quad \|\varphi_1\|_{1,\mu,\sigma_j} \leq C_A, \quad \varphi_2 \in H^{1,1}(\sigma_j), \quad \|\varphi_2\|_{1,1,\sigma_j} \leq CC_A R^{-3/2},$$

и из леммы 2 следует, что

$$|\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)| \leq CC_A(h^{1+\mu} + h^2 R^{-3/2}) \quad \text{при} \quad y \in \sigma_j.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_{11}| &= CC_A(h^{1+\mu} + h^2 R^{-3/2}) \sum_{j: |x_i - x_j| < R/2} \int_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{1}{|x_i - y|^3} dy \leq \\ &\leq CC_A(h^{1+\mu} + h^2 R^{-3/2}) \int_{y: \varepsilon < |y - x| < R} \frac{1}{|x_i - y|^3} dy \leq CC_A(h^{1+\mu} + h^2 R^{-3/2}) \varepsilon^{-1}, \end{aligned}$$

и с учётом условия i3) получаем

$$|\Delta_{11}| = CC_A(h^\mu + h^{1/2})R^{-1}.$$

Если $|x_i - x_j| \geq R/2$, то в силу условия (30) можем записать

$$|\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)| \leq CC_A h^{1/2} \quad \text{при} \quad y \in \sigma_j,$$

и для суммы Δ_{12} справедливы оценки

$$|\Delta_{12}| = CC_A h^{1/2} \sum_{j: |x_i - x_j| \geq R/2} \int_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{1}{|x_i - y|^3} dy \leq CC_A h^{1/2} \int_{y: |y - x_i| \geq R/3} \frac{1}{|x_i - y|^3} dy \leq CC_A h^{1/2} R^{-1}.$$

Тогда

$$|\Delta_1| \leq CC_A(h^{1/2} + h^\mu)R^{-1}. \quad (31)$$

Если $R \leq 4h$, то при оценке суммы Δ_1 воспользуемся оценкой, вытекающей из (30):

$$|\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)| \leq CC_A h^{1/2} \quad \text{при} \quad y \in \tilde{\Sigma}.$$

Тогда

$$|\Delta_1| = CC_A h^{1/2} \sum_{j=1}^N \int_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{1}{|x_i - y|^3} dy \leq CC_A h^{1/2} \int_{y: |y - x_i| > \varepsilon} \frac{1}{|x_i - y|^3} dy \leq CC_A h^{1/2} \varepsilon^{-1}$$

и оценка (31) также выполнена с учётом условия i3).

Рассмотрим величину Δ_2 . Если $R > 4h$, то в силу равенства

$$\int_{z: |z| < r} \frac{z}{|z|^3} dz = 0, \quad (32)$$

выполненного для любого $r > 0$, где интеграл понимается в смысле главного значения, имеем

$$\Delta_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{U_\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_i) - (\text{grad } \varphi(x_i), y - x_i)}{|x_i - y|^3} dy.$$

Далее, используя лемму 1 и оценки (19), можем записать

$$|\varphi(y) - \varphi(x_i) - (\text{grad } \varphi(x_i), y - x_i)| \leq CC_A(|y - x_i|^{1+\mu} + |y - x_i|^2 R^{-3/2}). \tag{33}$$

Тогда

$$|\Delta_2| \leq CC_A \int_{U_\varepsilon(x_i)} (|y - x_i|^{\mu-2} + |y - x_i|^{-1} R^{-3/2}) dy,$$

откуда

$$|\Delta_2| \leq CC_A(h^{1/2} + h^\mu)R^{-1}. \tag{34}$$

Если $R \leq 4h$, то представим величину Δ_2 в виде

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22},$$

$$\Delta_{21} = \frac{1}{4\pi} \int_{y: |y-x_i| < \varepsilon/2} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_i) - (\text{grad } \varphi(x_i), y - x_i)}{|x_i - y|^3} dy, \quad \Delta_{22} = \frac{1}{4\pi} \int_{y: \varepsilon/2 < |y-x_i| < \varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_i)}{|x_i - y|^3} dy,$$

здесь использовано соотношение (32).

