

Том 60, Номер 5

ISSN 0374-0641

Май 2024



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 5, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Построение диагональных функционалов Ляпунова–Красовского для одного класса позитивных дифференциально-алгебраических систем
А. Ю. Александров 579
- Метод построения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений
В. М. Буданов 590
- Теоремы существования и единственности решений стохастических дифференциально-разностных гибридных систем
А. А. Леваков, Д. А. Долженкова 604
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Типичные провальные асимптотики квазиклассических приближений к решениям нелинейного уравнения Шрёдингера
С. Н. Мелихов, Б. И. Сулейманов, А. М. Шавлуков 618
- О структуре ядра задачи Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости
В. Г. Николаев 632
-

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

- Задачи мультипликативного управления для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика
Р. В. Бризицкий, Н. Н. Максимова 643
- Стабилизация нелинейных динамических систем с учётом ограничений на состояния при помощи метода бэкстеппинга
А. Е. Голубев 660
- О кусочно-кубических оценках функции цены в задаче целевого управления нелинейной системой
П. А. Точилин, И. А. Чистяков 672
- Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа
В. Е. Хартовский 686
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Аппроксимация функционально-алгебраических задач на собственные значения

Д. М. Коростелева

707

О существовании периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с квазиоднородной нелинейностью

А. Н. Наимов, М. В. Быстрецкий

714

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.929.4

**ПОСТРОЕНИЕ ДИАГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ
ЛЯПУНОВА–КРАСОВСКОГО
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЗИТИВНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

© А. Ю. Александров

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru

Поступила в редакцию 04.02.2024 г., после доработки 09.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассматривается связанная система, описывающая взаимодействие нелинейной дифференциальной подсистемы с нелинейностями секторного типа и линейной разностной подсистемы. Предполагается, что система является позитивной. Строится диагональный функционал Ляпунова–Красовского и определяются условия, при выполнении которых с помощью такого функционала можно доказать абсолютную устойчивость изучаемой системы. В случае нелинейностей степенного вида выводятся оценки скорости стремления решений к началу координат. Проводится анализ устойчивости соответствующей системы с переключениями параметров. Находятся достаточные условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения при любом допустимом законе переключения.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическая система, абсолютная устойчивость, позитивная система, функционал Ляпунова–Красовского, переключения.

DOI: 10.31857/S0374064124050013, EDN: LBUEJV

ВВЕДЕНИЕ

Связанные системы, описывающие взаимодействие дифференциальных и разностных подсистем, относятся к классу дифференциально-алгебраических систем [1, § 1.6; 2, § 3.4; 3]. Системы такого рода широко используются для моделирования процессов химической технологии и гидродинамики, линий без потерь в электротехнике, применяются в задачах стабилизации самолётов, а также в ряде других инженерных приложений [1, §§ 1.6, 2.5; 4]. Кроме того, к такому виду систем приводятся дифференциальные уравнения с запаздыванием нейтрального типа [2, с. 71].

Актуальной проблемой, возникающей при анализе динамики указанных систем, является проблема устойчивости их решений. Методы исследования устойчивости и стабилизации хорошо разработаны для линейных дифференциально-алгебраических систем (см., например, [2, § 3.4; 5–8] и цитируемую в них литературу). Для нелинейных систем ряд результатов, основанных на развитии второго метода Ляпунова, получен в статьях [5, 9]. Условия устойчивости были сформулированы в терминах существования функционалов Ляпунова–Красовского, обладающих определёнными свойствами. Однако следует заметить, что до сих пор не разработано общих конструктивных подходов к построению требуемых функционалов.

Важным подклассом дифференциально-алгебраических систем являются позитивные системы. Устойчивость таких систем изучалась в работах [10–13]. В [10] и [11] с помощью

метода сравнения были установлены условия экспоненциальной устойчивости нелинейных систем и линейных систем с переменным запаздыванием. В статье [12] для нахождения условий робастной устойчивости линейных систем применялся специальный подход, основанный на использовании математических моделей в форме “вход–выход”. В [13] для нелинейной позитивной дифференциально-алгебраической системы с переключениями параметров строился линейный функционал Ляпунова–Красовского, существование которого гарантировало асимптотическую устойчивость рассматриваемой системы при любом допустимом законе переключения.

В то же время эффективным подходом к исследованию устойчивости позитивных систем является использование диагональных функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского. Этот подход хорошо разработан для позитивных дифференциальных и разностных систем без запаздывания [14]. В статье [15] для позитивных линейных систем с запаздыванием было введено понятие диагональной устойчивости по Риккати. В работах [15–17] были получены условия такой устойчивости для некоторых классов линейных и нелинейных систем с запаздыванием.

Целью настоящей статьи является анализ диагональной устойчивости позитивной дифференциально-алгебраической системы специального вида.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = Af(x(t)) + By(t - \tau), \quad y(t) = Cf(x(t)) + Dy(t - \tau). \quad (1)$$

Здесь $t \geq t_0 \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^k$, A , B , C , D — постоянные матрицы соответствующих размерностей, τ — постоянное положительное запаздывание, $f(x)$ — непрерывная при $\|x\| < H$ ($0 < H \leq +\infty$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора) векторная функция сепарабельного вида, т.е. $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m))^T$, где $x_1, \dots, x_m$ — компоненты вектора x . Предполагается, что скалярные функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют секторным условиям: $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \neq 0$, $i = \overline{1, m}$. Функции $f(x)$ с указанными свойствами будем называть *допустимыми*. Таким образом, рассматриваем связанную систему, описывающую взаимодействие нелинейной дифференциальной системы типа Персидского $\dot{x}(t) = Af(x(t))$ (см. [14, с. 97]) и линейной разностной системы с непрерывным временем $y(t) = Dy(t - \tau)$.

Каждое решение системы (1) при $t \geq t_0$ определяется начальными условиями: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0 + \xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \in [-\tau, 0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}^m$, а функция $\varphi(\xi)$ принадлежит пространству $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^k)$ непрерывных и ограниченных вектор-функций $\varphi: [-\tau, 0] \mapsto \mathbb{R}^k$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \sup_{\xi \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\xi)\|$. Под *решением* понимается пара функций $x(t)$, $t \in [t_0, T)$, и $y(t)$, $t \in [t_0 - \tau, T)$ ($t_0 < T \leq +\infty$), которые удовлетворяют начальным условиям и системе (1) при $t \neq t_0 + k\tau$, $k = 0, 1, \dots$, причём $x(t)$ является непрерывной функцией, имеющей кусочно-непрерывную производную, а функция $y(t)$ является кусочно-непрерывной. Через y_t обозначим отрезок соответствующей компоненты решения, т.е. $y_t: \xi \mapsto y(t + \xi)$ при $\xi \in [-\tau, 0)$. Из предположений относительно правой части системы (1) следует существование её решений (см. [5]).

В настоящей статье неравенства для векторов будем понимать покомпонентно.

Определение 1. Система (1) называется *позитивной*, если её решения с неотрицательными начальными данными остаются неотрицательными при возрастании времени.

Замечание 1. Известно (см. [11, 13]), что система (1) позитивна тогда и только тогда, когда матрица A метцлерева (все её внедиагональные элементы неотрицательны), а матрицы B , C , D являются неотрицательными.

Из свойств функций $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$ следует, что рассматриваемая система имеет нулевое решение.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) *абсолютно устойчива*, если её нулевое решение асимптотически устойчиво при любой допустимой функции $f(x)$ и любом неотрицательном запаздывании τ .

Хорошо известно (см., например, [5]), что система (1) может быть абсолютно устойчивой только в случае, когда D является матрицей Шура (все её собственные числа по модулю меньше единицы). Далее считаем, что это условие выполнено.

В работе [12] с использованием линейного функционала Ляпунова–Красовского доказано, что позитивная система (1) абсолютно устойчива тогда и только тогда, когда матрица

$$Q = A + B(I - D)^{-1}C \quad (2)$$

является гурвицевой. Здесь I — единичная матрица соответствующей размерности. В настоящей статье, развивая результаты, полученные в [12, 15–17] для различных классов позитивных систем с запаздыванием, исследуем условия диагональной устойчивости рассматриваемой дифференциально-алгебраической системы.

Диагональный функционал Ляпунова–Красовского строим по формуле

$$V(x(t), y_t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^{x_i(t)} f_i(u) du + \sum_{j=1}^k \omega_j \int_{t-\tau}^t y_j^2(\xi) d\xi, \quad (3)$$

где λ_i, ω_j — постоянные коэффициенты, $x_i(t)$ и $y_j(t)$ — компоненты векторов $x(t)$ и $y(t)$ соответственно.

Определение 3. Будем говорить, что система (1) *диагонально устойчива*, если существует функционал вида (3), гарантирующий абсолютную устойчивость этой системы.

Покажем, что для позитивной системы (1) диагональная устойчивость эквивалентна абсолютной устойчивости. Кроме того, в случае функций $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$ степенного вида с помощью построенного функционала оценим скорость стремления решений к началу координат. Также рассмотрим систему с переключениями параметров и определим условия существования для соответствующего семейства подсистем общего диагонального функционала Ляпунова–Красовского.

2. КРИТЕРИЙ ДИАГОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Будем использовать подходы, разработанные в статьях [16, 17].

Теорема 1. Для диагональной устойчивости позитивной системы (1) необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно устойчива.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Покажем достаточность.

Если система абсолютно устойчива, то матрица Q , определённая по формуле (2), гурвицева. Заметим, что из свойств матрицы D следует (см. [14, § 2.2]), что матрица $(I - D)^{-1}$ является неотрицательной, значит матрица Q — метцлерова. Поэтому [14, § 2.2] существуют векторы $\zeta > 0$ и $\eta > 0$ такие, что $Q\zeta < 0$, $Q^T\eta < 0$.

Выберем коэффициенты λ_i в функционале (3) в виде $\lambda_i = \eta_i/\zeta_i$, где η_i, ζ_i — компоненты векторов η, ζ соответственно, $i = \overline{1, m}$. Продифференцируем этот функционал в силу системы (1) и получим

$$\dot{V} = f^T(x(t))\Lambda(Af(x(t)) + By(t-\tau)) + y^T(t)\Omega y(t) - y^T(t-\tau)\Omega y(t-\tau) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}^T G \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

Здесь Λ и Ω — диагональные матрицы с элементами λ_i и ω_j соответственно на главных диагоналях,

$$G = \begin{pmatrix} A^T \Lambda + \Lambda A + 2C^T \Omega C & \Lambda B + 2C^T \Omega D \\ B^T \Lambda + 2D^T \Omega C & 2(D^T \Omega D - \Omega) \end{pmatrix}.$$

Нужно подобрать коэффициенты ω_j так, чтобы матрица G была отрицательно определена. Заметим, что G — симметричная и метцлерова матрица, поэтому [14, § 2.2] для доказательства её отрицательной определённости достаточно найти положительный вектор θ такой, что

$$G\theta < 0. \quad (4)$$

Пусть $L = (I - D)^{-1}(C + \gamma I)$, где γ — положительный параметр. Если $\theta = \text{col}(\zeta, L\zeta)$, то $\theta > 0$ и

$$\begin{aligned} G\theta &= \begin{pmatrix} A^T \eta + \Lambda A \zeta + 2C^T \Omega C \zeta + \Lambda B L \zeta + 2C^T \Omega D L \zeta \\ B^T \eta + 2D^T \Omega C \zeta + 2(D^T \Omega D - \Omega) L \zeta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \Lambda Q \zeta + A^T \eta + \gamma \Lambda B (I - D)^{-1} \zeta + 2C^T \Omega (C + D L) \zeta \\ B^T \eta + 2(D^T - I) \Omega L \zeta - 2\gamma D^T \Omega \zeta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выберем положительные числа $\omega_1, \dots, \omega_k$ так, чтобы имело место равенство

$$2\Omega L \zeta = (I - D^T)^{-1}(B^T \eta + \gamma 1_k),$$

где 1_k — k -мерный вектор, все компоненты которого равны единице. Тогда

$$G\theta = \begin{pmatrix} \Lambda Q \zeta + Q^T \eta + \gamma \Lambda B (I - D)^{-1} \zeta - 2\gamma C^T \Omega \zeta + \gamma C^T (I - D^T)^{-1} 1_k \\ -\gamma 1_k - 2\gamma D^T \Omega \zeta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если

$$\gamma(\Lambda B (I - D)^{-1} \zeta + C^T (I - D^T)^{-1} 1_k) < -\Lambda Q \zeta - Q^T \eta,$$

то выполнено условие (4), а производная функционала (3) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leq -a(\|f(x(t))\|^2 + \|y(t - \tau)\|^2), \quad a = \text{const} > 0. \quad (5)$$

Применяя теорему 3 из работы [5], получаем, что нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво при любой допустимой функции $f(x)$ и любом неотрицательном запаздывании τ . Теорема доказана.

3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

Известно [5], что если система (1) линейна ($f_i(x_i) = x_i$, $i = \overline{1, m}$) и асимптотически устойчива, то она экспоненциально устойчива. В данном пункте рассмотрим допустимые функции $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$ степенного вида. Пусть

$$f_i(x_i) = x_i^{\mu_i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

где μ_i — рациональные числа с нечётными числителями и знаменателями, причём $\mu_i \geq 1$ и $\max_{i=\overline{1, m}} \mu_i > 1$. Покажем, что в этом случае с помощью построенного функционала Ляпунова–Красовского можно получить оценки времени переходных процессов для соответствующей системы (1).

Теорема 2. Пусть система (1) позитивна, матрица (2) гурвицева, а функции $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$ имеют вид (6). Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся положительные числа M_1 и M_2 такие, что для решений с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$t_0 \geq 0, \quad \|x_0\| + \|\varphi\|_\tau < \delta, \quad (7)$$

при всех $t \geq t_0$ справедливы оценки

$$|x_i(t, t_0, x_0, \varphi)| \leq M_1(1+t-t_0)^{-1/(\rho_1(\mu_i+1))}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

$$\|y(t, t_0, x_0, \varphi)\| \leq M_2(1+t-t_0)^{-\rho_2/\rho_1}, \quad (9)$$

где $\rho_1 = \max_{i=\overline{1, m}}(\mu_i - 1)/(\mu_i + 1)$, $\rho_2 = \min_{i=\overline{1, m}} \mu_i/(\mu_i + 1)$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $V(x(t), y_t)$, построенный по формуле (3). В соответствии с доказательством теоремы 1 выбираем положительные коэффициенты λ_i, ω_j так, чтобы была справедлива оценка (5).

Далее проведём некоторую модификацию этого функционала. Положим

$$\tilde{V}(x(t), y_t) = V(x(t), y_t) + \beta \int_{t-\tau}^t (\xi - t + \tau) \|y(\xi)\|^2 d\xi, \quad (10)$$

где β — положительный параметр.

Дифференцируя функционал (10) в силу системы (1), получаем

$$\dot{\tilde{V}} \leq -(a - \beta\tau) \left(\sum_{i=1}^m x_i^{2\mu_i}(t) + \|y(t-\tau)\|^2 \right) - \beta \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^2 d\xi,$$

где значение a то же, что и в (5).

Пусть $0 < \beta < a/(2\tau)$. Тогда

$$\dot{\tilde{V}} \leq -\frac{1}{2}a \sum_{i=1}^m x_i^{2\mu_i}(t) - \beta \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^2 d\xi. \quad (11)$$

Кроме того, при выбранном значении β для самого функционала справедливы соотношения

$$a_1 \left(\sum_{i=1}^m x_i^{\mu_i+1}(t) + \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^2 d\xi \right) \leq \tilde{V}(x(t), y_t) \leq a_2 \left(\sum_{i=1}^m x_i^{\mu_i+1}(t) + \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^2 d\xi \right), \quad (12)$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Из выполнения оценок (11) и (12) следует (см. [5, теорема 3]), что нулевое решение изучаемой системы асимптотически устойчиво в целом. Значит, для любого $\delta > 0$ найдутся положительные числа $\tilde{\delta}$ и $\tilde{b}$ такие, что если выполнены условия (7), то при всех $t \geq t_0$ имеем $\|x(t, t_0, x_0, \varphi)\| + \|y(t, t_0, x_0, \varphi)\| < \tilde{\delta}$ и

$$\dot{\tilde{V}}(x(t, t_0, x_0, \varphi), y_t(t_0, x_0, \varphi)) \leq -\tilde{b}\tilde{V}^{1+\rho_1}(x(t, t_0, x_0, \varphi), y_t(t_0, x_0, \varphi)). \quad (13)$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (13) и используя нижнюю оценку функционала из формулы (12), нетрудно показать, что число $M_1 > 0$ можно выбрать так, чтобы для решений с начальными данными, удовлетворяющими условиям (7), при всех $t \geq t_0$ выполнялись соотношения (8).

Матрица D является матрицей Шура. Поэтому [14, § 2.1] существует постоянная симметричная положительно определённая матрица Ξ , для которой матрица $D^T \Xi D - \Xi$ отрицательно определена. Пусть $\hat{V}(y) = y^T \Xi y$. Тогда

$$\hat{V}(y(t)) \leq b_1 \hat{V}(y(t-\tau)) + b_2 \|f(x(t))\|^2,$$

где $0 < b_1 < 1$, $b_2 > 0$. Последовательно применяя это неравенство на промежутках $[p\tau, (p+1)\tau]$, $p = 0, 1, \dots$, и учитывая оценки (8), получаем, что найдётся число $M_2 > 0$ такое, что если начальные данные решения системы (1) удовлетворяют условиям (7), то при всех $t \geq t_0$ выполнено соотношение (9). Теорема доказана.

Замечание 2. Как уже отмечалось, в работе [12] для позитивной и абсолютно устойчивой системы (1) был построен линейный функционал Ляпунова–Красовского. Используя этот функционал и проводя рассуждения, аналогичные приведённым в доказательстве теоремы 2, можно также получить оценки вида (8), (9), но с большими показателями степеней. Значит, применение построенного в настоящей статье функционала позволяет точнее оценить время переходных процессов.

4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Далее рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A_\sigma f(x(t)) + B_\sigma y(t-\tau), \quad y(t) = C f(x(t)) + D y(t-\tau). \quad (14)$$

Здесь $t \geq t_0 \geq 0$, $\sigma = \sigma(t)$ — заданная при $t \geq t_0$ кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения, $\sigma(t): [t_0, +\infty) \mapsto \{1, \dots, N\}$, A_s , B_s — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $s = \overline{1, N}$, а остальные обозначения те же, что и для системы (1). Таким образом, переключения параметров происходят в первой группе уравнений, а во второй группе матрицы C и D являются постоянными. В частности, такая ситуация имеет место, когда система (14) линейна и получена в результате перехода от системы дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t) - D y(t-\tau)) = \tilde{A}_\sigma y(t) + \tilde{B}_\sigma y(t-\tau)$$

с помощью замены переменной $x(t) = y(t) - D y(t-\tau)$. Отметим, что в этом случае матрица C будет единичной.

В соответствии со стандартными предположениями (см. [18]) считаем, что функция $\sigma(t)$ на любом ограниченном промежутке может иметь только конечное число точек разрыва. Такие законы переключения будем называть *допустимыми*.

В каждый момент времени динамика системы (14) описывается одной из подсистем семейства

$$\dot{x}(t) = A_s f(x(t)) + B_s y(t-\tau), \quad y(t) = C f(x(t)) + D y(t-\tau), \quad s = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Начальные условия и решения для системы (14) определяются так же, как и для системы (1). Из предположений относительно правой части системы следует существование её решений (см. [5]).

По-прежнему предполагаем, что D — матрица Шура, и рассматриваем случай, когда система (14) является позитивной.

Замечание 3. Известно (см. [11, 12]), что для позитивности системы (14) необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A_1, \dots, A_N$ были метцлеровыми, а матрицы $B_1, \dots, B_N$, C , D — неотрицательными.

Определение 4. Будем говорить, что система (14) *абсолютно устойчива*, если её нулевое решение асимптотически устойчиво при любой допустимой функции $f(x)$, любом неотрицательном запаздывании τ и любом допустимом законе переключения.

Определение 5. Будем говорить, что система (14) *диагонально устойчива*, если существует функционал вида (3), гарантирующий абсолютную устойчивость этой системы.

Для нахождения условий диагональной устойчивости воспользуемся специальным подходом, который был впервые предложен в работе [19] и получил дальнейшее развитие в [20, 21].

Рассмотрим системы неравенств

$$(A_s + B_s(I - D)^{-1}C)\zeta \leq \alpha_1 \zeta, \quad s = \overline{1, N}, \quad (16)$$

$$A_s^T \eta + C^T(I - D^T)^{-1} \max_{r=\overline{1, N}} \{B_r^T \eta\} \leq \alpha_2 \eta, \quad s = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Заметим, что максимум в (17) понимается покомпонентно.

Теорема 3. Пусть система (14) *позитивна*. Если существуют векторы $\zeta > 0$, $\eta > 0$ и числа α_1 , α_2 такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$ и выполнены неравенства (16), (17), то данная система *диагонально устойчива*.

Доказательство. Функционал Ляпунова–Красовского выбираем в виде (3), причём коэффициенты λ_i определяем по формулам $\lambda_i = \eta_i / \zeta_i$, где η_i , ζ_i — компоненты положительных векторов η , ζ , удовлетворяющих условиям (16) и (17) соответственно, $i = \overline{1, m}$. Обозначим через $W_s(x(t), y_t)$ производную этого функционала в силу s -й подсистемы семейства (15). Имеем

$$W_s(x(t), y_t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix}^T G_s \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$G_s = \begin{pmatrix} A_s^T \Lambda + \Lambda A_s + 2C^T \Omega C & \Lambda B_s + 2C^T \Omega D \\ B_s^T \Lambda + 2D^T \Omega C & 2(D^T \Omega D - \Omega) \end{pmatrix},$$

а Λ и Ω — диагональные матрицы с элементами λ_i и ω_j соответственно на главных диагоналях. Нужно подобрать положительные коэффициенты ω_j так, чтобы матрицы $G_1, \dots, G_N$ были отрицательно определены.

Как и при доказательстве теоремы 1, положим $L = (I - D)^{-1}(C + \gamma I)$, $\gamma = \text{const} > 0$, $\theta = \text{col}(\zeta, L\zeta)$. Тогда $\theta > 0$ и

$$G_s \theta = \begin{pmatrix} A_s^T \eta + \Lambda (A_s + B_s(I - D)^{-1}C) \zeta + \gamma \Lambda B_s(I - D)^{-1} \zeta + 2C^T \Omega (C + DL) \zeta \\ B_s^T \eta + 2(D^T - I) \Omega L \zeta - 2\gamma D^T \Omega \zeta \end{pmatrix}.$$

Выберем положительные числа $\omega_1, \dots, \omega_k$ так, чтобы имело место равенство

$$2\Omega L \zeta = (I - D^T)^{-1} \left(\max_{r=\overline{1, N}} \{B_r^T \eta\} + \gamma 1_k \right).$$

Получим

$$\begin{aligned} G_s \theta &\leq \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta + A_s^T \eta + \gamma \Lambda B_s(I - D)^{-1} \zeta + 2C^T \Omega L \zeta - 2\gamma C^T \Omega \zeta \\ -\gamma 1_k - 2\gamma D^T \Omega \zeta \end{pmatrix} \leq \\ &\leq \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta + A_s^T \eta + C^T(I - D^T)^{-1} \max_{r=\overline{1, N}} \{B_r^T \eta\} + \gamma \Lambda B_s(I - D)^{-1} \zeta - 2\gamma C^T \Omega \zeta \\ -\gamma 1_k - 2\gamma D^T \Omega \zeta \end{pmatrix} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2)\eta + \gamma \Lambda B_s(I - D)^{-1}\zeta - 2\gamma C^T \Omega \zeta \\ -\gamma 1_k - 2\gamma D^T \Omega \zeta \end{pmatrix}.$$

Значит, если γ достаточно мало, то $G_s \theta < 0$ при всех $s = \overline{1, N}$. Тогда при выбранных значениях параметров функционал (3) будет общим функционалом Ляпунова–Красовского для подсистем семейства (15), удовлетворяющим требованиям теоремы 3 из [5]. Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим гибридную систему (14) в случае, когда $m = k = N = 2$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -h & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

где h — положительный параметр.

Нетрудно проверить, что для существования положительных векторов ζ и η , удовлетворяющих соответствующим неравенствам (16) и (17), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_1 \geq \max \left\{ 4 - h, \frac{\sqrt{13} - 7}{2} \right\}, \quad \alpha_2 \geq 0,$$

$$\alpha_2 \geq \min \left\{ \frac{4 - h + \sqrt{(h - 8)^2 + 4}}{2}, \max \left\{ 7 - h, \frac{2 - h + \sqrt{(h - 6)^2 + 12}}{2} \right\} \right\}.$$

В соответствии с теоремой 3 значения α_1 и α_2 нужно выбрать так, чтобы имело место соотношение $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$. Это можно сделать тогда и только тогда, когда

$$h > \frac{7 + \sqrt{11}}{2}. \quad (18)$$

Таким образом, если выполнено неравенство (18), то рассматриваемая система абсолютно устойчива.

Заметим, что из условия $\alpha_2 \geq 0$ следует, что не существует положительного вектора η такого, что

$$A_s^T \eta + C^T (I - D^T)^{-1} \max_{r=1, N} \{B_r^T \eta\} < 0, \quad s = \overline{1, N},$$

поэтому в данном случае анализ абсолютной устойчивости не может быть проведён на основе результата, полученного в статье [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе установлены условия существования диагональных функционалов Ляпунова–Красовского для некоторого класса нелинейных позитивных дифференциально-алгебраических систем. Кроме того, в случае допустимых функций степенного вида найдены оценки времени переходных процессов, а для соответствующей гибридной системы определены достаточные условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения при любом законе переключения. Следует отметить, что доказательства теорем 1 и 3 содержат конструктивные алгоритмы выбора параметров требуемых функционалов. Дальнейшие

исследования будут направлены на развитие предложенных подходов для анализа устойчивости позитивных дифференциально-алгебраических систем с переменным и распределённым запаздыванием.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00091).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Niculescu, S.-I. Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach / S.-I. Niculescu. — Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hong Kong ; London ; Milano ; Paris ; Singapur ; Tokyo : Springer, 2001. — 388 p.
2. Fridman, E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control / E. Fridman. — Basel : Birkhäuser, 2014. — 362 p.
3. Pepe, P. A new Lyapunov–Krasovskii methodology for coupled delay differential and difference equations / P. Pepe, Z.-P. Jiang, E. Fridman // Int. J. Control. — 2007. — V. 81, № 1. — P. 107–115.
4. Rasvan, V. Oscillations in lossless propagation models: a Liapunov–Krasovskii approach / V. Rasvan, S.-I. Niculescu // IMA J. Math. Control Inform. — 2002. — V. 19. — P. 157–172.
5. Gu, K. Lyapunov–Krasovskii functional for uniform stability of coupled differential-functional equations / K. Gu, Y. Liu // Automatica. — 2009. — V. 45. — P. 798–804.
6. Метельский, А.В. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 547–558.
7. Щеглова, А.А. Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса неразрешенности / А.А. Щеглова, А.Д. Кононов // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 5. — С. 36–55.
8. Щеглова, А.А. К вопросу о сверхустойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений / А.А. Щеглова // Автоматика и телемеханика. — 2021. — № 2. — С. 55–70.
9. Pepe, P. On the stability of coupled delay differential and continuous time difference equations / P. Pepe, E.I. Verriest // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2003. — V. 48, № 8. — P. 1422–1427.
10. Ngoc, P.H.A. Stability of coupled functional differential-difference equations / P.H.A. Ngoc // Int. J. Control. — 2020. — V. 93, № 8. — P. 1920–1930.
11. Shen, J. Positivity and stability of coupled differential-difference equations with time-varying delays / J. Shen, W.X. Zheng // Automatica. — 2015. — V. 57. — P. 123–127.
12. Briat, C. Stability and performance analysis of linear positive systems with delays using input-output methods / C. Briat // Int. J. Control. — 2017. — V. 91, № 7. — P. 1669–1692.
13. Aleksandrov, A.Y. Absolute stability and Lyapunov–Krasovskii functionals for switched nonlinear systems with time-delay / A.Y. Aleksandrov, O. Mason // J. Franklin Institute. — 2014. — V. 351, № 8. — P. 4381–4394.
14. Kazkurewicz, E. Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation / E. Kazkurewicz, A. Bhaya. — Boston : Birkhäuser, 1999. — 267 p.
15. Mason, O. Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems / O. Mason // Systems and Control Letters. — 2012. — V. 61. — P. 6–10.
16. Aleksandrov A. Diagonal Riccati stability and applications / A. Aleksandrov, O. Mason // Linear Algebra and its Appl. — 2016. — V. 492. — P. 38–51.

17. Александров, А.Ю. О диагональной устойчивости позитивных систем с переключениями и запаздыванием / А.Ю. Александров, О. Мейсон // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 12. — С. 16–33.
18. Liberzon, D. Basic problems in stability and design of switched systems / D. Liberzon, A.S. Morse // IEEE Control Systems Magazine. — 1999. — V. 19, № 5. — P. 59–70.
19. Pastravanu, O.C. Max-type copositive Lyapunov functions for switching positive linear systems / O.C. Pastravanu, M.-H. Matcovschi // Automatica. — 2014. — V. 50. — P. 3323–3327.
20. Aleksandrov, A.Y. On the existence of a common Lyapunov function for a family of nonlinear positive systems / A.Y. Aleksandrov // Systems and Control Letters. — 2021. — V. 147. — Art. 1048324.
21. Aleksandrov, A.Y. On the existence of diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals for a class of nonlinear positive time-delay systems / A.Y. Aleksandrov // Automatica. — 2024. — V. 160. — Art. 111449.

CONSTRUCTING DIAGONAL LYAPUNOV–KRASOVSKII FUNCTIONALS FOR A CLASS OF POSITIVE DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC SYSTEMS

A. Yu. Aleksandrov

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru

A coupled system describing the interaction of a differential subsystem with nonlinearities of a sector type and a linear difference subsystem is considered. It is assumed that the system is positive. A diagonal Lyapunov–Krasovskii functional is constructed and conditions are determined under which the absolute stability of the investigated system can be proved with the aid of such a functional. In the case of nonlinearities of the power form, estimates for the convergence rate of solution to the origin are derived. The stability analysis of the corresponding system with parameter switching is fulfilled. Sufficient conditions guaranteeing the asymptotic stability of the zero solution for any admissible switching law are obtained.

Keywords: differential-algebraic system, absolute stability, positive system, Lyapunov–Krasovskii functional, switchings.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00091).

REFERENCES

1. Niculescu, S.-I., *Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach*, Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milano; Paris; Singapur; Tokyo: Springer, 2001.
2. Fridman, E., *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*, Basel: Birkhäuser, 2014.
3. Pepe, P., Jiang, Z.-P., and Fridman, E., A new Lyapunov–Krasovskii methodology for coupled delay differential and difference equations, *Int. J. Control*, 2007, vol. 81, no. 1, pp. 107–115.
4. Rasvan, V. and Niculescu, S.-I., Oscillations in lossless propagation models: a Liapunov–Krasovskii approach, *IMA J. Math. Control Inform.*, 2002, vol. 19, pp. 157–172.
5. Gu, K. and Liu, Y., Lyapunov–Krasovskii functional for uniform stability of coupled differential-functional equations, *Automatica*, 2009, vol. 45, pp. 798–804.
6. Metel'skii, A. and Khartovskii, V., Synthesis of damping controllers for the solution of completely regular differential-algebraic delay systems, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 539–550.
7. Shcheglova, A.A. and Kononov, A.D., Robust stability of differential-algebraic equations with an arbitrary unsolvability index, *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 5, pp. 798–814.
8. Shcheglova, A.A., On the superstability of an interval family of differential-algebraic equations, *Autom. Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 2, pp. 232–244.
9. Pepe, P. and Verriest, E.I., On the stability of coupled delay differential and continuous time difference equations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 8, pp. 1422–1427.

10. Ngoc, P.H.A., Stability of coupled functional differential-difference equations, *Int. J. Control*, 2020, vol. 93, no. 8, pp. 1920–1930.
11. Shen, J. and Zheng, W.X., Positivity and stability of coupled differential-difference equations with time-varying delays, *Automatica*, 2015, vol. 57, pp. 123–127.
12. Briat, C., Stability and performance analysis of linear positive systems with delays using input–output methods, *Int. J. Control*, 2017, vol. 91, no. 7, pp. 1669–1692.
13. Aleksandrov, A.Y. and Mason, O., Absolute stability and Lyapunov–Krasovskii functionals for switched nonlinear systems with time-delay, *J. Franklin Institute*, 2014, vol. 351, no. 8, pp. 4381–4394.
14. Kazkurewicz, E. and Bhaya, A., *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*, Boston: Birkhäuser, 1999.
15. Mason, O., Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems, *Systems and Control Letters*, 2012, vol. 61, pp. 6–10.
16. Aleksandrov, A. and Mason, O., Diagonal Riccati stability and applications, *Linear Algebra and its Appl.*, 2016, vol. 492, pp. 38–51.
17. Aleksandrov, A.Yu. and Mason, O., On diagonal stability of positive systems with switches and delays, *Autom. Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2114–2127.
18. Liberzon, D. and Morse, A.S., Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, vol. 19, no. 5, pp. 59–70.
19. Pastravanu, O.C. and Matcovschi, M.-H., Max-type copositive Lyapunov functions for switching positive linear systems, *Automatica*, 2014, vol. 50, pp. 3323–3327.
20. Aleksandrov, A.Y., On the existence of a common Lyapunov function for a family of nonlinear positive systems, *Systems and Control Letters*, 2021, vol. 147, art. 1048324.
21. Aleksandrov, A.Y., On the existence of diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals for a class of nonlinear positive time-delay systems, *Automatica*, 2024, vol. 160, art. 111449.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В. М. Буданов

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

e-mail: vlbudanov@gmail.com

Поступила в редакцию 02.06.2023 г., после доработки 19.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Обоснован аналитический метод построения периодических решений для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений полиномиального типа. Периодические решения построены в виде рядов Фурье, коэффициенты которых являются полиномами, зависящими от параметра без предположения о его малости. В качестве примеров рассмотрены уравнение Ван дер Поля и система Лоренца.

Ключевые слова: периодическое решение, нелинейная система, последовательные приближения.

DOI: 10.31857/S0374064124050022, EDN: LBTMXF

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где линейная часть является матрицей $\mathbf{A}$ порядка $n \times n$, а нелинейная — вектор-функцией $\mathbf{f}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, компоненты которой представляют собой полиномы степени не ниже двух от переменных $x_1, \dots, x_n$. На данный момент единственным математически обоснованным методом исследования периодических решений таких систем считается асимптотический метод малого параметра, развитый Н.Н. Боголюбовым и Ю.А. Митропольским [1, гл. 6]. Идея использования малого параметра появилась ещё в трудах А. Пуанкаре. Ряд принципиальных теорем о сходимости рядов, представляющих периодические решения, доказаны А.М. Ляпуновым, им же предложен практический метод построения рядов, в частности, для систем, называемых теперь системами Ляпунова. В монографии [2, гл. 2, § 12] описан этот метод и решён ряд задач с его использованием. Однако указывается, что сходимость имеет место при малых значениях параметра, более того, общепринятым является утверждение, что асимптотические методы приводят к расходящимся рядам [3, с. 89]. В то же время имеются работы, в которых доказывается сходимость метода последовательных приближений для конечных значений параметра, в частности, для уравнения Ван дер Поля [4, § 9.1].