Для оценки величины Δ_{21} заметим, что при $|y - x_i| < \varepsilon/2$ выполнено условие $\rho(y, \partial\Sigma) > \theta h/2$. Тогда для сужений на множество $\sigma = U_{\varepsilon/2}(x_i)$ функций φ_1 и φ_2 (слагаемых из представления функции φ в виде (18)) выполнены оценки

$$\|\varphi\|_{1,\mu,\sigma} \leq C_A, \quad \|\varphi\|_{1,1,\sigma} \leq CC_A R^{-3/2}.$$

Отсюда следует, что (в силу леммы 1) при $|y - x_i| < \varepsilon/2$ выполнено неравенство (33) и справедлива оценка, аналогичная оценке (34):

$$|\Delta_{21}| \leq CC_A(h^{1/2} + h^\mu)R^{-1}.$$

Для оценки величины Δ_{22} заметим, что $|\varphi(x_i)| \leq CC_A h^{1/2}$, и если точка y удовлетворяет условию $\varepsilon/2 < |y - x_i| < \varepsilon$, то $|\varphi(y)| \leq CC_A h^{1/2}$. Тогда

$$|\Delta_{22}| = CC_A h^{1/2} \int_{y: \varepsilon/2 < |y-x_i| < \varepsilon} \frac{1}{|x_i - y|^3} dy \leq CC_A h^{-1/2} \leq CC_A h^{1/2} R^{-1}.$$

Опять видим, что оценка (34) выполнена.

Наконец, оценим величину Δ_3 . В силу условий i1)–i3) имеем

$$|\varphi(y)| \leq h^{1/2}, \quad R(x_i) \leq C|y - x_i| \quad \text{при } y \in \Sigma \setminus \tilde{\Sigma}, \quad \int_{\Sigma \setminus \tilde{\Sigma}} 1 dy \leq Ch^2.$$

Тогда

$$|\Delta_3| \leq CC_A h^{1/2} R^{-3} \int_{\Sigma \setminus \tilde{\Sigma}} 1 dy \leq CC_A h^{2+1/2} R^{-3} \leq CC_A h^{1/2} R^{-1}.$$

Собрав полученные оценки, завершим доказательство теоремы.

Перейдём к доказательству существования обратной матрицы системы (17) и оценке её нормы. Сначала получим ключевые оценки для элементов самой матрицы системы (17). Сразу заметим, что при $i \neq j$ интеграл в выражениях для коэффициентов a_{ij} системы (17) является обычным интегралом от неотрицательной функции и

$$a_{ij} > 0 \quad \text{при} \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j. \tag{35}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\varphi}(y) = \sum_{i=1}^N c_j e_j(y), \quad c_j = 1, \quad j = \overline{1, N}.$$

Пусть x_i — одна из внутренних вершин сетки. Обозначим

$$R_i = \rho(x_i, \partial\Sigma). \tag{36}$$

Возьмём точку $z = z(x_i) \in \partial\Sigma$, являющуюся ближайшей к точке x_i точкой на кривой $\partial\Sigma$ (такая точка может быть не единственной, выберем одну из них). Построим на рассматриваемой нами плоскости полуплоскость $\pi(x_i)$ так, что край этой полуплоскости есть прямая, ортогональная отрезку, соединяющему точки x_i и z , и точка x_i не лежит в этой полуплоскости. При этом полуплоскость $\pi(x_i)$ не имеет пересечения с множеством $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, так как множество Σ выпуклое. Тогда можем записать

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{\Sigma} \setminus U_\varepsilon(x_i)} \frac{\tilde{\varphi}(y) dy}{|y - x_i|^3} + \frac{1}{4\pi} \int_{U_\varepsilon(x_i)} \frac{dy}{|y - x_i|^3} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{dy}{|y - x_i|^3} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\pi(x_i)} \frac{dy}{|y - x_i|^3}.$$

Для оценки последнего интеграла заметим, что непосредственно из формулы (6) следует

$$\int_{R^2} \frac{dz}{|z|^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{z: |z| > \varepsilon} \frac{dz}{|z|^3} - \frac{2\pi}{\varepsilon} \right) = 0,$$

тогда

$$\int_{\pi(x_i)} \frac{dy}{|y - x_i|^3} = - \int_{R^2 \setminus \pi(x_i)} \frac{dy}{|y - x_i|^3}.$$

Построим декартову систему координат $O\xi_1\xi_2$ с центром в точке x_i и осью $O\xi_1$, направленной в сторону точки $z = z(x_i)$. Тогда

$$\int_{R^2 \setminus \pi(x_i)} \frac{1 dy}{|y - x_i|^3} = \int_{R_i}^{\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}} \geq 2 \int_{R_i}^{\infty} d\xi_1 \int_0^{\infty} \frac{d\xi_2}{(\xi_1 + \xi_2)^3} = \frac{1}{R_i}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \leq -\frac{1}{4\pi R_i}. \tag{37}$$

Отсюда, в силу соотношений (35), во-первых, имеем

$$a_{ii} < 0 \quad \text{при} \quad i = \overline{1, N},$$

во-вторых, оценку (37) можно записать в виде

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1, \dots, N, j \neq i} |a_{ij}| \geq \frac{1}{4\pi R_i}. \tag{38}$$

Из оценки (38) следует

Теорема 2. Для любых правых частей f_1, \dots, f_N система (17) имеет и при том единственное решение — набор чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ таких, что

$$|\varphi_i| \leq 4\pi \max_{j=1, \dots, N} |R_j f_j|, \quad i = \overline{1, N}, \tag{39}$$

числа R_j определяются формулой (36).