В данной статье метод, предложенный Ляпуновым, обосновывается для более широкого класса систем. Это позволяет построить решение в виде рядов для периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, в частности, для уравнения Ван дер Поля и системы Лоренца (при исследовании решений для системы Лоренца применяются исключительно численные методы [5, §§ 2.3, 6.4]). При изменении параметров в системе Лоренца происходят качественные изменения структуры фазового потока от единственного стока до “странного” аттрактора. Мы будем рассматривать промежуточную ситуацию, когда все особые точки неустойчивы и существуют периодические решения. Эти периодические решения

имеют седловой тип, поэтому даже их численное нахождение доставляет определённые проблемы [6, § 9.2]. В данной работе строятся аналитические приближения этих периодических траекторий. В статье [7] построены периодические и квазипериодические решения для математического маятника и связанных маятников, а в [8] представлено квазипериодическое решение для неограниченной задачи трёх тел в двухпланетном варианте.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Предлагаемый метод является модификацией метода Ляпунова, но применяется к системе, которая не является системой Ляпунова, так как не консервативна. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть имеется нелинейная система

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

удовлетворяющая условиям:

- 1) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — вектор-функция, компоненты которой — полиномы степени не меньше первой;
- 2) в промежутке $\mu \in [0, \bar{\mu}]$ система имеет периодическое решение, представимое в виде разложения по степеням μ с коэффициентами в виде сходящихся рядов Фурье

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^k \sum_{l=0}^{+\infty} (\mathbf{a}_{kl} \cos(l\omega t) + \mathbf{b}_{kl} \sin(l\omega t)), \quad (2)$$

где частота ω также представима в виде сходящегося ряда

$$\omega = \omega_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^k \theta_k. \quad (3)$$

Тогда частичные ряды $\mathbf{x}_n$, ω_n , получаемые из (2), (3) отбрасыванием слагаемых степени большей n , удовлетворяют с точностью $O(\mu^{n+1})$ следующему уравнению:

$$\dot{\mathbf{x}}_n + \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Представим периодическое решение (2), (3) в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n + \mu^{n+1}\mathbf{y}_{n+1}$, $\omega = \omega_n + \mu^{n+1}\theta_{n+1}$. В этом случае тригонометрические члены можно записать с использованием двух первых членов разложения Тейлора:

$$\cos(l\omega t) = \cos(l\omega_n t) - l\mu^{n+1}\theta_{n+1}t \sin(l\omega_n t) + o(\mu^{n+1}),$$

$$\sin(l\omega t) = \sin(l\omega_n t) + l\mu^{n+1}\theta_{n+1}t \cos(l\omega_n t) + o(\mu^{n+1}).$$

Таким образом, решение примет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_n(\omega_n) + \mu^{n+1}\mathbf{z}_n(\omega_n) + o(\mu^{n+1}),$$

где $\mathbf{z}_n$ содержит не только тригонометрические, но и смешанные члены с множителем t . Тогда

$$\mu\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1} + O(\mu^n)) = \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) + O(\mu^{n+1}).$$

С учётом этих преобразований уравнение (1) для частичных рядов может быть представлено в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_n + \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) = -\mu^{n+1}(\dot{\mathbf{z}}_n + \mathbf{A}\mathbf{z}_n) + O(\mu^{n+1}).$$

Теорема доказана.

Следствие. Если решение представляется в виде сходящихся рядов по степеням параметра в некотором промежутке $\mu \in [0, \mu^*]$, то оно может быть найдено методом последовательных приближений по формуле (4). При этом найденные коэффициенты не меняются в последующих приближениях.

Отметим, что формулировка теоремы не предполагает ни обоснования условий существования решения в указанной форме, ни анализа диапазона сходимости получаемых формальных рядов. Теорема только обосновывает принципиальную возможность того, что при удачном выборе параметра формальные ряды, построенные методом последовательных приближений, могут оказаться сходящимися при немалых значениях этого параметра. Приведённые ниже примеры иллюстрируют такую возможность. Отметим также, что отличие (3) от замены Ляпунова состоит в том, что вводится ряд для частоты, а не для периода. В случае периодических решений, близких к гомоклиническим траекториям, период стремится к бесконечности и для него получается расходящийся ряд, в то время как частота стремится к нулю и соответствующий ряд может быть сходящимся.

2. УРАВНЕНИЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Рассмотрим известное уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}, \quad (5)$$

исследованию которого посвящено много работ, особенно в предположении, что значение параметра μ является малой величиной. Имеются также работы, в которых численно строятся коэффициенты ряда Фурье для периодического решения — предельного цикла для фиксированных немалых значений параметра, больших единицы. Здесь мы применим изложенный выше теоретический результат для построения ряда по степеням параметра. В качестве нулевого приближения возьмём функцию

$$x_0 = A \cos \psi, \quad \psi = \omega t.$$

Очевидно, что она удовлетворяет уравнению (5) с точностью до нулевой степени параметра при $\omega = 1$. Подставив её в правую часть (5), получим уравнение для первого приближения:

$$\ddot{x} + x = \mu A \omega \left(\frac{1}{4} A^2 - 1 \right) \sin \psi + \frac{1}{4} \mu A^3 \omega \sin(3\psi).$$

В первом и дальнейших приближениях полагаем, что первая гармоника не изменяется. Здесь это означает, что коэффициент при $\sin \psi$ должен быть равен нулю, т.е. $A^2 = 4$. С учётом этого понизим степень амплитуды для третьей гармоники, а также положим $\omega = 1$. В результате получим уравнение для добавки по третьей гармонике:

$$\ddot{x} + x = \mu A \sin(3\psi).$$

Решением этого уравнения является, очевидно, функция $x = -1/8 \mu A \sin(3\psi)$, и решение первого приближения определяется по формуле

$$x_1 = A \left(\cos \psi - \frac{1}{8} \mu \sin(3\psi) \right), \quad A^2 = 4, \quad \omega = 1.$$

Значения амплитуды и частоты справедливы только для первого приближения, поэтому для построения второго приближения подставляем в правую часть (5) только выражение

для x . Получаем уравнение второго приближения, в котором останутся те же члены при первой степени параметра и добавятся члены второго порядка. Члены более высокого порядка отбрасываем и получаем уравнение для добавок второго порядка:

$$\ddot{x} + x = \mu^2 A \omega \left[\frac{1}{32} A^2 \cos \psi + \left(\frac{3}{16} A^2 - \frac{3}{8} \right) \cos(3\psi) + \frac{5}{32} A^2 \cos(5\psi) \right].$$

Для первой гармоники должно остаться решение $x = A \cos \psi$, $\psi = \omega t$, что означает

$$-\omega^2 + 1 = \frac{1}{32} \mu^2 \omega A^2.$$

Поправок второго порядка на амплитуду не возникает, поэтому подставляем $A^2 = 4$ и для частоты получаем уточнённое значение $\omega = 1 - \mu^2/16$. Для высших гармоник находим частные решения и получаем добавку второго порядка по параметру:

$$x_2 = x_1 - A \mu^2 \left(\frac{3}{64} \cos(3\psi) + \frac{5}{192} \cos(5\psi) \right).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (5) можно убедиться, что полученное решение удовлетворяет уравнению с точностью до второго порядка по параметру.

Далее процесс построения высших приближений можно продолжить по той же схеме, при этом учитывая, что члены следующего порядка μ^n могут появляться не только в нелинейной правой части (5), но и в левой части. Поэтому рассмотрим процедуру построения высших приближений подробнее. По форме двух первых приближений видно, что решение может быть построено как

$$x = A u,$$

где u зависит от ψ и μ . Пусть найдено приближение с номером $n-1$. Приближение с номером n ищем в виде

$$x_n = A_n u_n, \quad u_n = u_{n-1} + \xi_n \mu^n, \quad \omega_n = \omega_{n-1} + \gamma_n \mu^n, \quad A_n^2 = A_{n-1}^2 + a_n \mu^n.$$

Его подстановка в (5) с использованием теоремы 1 даёт соотношение

$$(\omega_{n-1} + \gamma_n \mu^n)^2 (u_{n-1}'' + \xi_n'' \mu^n) + u_{n-1} + \xi_n \mu^n = \mu \omega_{n-1} u_{n-1}' (1 - (A_{n-2}^2 + a_{n-1} \mu^{n-1}) u_{n-1}^2),$$

которое должно быть выполнено с точностью μ^n . Штрихами обозначены производные по ψ . Выделим члены с множителем μ^n :

$$2\omega_0 \gamma_n u_0'' + \omega_0 u_0' u_0^2 a_{n-1} + \omega_0^2 \xi_n'' + \xi_n = [-\omega_{n-1}^2 u_{n-1}'' + \mu \omega_{n-1} u_{n-1}' (1 - A_{n-2}^2) u_{n-1}^2]_n.$$

Отметим, что в n -м приближении определяется поправка к амплитуде порядка $n-1$. В этом уравнении правая часть зависит от предыдущего приближения, а в левой части находятся подлежащие определению γ_n , a_{n-1} , ξ_n . Поскольку $u_0 = \cos \psi$, то γ_n , a_{n-1} определяются из условия компенсации первой гармоники в правой части по $\cos \psi$ и $\sin \psi$ соответственно. После этого очевидным образом находится ξ_n как сумма высших гармоник. В последовательных приближениях $\cos \psi$ и $\sin \psi$ появляются в правой части поочередно, соответственно в рядах для частоты и амплитуды содержатся только чётные степени параметра μ . Приведём результат шестого приближения:

$$\omega = 1 - \frac{1}{16} \mu^2 + \frac{17}{3072} \mu^4 + \frac{35}{884736} \mu^6, \quad A^2 = 4 + \frac{1}{16} \mu^2 - \frac{5}{3072} \mu^4,$$

$$\begin{aligned}
u = & \cos \psi - \frac{1}{8} \mu \sin(3\psi) + \mu^2 \left(-\frac{3}{64} \cos(3\psi) - \frac{5}{192} \cos(5\psi) \right) + \\
& + \mu^3 \left(\frac{1}{64} \sin(3\psi) + \frac{85}{4608} \sin(5\psi) + \frac{7}{1152} \sin(7\psi) \right) + \mu^4 \left(\frac{55}{12288} \cos(3\psi) + \frac{955}{110592} \cos(5\psi) + \right. \\
& + \frac{1379}{221184} \cos(7\psi) + \frac{61}{40960} \cos(9\psi) \left. \right) + \mu^5 \left(-\frac{71}{147456} \sin(3\psi) - \frac{16955}{5308416} \sin(5\psi) - \right. \\
& - \frac{101227}{26542080} \sin(7\psi) - \frac{9791}{4915200} \sin(9\psi) - \frac{5533}{14745600} \sin(11\psi) \left. \right) + \\
& + \mu^6 \left(\frac{5365}{14155776} \cos(3\psi) - \frac{22895}{31850496} \cos(5\psi) - \frac{5616737}{3185049600} \cos(7\psi) - \right. \\
& - \frac{891547}{589824000} \cos(9\psi) - \frac{409871}{663552000} \cos(11\psi) - \frac{715247}{7431782400} \cos(13\psi) \left. \right).
\end{aligned}$$

Описанный алгоритм приводит к тем же уравнениям для последовательных приближений, что и разложение решения по степеням параметра [1, § 6; 2, гл. 2, § 12]. Различие состоит лишь в способе вычисления поправок, возникающих от нелинейной компоненты, — прямой подстановкой предыдущего приближения или использованием производных нелинейной функции. Существенными отличиями являются шестой порядок полученного разложения в сравнении с третьим и его интерпретация. В указанных источниках параметр считается малым, в данной работе предполагается, что полученное решение является “начальной частью” ряда, сходящегося при немалых значениях параметра. Это подтверждается сравнением с результатами численного интегрирования, хотя с увеличением значения параметра сильно возрастает число приближений при заданной точности.

На рис. 1 сравниваются полученные аналитические приближения с результатами численного интегрирования уравнения (5). На рис. 1, а приведены графики зависимости координаты x и скорости v от времени, на рис. 1, б — предельный цикл на фазовой плоскости. Начальные условия берутся из аналитического приближения при $\psi = 0$. При выполнении последовательных приближений наблюдается сходимость при значении $\mu = 1$, в шестом приближении графики визуально совпадают, поэтому приведены результаты для значения $\mu = 1.2$. При построении высших приближений для этого значения также наблюдается сходимость (визуальное совпадение в 10-м приближении). Графики показывают хорошую аналитическую аппроксимацию и периода, и формы сильно нелинейных функций, причём видимые отклонения возникают для скорости как следствие дифференцирования высокочастотных составляющих.

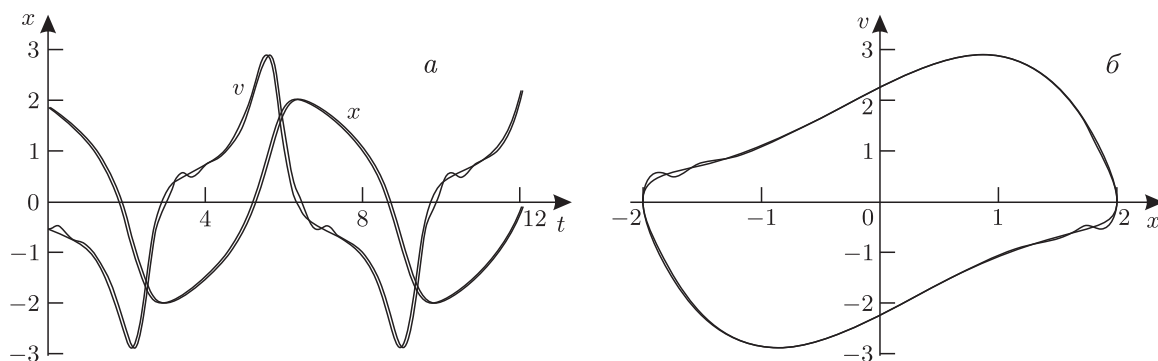


Рис. 1. Сравнение аналитического и численного решений для уравнения Ван дер Поля.

3. СИСТЕМА ЛОРЕНЦА

Продemonстрируем работу метода на примере известной системы Лоренца — системы трёх уравнений относительно трёх неизвестных x , y , z с тремя положительными параметрами σ , ρ , β :

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = \rho x - y - xz, \quad \dot{z} = xy - \beta z. \quad (6)$$

Обычно в литературе эта система рассматривается при значениях параметров $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$. Для третьего параметра существует критическое значение $\rho \approx 24.7$, при котором все три особые точки становятся неустойчивыми. Здесь мы рассмотрим построение решения в общем случае и более подробно для значений двух параметров $\sigma = 8$, $\beta = 3$, близких к классическим, при которых качественное поведение решений остаётся тем же, но критическое значение третьего параметра и координаты нетривиальных особых точек принимают конечные значения $\rho_c = 28$, $x_c = y_c = \pm 9$, $z_c = 27$.

“Правая” стационарная точка определяется соотношениями

$$z_0 = \rho - 1, \quad x_0 = y_0 = \sqrt{\beta(\rho - 1)}. \quad (7)$$

Запишем уравнения в отклонениях от этой точки:

$$\dot{\xi} + \sigma(\xi - \eta) = 0, \quad \dot{\eta} - \xi + \eta + x_0\zeta = -\xi\zeta, \quad \dot{\zeta} - x_0(\xi + \eta) + \beta\zeta = \xi\eta,$$

где характеристическое уравнение линейной части, записанной слева, имеет вид

$$\lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + (\beta\sigma + \beta + x_0^2)\lambda + 2x_0^2\sigma = 0.$$

Найдём критические значения параметров, при которых особая точка теряет устойчивость, при этом характеристическое уравнение должно иметь вид

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda + q) = \lambda^3 + q\lambda^2 + \omega^2\lambda + \omega^2q = 0,$$

соответственно, должно выполняться равенство

$$(\sigma + \beta + 1)(\beta\sigma + \beta + x_0^2) = 2x_0^2\sigma.$$

Отсюда определяются критическое значение для x_0 и далее остальные параметры критической точки:

$$\begin{aligned} x_c^2 &= \frac{\beta(\sigma + 1)(\sigma + \beta + 1)}{\sigma - \beta - 1}, \quad z_c = \frac{x_c^2}{\beta} = \frac{(\sigma + 1)(\sigma + \beta + 1)}{\sigma - \beta - 1}, \\ \omega_c^2 &= \beta(\sigma + 1) + x_c^2 = \frac{2\beta\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - \beta - 1}, \quad \rho_c = z_c + 1 = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Введём вместо ρ новый параметр r :

$$\rho = (\rho_c - 1)(1 - r)^2 + 1, \quad (9)$$

обращающийся в нуль для критического случая. Тогда получается простая связь между координатами особой точки в общем (7) и критическом случаях:

$$z_0 = z_c(1 - r)^2, \quad x_0 = y_0 = x_c(1 - r). \quad (10)$$

Далее сделаем замену переменных так, чтобы в новых переменных ξ , η , ζ диапазон изменения был порядка единицы:

$$x = x_0 + x_c \xi, \quad y = x_0 + x_c \eta, \quad z = z_0 + z_c \zeta, \quad (11)$$

а также введём новую независимую переменную

$$\psi = \omega_c(1 - \gamma)t, \quad (12)$$

производную по которой будем обозначать штрихом. Параметр γ — это поправка к частоте, равная нулю в критическом случае. Тогда исходная система (6) с учётом (8)–(10) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \xi' + \frac{\sigma}{\omega_c}(\xi - \eta) &= \gamma \xi' \equiv u, & \eta' + \frac{1}{\omega_c}(-\xi + \eta) + \frac{z_c}{\omega_c} \zeta &= \gamma \eta' + \frac{z_c}{\omega_c}(r - \xi) \zeta \equiv v, \\ \zeta' + \frac{\beta}{\omega_c}(-\xi - \eta + \zeta) &= \gamma \zeta' + \frac{\beta}{\omega_c}(-r\xi - r\eta + \xi\eta) \equiv w. \end{aligned} \quad (13)$$

В этой системе слева собраны линейные члены с фиксированными коэффициентами, а справа — нелинейные члены и члены с множителями r , γ . В правой части системы нет единого параметра, однако в критической точке имеем $r = \gamma = \xi = \eta = \zeta = 0$. Можно предположить, что в некритических случаях существует аналитическая зависимость решения и параметров от какого-то другого параметра, в качестве которого выберем амплитуду A основной гармоники первой координаты. Тогда разложения переменных и параметров в правой части будут начинаться как минимум с первого порядка по A и будет иметь место главный результат теоремы 1 — при построении следующего приближения в правую часть можно подставлять предыдущее, т.е. использовать метод последовательных приближений. Заметим, что справедливость сделанного предположения будет подтверждена построенным решением.

Из-за такой структуры уравнений последовательные приближения можно вычислять по относительно простому алгоритму. Выражаем из двух первых уравнений η , ζ через ξ :

$$\eta = \xi + \frac{\omega_c}{\sigma}(\xi' - u), \quad \zeta = \frac{\omega_c}{\sigma z_c}(\omega_c(-\xi'' + u') - (\sigma + 1)\xi' + u + \sigma v). \quad (14)$$

Подстановка этих выражений в третье уравнение (13) с учётом (8) позволяет получить уравнение относительно одной переменной

$$\xi''' + \kappa \xi'' + \xi' + \kappa \xi = u'' + \frac{\beta + 1}{\omega_c} u' + \frac{\beta + x_c^2}{\omega_c^2} u + \frac{\sigma}{\omega_c} v' + \frac{\beta \sigma}{\omega_c^2} v - \frac{\sigma z_c}{\omega_c^2} w \equiv q, \quad \kappa = \frac{\sigma + \beta + 1}{\omega_c}. \quad (15)$$

В качестве первого приближения берём решение линейной части системы (13), положив правую часть равной нулю. Тогда уравнение (15) превращается в однородное, и любые гармонические функции единичной частоты являются его решениями. Поскольку мы имеем автономную систему, то изменением начала отсчёта времени можем изменять фазу и без ограничения общности принять $\xi = A \cos \psi$. Далее выражения для двух оставшихся переменных получаем из (14). Итак, в качестве первого приближения берём

$$\xi_1 = A \cos \psi, \quad \eta_1 = A \left(\cos \psi - \frac{\omega_c}{\sigma} \sin \psi \right), \quad \zeta_1 = A \frac{\omega_c}{\sigma z_c} (\omega_c \cos \psi + (\sigma + 1) \sin \psi). \quad (16)$$

Последующие приближения порядка n получаем подстановкой предыдущего в правую часть (13), и затем (15), после чего нужно найти решение неоднородного уравнения (15) с правой частью, зависящей от независимой переменной ψ , учитывая только члены порядка A^n .

Возникают следующие варианты в зависимости от состава правой части.

Постоянные члены. Поскольку u в (13) не может иметь постоянной составляющей, то

$$\xi_0 = \eta_0 = \frac{1}{\kappa} q_0, \quad \zeta_0 = \frac{\omega_c}{z_c} v_0.$$

Кратные гармоники. Для составляющих $q = \dots + q_c \cos(n\psi) + q_s \sin(n\psi) + \dots$ решение (15) ищем в виде $\xi = \xi_c \cos(n\psi) + \xi_s \sin(n\psi)$, подстановка его в (15) даёт два уравнения:

$$-\kappa(n^2 - 1)\xi_c - (n^3 - n)\xi_s = q_c, \quad (n^3 - n)\xi_c - \kappa(n^2 - 1)\xi_s = q_s.$$

Определитель этой системы равен $(n^2 - 1)^2(n^2 + \kappa^2)$ и отличен от нуля для всех $n > 1$, т.е. для всех гармоник, кроме первой, существует решение

$$\xi_c = \frac{-q_c \kappa + q_s n}{(n^2 - 1)(n^2 + \kappa^2)}, \quad \xi_s = \frac{-q_c n - q_s \kappa}{(n^2 - 1)(n^2 + \kappa^2)}. \quad (17)$$

После этого решения для двух оставшихся переменных определяются из (14) в виде коэффициентов при $\cos(n\psi)$ и $\sin(n\psi)$:

$$\begin{aligned} \eta_c &= \xi_c + \frac{\omega_c}{\sigma}(n\xi_s - u_c), & \eta_s &= \xi_s - \frac{\omega_c}{\sigma}(n\xi_c + u_s), \\ \zeta_c &= \frac{\omega_c}{\sigma z_c}(\omega_c(n^2\xi_c + nu_s) - n(\sigma + 1)\xi_s + u_c + \sigma v_c), \\ \zeta_s &= \frac{\omega_c}{\sigma z_c}(\omega_c(n^2\xi_s - nu_c) + n(\sigma + 1)\xi_c + u_s + \sigma v_s). \end{aligned}$$

Основная гармоника. Для составляющих $q = \dots + q_c \cos \psi + q_s \sin \psi + \dots$ в (17) при $n = 1$ имеем вырождение, а, кроме того, добавки по первой координате должны быть равны нулю, поскольку по исходному предположению в первом приближении используется полная амплитуда основной гармоники. Поэтому единственный вариант удовлетворить (13) — это скомпенсировать первую гармонику непосредственно в правой части введением добавок к r , γ в виде $r_n A^{n-1}$, $\gamma_n A^{n-1}$, которые в (13) в произведении со слагаемыми первого приближения дадут добавочные члены порядка A^n :

$$\begin{aligned} u_+ &= -\gamma_n \sin \psi, & v_+ &= \frac{\omega_c}{\sigma}(-\gamma_n + r_n) \cos \psi + \left(-\gamma_n + \frac{\sigma + 1}{\sigma} r_n\right) \sin \psi, \\ w_+ &= \left(\frac{(\sigma + 1)\omega_c}{\sigma z_c} \gamma_n - \frac{2\beta}{\omega_c} r_n\right) \cos \psi + \left(-\frac{\omega_c^2}{\sigma z_c} \gamma_n + \frac{\beta}{\sigma} r_n\right) \sin \psi. \end{aligned}$$

Добавляя эти выражения в правую часть (15) и приравнявая к нулю множители при $\cos \psi$, $\sin \psi$, получаем два уравнения относительно r_n , γ_n :

$$\begin{aligned} -2(\sigma + \beta + 1)\gamma_n + \left(\sigma + \beta + 1 + \frac{2\sigma\beta z_c}{\omega_c^2}\right)r_n + \omega_c q_c &= 0, \\ (3\omega_c^2 - \beta - \sigma\beta - \omega_c^2)\gamma_n + (-\omega_c^2 + \beta + \sigma\beta - \beta z_c)r_n + \omega_c^2 q_s &= 0. \end{aligned}$$

С учётом (8) эти соотношения можно упростить:

$$\gamma_n - r_n = \frac{\omega_c}{2(\sigma + \beta + 1)} q_c, \quad \gamma_n - \frac{\sigma + \beta + 1}{2\sigma} r_n = -\frac{1}{2} q_s,$$

и записать решение

$$\gamma_n = -\frac{\sigma}{\sigma - \beta - 1} \left(\frac{\omega_c}{2\sigma} q_c + q_s \right), \quad r_n = -\frac{\sigma}{\sigma - \beta - 1} \left(\frac{\omega_c}{\sigma + \beta + 1} q_c + q_s \right).$$

После этого находим добавки по первым гармоникам для η , ζ , используя (14), где полагаем $\xi = 0$ и заменяем u , v на $u + u_+$, $v + v_+$.

Таким образом, построение следующего приближения с номером n состоит в том, что предыдущее подставляем в правую часть (13) и далее в (15), в последнем оставляем составляющие порядка A^n и находим его решение в виде суммы постоянной составляющей, первой и кратных гармоник (17). Первая гармоника для ξ не изменяется, но появляются добавки по r , γ . Для двух остальных переменных решение даётся формулами (14) и могут возникать поправки по первой гармонике.

Если найдено приближение для решения (13), то переход к исходным переменным осуществляется с учётом (12) через соотношения (10), (11), которые можно представить в виде

$$x = x_c(1 - r + \xi), \quad y = x_c(1 - r + \eta), \quad z = z_c((1 - r)^2 + \zeta).$$

4. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Построим решение в виде рядов для значений $\sigma = 8$, $\beta = 3$, при которых коэффициенты рядов получаются в алгебраическом виде. Критическое значение третьего параметра, соответствующие координаты “правой” особой точки и частота малых колебаний около неё (8) принимают конечные значения $\rho_c = 28$, $x_c = y_c = 9$, $z_c = 27$, $\omega_c = 6\sqrt{3}$. После масштабирования и замен для третьего параметра $\rho = 27(1 - r)^2 + 1$ и независимой переменной $\psi = 6\sqrt{3}(1 - \gamma)t$ уравнения в отклонениях от особой точки (13) записываются в виде

$$\begin{aligned} \xi' + \frac{4\sqrt{3}}{9}(\xi - \eta) &= \gamma\xi' \equiv u, & \eta' + \frac{\sqrt{3}}{18}(-\xi + \eta) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta &= \gamma\eta' + \frac{3\sqrt{3}}{2}(r - \xi)\zeta \equiv v, \\ \zeta' + \frac{\sqrt{3}}{6}(-\xi - \eta + \zeta) &= \gamma\zeta' + \frac{\sqrt{3}}{6}(-r\xi - r\eta + \xi\eta) \equiv w. \end{aligned} \quad (18)$$

Выпишем уравнение для первой координаты (15):

$$\xi''' + \frac{2\sqrt{3}}{3}\xi'' + \xi' + \frac{2\sqrt{3}}{3}\xi = u'' + \frac{2\sqrt{3}}{9}u' + \frac{7}{9}u + \frac{4\sqrt{3}}{9}v' + \frac{2}{9}v - 2w \equiv q. \quad (19)$$

Также выпишем соотношения для построения очередного приближения: постоянные добавки

$$\xi_0 = \eta_0 = \sqrt{3} \left(\frac{1}{9}v_0 - w_0 \right), \quad \zeta_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0; \quad (20)$$

кратные гармоники

$$\xi_c = \frac{-2\sqrt{3}q_c + 3nq_s}{(n^2 - 1)(3n^2 + 4)}, \quad \xi_s = \frac{-2\sqrt{3}q_s - 3nq_c}{(n^2 - 1)(3n^2 + 4)}; \quad (21)$$

первая гармоника

$$\gamma_n = -\frac{3\sqrt{3}}{4}q_c - 2q_s, \quad r_n = -\sqrt{3}q_c - 2q_s. \quad (22)$$

После нахождения решения для первой координаты решение для двух оставшихся определяются соотношениями (14):

$$\eta = \xi + \frac{3\sqrt{3}}{4}(\xi' - u), \quad \zeta = \frac{1}{2}(-\xi'' + u') + \frac{\sqrt{3}}{36}(-9\xi' + u + 8v). \quad (23)$$

Теперь можно перейти к непосредственному построению приближений.

Первое приближение. В качестве первого приближения для периодического решения системы (18) берём решение линейной части (16):

$$\xi_1 = A \cos \psi, \quad \eta_1 = A \left(\cos \psi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin \psi \right), \quad \zeta_1 = A \left(\frac{1}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \psi \right). \quad (24)$$

Таким образом, в первом приближении получили семейство периодических решений, параметризуемое амплитудой по первой переменной.

Второе приближение. Подставив первое приближение в правую часть (18), положив $r=0$, $\gamma=0$, получим выражения, имеющие множителем A^2 :

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = -\frac{3\sqrt{3}}{8}(1 + \cos(2\psi)) - \frac{9}{16} \sin(2\psi), \\ w &= \frac{\sqrt{3}}{12}(1 + \cos(2\psi)) - \frac{3}{16} \sin(2\psi), \quad q = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 3 \cos(2\psi)) + \frac{5}{4} \sin(2\psi). \end{aligned}$$

Для постоянных составляющих имеем $v_0 = -3\sqrt{3}/8$, $w_0 = \sqrt{3}/12$ и по формулам (20) получаем

$$\xi_0 = \eta_0 = -\frac{3}{8}, \quad \zeta_0 = -\frac{1}{4}.$$

Для вторых гармоник имеем $q_c = -3\sqrt{3}/4$, $q_s = 5/4$. После подстановки этих выражений в (21) с $n=2$ получаем $\xi_c = 1/4$, $q_s = \sqrt{3}/24$. Первых гармоник в правых частях (18), (19) во втором приближении не возникло, соответственно, не появляются поправки к r , γ . Далее используем (23) с $\xi = -3/8 + 1/4 \cos(2\psi) + \sqrt{3}/24 \sin(2\psi)$ и приходим к следующим выражениям для второго приближения:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + A^2 \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos(2\psi) + \frac{\sqrt{3}}{24} \sin(2\psi) \right), \quad \eta_2 = \eta_1 + A^2 \left(-\frac{3}{8} + \frac{7}{16} \cos(2\psi) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(2\psi) \right), \\ \zeta_2 &= \zeta_1 + A^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \cos(2\psi) + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin(2\psi) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Третье приближение. После подстановки второго приближения (24), (25) в правую часть системы (18) получим выражения, имеющие множителем A^3 :

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = \frac{\sqrt{3}}{128}(51 \cos \psi - 27 \cos(3\psi)) + \frac{1}{64}(21 \sin \psi - 24 \sin(3\psi)), \\ w &= \frac{\sqrt{3}}{384}(-29 \cos \psi + 25 \cos(3\psi)) + \frac{1}{192}(22 \sin \psi - 23 \sin(3\psi)), \\ q &= \frac{\sqrt{3}}{96}(37 \cos \psi - 65 \cos(3\psi)) - \frac{11}{16} \sin \psi + \sin(3\psi). \end{aligned}$$

Видим, что появились слагаемые на основной частоте, для них действуем по третьему варианту: подставляем в (22) $q_c = 37\sqrt{3}/96$, $q_s = -11/16$ и вычисляем $\gamma_3 = 65/128$, $r_3 = 7/32$.

После этого вычисляем коэффициенты (21) для третьих гармоник по первой координате и применяем (23) для оставшихся двух координат. Результат третьего приближения:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= \xi_2 + A^3 \left(\frac{209}{3968} \cos(3\psi) + \frac{131\sqrt{3}}{7936} \sin(3\psi) \right), \\ \eta_3 &= \eta_2 + A^3 \left(\frac{195\sqrt{3}}{512} \sin \psi + \frac{5209}{31744} \cos(3\psi) - \frac{1619\sqrt{3}}{15872} \sin(3\psi) \right), \\ \zeta_3 &= \zeta_2 + A^3 \left(-\frac{17}{128} \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{1536} \sin \psi + \frac{1881}{31744} \cos(3\psi) + \frac{725\sqrt{3}}{23808} \sin(3\psi) \right).\end{aligned}\quad (26)$$

Это периодическое решение реализуется при значении параметра $r = 7A^2/32$, при этом поправка к частоте составляет $\gamma = 65A^2/128$.

Отметим, что зависимость между параметром и амплитудой появилась лишь в третьем приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что полученные решения удовлетворяют уравнениям (13) с точностью A^3 .

Приближения более высокого порядка могут быть построены по той же схеме, но при этом коэффициенты будут громоздкими — для четвёртого приближения возникают знаменатели из восьми цифр, для пятого — из двенадцати. По этой причине здесь для точного решения с рациональными коэффициентами ограничимся третьим приближением (26).

Приближения высокого порядка можно строить, используя приближённые коэффициенты в виде десятичных дробей с заданным количеством десятичных знаков. Приведём здесь результат девятого приближения при стандартных коэффициентах $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$. При этом критические значения равны

$$\rho_c = 24.7368, \quad x_c = y_c = 7.956, \quad z_c = 23.7368, \quad \omega_c = 9.6245.$$

Девятое приближение выбрано из тех соображений, что получается хорошая аппроксимация предельного цикла достаточно большой амплитуды и при этом формулы аналитического приближения ещё не становятся слишком громоздкими. Здесь и далее ограничиваемся четырьмя десятичными знаками, хотя расчёты производились с машинной точностью. Для параметра и поправки на частоту получены следующие ряды:

$$\begin{aligned}r &= 0.1706A^2 + 0.1144A^4 + 0.142A^6 + 0.2153A^8, \\ \gamma &= 0.4279A^2 + 0.2605A^4 + 0.3218A^6 + 0.491A^8.\end{aligned}$$