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^* \varphi_j = f_i^*, \quad i = \overline{1, N}, \tag{40}$$

где $a_{ij}^* = R_i a_{ij}$, $f_i^* = R_i f_i$. Она получена из системы (17) домножением каждого из уравнений на множитель R_i .

Зададим произвольный набор чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ и сформируем набор чисел f_1^*, \dots, f_N^* по формулам (40). Пусть φ_k — наибольшее по модулю из чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ (одно из таких чисел, если их несколько). Тогда

$$|f_k^*| = \left| \sum_{j=1}^N a_{kj}^* \varphi_j \right| \geq |\varphi_k| |a_{kk}^*| - \sum_{j=1, \dots, N, j \neq k} |a_{kj}^*| |\varphi_k| \geq R_k |\varphi_k| \left(|a_{kk}| - \sum_{j=1, \dots, N, j \neq k} |a_{kj}| \right)$$

и в силу оценки (38) получаем

$$|f_k^*| \geq \frac{|\varphi_k|}{4\pi}.$$

Отсюда, во-первых, заключаем, что однородная система, соответствующая системе (40), не может иметь ненулевое решение. Тогда матрица этой системы не вырождена (а значит и матрица системы (17) не вырождена). Во-вторых, для решения системы (40) справедлива оценка

$$|\varphi_i| \leq 4\pi \max_{j=1, \dots, N} |f_j^*|, \quad i = \overline{1, N},$$

откуда и следуют неравенства (39). Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая теорема о сходимости численной схемы (17) для уравнения (7).

Теорема 3. Пусть $f \in H^\mu(\Sigma)$, $\mu \in (0, 1)$, $\varphi \in A$ — соответствующее решение уравнения (7). Тогда решение системы (17) с правыми частями $f_i = f(x_i)$ связано с решением уравнения (7) оценкой

$$|\varphi(x_i) - \varphi_i| \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma} (h^{1/2} + h^\mu), \quad i = \overline{1, N}. \tag{41}$$

Доказательство. Функция φ лежит в классе $A'(\mu, C_A)$ с константой $C_A = C \|f\|_{\mu, \Sigma}$. Пусть

$$\delta_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi(x_j) - f_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

В силу теоремы 1 имеем

$$|\delta_i| \leq \|f\|_{\mu, \Sigma} R_i^{-1} (h^{1/2} + h^\mu). \tag{42}$$

Далее, разности $\varphi(x_i) - \varphi_i$, $i = \overline{1, N}$, являются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} (\varphi(x_j) - \varphi_j) = \delta_i, \quad i = \overline{1, N},$$

применяя к которой теорему 2 и используя (42), получаем оценку (41) теоремы.

6. ПОЛНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РАЗРЕШИМОСТЬ

Теперь перейдём к рассмотрению уравнения (1), которое, по сравнению с характеристическим уравнением (7), будем называть *полным уравнением*.

Сначала изучим вопрос о разрешимости уравнения (1), следуя работе [7]. Рассмотрим оператор \mathbf{B} , который функции φ ставит в соответствие функцию $f = \mathbf{B}\varphi$ по формуле

$$f(x) \equiv (\mathbf{B}\varphi)(x) = \int_{\Sigma} B(x, y) \varphi(y) dy. \tag{43}$$

Лемма 3. Пусть функция $B(x, y)$ представима в виде (2), где $\tilde{B} \in H_C^\mu(\Sigma \times \Sigma)$, $\mu \in (0, 1)$. Пусть $\nu > 0$ и при этом $\nu \leq \mu$, $\nu < 2 - \alpha$. Тогда $\mathbf{B}: C_C[\Sigma] \rightarrow H_C^\nu[\Sigma]$ — ограниченный оператор.

Доказательство. При $\varphi \in C_C[\Sigma]$ интеграл в правой части формулы (43) сходится, при этом для любых $x, z \in \Sigma$ справедливо равенство

$$f(x) - f(z) = \int_{\Sigma} (\tilde{B}(x, y) - \tilde{B}(z, y)) \frac{\varphi(y)}{|x-y|^\alpha} dy + \int_{\Sigma} \tilde{B}(z, y) \varphi(y) \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{|z-y|^\alpha} \right) dy.$$

Несложно показать, что при $\nu \in (0, 1]$ для любых трёх различных точек $x, y, z \in R^2$ выполнена оценка

$$\left| \frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{|z-y|^\alpha} \right| \leq C|x-y|^\nu \left\{ \frac{1}{|x-y|^{\alpha+\nu}} + \frac{1}{|z-y|^{\alpha+\nu}} \right\},$$

где C — некоторая константа, зависящая только от показателей α и ν .