Периодические траектории в девятом приближении представляются рядами

$$\begin{aligned}\xi &= -0.3476A^2 - 0.1826A^4 - 0.2162A^6 - 0.3251A^8 + \\ &+ A \cos \psi + (0.2599A^2 + 0.1636A^4 + 0.1928A^6 + 0.2853A^8) \cos(2\psi) + \\ &+ (0.0526A^3 + 0.0623A^5 + 0.0931A^7 + 0.1564A^9) \cos(3\psi) + (0.0098A^4 + 0.0162A^6 + 0.0284A^8) \cos(4\psi) + \\ &+ (0.0016A^5 + 0.0034A^7 + 0.0067A^9) \cos(5\psi) + (0.0002A^6 + 0.0005A^8) \cos(6\psi) + \\ &+ (0.0882A^2 + 0.0475A^4 + 0.0437A^6 + 0.0548A^8) \sin(2\psi) + \\ &+ (0.037A^3 + 0.0455A^5 + 0.064A^7 + 0.1016A^9) \sin(3\psi) + \\ &+ (0.0112A^4 + 0.0201A^6 + 0.0347A^8) \sin(4\psi) + (0.003A^5 + 0.007A^7 + 0.0141A^9) \sin(5\psi) + \\ &+ (0.0008A^6 + 0.0022A^8) \sin(6\psi) + (0.0002A^7 + 0.0006A^9) \sin(7\psi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta = & -0.3476A^2 - 0.1826A^4 - 0.2162A^6 - 0.3251A^8 + \\
& + A \cos \psi + (0.4297A^2 + 0.1824A^4 + 0.1935A^6 + 0.2763A^8) \cos(2\psi) + \\
& + (0.1593A^3 + 0.148A^5 + 0.1939A^7 + 0.3023A^9) \cos(3\psi) + (0.0527A^4 + 0.0751A^6 + 0.1177A^8) \cos(4\psi) + \\
& + (0.0162A^5 + 0.031A^7 + 0.0564A^9) \cos(5\psi) + (0.0047A^6 + 0.0112A^8) \cos(6\psi) + \\
& + (0.0013A^7 + 0.0037A^9) \cos(7\psi) + 0.0003A^8 \cos(8\psi) + 0.0001A^9 \cos(9\psi) + \\
& + (-0.9625A + 0.4119A^3 + 0.2507A^5 + 0.3097A^7 + 0.4726A^9) \sin \psi + \\
& + (-0.412A^2 - 0.0533A^4 - 0.0624A^6 - 0.0927A^8) \sin(2\psi) + \\
& + (-0.115A^3 - 0.0695A^5 - 0.0883A^7 - 0.1391A^9) \sin(3\psi) + \\
& + (-0.0264A^4 - 0.0263A^6 - 0.038A^8) \sin(4\psi) + (-0.0048A^5 - 0.006A^7 - 0.0092A^9) \sin(5\psi) + \\
& + (-0.0005A^6 - 0.0002A^8) \sin(6\psi) + (0.0001A^7 + 0.0006A^9) \sin(7\psi) + 0.0001A^8 \sin 8\psi, \\
\zeta = & -0.1951A^2 - 0.0882A^4 - 0.1148A^6 - 0.1787A^8 + \\
& + (0.3902A - 0.073A^3 - 0.0209A^5 - 0.0128A^7 - 0.008A^9) \cos \psi + \\
& + (0.1318A^2 + 0.0172A^4 + 0.0233A^6 + 0.0373A^8) \cos(2\psi) + \\
& + (0.0385A^3 + 0.0222A^5 + 0.0275A^7 + 0.0428A^9) \cos(3\psi) + (0.0091A^4 + 0.0092A^6 + 0.0132A^8) \cos(4\psi) + \\
& + (0.0017A^5 + 0.0022A^7 + 0.0034A^9) \cos(5\psi) + (0.0002A^6 + 0.0001A^8) \cos(6\psi) - 0.0002A^9 \cos(7\psi) + \\
& + (0.446A + 0.0077A^3 + 0.0126A^5 + 0.0193A^7 + 0.0316A^9) \sin \psi + \\
& + (0.1465A^2 + 0.071A^4 + 0.079A^6 + 0.1152A^8) \sin(2\psi) + \\
& + (0.0518A^3 + 0.0482A^5 + 0.0637A^7 + 0.1002A^9) \sin(3\psi) + (0.0174A^4 + 0.0246A^6 + 0.0384A^8) \sin(4\psi) + \\
& + (0.0054A^5 + 0.0103A^7 + 0.0187A^9) \sin(5\psi) + (0.0016A^6 + 0.0038A^8) \sin(6\psi) + \\
& + (0.0004A^7 + 0.0012A^9) \sin(7\psi) + 0.0001A^8 \sin 8\psi.
\end{aligned}$$

На рис. 2 приведены результаты численного интегрирования и полученного аналитического решения для $A=0.7$. Этому решению соответствует значение третьего параметра $\rho=18.5485$ и частота $\omega=6.3678$, т.е. частота уменьшилась в полтора раза по сравнению с критической. Исходная система (6) интегрировалась с начальными условиями, соответ-

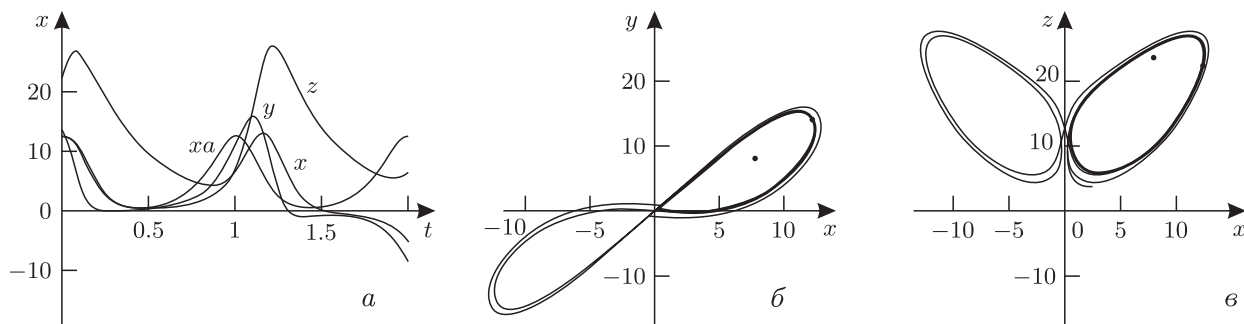


Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений для системы Лоренца.

ствующими $\xi(0)$, $\eta(0)$, $\zeta(0)$. Аналитическое решение в исходных переменных получено с использованием (10), (11). На рис. 2, а приведены графики изменения координат x , y , z во времени, а также для сравнения одна координата аналитического решения xa . Аналитическое и численное решения близки по форме, но отличаются по частоте. Траектория в течение одного периода находится вблизи предельного цикла, а далее уходит от него, поскольку предельный цикл неустойчив. На рис. 2, б, в жирным линиями показаны аналитически построенные предельные циклы, тонкими линиями — численные решения в двух проекциях на плоскости (x, y) и (x, z) . Точками отмечены начальные условия и координаты стационарной точки для критического значения параметра. Отметим, что построенный предельный цикл с $A=0.7$ имеет значительную амплитуду, является существенно нелинейным и приближается к гомоклинической траектории, при этом процесс построения последовательных приближений является сходящимся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено обоснование возможности построения аналитических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений в виде формальных рядов по степеням параметра, которые оказываются сходящимися при “немалых” значениях последнего. Вопрос о выборе параметра, видимо, должен решаться индивидуально для каждой задачи. В качестве параметра может выступать как естественный параметр в уравнении Ван дер Поля, так и амплитуда основной гармоники, как в системе Лоренца. Проведено сравнение с результатами численного решения, которое показало улучшение точности в следующих приближениях в широком диапазоне изменения параметра для обоих примеров.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке научно-образовательных школ МГУ имени М.В. Ломоносова: “Фундаментальные и прикладные исследования космоса” и “Математические методы анализа сложных систем” (проект 23-Sh01-11).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматгиз, 1963. — 410 с.
2. Малкин, И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин. — М. : Гостехиздат, 1956. — 491 с.
3. Журавлев, В.Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов ; под ред. А.Ю. Ишлинского. — М. : Наука, 1988. — 325 с.
4. Гребеников, Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. — М. : Наука, 1979. — 434 с.
5. Гукенхеймер, Д. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс ; пер. с англ. А.П. Иванова ; под ред. А.Д. Морозова. — М.—Ижевск : Ин-т компьют. исслед., 2002. — 560 с.
6. Strogatz, S. Nonlinear Dynamics and Chaos / S. Strogatz. — Perseus Books, 1994.
7. Буданов, В.М. Метод неопределённых частот / В.М. Буданов // Фунд. и прикл. математика. — 2018. — Т. 22, № 2. — С. 59–71.
8. Буданов, В.М. Применение метода неопределённых частот для анализа двухпланетной задачи / В.М. Буданов // Докл. РАН. Физика, техн. науки. — 2021. — Т. 501, № 1. — С. 33–37.

METHOD FOR CONSTRUCTING PERIODIC SOLUTIONS
OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. M. Budanov

MSU Research Institute of Mechanics, Moscow, Russia

e-mail: vlbudanov@gmail.com

A justification is given for the analytical method for constructing periodic solutions for nonlinear systems of ordinary differential equations of polynomial type. Periodic solutions are constructed in the form of Fourier series, in which the coefficients are polynomials depending on the parameter without the assumption of its smallness. Two examples are considered — the van der Pol equation and the Lorentz system.

Keywords: periodic solution, nonlinear system, successive approximations.

FUNDING

This work was carried out with financial support from scientific and educational schools of Lomonosov Moscow State University “Mathematical methods of analysis of complex systems”, and “Fundamental and applied space research” (project no. 23-Sh01-11).

REFERENCES

1. Bogoliubov, N.N. and Mitropolsky, Yu.A., *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1961.
2. Malkin, I.G., *Nekotorye zadachi teorii nelineinykh kolebaniy* (Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations), Moscow: GITTL, 1956.
3. Zhuravlev, V.F. and Klimov, D.M., *Prikladnye metody v teorii kolebaniy* (Applied Methods in the Theory of Oscillations), Moscow: Nauka, 1988.
4. Grebenikov, E.A. and Ryabov, Yu.A., *Constructive Methods in the Analysis of Nonlinear Systems*, Moscow: Mir Publishers, 1983.
5. Gukenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, New York: Springer, 1983.
6. Strogatz, S., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, 1994.
7. Budanov, V.M., Undefined frequencies method, *J. Mat. Sci.*, 2021, vol. 253, no. 6, pp. 796–805.
8. Budanov, V.M., Application of the undefined frequency method for the analysis of a two planet problem, *Dokl. Phys.*, 2021, vol. 66, no. 12, pp. 341–344.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.929

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ
РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ
ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

© А. А. Леваков¹, Д. А. Долженкова²

¹Белорусский государственный университет, г. Минск

²ООО “ХайКво Солошенс”, г. Минск

e-mail: ¹levakov123321@gmail.com, ²dar.ya.d.a105@gmail.com

Поступила в редакцию 24.11.2023 г., после доработки 17.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Под стохастической дифференциально-разностной гибридной системой понимается система взаимосвязанных переменных, в которой динамика одних переменных описывается при помощи стохастических дифференциальных уравнений, а других — посредством разностных уравнений. Рассматриваются системы с разностными уравнениями двух видов: уравнением, описывающим процесс наблюдения с мультипликативным винеровским шумом, и уравнением с запаздыванием. Доказаны теоремы существования и единственности решений каждой из систем. Основные условия на параметры систем — локальные условия Липшица и линейный порядок роста.

Ключевые слова: гибридная система, стохастическое уравнение, существование, единственность.

DOI: 10.31857/S0374064124050033, EDN: LBOJWJ

ВВЕДЕНИЕ

Нередко при математическом моделировании реальных процессов встречаются процессы, которые имеют как детерминированный, так и стохастический характер, и ведут себя как непрерывно, так и дискретно. Отсюда возникает потребность в исследовании достаточно нового класса систем — стохастических дифференциально-разностных гибридных систем. Гибридные системы активно применяются в следующих областях: биоинформатика [1], робототехника [2, 3], коммуникационные сети [4], экономика [5] и финансовые рынки [6]. Процессы, происходящие на финансовом рынке, более чем в любой другой области зависят от ряда случайных факторов, таких как получаемая участниками рынка информация, их субъективные мнения и предпочтения, поэтому для моделирования таких процессов используют именно гибридные системы.

В большинстве работ, посвящённых изучению гибридных систем, авторы ограничиваются рассмотрением линейных гибридных систем [7–11], для которых вопрос разрешимости задачи вытекает, как правило, из известных теорем существования и единственности решений дифференциальных и разностных уравнений. Значительно меньше известно исследований проблемы существования решений для нелинейных стохастических дифференциально-разностных гибридных систем [12]. В данной статье доказаны теоремы существования и единственности для нелинейных стохастических дифференциально-разностных гибридных систем двух типов.

1. ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА С РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ВИД ПРОЦЕССА НАБЛЮДЕНИЯ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ВИНЕРОВСКИМ ШУМОМ

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$; $W(t)$, $W_1(t)$ — независимые d - и r -мерные $(\mathcal{F}_t)$ -броуновские движения соответственно; функции $g: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$, $q: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$, которые при каждом фиксированных (x, y) измеримы по Борелю и при каждом фиксированных t непрерывны по (x, y) ; функция $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, которая при каждом фиксированных (t, ω) непрерывна по (x, y) и при каждом фиксированных (x, y) процесс $f(\cdot, x, y, \cdot)$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерим и $(\mathcal{F}_t)$ -согласован; $(\mathcal{F}_0)$ -измеримый случайный вектор $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$; $(\beta([0, 1]) \times \mathcal{F})$ -измеримый $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный процесс $u: [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, $\beta(\mathbb{R}_+)$ — борелевская σ -алгебра на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Рассмотрим стохастическую дифференциально-разностную гибридную систему вида

$$dx(t, \omega) = f(t, x(t, \omega), y(t, \omega), \omega)dt + g(t, x(t, \omega), y(t, \omega))dW(t, \omega), \quad (1)$$

$$y(t+1, \omega) = h(t, x(t, \omega), y(t, \omega)) + q(t, x(t, \omega), y(t, \omega))W_1(t+1, \omega). \quad (2)$$

Определение 1. Под *решением системы* (1), (2) с начальными условиями $\eta(\omega)$, $u(t, \omega)$ понимаем пару процессов $(x(t, \omega), y(t, \omega))$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $x(t, \omega)$ — d -мерный непрерывный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный случайный процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $(\mathcal{F}_t)$, $y(t, \omega)$ — $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измеримый r -мерный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный случайный процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $(\mathcal{F}_t)$, таких, что для каждого $t \geq 0$ $\int_0^t \|f(s, x(s, \omega), y(s, \omega), \omega)\| ds < +\infty$, $\int_0^t \|g(s, x(s, \omega), y(s, \omega))\|^2 ds < +\infty$ п. н. и для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ с вероятностью, равной единице, имеют место равенства

$$\begin{aligned} x(t, \omega) &= \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_0^t g(s, x(s, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega), \\ y(t+1, \omega) &= h(t, x(t, \omega), y(t, \omega)) + q(t, x(t, \omega), y(t, \omega))W_1(t+1), \\ y(t, \omega) &= u(t, \omega), \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

где первый интеграл является интегралом Лебега, а второй — интегралом Ито.

Говорят, что гибридная система имеет единственное решение с начальными условиями η , u , если для любых двух решений $(x_1(t, \omega), y_1(t, \omega))$, $(x_2(t, \omega), y_2(t, \omega))$ с начальными условиями η , u имеем $x_1(t, \omega) = x_2(t, \omega)$, $y_1(t, \omega) = y_2(t, \omega)$ при каждом $t \in [0, +\infty)$ с вероятностью, равной единице.

Будем говорить, что отображения f , g удовлетворяют **условию А)**, если:

A₁) существует вещественное отображение $M_1(b, \omega)$, $(b, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, такое, что при каждом фиксированном b отображение $M_1(b, \cdot)$ $(\mathcal{F})$ -измеримо, $E(M_1(b, \omega)) < +\infty$ (E — математическое ожидание), и для любых $b \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq b, \|x\| \leq b, \|y\| \leq b} \|f(t, x, y, \omega)\| \leq M_1(b, \omega);$$

A₂) существует вещественное отображение $k(t, b, \omega)$, определённое на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$, такое, что при каждом фиксированном $b \in \mathbb{R}_+$ процесс $k(\cdot, b, \cdot)$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерим, и для любых $b \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$ $E(\int_0^a k(t, b, \omega) dt) < +\infty$, при всех $b \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x, x_1 \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$, $\|x\| \leq b$, $\|x_1\| \leq b$, $\|y\| \leq b$, $\omega \in \Omega$ справедливо неравенство

$$2(x - x_1)^T(f(t, x, y, \omega) - f(t, x_1, y, \omega)) + \|g(t, x, y) - g(t, x_1, y)\|^2 \leq k(t, b, \omega)\|x - x_1\|^2.$$

Будем говорить, что отображения f , g , h и q удовлетворяют **условию В)**, если существуют вещественное измеримое по Борелю монотонно возрастающее отображение $M(t)$ и постоянная $\beta > 2$ такие, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$, $\omega \in \Omega$ выполняются неравенства

$$2x^T f(t, x, y, \omega) + \|g(t, x, y)\|^2 \leq M(t)(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2),$$

$$\|h(t, x, y)\|^2 + \|q(t, x, y)\|^\beta \leq M(t)(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Лемма 1 [13]. Пусть $\xi(t)$ — непрерывный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный неотрицательный процесс, σ — момент остановки, $\sigma(\omega) < +\infty$ п. н., $b \in \mathbb{R}_+$, и пусть для любого момента остановки $0 \leq \tau \leq \sigma$ $E(\xi(\tau)) \leq b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \sigma} \xi(t) \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{b}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Возьмём $\tau_1 = \sigma \wedge \inf\{t \geq 0: \xi(t) \geq \varepsilon\}$. Тогда $\{\omega: \sup_{0 \leq t \leq \sigma} \xi(t) \geq \varepsilon\} = \{\omega: \xi(\tau_1) \geq \varepsilon\}$. Теперь требуемое неравенство вытекает из неравенства Чебышёва.

Лемма 2 [14, с. 82]. Пусть функция $y = V(t, \omega, z)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^d$, при каждом фиксированном z $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерима, а при каждом фиксированном (t, ω) непрерывна по z и $(\mathcal{F}_t)$ -измерима при каждом фиксированном (t, z) ; функция $z: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерима и $(\mathcal{F}_t)$ -согласована. Тогда отображение $(t, \omega) \rightarrow V(t, \omega, z(t, \omega))$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измеримо и $(\mathcal{F}_t)$ -согласовано.

Теорема 1. Если отображения f , g , h и q удовлетворяют условиям *A)* и *B)*, то для любого $(\mathcal{F}_0)$ -измеримого вектора $\eta(\omega)$ и для любого $(\beta([0, 1]) \times \mathcal{F})$ -измеримого $(\mathcal{F}_t)$ -согласованного случайного процесса $u(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, таких, что

$$E(\|\eta(\omega)\|^2) < +\infty, \quad E\left(\int_0^1 \|u(t, \omega)\|^2 dt\right) < +\infty, \quad (3)$$

система (1), (2) имеет единственное решение с начальными условиями η , u .