Тогда при выполнении условий $\nu \leq \mu$, $\nu < 2 - \alpha$ функция $f = \mathbf{B}\varphi$ определена и для неё выполнены оценки

$$|f(x)| \leq C\|\varphi\|_{0, \Sigma}, \quad |f(x) - f(z)| \leq C|x-z|^\nu \|\varphi\|_{0, \Sigma}, \quad x, z \in \Sigma,$$

где C — некоторая константа, зависящая от показателей α и ν , функции \tilde{B} и множества Σ . Отсюда следует утверждение леммы.

Уравнение (7) рассмотрим в классе функций с комплексными значениями. Пусть $f = f_1 + if_2 \in H_C^\mu[\Sigma]$, $f_1, f_2 \in H^\mu[\Sigma]$. Тогда уравнение (7) имеет и при том единственное решение в классе функций A_C вида $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in A$ — действительные решения, соответствующие правым частям f_1, f_2 соответственно. При этом по-прежнему выполнена оценка (10).

Введём оператор \mathbf{G} , который каждой функции $f \in H_C^\mu[\Sigma]$ ставит в соответствие функцию $\varphi \in A_C$ — решение уравнения (7). В силу оценки (10) выполнено условие: $\mathbf{G}: H_C^\mu \rightarrow H_C^{1/2}$ — ограниченный оператор.

Применив к правой и левой частям уравнения (1) оператор \mathbf{G} , получим уравнение

$$\varphi + \mathbf{K}\varphi = g, \tag{44}$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}\mathbf{B}, \quad g = \mathbf{G}f. \tag{45}$$

Теперь заметим, что оператор $\mathbf{K}: C_C[\Sigma] \rightarrow H_C^{1/2}$ ограничен, а значит, $\mathbf{K}: C_C[\Sigma] \rightarrow C_C[\Sigma]$ компактен.

Уравнение (44) можно рассматривать в классе непрерывных функций ($g \in C_C[\Sigma]$, ищется решение $\varphi \in C_C[\Sigma]$). Тогда для него выполнены теоремы Фредгольма. Кроме того, легко показать, что функция $\varphi \in A_C$ является решением уравнения (1) с правой частью $f \in H_C^\mu$, $\mu \in (0, 1]$, тогда и только тогда, когда эта функция φ является решением уравнения (44) с правой частью (45). При этом справедливо утверждение, что если однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет в классе функций A_C только нулевое решение, то для любой правой части $f \in H_C^\mu$, $\mu \in (0, 1]$, это уравнение имеет и при том единственное решение в классе A_C , причём $\varphi \in C_C^{1/2}$ и выполнена оценка

$$\|\varphi\|_{1/2,\Sigma} \leq C\|f\|_{\mu,\Sigma}, \tag{46}$$

константа C зависит от уравнения (множества Σ и функции B), а также от показателя μ . Это следует из теоремы 1 в [7]. Отметим, что указанная теорема была доказана в работе [7] для уравнения (1) с показателем $\alpha = 1$ в условии (2), но доказательство для более общего случая, рассматриваемого в настоящей статье, остаётся в силе с учётом леммы 1.

7. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ

Теперь рассмотрим вопрос о численном решении уравнения (1) в случае его однозначной разрешимости (при выполнении оценки (46)).

Используем ту же аппроксимацию множества Σ системой треугольных ячеек σ_i , $i = \overline{1, M}$, что и при решении уравнения (7). Будем аппроксимировать уравнение (1) системой уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}\varphi_j + \sum_{j=1}^N b_{ij}\varphi_j = f_i, \quad i = \overline{1, N}, \tag{47}$$

где $f_i = f(x_i)$; a_{ij} — те же коэффициенты, что и в системе (17), возникающей при решении уравнения (7); b_{ij} — коэффициенты, возникающие при аппроксимации оператора \mathbf{B} (требования к ним опишем ниже); $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — комплексные неизвестные.

Введём оператор проектирования, который каждой функции $\varphi \in C_C[\Sigma]$ ставит в соответствие элемент $\varphi' = \Pi\varphi = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N)) \in \mathbb{C}^N$.

Наоборот, для любого элемента $\varphi' = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathbb{C}^N$ построим элемент $\tilde{\varphi} = \Pi^{-1}\varphi' \in C_C[\Sigma]$ по формуле

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j e_j(x), \quad x \in \Sigma, \tag{48}$$

где $e_i(x)$ — рассмотренные выше кусочно-линейные базисные функции, причём мы доопределим эти функции как $e_i(x) = 0$ при $x \in \Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$.

Заметим, что если $\varphi \in C_C[\Sigma]$, то $\tilde{\varphi} = \Pi^{-1}\Pi\varphi$ есть кусочно-линейное приближение функции φ по формуле (14) (с тем замечанием, что теперь мы рассматриваем функцию $\tilde{\varphi}$ на всей поверхности Σ , полагая $\tilde{\varphi}(x) = 0$ при $x \in \Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$).

В качестве коэффициентов b_{ij} можно взять коэффициенты

$$b_{ij}^0 = \int_{\Sigma} B(x_i, y) e_j(y) dy.$$

Тогда для любой функции $\tilde{\varphi}$ вида (48) будет выполнена формула

$$(\mathbf{B}\tilde{\varphi})(x_i) = \sum_{j=1}^N b_{ij}^0 \varphi_j.$$

В общем случае будем предполагать, что коэффициенты b_{ij} выбираются так, что

$$\sum_{j=1}^N |b_{ij} - b_{ij}^0| \leq \frac{\theta_1(h)}{\rho(x_i, \partial\Sigma)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (49)$$

где h — диаметр разбиения, $\theta_1(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ (предполагается, что функция $\theta_1(h)$ не зависит от выбора разбиения при выполнении сформулированных ранее условий на разбиение).

Введём операторы $\mathbf{A}': \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ и $\mathbf{B}': \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, определяемые формулами

$$f_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j, \quad g_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \varphi_j,$$

где

$$(f_1, \dots, f_N) = f' = \mathbf{A}\varphi', \quad (g_1, \dots, g_N) = g' = \mathbf{B}\varphi', \quad \varphi' = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Пусть также

$$\mathbf{G}' = \mathbf{A}'^{-1}, \quad \mathbf{K}' = \mathbf{G}'\mathbf{B}'.$$

Заметим, что оператор \mathbf{A}' обратим в силу теоремы 2.

Теперь система (17) запишется в операторном виде как

$$\mathbf{A}'\varphi' = f',$$

а система (47) — в виде

$$\mathbf{A}'\varphi' + \mathbf{B}'\varphi' = f'. \quad (50)$$

Применив оператор \mathbf{G}' к уравнению (50), запишем уравнение

$$\varphi' + \mathbf{K}'\varphi' = g', \quad (51)$$

равносильное уравнению (50) при условии $g' = \mathbf{G}'f' \in \mathbb{C}^N$.

Получили следующую структуру пространств и уравнений. Имеется уравнение (44), которое решается в пространстве $L = C_C[\Sigma]$ с нормой $\|\varphi\|_L = \sup_{x \in \Sigma} |\varphi(x)|$. При каждом разбиении множества Σ на ячейки возникает конечномерное пространство $\tilde{L} \subset L$, элементами которого являются функции $\tilde{\varphi}(x)$ вида (48). Также мы ввели пространство $L' = \mathbb{C}^N$, в котором введём норму

$$\|\varphi'\|_{L'} = \max_{i=1, \dots, N} |\varphi_i|, \quad \varphi' = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Мы ввели оператор проектирования $\Pi: L \rightarrow L'$, который является ограниченным. Обозначим как Π_0 сужение оператора Π на подпространство \tilde{L} . При этом оператор $\Pi_0: \tilde{L} \rightarrow L'$ — биекция и обратный оператор $\Pi_0^{-1}: L' \rightarrow \tilde{L}$ — оператор с нормой, равной единице.

Теперь для доказательства связи между решениями уравнений (51) и (44) воспользуемся теоремой Л.В. Канторовича [12], которая в наших обозначениях может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4 [12]. Пусть L — нормированное пространство, \tilde{L} — его замкнутое подпространство, которое изоморфно пространству L' .

Пусть $\Pi_0: \tilde{L} \rightarrow L'$ — взаимно-однозначное отображение, причём Π_0 и Π_0^{-1} ограничены, и существует ограниченный оператор $\Pi: L \rightarrow L'$, совпадающий с Π_0 на L' .

Пусть также $\mathbf{K}: L \rightarrow L$ и $\mathbf{K}': L' \rightarrow L'$ — линейные операторы, связанные условиями:

j1) существует константа ε_1 такая, что для всех $\tilde{\varphi} \in \tilde{L}$ выполнено неравенство

$$\|\mathbf{K}\tilde{\varphi} - \mathbf{K}'\Pi\tilde{\varphi}\|_{L'} \leq \varepsilon_1 \|\varphi\|_L; \tag{52}$$

j2) существует константа ε_2 такая, что для любого $\varphi \in L$ найдётся элемент $\psi \in \tilde{L}$ такой, что

$$\|\psi - \mathbf{K}\varphi\|_L \leq \varepsilon_2 \|\varphi\|_L. \tag{53}$$

Тогда если оператор $I + \mathbf{K}$ имеет ограниченный обратный оператор, определённый на всем пространстве L , и константы ε_1 и ε_2 достаточно малы, а точнее, если

$$(\|\Pi\| \|I + \mathbf{K}\| \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_1) \|(I + \mathbf{K})^{-1}\| \|\Pi_0^{-1}\| = q < 1,$$