Доказательство. На промежутке $[0, 1]$ возьмём $y(t, \omega) = u(t, \omega)$. Для каждого натурального n определим процессы $x_n(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, следующим образом: для $t \in [0, 1/n]$

$$x_n(t, \omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, \eta(\omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_0^t g(s, \eta(\omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega),$$

а для $t \in [k/n, (k+1)/n]$, $k = \overline{1, n-1}$,

$$x_n(t, \omega) = x_n(k/n, \omega) + \int_{k/n}^t f(s, x_n(k/n, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_{k/n}^t g(s, x_n(k/n, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega),$$

где интегралы по ds при каждом ω являются интегралами Лебега, а по $dW(s, \omega)$ — интегралами Ито.

Процесс $x_n(t, \omega)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_n(t, \omega) &= \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x_n(s, \omega) + p_n(s, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \\ &+ \int_0^t g(s, x_n(s, \omega) + p_n(s, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p_n(t, \omega) = x_n(\kappa_n(t), \omega) - x_n(t, \omega)$, $\kappa_n(t) = [tn]/n$ ($[tn]$ — целая часть числа tn). При сделанных предположениях легко видеть с учётом леммы 2, что процессы $x_n(t, \omega)$ определены на промежутке $[0, 1]$, непрерывны и $(\mathcal{F}_t)$ -согласованны. Возьмём $b \geq 1$. Определим τ_n^b как момент первого выхода процесса $x_n(t, \omega)$ из шара $\|x\| \leq b/6$, $\tau_n^b = \inf\{t \in [0, 1] : \|x_n(t, \omega)\| > b/6\}$, $\tau_y^b = \inf\{t \in [0, 1] : \|y(t, \omega)\| > b/6\}$, тогда $\|p_n(t, \omega)\| \leq b/3$ при $0 \leq t \leq \tau_n^b \wedge \tau_y^b$. Из определения процесса $p_n(t, \omega)$ следует, что на промежутке $[\kappa_n(t), \kappa_n(t) + 1/n)$ его можно представить в виде

$$-p_n(t, \omega) = \int_{\kappa_n(t)}^t f(s, x_n(\kappa_n(t)), y(s, \omega), \omega) ds + \int_{\kappa_n(t)}^t g(s, x_n(\kappa_n(t)), y(s, \omega)) dW(s, \omega).$$

Пусть $v_n(t, \omega) = \|p_n(t, \omega) 1_{A_n^b}(t, \omega)\|$, где $A_n^b = \{(t, \omega) : 0 \leq t \leq \tau_n^b \wedge \tau_y^b\}$,

$$1_{A_n^b}(t, \omega) = \begin{cases} 1, & (t, \omega) \in A_n^b, \\ 0, & (t, \omega) \notin A_n^b. \end{cases}$$

Возьмём произвольное значение $t \in [0, 1]$. Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, ввиду результата [15, с. 118, замечание 7] и условия теоремы, имеем

$$\begin{aligned} P\{v_n(t, \omega) \geq 2\varepsilon\} &\leq P\left\{1_{A_n^b}(t, \omega) \int_{\kappa_n(t)}^t \|f(s, x_n(\kappa_n(t)), y(s, \omega), \omega)\| ds \geq \varepsilon\right\} + \\ &+ P\left\{1_{A_n^b}(t, \omega) \int_{\kappa_n(t)}^t \|g(s, x_n(\kappa_n(t)), y(s, \omega))\|^2 ds \geq \delta\right\} + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \leq \\ &\leq P\left\{1_{A_n^b}(t, \omega) \frac{M_1(b, \omega)}{n} \geq \varepsilon\right\} + P\left\{1_{A_n^b}(t, \omega) \frac{M(1)(1+2b^2)}{n} \geq \delta\right\} + \frac{\delta}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из неравенства (5) вытекает, что для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется соотношение

$$v_n(t, \omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \quad \left(\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} - \text{сходимость по вероятности} \right). \quad (6)$$

Поскольку $v_n(t, \omega) \leq b/3$, то из (6), используя теорему Фубини и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем, что для любых $b \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_0^{\tau_n^b \wedge \tau_y^b} \|p_n(t, \omega)\| dt\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 E(v_n(t, \omega)) dt = 0. \quad (7)$$

Временно зафиксируем n , m и положим

$$z_n(t) = x_n(t, \omega), \quad z_m(t) = x_m(t, \omega), \quad p(t) = p_n(t, \omega), \quad q(t) = p_m(t, \omega),$$

$$\alpha(t, b, \omega) = \int_0^t k(s, b, \omega) ds, \quad \psi(t, b, \omega) = \exp\{-\alpha(t, b, \omega)\},$$

$$\gamma_{n,m,y} = \tau_n^b \wedge \tau_m^b \wedge \tau_y^b, \quad y(t) = y(t, \omega), \quad \psi(t, b, \omega) = \psi(t).$$

Используя формулу Ито, имеем

$$\begin{aligned} \psi(t \wedge \gamma_{n,m,y}) \|z_n(t \wedge \gamma_{n,m,y}) - z_m(t \wedge \gamma_{n,m,y})\|^2 &= \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} \psi(s) [-k(s, b, \omega) \|z_n(s) - z_m(s)\|^2 + \\ &+ 2(z_n(s) - z_m(s))^T (f(s, z_n(s) + p(s), y(s), \omega) - f(s, z_m(s) + q(s), y(s), \omega)) + \end{aligned}$$

$$+ \|g(s, z_n(s) + p(s), y(s)) - g(s, z_m(s) + q(s), y(s))\|^2] ds + \\ + \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} 2\psi(s)(z_n(s) - z_m(s))^T (g(s, z_n(s) + p(s), y(s)) - g(s, z_m(s) + q(s), y(s))) dW(s).$$

Отсюда с учётом условия A_2) получаем

$$\begin{aligned} & \psi(t \wedge \gamma_{n,m,y}) \|z_n(t \wedge \gamma_{n,m,y}) - z_m(t \wedge \gamma_{n,m,y})\|^2 \leq \\ & \leq \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} \psi(s) [k(s, b, \omega) (\|z_n(s) + p(s) - z_m(s) - q(s)\|^2 - \|z_n(s) - z_m(s)\|^2) + \\ & + 2(-p(s) + q(s))^T (f(s, z_n(s) + p(s), y(s), \omega) - f(s, z_m(s) + q(s), y(s), \omega))] ds + \\ & + \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} 2\psi(s)(z_n(s) - z_m(s))^T (g(s, z_n(s) + p(s), y(s)) - g(s, z_m(s) + q(s), y(s))) dW(s) \leq \\ & \leq \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} C(s, b, \omega) (\|p(s)\| + \|q(s)\|) ds + \\ & + \int_0^{t \wedge \gamma_{n,m,y}} 2\psi(s)(z_n(s) - z_m(s))^T (g(s, z_n(s) + p(s), y(s)) - g(s, z_m(s) + q(s), y(s))) dW(s), \end{aligned}$$

где $C(t, b, \omega) = 2bk(t, b, \omega) + 4M_1(b, \omega)$. Возвращаясь к предыдущим обозначениям, из последнего неравенства для любого $b \in \mathbb{R}_+$ и для любого $(\mathcal{F}_t)$ -момента остановки τ , $0 \leq \tau \leq \gamma_{n,m,y}$, имеем неравенство

$$\begin{aligned} & E(\exp\{-\alpha(\tau, b)\} \|x_n(\tau, \omega) - x_m(\tau, \omega)\|^2) \leq \\ & \leq E\left(\int_0^{\tau_y^b \wedge \tau_n^b} C(s, b, \omega) \|p_n(s, \omega)\| ds + \int_0^{\tau_y^b \wedge \tau_m^b} C(s, b, \omega) \|p_m(s, \omega)\| ds\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Из условий теоремы следует, что для каждого $b \in \mathbb{R}_+$

$$E\left(\int_0^1 C(t, b, \omega) dt\right) = L(b) < +\infty. \quad (9)$$

Покажем, что при каждом фиксированном $b \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_0^{\tau_n^b} \|p_n(t, \omega)\| C(t, b, \omega) dt\right) = 0. \quad (10)$$

Для каждого натурального i представим выражение под знаком предела в (10) в виде

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^{\tau_n^b} \|p_n(t, \omega)\| C(t, b, \omega) dt\right) &= E\left(\int_0^{\tau_n^b} \|p_n(t, \omega)\| C(t, b, \omega) 1_{B_{1i}}(t, \omega) dt\right) + \\ &+ E\left(\int_0^{\tau_n^b} \|p_n(t, \omega)\| C(t, b, \omega) 1_{B_{2i}}(t, \omega) dt\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $B_{1i} = \{(t, \omega) : C(t, b, \omega) > i\}$, $B_{2i} = \{(t, \omega) : C(t, b, \omega) \leq i\}$.

Из (9) имеем $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_{1i}) = 0$ (здесь μ — мера Лебега). Отсюда и из теоремы 3.1 в [16, с. 11] следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать i таким образом, чтобы первое слагаемое в правой части равенства (11) оказалось бы меньше $\varepsilon/2$. Зафиксируем такое i , а затем, используя (7), выберем номер N_ε так, чтобы второе слагаемое в (11) оказалось бы меньше $\varepsilon/2$ при $n \geq N_\varepsilon$. Отсюда и из равенства (11) следует неравенство (10).

В силу (8), (10) и леммы 1 для любого $b > 0$ имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq \gamma_{n,m,y}} \exp\{-\alpha(t, b, \omega)\} \|x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)\|^2 \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Множитель $\exp\{-\alpha(t, b, \omega)\}$ можно опустить, так как он не зависит от n и m . Отсюда следует соотношение

$$\sup_{0 \leq t \leq \gamma_{n,m,y}} \|x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)\| \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (12)$$

Снова временно положим

$$\begin{aligned} z(t) &= x_n(t, \omega), \quad \psi_1(t) = \exp\{-\alpha_1(t) - \|\eta(\omega)\|^2 - \alpha_2(t, \omega)\}, \\ \alpha_1(t) &= \int_0^t M(s) ds, \quad \alpha_2(t, \omega) = \int_0^t M(s) \|y(s)\|^2 ds, \quad p(t) = p_n(t, \omega). \end{aligned}$$

С учётом формулы Ито и условия В) имеем

$$\begin{aligned} & \psi_1(t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b) (1 + \|z(t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b)\|^2) \leq \exp\{-\|\eta\|^2\} (1 + \|\eta\|^2) + \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b} \psi_1(s) (M(s) (\|z(s) + p(s)\|^2 - \|z(s)\|^2) - 2p(s)^T f(s, z(s) + p(s), y(s), \omega)) ds + \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b} 2\psi_1(s) z(s)^T g(s, z(s) + p(s), y(s)) dW(s) \leq \\ & \leq \exp\{-\|\eta\|^2\} (1 + \|\eta\|^2) + \int_0^{t \wedge \tau_n^b \wedge \tau_y^b} C_1(b, \omega) \|p(s)\| ds + \int_0^{t \wedge \tau_n^b} 2\psi_1(s) z(s)^T g(s, z(s) + p(s), y(s)) dW(s), \end{aligned}$$

где

$$C_1(b, \omega) = bM(1) + 2M_1(b, \omega).$$

Так как $\sup_{\|z\| \in [0, +\infty)} \exp\{-\|z\|^2\} (1 + \|z\|^2) = 1$, то из последнего неравенства для любого момента остановки τ , $0 \leq \tau \leq \tau_n^b \wedge \tau_y^b$, следует, что

$$E(\psi_1(\tau) (1 + \|x_n(\tau)\|)^2) \leq 1 + E\left(\int_0^{\tau_n^b \wedge \tau_y^b} C_1(b, \omega) \|p_n(s)\| ds\right).$$

Соотношение (10) справедливо и после замены процесса $C(t, b, \omega)$ на $C_1(b, \omega)$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_0^{\tau_n^b \wedge \tau_y^b} C_1(b, \omega) \|p_n(s, \omega)\| ds\right) = 0.$$

Для любого $b > 0$ существует $\nu(b) > 0$ такое, что для любого $n \geq \nu(b)$ выполняется неравенство $E(\int_0^{\tau_n} C_1(b, \omega) \|p_n(t, \omega)\| dt) \leq 1$. Для всех $n \geq \nu(b)$ имеем $E(\psi_1(\tau)(\|x_n(\tau, \omega)\|^2 + 1)) \leq 2$. Для любого $d > 0$ и всех $n \geq \nu(b)$ согласно лемме 1 выполняется неравенство

$$P\left\{\sup_{t \leq \tau_n^b \wedge \tau_y^b} \psi_1(t)(\|x_n(t, \omega)\|^2 + 1) \geq d\right\} \leq \frac{2}{d},$$

из которого имеем

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{n \geq \nu(b)} P\left\{\sup_{t \leq \tau_y^b \wedge \tau_n^b} \psi_1(t)\|x_n(t, \omega)\|^2 \geq b\right\} = 0. \quad (13)$$

Из соотношения (13) вытекает равенство

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{n \geq \nu(b)} P\{\tau_n^b < 1\} = 0. \quad (14)$$

Действительно, если предположить, что равенство (14) не имеет места, то существуют число $r_0 > 0$ и последовательности натуральных чисел $m_i \rightarrow \infty$, $n_i \rightarrow \infty$, $n_i \geq \nu(m_i)$, такие, что $P\{\tau_{n_i}^{m_i} < 1\} \geq r_0$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Так как $E(\int_0^1 \|y(t, \omega)\|^2 dt) < +\infty$, а процесс $\psi_1(t, \omega)$ не зависит от m_i , то $\lim_{i \rightarrow \infty} P\{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|y(t, \omega)\| \leq m_i\} = 1$, $\lim_{i \rightarrow \infty} P\{\psi_1(1, \omega)m_i \geq 36\} = 1$. Отсюда и из соотношения (13) получаем противоречивое соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{n \geq \nu(b)} P\left\{\sup_{t \leq \tau_y^b \wedge \tau_n^b} \psi_1(t)\|x_n(t, \omega)\|^2 \geq b\right\} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} P\left\{\sup_{t \leq \tau_{n_i}^{m_i} \wedge \tau_y^{m_i}} \psi_1(t)\|x_{n_i}(t, \omega)\|^2 \geq m_i\right\} \geq \\ &\geq \liminf_{i \rightarrow \infty} P\left\{\frac{1}{36}\psi_1(\tau_{n_i}^{m_i})\|x_{n_i}(\tau_{n_i}^{m_i}, \omega)\|^2 \geq m_i, \tau_{n_i}^{m_i} < 1, \sup_{0 \leq t \leq 1} \|y(t, \omega)\| \leq m_i\right\} \geq \\ &\geq \liminf_{i \rightarrow \infty} P\left\{\frac{1}{36}\psi_1(1)m_i \geq 1, \tau_{n_i}^{m_i} < 1, \sup_{0 \leq t \leq 1} \|y(t, \omega)\| \leq m_i\right\} \geq r_0/2 > 0. \end{aligned}$$

Из (12) и (14) имеем

$$\sup_{t \in [0, 1]} (\|x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)\|) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (15)$$

Члены последовательности $x_n(t, \omega)$, $(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega$, являются случайными величинами, определёнными на Ω со значениями в пространстве $C([0, 1], \mathbb{R}^d)$ с нормой $\|\cdot\| = \sup_{t \in [0, 1]} \|\psi(t)\|$. Из соотношения (15) вытекает, что последовательность $x_n(t, \omega)$ является фундаментальной по вероятности. Следовательно, существует непрерывный процесс $x(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, такой, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} (\|x_n(t, \omega) - x(t, \omega)\|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (16)$$

Так как $\|x_n(\kappa_n(t), \omega) - x(t, \omega)\| \leq \|x_n(t, \omega) - x(t, \omega)\| + \|x_n(\kappa_n(t), \omega) - x_n(t, \omega)\| = \|p_n(t, \omega)\| + \|x_n(t, \omega) - x(t, \omega)\|$, то, используя соотношения (5), (14), (16), получаем, что

$$\sup_{t \in [0, 1]} (\|x_n(\kappa_n(t), \omega) - x(t, \omega)\|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (17)$$

Процесс $x(t, \omega)$ является $(\mathcal{F}_t)$ -согласованным, так как такими являются процессы $x_n(t, \omega)$. Пусть $b \in \mathbb{R}_+$, $\tau(b, \omega) = \inf\{t: \|x(t, \omega)\| > b, \|y(t, \omega)\| > b\}$. Зафиксируем $t \in \mathbb{R}_+$ и выберем под-

последовательность $x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s), \omega)$ последовательности $x_n(\kappa_n(s), \omega)$, сходящуюся равномерно по $s \in [0, t]$ п. н. На основании теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\left\| \int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} (g(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s), \omega), y(s)) - g(s, x(s, \omega), y(s))) dW(s) \right\|^2 \right) = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} \|g(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s), \omega), y(s)) - g(s, x(s, \omega), y(s))\|^2 ds \right) = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} (f(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s), \omega), y(s), \omega) - f(s, x(s, \omega), y(s), \omega)) ds \right\| = 0 \quad \text{п. н.} \end{aligned} \quad (18)$$

Для некоторой подпоследовательности $x_{n_{k_i}}(\kappa_{n_{k_i}}(s), \omega)$ выполняется равенство [15, с. 111]

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} g(s, x_{n_{k_i}}(\kappa_{n_{k_i}}(s), y(s))) dW(s) = \int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} g(s, x(s, \omega), y(s)) dW(s) \quad \text{п. н.} \quad (19)$$

Из равенств (4), (18), (19) для любой последовательности $b_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$ имеем

$$x(t \wedge \tau(b_l, \omega), \omega) = \eta(\omega) + \int_0^{t \wedge \tau(b_l, \omega)} f(s, x(s, \omega), y(s), \omega) ds + \int_0^{t \wedge \tau(b_l, \omega)} g(s, x(s, \omega), y(s)) dW(s) \quad \text{п. н.} \quad (20)$$

Из соотношений (14), (17) и $\lim_{l \rightarrow +\infty} P\{\tau_y^{b_l} < 1\} = 1$ следует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\tau(b_l, \omega) \wedge t) = t \quad \text{п. н.}$$

Переходя к пределу в (20) при $l \rightarrow \infty$, убеждаемся, что при каждом $t \in [0, 1]$ с вероятностью, равной единице,

$$x(t, \omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_0^t g(s, x(s, \omega), y(s, \omega)) dW(s). \quad (21)$$

Определим на промежутке $[1, 2]$ процесс $u(t, \omega)$ следующим образом:

$$u(t, \omega) = h(t-1, x(t-1, \omega), u(t-1, \omega)) + q(t-1, x(t-1, \omega), u(t-1, \omega))W_1(t, \omega).$$

Из условий теоремы 1 и из леммы 2 следует, что процесс $u(t, \omega)$ является $(\beta([1, 2]) \times \mathcal{F})$ -измеримым и $(\mathcal{F}_t)$ -согласованным. Положим для $t \in [1, 2]$ $y(t, \omega) = u(t, \omega)$.

Покажем, что $E(\|x(1, \omega)\|)^2 < +\infty$ и $E(\int_1^2 \|y(s)\|^2 ds) < +\infty$. Действительно, из условия А) вытекает

$$\begin{aligned} E(\|x(t \wedge \tau(b, \omega))\|^2) &= E(\|\eta\|^2) + E \left(\int_0^{t \wedge \tau(b, \omega)} (2x(s)^T f(s, x(s), y(s), \omega) + \|g(s, x(s), y(s))\|^2) ds \right) \leq \\ &\leq E(\|\eta(\omega)\|^2) + E \left(\int_0^1 M(1)(1 + \|y(s)\|^2) ds + \int_0^t M(1)\|x(s \wedge \tau(b, \omega))\|^2 ds \right). \end{aligned}$$

Отсюда, сначала используя лемму Гронуолла–Беллмана, а затем переходя к пределу в полученном неравенстве при $b \rightarrow \infty$, имеем

$$E(\|x(t, \omega)\|^2) \leq \exp\{M(1)\}(E(\|\eta\|^2) + E\left(\int_0^1 M(1)(1 + \|y(s)\|^2) ds\right)) \quad (22)$$

и, следовательно, $E(\|x(1, \omega)\|)^2 < +\infty$.

Пусть $2m$ — наименьшее чётное натуральное число, большее чем $2\beta/(\beta - 2)$. Далее, используя условие В), неравенства Гёльдера, Ляпунова, а также неравенства (3), (22) и равенство $E(\|W_1(t)\|^{2m}) = C_1 t^m$, получаем

$$\begin{aligned} E\left(\int_1^2 \|y(s, \omega)\|^2 ds\right) &\leq C_2 \left[E\left(\int_1^2 \|h(s-1, x(s-1), y(s-1))\|^2 ds\right) + \right. \\ &\quad \left. + E\left(\int_1^2 \|q(s-1, x(s-1), y(s-1))\|^2 \|W_1(s)\|^2 ds\right) \right] \leq \\ &\leq C_3 \left[E\left(\int_1^2 (1 + \|x(s-1)\|^2 + \|y(s-1)\|^2) ds\right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^2 (E(\|q(s-1, x(s-1), y(s-1))\|^\beta))^{2/\beta} (E(\|W_1(s)\|^{2m}))^{1/(2m)} ds \right] \leq \\ &\leq C_4 \left[E\left(\int_1^2 (1 + \|x\|^2 + \|y\|^2) ds\right) + \int_1^2 s^{1/2} E(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2) ds \right] \leq \\ &\leq C_5 E\left(\int_1^2 (1 + \|x(s-1)\|^2 + \|y(s-1)\|^2) ds\right) < +\infty, \end{aligned}$$

где C_i , $i = \overline{1, 5}$, — некоторые постоянные.

Затем для каждого натурального n определим процессы $x_n(t, \omega)$, $t \in [1, 2]$, следующим образом: для $t \in [1, 1 + 1/n]$

$$x_n(t, \omega) = x(1, \omega) + \int_1^t f(s, x(1, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \int_1^t g(s, x(1, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega),$$

а для $t \in [1 + k/n, 1 + (k+1)/n]$, $k = \overline{1, n-1}$,

$$\begin{aligned} x_n(t, \omega) &= x_n(1 + k/n, \omega) + \int_{1+k/n}^t f(s, x_n(1 + k/n, \omega), y(s, \omega), \omega) ds + \\ &\quad + \int_{1+k/n}^t g(s, x_n(1 + k/n, \omega), y(s, \omega)) dW(s, \omega). \end{aligned}$$

Далее, используя последовательность $x_n(t, \omega)$, $t \in [1, 2]$, аналогично $x(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, построим процесс $x(t, \omega)$ на промежутке $[1, 2]$. Продолжая, построим решение гибридной системы и на промежутке $[0, +\infty)$.

Покажем единственность построенного решения для рассматриваемой системы. Предположим, что система (2) имеет два решения $x_1(t, \omega)$, $y_1(t, \omega)$ и $x_2(t, \omega)$, $y_2(t, \omega)$ такие, что при каждом $t \in [0, 1]$ с вероятностью, равной единице, $y_1(t, \omega) = y_2(t, \omega) = z(t, \omega)$ и $x_1(0, \omega) = x_2(0, \omega)$. Пусть $\sigma_m^i = \inf\{t \in [0, 1] : \|x_i(t, \omega)\| > m\}$, $i = 1, 2$, $\epsilon(t, m, \omega) = \int_0^t k(s, m, \omega) ds$, $\psi(t, m, \omega) = \exp\{-\epsilon(t, m, \omega)\}$. Используя формулу Ито, имеем

$$\begin{aligned} & \psi(t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2, m, \omega) \|x_1(t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2) - x_2(t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2)\|^2 = \\ &= \int_0^{t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2} \psi(s) \left(2(x_1(s) - x_2(s))^T (f(s, x_1(s), z(s), \omega) - f(s, x_2(s), z(s), \omega)) - \right. \\ & \quad \left. - k(s, m, \omega) \|x_1(s) - x_2(s)\|^2 + \|g(s, x_1(s), z(s)) - g(s, x_2(s), z(s))\|^2 \right) ds + \\ & \quad + \int_0^{t \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2} \psi(s) 2(x_1(s) - x_2(s))^T (g(s, x_1(s), z(s)) - g(s, x_2(s), z(s))) dW(s). \end{aligned} \quad (23)$$

При каждом $m \in \mathbb{R}_+$ из (23), используя условие А), для любого момента остановки τ , $\tau \leq 1 \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2$, получаем $E(\psi(\tau, m, \omega) \|x_1(\tau, \omega) - x_2(\tau, \omega)\|^2) = 0$. Так как $\psi(\tau, m, \omega) \neq 0$, то $\|x_1(\tau, \omega) - x_2(\tau, \omega)\|^2 = 0$ п. н. Из последнего равенства вытекает, что с вероятностью, равной единице, имеет место равенство $x_1(\tau, \omega) = x_2(\tau, \omega)$, поэтому $x_1(t, \omega) = x_2(t, \omega)$ при каждом $t \in [0, \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2]$ п. н. Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2) = 1$ п. н., то отсюда следует, что для любого $t \in [0, 1]$ с этой же вероятностью имеет место равенство $x_1(t, \omega) = x_2(t, \omega)$, а на промежутке $[1, 2]$ — равенства $y_1(t, \omega) = y_2(t, \omega) = y(t, \omega)$. Продолжая такие рассуждения далее шаг за шагом, покажем, что решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают при каждом $t \in [0, +\infty)$ с вероятностью, равной единице. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= (-x_1^3(t) + x_2(t)y(t))dt + y(t)dW(t), \\ dx_2(t) &= (2tx_1^2(t) - t^2x_2(t) - x_1(t)y(t))dt + x_1(t)dW(t), \\ y(t+1) &= x_1(t) + tx_2(t) + y(t) + t^3W_1(t+1), \end{aligned}$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$, $W(t)$, $W_1(t)$ — одномерные процессы. Условие А) для этой системы вытекает из непрерывной дифференцируемости всех функций, кроме броуновских движений, входящих в систему. Так как для рассматриваемой системы $2x^T f(t, x, y) = -2(x_1^2 - tx_2)^2 \leq 0$, $\|g(t, x, y)\|^2 = y^2 + x_1^2$, $\|h\|^2 = (x_1 + tx_2 + y)^2$, $\|q\|^2 = t^6$, то ясно, что условие В) имеет место. Следовательно, для любых начальных условий, удовлетворяющих условиям теоремы 1, рассматриваемая система имеет единственное решение.

2. ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА С РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим гибридную систему вида

$$dx(t, \omega) = f(t, x(t, \omega), y(t, \omega), \omega) dt + g(t, x(t, \omega), y(t, \omega)) dW(t, \omega), \quad (24)$$

$$y(t, \omega) = h(t, x(t, \omega), y(t-1, \omega)). \quad (25)$$

Определение 2. Под решением системы (24), (25) с начальными условиями $\eta(\omega)$, $u(t, \omega)$, где $u: [-1, 0] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$ — $(\beta([-1, 0]) \times \mathcal{F})$ -измеримый $(\mathcal{F}_0)$ -согласованный процесс, понимаем пару процессов $(x(t, \omega), y(t, \omega))$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $x(t, \omega)$ — d -мерный непрерывный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный случайный процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком

$(\mathcal{F}_t)$, $y(t, \omega)$ — $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измеримый r -мерный $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный случайный процесс, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $(\mathcal{F}_t)$, такие, что для каждого $t \geq 0$ $\int_0^t \|f(s, x(s, \omega), y(s, \omega))\| ds < +\infty$, $\int_0^t \|g(s, x(s, \omega), y(s, \omega))\|^2 ds < +\infty$ п. н. и для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ с вероятностью, равной единице, имеют место равенства

$$\begin{aligned} x(t, \omega) &= \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s, \omega), y(t, \omega)) ds + \int_0^t g(s, x(s, \omega), y(t, \omega)) dW(s, \omega), \\ y(t, \omega) &= h(t, x(t, \omega), y(t-1, \omega)), \\ y(t, \omega) &= u(t, \omega), \quad t \in [-1, 0), \end{aligned}$$

где первый интеграл является интегралом Лебега, а второй — интегралом Ито.

Будем говорить, что отображения f , g и h удовлетворяют **условию A')**, если:

A₁') существует вещественное отображение $M_1(b, \omega)$, $(b, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, такое, что при каждом фиксированном b отображение $M_1(b, \cdot)$ $(\mathcal{F})$ -измеримо, $E(M_1(b, \omega)) < +\infty$, и для любых $b \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq b, \|x\| \leq b, \|y\| \leq b} \|f(t, x, h(t, x, y), \omega)\| \leq M_1(b, \omega);$$

A₂') существуют вещественные отображения $k(t, b, \omega)$, $k_1(t, b)$, определённые соответственно на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, такие, что при каждом фиксированном $b \in \mathbb{R}_+$ процесс $k(\cdot, b, \cdot)$ $(\beta(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ -измерим, а функция $k_1(\cdot, b)$ измерима по Борелю, и для любых $b \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$ $E(\int_0^a k^2(t, b, \omega) dt) < +\infty$, $E(\int_0^a k_1^2(t, b) dt) < +\infty$, при всех $b \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x, x_1 \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$, $\|x\| \leq b$, $\|x_1\| \leq b$, $\|y\| \leq b$, $\omega \in \Omega$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 2(x - x_1)^T (f(t, x, y, \omega) - f(t, x_1, y_1, \omega)) &\leq k(t, b, \omega) (\|x - x_1\|^2 + \|y - y_1\|^2), \\ \|g(t, x, y) - g(t, x_1, y_1)\|^2 &\leq k_1(t, b) (\|x - x_1\|^2 + \|y - y_1\|^2), \\ \|h(t, x, y) - h(t, x_1, y_1)\|^2 &\leq k_1(t, b) \|x - x_1\|^2. \end{aligned}$$

Будем говорить, что отображения f , g , h удовлетворяют **условию B')**, если существует вещественное измеримое по Борелю монотонно возрастающее отображение $M(t)$ такое, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$, $\omega \in \Omega$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} 2x^T f(t, x, y, \omega) &\leq M(t) (1 + \|x\|^2 + \|y\|^2), \\ \|g(t, x, y)\|^2 + \|h(t, x, y)\|^2 &\leq M(t) (1 + \|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Теорема 2. Если отображения f , g , h удовлетворяют условиям A') и B'), то для любого $(\mathcal{F}_0)$ -измеримого вектора $\eta(\omega)$ и для любого $(\beta([-1, 0]) \times \mathcal{F})$ -измеримого $(\mathcal{F}_0)$ -согласованного случайного процесса $u(t, \omega)$, $t \in [-1, 0]$, таких, что

$$E(\|\eta(\omega)\|^2) < +\infty, \quad E\left(\int_{-1}^0 \|u(t, \omega)\|^2 dt\right) < +\infty,$$

система (24), (25) имеет единственное решение с начальными условиями η , и.

Доказательство. На промежутке $[-1, 0)$ возьмём $y(t, \omega) = u(t, \omega)$. Для каждого натурального n определим процессы $x_n(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, следующим образом: для $t \in [0, 1/n]$

$$x_n(t, \omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, \eta(\omega), h(s, \eta(\omega)), y(s-1, \omega), \omega) ds + \\ + \int_0^t g(s, \eta(\omega), h(s, \eta(\omega)), y(s-1, \omega)) dW(s, \omega),$$

а для $t \in [k/n, (k+1)/n]$, $k = \overline{1, n-1}$,

$$x_n(t, \omega) = x_n(k/n, \omega) + \int_{k/n}^t f(s, x_n(k/n, \omega), h(s, x_n(k/n, \omega)), y(s-1, \omega), \omega) ds + \\ + \int_{k/n}^t g(s, x_n(k/n, \omega), h(s, x_n(k/n, \omega)), y(s-1, \omega)) dW(s, \omega).$$

При выполнении условий $A')$, $B')$ функции $f_1(t, x, y) = f(t, x, h(t, x, y))$, $h(t, x, y)$, $g_1(t, x, y) = g(t, x, h(t, x, y))$ удовлетворяют условиям $A)$, $B)$. Рассуждая далее так же, как и при доказательстве теоремы 1 по последовательности $x_n(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, можно построить измеримый $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный процесс $x(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, такой, что при каждом $t \in [0, 1]$ с вероятностью, равной единице,

$$x(t, \omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s, \omega), h(s, x(s, \omega)), y(s-1, \omega)) ds + \\ + \int_0^t g(s, x(s, \omega), h(s, x(s, \omega)), y(s-1, \omega)) dW(s).$$

Определим на отрезке $[0, 1]$ процесс $u(t, \omega)$ как

$$u(t, \omega) = h(t, x(t, \omega), y(t-1, \omega)).$$

Из условий теоремы и из леммы 2 следует, что процесс $u(t, \omega)$ является $(\beta([0, 1]) \times \mathcal{F})$ -измеримым и $(\mathcal{F}_t)$ -согласованным. Положим $y(t, \omega) = u(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$. На следующем шаге построим процесс $x(t, \omega)$ на отрезке $[1, 2]$, аналогично процессу $x(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$. Продолжая такие построения, мы шаг за шагом построим решение гибридной системы (24), (25) на промежутке $[0, +\infty)$. Определение и доказательство единственности решения для системы (24), (25) такие же, как и для системы (1), (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказаны теоремы существования и единственности решений для двух нелинейных стохастических дифференциально-разностных гибридных систем. Установленные теоремы применимы и к управляемым гибридным системам, содержащим управление вида $U(t, \omega)$ в правой части стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t, \omega) = f(t, x(t, \omega), y(t, \omega), U(t, \omega))dt + g(t, x(t, \omega), y(t, \omega))dW(t, \omega),$$

если $U(t, \omega)$ — измеримый $(\mathcal{F}_t)$ -согласованный процесс. Без существенных изменений могут быть получены теоремы существования и единственности для стохастических дифференциально-разностных гибридных систем с разностными уравнениями вида

$$y(k+1) = h(k, x(k), y(k)) + q(k, x(k), y(k))W_1(k+1)$$

или

$$y(k, \omega) = h(k, x(k, \omega), y(k-1, \omega)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shu, Q. Dynamical properties of a two-gene network with hysteresis / Q. Shu, R.G. Sanfelice // Information and Computation. — 2014. — V. 236. — P. 102–121.
2. Bullo, F. Modeling and controllability for a class of hybrid mechanical systems / F. Bullo, M. Zefran // IEEE Trans. Robot. Automat. — 2002. — V. 18, № 4. — P. 563–573.
3. Mills, J.K. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks / J.K. Mills, A.A. Goldenberg // IEEE Trans. Robot. Automat. — 1989. — V. 5. — P. 30–46.
4. Куржанский, А.Б. Отчет о 16-м Международном конгрессе ИФАК (IFAC) — Международной федерации по автоматическому управлению / А.Б. Куржанский // Автомат. и телемех. — 2006. — № 1. — С. 183–189.
5. Luenberger, D.G. Singular dynamic Leontief systems / D.G. Luenberger, A. Arbel // Econometrica. — 1977. — V. 45. — P. 991–995.
6. Управление равновесными случайными процессами на финансовых рынках / В.А. Деева, М.В. Аветисян, В.Н. Платонова, М.Я. Шапиро. — М. : Юриспруденция, 2007. — 136 с.
7. Марченко, В.М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В.М. Марченко, О.Н. Поддубная // Докл. РАН. — 2005. — Т. 404, № 4. — С. 465–469.
8. Марченко, В.М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем / В.М. Марченко, И.М. Борковская // Тр. БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информатика. — 2012. — № 6. — С. 7–10.
9. Марченко, В.М. Гибридные динамические системы с многомерным временем. Представление решений / В.М. Марченко, И.М. Борковская, О.Н. Пыжкова // Тр. БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информатика. — 2015. — № 6. — С. 3–9.
10. Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems / W.P.M.H. Heemels, B. De Schutter, J. Lunze, M. Lazar // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2010. — V. 368, № 1930. — P. 4937–4960.
11. Roesser, R.P. A discrete state-space model for linear image processing / R.P. Roesser // IEEE Trans. Automat. Control. — 1975. — V. AC-20. — P. 1–10.
12. Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions / G. Yin, X. Mao, C. Yuan, D. Cao // SIAM J. Math. Anal. — 2009. — V. 41, № 6. — P. 2335–2352.
13. Крылов, Н.В. Простое доказательство существования решения уравнения Ито с монотонными коэффициентами / Н.В. Крылов // Теория вероятн. и ее примен. — 1990. — Т. 35, вып. 3. — С. 576–580.
14. Леваков, А.А. Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васильковский. — Минск : БГУ, 2019. — 495 с.
15. Липцер, Р.Ш. Статистика случайных процессов / Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев. — М. : Наука, 1974. — 696 с.
16. Kisielewicz, M. Differential Inclusions and Optimal Control / M. Kisielewicz. — Dordrecht–Boston–London : Kluwer Academic Publishers, 1991. — 240 p.