то уравнение $(I + \mathbf{K}')\varphi' = f'$ имеет для любого $f' \in L'$ некоторое решение $\varphi' \in L'$, удовлетворяющее оценке

$$\|\varphi'\| \leq C_{\mathbf{K}} \|f'\|, \quad C_{\mathbf{K}} = \frac{(1 + \varepsilon_2) \|(I + \mathbf{K})^{-1}\| \|\Pi\| \|\Pi_0^{-1}\|}{1 - q}. \tag{54}$$

Заметим, что если пространство L' конечномерное, то указанное в теореме 4 решение φ' единственно, и значит, существует оператор $(I + \mathbf{K}')^{-1}$, норма которого ограничена константой $C_{\mathbf{K}}$ из оценки (54).

Используя теорему 4, докажем следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), единственно. Пусть $f \in H^\mu(\Sigma)$, $\mu \in (0, 1)$, $\varphi \in A_C$ — решение уравнения (1). Выберем константу $\nu > 0$ так, что $\nu \leq \mu$ и $\nu < 2 - \alpha$.

Тогда существуют константы C и $h_0 > 0$, зависящие от уравнения (1), параметров μ, ν , а также от параметров $\theta, C_\varepsilon, C_\Sigma$ из условий i1)–i3) такие, что при любом разбиении, удовлетворяющем условиям i1)–i3) с диаметром $h < h_0$, система (47) однозначно разрешима и её решение с правыми частями $f_i = f(x_i)$ связано с решением уравнения (1) оценкой

$$|\varphi(x_i) - \varphi_i| \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma} (\theta_1(h) + h^{1/2} + h^\nu), \quad i = \overline{1, N}.$$

Доказательство. Будем обозначать через C константы, зависящие от уравнения (1), параметров μ, ν , а также от параметров $\theta, C_\varepsilon, C_\Sigma$ из условий i1)–i3), причём в различных оценках значения констант могут быть различными.

Покажем, что в рассматриваемом нами случае выполнены оценки (52) и (53), в которых можно выбрать величины ε_1 и ε_2 зависящими от h (диаметра разбиения множества Σ) и стремящимися к нулю при $h \rightarrow 0$.

Проверим выполнение условия (52). Пусть $\tilde{\varphi} \in \tilde{L}$, причём $\tilde{\varphi}$ имеет вид (48), где $(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \varphi' \in L'$. При этом $\varphi' = \Pi_0 \varphi$. Обозначим $\psi = \mathbf{K}\tilde{\varphi}$, $\psi' = \mathbf{K}'\varphi'$. Справедливы соотношения $\psi = \mathbf{G}f$, где $f = \mathbf{B}\varphi$; $\psi' = \mathbf{G}'f'$, $f' = (f_1, \dots, f_N) = \mathbf{B}'\varphi'$.

Сравним f и f' . Можем записать

$$f(x_i) = \int_{\Sigma} B(x_i, y) \tilde{\varphi}(y) dy = \sum_{j=1}^N b_{ij}^0 \varphi_j,$$

тогда

$$f(x_i) - f_i = \sum_{j=1}^N (b_{ij}^0 - b_{ij}) \varphi_j.$$

Используя предположение (49), заключаем, что

$$|f(x_i) - f_i| \leq \frac{\theta_1(h)}{\rho(x_i, \partial\Sigma)} \|\tilde{\varphi}\|_{L'}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (55)$$

Далее, функция ψ является решением уравнения $\mathbf{A}\psi = f$ в классе функций $\psi \in A_C$, причём

$$f \in H_C^\nu, \quad \|f\|_{\nu, \Sigma} \leq C \|\varphi\|_L,$$

где $\nu > 0$ — константа из леммы 3. Элемент ψ' — решение уравнения $\mathbf{A}'\psi' = f'$, при этом элемент f' можно представить в виде

$$f' = f'_0 + \Delta f',$$

где

$$f'_0 = (f(x_1), \dots, f(x_N)), \quad \Delta f' = (f_1 - f(x_1), \dots, f_n - f(x_N)).$$

Тогда из теорем 2, 3 и неравенства (55) следует оценка

$$|\psi(x_i) - \psi_i| \leq (\theta_1(h) + h^{1/2} + h^\nu) \|\tilde{\varphi}\|_{L'}.$$

Таким образом, существует константа C такая, что выполнена оценка (52) с

$$\varepsilon_1 = C(\theta_1(h) + h^{1/2} + h^\nu). \quad (56)$$

Проверим выполнение условия (53). Пусть $\varphi \in L$, $f = \mathbf{K}\varphi$. Тогда $f \in H_C^{1/2}(\Sigma)$, $\|f\|_{1/2, \Sigma} \leq C \|\varphi\|_L$, и если положить $\psi = \Pi^{-1}\Pi f$, то

$$\|\psi - f\|_L \leq Ch^{1/2} \|\varphi\|_L.$$

Значит, существует константа C такая, что выполнена оценка (53) с

$$\varepsilon_2 = Ch^{1/2}. \quad (57)$$

Из теоремы 4 с учётом оценок (56) и (57) следует, что найдутся константы C и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$ существует оператор $(I + \mathbf{K}')^{-1}$ и

$$\|(I + \mathbf{K}')^{-1}\| \leq C.$$

Теперь получим оценку, связывающую решения уравнений (44) и (51) при условии $g' = G'\Pi f \in \mathbb{C}^N$. Пусть $\varphi \in L$ — решение уравнения (44), $\varphi' \in L$ — решение уравнения (51) с указанной правой частью. Тогда выполнено соотношение

$$(\varphi' + \mathbf{K}'\varphi') - (\Pi\varphi + \Pi\mathbf{K}\varphi) = g' - \Pi g,$$

которое можно записать в виде

$$\varphi' - \Pi\varphi + \mathbf{K}'(\varphi' - \Pi\varphi) = \Delta g',$$

где

$$\Delta g' = \Delta g'_1 + \Delta g'_2, \quad \Delta g'_1 = g' - \Pi g, \quad \Delta g'_2 = \Pi \mathbf{K} \varphi - \mathbf{K}' \Pi \varphi.$$

Заметим, что в данном случае g — точное решение характеристического уравнения (7) с рассматриваемой правой частью f , а $g' = (g_1, \dots, g_N)$ — соответствующее решение системы (17). По теореме 3 заключаем, что

$$\|\Delta g'_1\| \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma} (h^{1/2} + h^\mu).$$

Разность $\Delta g'_2 = \Pi \mathbf{K} \varphi - \mathbf{K}' \Pi \varphi$ представим в виде

$$\begin{aligned} \Delta g'_2 &= \Delta g'_{21} + \Delta g'_{22}, \\ \Delta g'_{21} &= \Pi \mathbf{K} \varphi - \Pi \mathbf{K} \tilde{\varphi}, \quad \Delta g'_{22} = \Pi \mathbf{K} \tilde{\varphi} - \mathbf{K}' \Pi \varphi, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varphi} = \Pi^{-1} \Pi \varphi \in \tilde{L}$ — кусочно-линейная аппроксимация функции φ . Заметим, что $\varphi \in H_C^{1/2}$ и $\|\varphi\|_{1/2, \Sigma} \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma}$. Тогда легко показать, что

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_L \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma} h^{1/2}.$$

Так как $\mathbf{K}: C_C[\Sigma] \rightarrow C_C[\Sigma]$ — ограниченный оператор, заключаем, что

$$\|\Delta g'_{21}\| \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma} h^{1/2}.$$

Наконец, для оценки разности $\Delta g'_{22}$ заметим, что $\tilde{\varphi} \in \tilde{L}$ и $\Pi \varphi = \Pi \tilde{\varphi}$. Тогда для функции $\tilde{\varphi}$ выполнено условие j1) теоремы 4 с ε_1 вида (56) и с оценкой

$$\|\tilde{\varphi}\| \leq C \|f\|_{1/2, \Sigma}.$$

Собирая полученные оценки, можем записать

$$\|\Delta g'\| \leq \|f\|_{\mu, \Sigma} (\theta_1(h) + h^{1/2} + h^\nu).$$

Тогда

$$\|\varphi' - \Pi \varphi\|_L \leq C \|f\|_{\mu, \Sigma} (\theta_1(h) + h^{1/2} + h^\nu).$$

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказана равномерная сходимость на сетке для приближённых решений уравнения (1) с применением численной схемы (47), в основе которой лежит аппроксимация уравнения на конформной треугольной сетке. При этом сетка может быть достаточно произвольной, а для обеспечения сходимости численных решений должны быть выполнены условия i1), i2), которые, по сути, не позволяют при сгущении сетки появиться треугольникам со сколь угодно малыми углами.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-286.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифанов, И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И.К. Лифанов. — М. : Янус, 1995. — 520 с.
2. Сетуха, А.В. Трёхмерная краевая задача Неймана с обобщёнными граничными условиями и уравнение Прандтля / А.В. Сетуха // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 9. — С. 1208–1208.
3. Вайникко, Г.М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г.М. Вайникко, И.К. Лифанов, Л.Н. Полтавский. — М. : Янус, 2001. — 508 с.
4. О численном решении двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения и о распространении звука в городской застройке / В.А. Гутников, В.Ю. Кирякин, И.К. Лифанов, А.В. Сетуха // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2007. — Т. 47, № 12. — С. 2088–2100.
5. Даева, С.Г. О численном решении краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений / С.Г. Даева, А.В. Сетуха // Вычислит. методы и программирование. — 2015. — Т. 16. — С. 421–435.
6. Daeva, S.G. Numerical simulation of scattering of acoustic waves by inelastic bodies using hypersingular boundary integral equation / S.G. Daeva, A.V. Setukha // AIP Conf. Proc. — 2015. — V. 1648. — P. 390004-1–390004-4.
7. Лебедева, С.Г. О численном решении полного двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения методом дискретных особенностей / С.Г. Лебедева, А.В. Сетуха // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 223–233.
8. Сетуха, А.В. Сходимость метода кусочно-линейных аппроксимаций и коллокаций для некоторого гиперсингулярного интегрального уравнения на замкнутой поверхности / А.В. Сетуха, А.В. Семенова // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 9. — С. 1265–1280.
9. Сетуха, А.В. О численном решении некоторого поверхностного интегрального уравнения методами кусочно-линейных аппроксимаций и коллокаций / А.В. Сетуха, А.В. Семенова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2019. — Т. 59, № 6. — С. 990–1006.
10. Сетуха, А.В. Метод граничных интегральных уравнений с гиперсингулярными интегралами в краевых задачах / А.В. Сетуха // Итоги науки и техники. Серия Совр. математика и её приложения. Темат. обзоры. — 2019. — Т. 160. — С. 114–125.
11. Сетуха, А.В. Метод интегральных уравнений в математической физике / А.В. Сетуха. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2023. — 316 с.
12. Канторович, Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика / Л.В. Канторович // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, № 6 (28). — С. 89–185.

**CONVERGENCE OF THE METHOD OF PIECEWISE LINEAR APPROXIMATIONS
AND COLLOCATIONS FOR A TWO-DIMENSIONAL HYPERSINGULAR INTEGRAL
EQUATION ON A SET WITH BOUNDARY**

© 2024 / A. V. Setukha

*Lomonosov Moscow State University, Russia
Marchuk Institute of Numerical Mathematics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: setuhaav@rambler.ru*

A hypersingular integral equation on a convex bounded set on the plane with an integral understood in the sense of a finite part in the sense of Hadamard is considered. Equations of this type, in particular, arise when solving the Neumann boundary value problem for the Laplace and Helmholtz equations on a flat screen in the case where the solution is sought in the form of a double layer potential. To numerically solve the equation, a numerical scheme is used based on piecewise linear approximation of the unknown function on a triangular conformal mesh and the collocation method. The uniform

convergence of numerical solutions to an exact solution on a grid when the maximum cell diameter tends to zero has been proven.

Keywords: numerical method, hypersingular integral, integral equation, quadrature formula

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-286.

REFERENCES

1. Lifanov, I.K., *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*, VSP, 1996.
2. Setukha, A.V., The three-dimensional Neumann problem with generalized boundary conditions and the Prandtl equation, *Differ. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 9, pp. 1249–1262.
3. Vainikko, G.M., Lifanov, I.K., and Poltavskii, L.N., *Hypersingular Integral Equations and Their Applications*, Chapman and Hall CRC, 2004.
4. Gutnikov, V.A., Kiryakin, V.Y., Lifanov, I.K., and Setukha, A.V., Numerical solution to a two-dimensional hypersingular integral equation and sound propagation in urban areas, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 12, pp. 2002–2013.
5. Daeva, S. and Setukha, A., On the numerical solution of the Neumann boundary value problem for the Helmholtz equation using the method of hypersingular integral equations, *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie* (Numerical Methods and Programming), 2015, vol. 16, pp. 421–435.
6. Daeva, S.G. and Setukha, A.V., Numerical simulation of scattering of acoustic waves by inelastic bodies using hypersingular boundary integral equation, *AIP Conf. Proc.*, 2015, vol. 1648, pp. 390004-1–390004-4.
7. Lebedeva, S.G. and Setukha, A.V., On the numerical solution of a complete two-dimensional hypersingular integral equations by the method of discrete singularities, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 224–234.
8. Setukha, A.V. and Semenova, A.V. Convergence of the piecewise linear approximation and collocation method for a hypersingular integral equation on a closed surface, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 9, pp. 1231–1246.
9. Setukha, A.V. and Semenova, A.V., Numerical solution of a surface hypersingular integral equation by piecewise linear approximation and collocation methods, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 942–957.
10. Setukha, A.V., Method of boundary integral equations with hypersingular integrals in boundary-value problems, *J. Math. Sci.*, 2021, vol. 257, no. 1, pp. 114–126.
11. Setukha, A.V., *Method Integral'nykh uravneni v matematcheskoy fizike* (Integral Equation Method in Mathematical Physics), Moscow: MSU Press, 2023.
12. Kantorovich, L.V., Functional analysis and applied mathematics, *Usp. Mat. Nauk*, 1948, vol. 3, no. 6 (28), pp. 89–185.