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREMS FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE HYBRID SYSTEMS

A. A. Levakov¹, D. A. Dolzhenkova²¹Belarusian State University, Minsk, Belarus²LLC HiQo Solutions, Minsk, Belaruse-mail: ¹levakov123321@gmail.com, ²dar.ya.d.a105@gmail.com

A stochastic differential-difference hybrid system is a system of interacting variables whose dynamics are described by stochastic differential equations for some of them and difference equations for others. Systems with two types of difference equations are examined: first, a difference equation in the form of a process involving the multiplicative Wiener process, and second, a difference equation with delay. The existence and uniqueness theorems for both systems have been proven. The basic conditions on the system's parameters are local Lipschitz conditions and linear growth order.

Keywords: hybrid system, stochastic equation, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Shu, Q. and Sanfelice, R.G., Dynamical properties of a two-gene network with hysteresis, *Information and Computation*, 2014, vol. 236, pp. 102–121.
2. Bullo, F. and Zefran, M., Modeling and controllability for a class of hybrid mechanical systems, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 2002, vol. 18, no. 4, pp. 563–573.
3. Mills, J.K. and Goldenberg, A.A., Force and position control of manipulators during constrained motion tasks, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 1989, vol. 5, pp. 30–46.
4. Kurzhanskiy, A.B. Report on the XVI International Congress of the International Federation of Automatic Control, *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 166–171.
5. Luenberger, D.G. and Arbel, A., Singular dynamic Leontief systems, *Econometrica*, 1977, vol. 45, pp. 991–995.
6. Deeva, V.A., Avetisyan, M.V., Platonova, V.N., and Shapiro, M.Ya., *Upravlenie ravnovesnymi sluchajnymi processami na finansovyh rynkakh*, Moscow: Yurisprudenciya, 2007.
7. Marchenko, V.M. and Poddubnaya, O.N., Representation of solutions and relative controllability of linear differential-algebraic systems with many delays, *Doklady RAN (Doklady Mathematics)*, 2005, vol. 404, no. 4, pp. 465–469.
8. Marchenko, V.M. and Borkovskaya, I.M., Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems, *Trudy BGTU. Ser. 3. Fiziko-matematicheskie nauki i informatika* (Proceedings of BSTU. Physics and Mathematics, Informatics), 2012, no. 6, pp. 7–10.
9. Marchenko, V.M., Borkovskaya, I.M., and Pyzhkova, O.N., Hybrid dynamic 2D-systems. Representation of solutions, *Trudy BGTU. Ser. 3. Fiziko-matematicheskie nauki i informatika* (Proceedings of BSTU. Physics and Mathematics. Informatics), 2015, no. 6, pp. 3–9.
10. Heemels, W.P.M.H., De Schutter, B., Lunze, J., and Lazar, M., Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2010, vol. 368, no. 1930, pp. 4937–4960.
11. Roesser, R.P., A discrete state-space model for linear image processing, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1975, vol. AC-20, pp. 1–10.
12. Yin, G., Mao, X., Yuan, Ch., and Cao, D., Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions, *SIAM J. on Math. Anal.*, 2009, vol. 41, no. 6, pp. 2335–2352.
13. Krylov, N.V., A simple proof of the existence of a solution to the Itô equation with monotone coefficients, *Theory Probab. Appl.*, 1990, vol. 35, iss. 3, pp. 583–587.
14. Levakov, A.A. and Vaskovsky, M.M., *Stokhasticheskie differentsial'nye uravnenia i vkluchenia* (Stochastic differential equations and inclusion), Minsk, BSU, 2019.
15. Lipzer, R.S. and Sirjaev, A.N., *Statistika sluchainykh processov* (Statistics of Random Processes), Moscow: Nauka, 1974.
16. Kisielewicz, M., *Differential Inclusions and Optimal Control*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1991.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ТИПИЧНЫЕ ПРОВАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К РЕШЕНИЯМ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

© С. Н. Мелихов¹, Б. И. Сулейманов², А. М. Шавлуков³¹Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону¹Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ^{2,3}Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г. Уфаe-mail: ¹snmelihov@yandex.ru, ²bisul@mail.ru, ³aza3727@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.11.2023 г., после доработки 19.02.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Обоснованы формальные асимптотики, описывающие типичные провальные особенности сборки квазиклассических приближений к решениям двух вариантов интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера $-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} \pm 2|\Psi|^2\Psi$, где ε — малый параметр. При этом использованы идеология и факты математической теории катастроф, а также часть теоремы Ю.Ф. Коробейника, касающаяся аналитических при $h \rightarrow 0$ решений $G(h, u)$ линейного уравнения смешанного типа $hG''_{hh} = G''_{uu}$, которому эквивалентны образы годографа обоих вариантов систем уравнений таких квазиклассических приближений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение газовой динамики, уравнение мелкой воды, асимптотика, теория особенностей, теория катастроф, градиентная катастрофа, провальная особенность, сборка.

DOI: 10.31857/S0374064124050048, EDN: LBMSHZ

1. ВВЕДЕНИЕ. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Система квазиклассического приближения

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x + \alpha(h)h'_x = 0 \quad (1)$$

в применении к решениям нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) с малой дисперсией

$$-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} + K(|\Psi|^2)\Psi \quad (\alpha(h) = -2K'(h), \quad 0 < \varepsilon \ll 1) \quad (2)$$

находится следующим образом: подстановка в НУШ (2) анзаца $\Psi = h^{1/2} \exp\{i\varphi/\varepsilon\}$ даёт систему двух уравнений

$$h'_t + 2(h\varphi'_x)'_x = 0, \quad \varphi'_t + (\varphi'_x)^2 - K(h) = \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{h})''_{xx}}{\sqrt{h}},$$

откуда после дифференцирования второго уравнения по переменной x и замены $v = 2\varphi'_x$ получаем систему

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_h - 2K'(h)h'_x = 2\varepsilon^2 \left(\frac{(\sqrt{h})''_{xx}}{\sqrt{h}} \right)'_x. \quad (3)$$

Переходя в (3) к бездисперсионному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем систему квазиклассического приближения (1) с функцией $\alpha(h) = -2K'(h)$.

Замечание 1. При физически осмысленных значениях $h \geq 0$ система (1) является гиперболической при $\alpha(h) > 0$ и эллиптической при $\alpha(h) < 0$ с линией вырождения $h = 0$. Но с математической точки зрения можно и эллиптический случай рассматривать при $\alpha(h) > 0$, только считая при этом что h меняется в области $h \leq 0$. Именно так мы в этой статье и поступим, предполагая, что в малой окрестности точки $h = 0$ функция $\alpha(h)$ является аналитической и представляется в ней сходящимся рядом

$$\alpha(h) = 4 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h^j. \quad (4)$$

Как в эллиптическом, так и в гиперболическом случаях для решений системы (1) характерны разного рода точки сингулярностей, вблизи которых квазиклассические приближения к решениям (2) теряют пригодность — для правильного описания решений НУШ (2) в окрестностях точек сингулярностей нужно с помощью метода согласования [1] проводить отдельный анализ. Эти характерные сингулярности решений систем (1) анализировались, в частности, в [2–13], где, в отличие от множества других публикаций, посвящённых таким сингулярностям, существенно использован тот факт, что преобразование годографа, при котором переменные t и x рассматриваются как функции $t(h, v)$, $x(h, v)$ независимых переменных v и h , переводит систему (1) в линейную систему

$$x'_h = vt'_h - \alpha(h)t'_v, \quad x'_v = vt'_v - ht'_h. \quad (5)$$

В работах [5–13] для описания сингулярностей квазиклассических приближений (1) применяется подход, берущий своё начало от пионерской статьи А.Х. Рахимова [14], в которой анализировались типичные с точки зрения математической теории катастроф [15–20] сингулярности решений общей квазилинейной гиперболической 2×2 -системы

$$U'_t + A(U, t, x)U'_x = \Phi(U, t, x), \quad (6)$$

где $U = (u_1, u_2)$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — вектор-функции, $A(U, t, x)$ — 2×2 -матрица с двумя различными вещественными собственными значениями λ, μ (в предположении, что зависимость этих собственных значений от инвариантов Римана $r = r(U, t, x)$, $l = l(U, t, x)$ системы (6) удовлетворяет неравенству $\lambda'_r \lambda'_l \mu'_r \mu'_l \neq 0$). Суть данного подхода в применении к решениям системы (1) состоит в следующем.

Решения линейной системы (5) посредством соотношений

$$t = B'_v, \quad x = -B - hB'_h + vB'_v \quad (7)$$

могут быть выражены [3] через решения $B(h, v)$ скалярного уравнения

$$hB''_{hh} + 2B'_h = \alpha(h)B''_{vv}, \quad (8)$$

которое является гиперболическим при $h > 0$ и эллиптическим при $h < 0$. Поэтому обращение при конечных значениях $h = h_*$, $v = v_*$ и $t = t_*$, $x = x_*$ в нуль якобиана

$$J = x'_h t'_v - t'_h x'_v = h(t'_h)^2 - \alpha(h)(t'_v)^2 = h(B''_{hv})^2 - \alpha(h)(B''_{vv})^2 \quad (9)$$

отображений $(h, v) \rightarrow (t, x)$, определяемых через локально гладкие решения уравнения (8) формулами (7), сопровождается градиентной катастрофой — обращением в бесконечность производных $h'_x(t_*, x_*)$, $v'_x(t_*, x_*)$ и $h'_t(t_*, x_*)$, $v'_t(t_*, x_*)$ решений уравнений квазиклассического приближения (1). Согласно идеологии теории катастроф [18] для описания подобных

сингулярностей общего положения можно и нужно использовать лишь разложения в ряды Тейлора гладких в точках (h_*, v_*) решений $B(h, v)$ уравнения (8):

$$B = b_{00} + \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij}(h-h_*)^i(v-v_*)^j,$$

на коэффициенты b_{ij} которых помимо связей, диктуемых конкретным видом этого дифференциального уравнения, накладывается не более двух ограничений (по той причине, что катастрофы, отвечающие особенностям гладкого отображения (7), зависят лишь от двух так называемых [18] *управляющих* параметров — в данном случае от параметров t и x).

Оказалось, что с точки зрения описанного выше подхода в гиперболическом случае для множества решений (1) типичны ровно три особенности, связанные с обращением в нуль якобиана (9) (для более широкого множества решений квазилинейной гиперболической системы (6) аналогичный вывод был сделан А.Х. Рахимовым ещё в [14]). В области же эллиптичности решений (1) типична лишь одна такая особенность, описанная в [8]. При $h_* > 0$ все эти четыре особенности наследуются из типичных особенностей решений линеаризаций

$$h'_t + h_*v'_x + v_*h'_x = 0, \quad v'_t + v_*v'_x \pm 4h'_x = 0 \quad (10)$$

систем (1): при нулевых значениях управляющих параметров ростки отображений, описывающих данные типичные особенности решений системы (1), совпадают [13] с ростками отображений, отвечающих всем типичным особенностям решений линейных уравнений $u''_{TT} \mp u''_{XX} = 0$, которым эквивалентны линеаризации (10) — это ростки в нуле функций $A_\mu: w^{\mu+1}$ ($\mu = 2, 3$) и $D_4^\pm: w^2z \pm z^3$.

Но в работах [5, 12] было показано, что типичные с точки зрения теории особенностей дифференцируемых отображений градиентные катастрофы с решениями (1) происходят и в точках (h_*, v_*) с компонентой $h_* = 0$. Эти провальные сингулярности, связанные с особенностью типа сборки, из решений линейных уравнений не наследуются. В данной статье, посвящённой таким сингулярностям, получены следующие новые результаты.

1. В случае $\alpha(h) \equiv 4$ уравнения (1) принимают вид системы

$$h'_t + (hv)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x + 4h'_x = 0, \quad (11)$$

которая в области $h \geq 0$ совпадает с уравнениями мелкой воды (точнее, сводится к ним простыми растяжениями). Эта система при неотрицательных (неположительных) значениях h описанным выше образом задаёт квазиклассические приближения к интегрируемому (методом обратной задачи рассеяния) дефокусирующему НУШ $-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} - 2|\Psi|^2\Psi$ (фокусирующему НУШ $-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi$). Именно для системы (11) в данной статье будет строго обосновано существование её решений с типичными в смысле математической теории катастроф провальными асимптотиками, которые ранее на эвристическом уровне строгости для более общих систем (1) были рассмотрены в работах [5, 12].

2. В п. 2 описаны полные формальные провальные асимптотики решений этих более общих систем, при этом факты и построения излагаются методологически последовательнее и чётче, чем в [5, 12], к тому же устранён ряд мелких, но досадных опечаток в текстах [5, 12]. Эти асимптотики в данной статье обоснованы лишь для случая системы (11).

3. Помимо фактов математической теории катастроф соответствующее обоснование существенным образом опирается на частный случай теоремы Ю.Ф. Коробейника [21, § 1]. Подробное доказательство этой теоремы, возможно, нигде не было опубликовано, но авторам доказательство справедливости утверждения, актуального для данной статьи, этого частного случая теоремы Ю.Ф. Коробейника удалось получить независимо (см. п. 3).

2. ФОРМАЛЬНЫЕ ПРОВАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ

Для описания типичных с точки зрения теории катастроф формальных провальных асимптотик решений систем (1) будем использовать гладкие в окрестностях точек $(h=0, v=v_*)$ решения линейного уравнения (8), разлагающиеся в этих точках в ряды Тейлора:

$$B(h, v) = b_{00} + \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} h^i (v - v_*)^j. \quad (12)$$

Все коэффициенты данного ряда однозначно выражаются через коэффициенты b_{0j} разложения в ряд Тейлора в точке $v = v_*$ функции

$$B_0(v) = B(0, v) = b_{00} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{0j} (v - v_*)^j. \quad (13)$$

Действительно, все коэффициенты ряда $B = \sum_{j=0}^{\infty} h^j B_j(v)$ решения уравнения (8) через его главный член $B_0(v)$ рекуррентно находятся по формулам

$$B_1(v) = 2(B_0)''(v), \quad B_2(v) = \frac{2(B_1)''(v)}{3} + \frac{\alpha_1(B_0)''}{6},$$

$$B_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left(4(B_k)''_{vv} + \sum_{l=1}^k \alpha_l (B_{k-l})''(v) \right),$$

из которых следуют соотношения

$$b_{10} = 4b_{02}, \quad b_{11} = 12b_{03}, \quad b_{12} = 24b_{04}, \quad b_{13} = 40b_{05}, \quad b_{14} = 60b_{05},$$

$$b_{20} = 32b_{04} + \frac{\alpha_1 b_{02}}{3}, \quad b_{21} = 160b_{05} + \alpha_1 b_{03}, \quad b_{22} = 480b_{06} + 2\alpha_1 b_{04},$$

$$b_{ij} = b_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m(i,j)}, b_{01}, b_{01}, \dots, b_{0n(i,j)}) \quad (j > 0). \quad (14)$$

Считая, что точкам $(0, v_*)$ соответствуют точки (t_*, x_*) , из соотношений (7) находим

$$b_{01} = t_*, \quad b_{00} = t_* v_* - x_*. \quad (15)$$

Обращение якобиана (9) в нуль в точке $(0, v_*)$ для отображений (7), определяемых гладким в этой точке решением уравнения (8), означает равенство нулю коэффициента b_{02} соответствующего ряда Тейлора (12):

$$b_{02} = 0. \quad (16)$$

Замечание 2. На прямой $h=0$ переменные t и x , определяемые отображением (7), зависят лишь от одного параметра v . Поэтому при описании сингулярности общего положения, соответствующей обращению якобиана (9) в нуль при $h=0$, никаких других ограничений в виде равенств на коэффициенты ряда (12), помимо тех, что следуют из результата подстановки этого ряда в уравнение (8), с точки зрения идеологии теории особенностей гладких отображений накладывать недопустимо. Именно по этой причине далее считаем, что выполнено равенство (16) (за счёт возможности вариации аргумента v функций $t(0, v)$ и $x(0, v)$, являющихся управляющими параметрами соответствующей катастрофы), а коэффициент $b_{11} = 12b_{03}$ в разложениях ряда Тейлора (12) отличен от нуля.

При таких ограничениях на разложения в ряд Тейлора из вида отображений (7) и равенств (14), (15) следует, что гладкие функции

$$\tau(h, v) = t - t_*, \quad \xi(h, v) = x - x_* - v_*(t - t_*) \quad (17)$$

обладают следующими разложениями в ряды Тейлора при $h \rightarrow 0$ и $v \rightarrow v_*$:

$$\tau = b_{11} \left(h + \frac{V^2}{4} \right) + b_{21} h^2 + 2b_{12} hV + \sum_{i+j>2} (j+1)b_{i(j+1)} h^i V^j, \quad (18)$$

$$\xi = V\tau - 3b_{20}h^2 - 2b_{11}hV - 4b_{30}h^3 - 3b_{21}h^2V - 2b_{12}hV^2 - \frac{b_{11}V^3}{12} + \sum_{i+j>3} a_{ij}h^i V^j. \quad (19)$$

Здесь

$$V = v - v_*, \quad (20)$$

а a_{ij} — постоянные, однозначно определяемые по коэффициентам α_k, b_{0k} разложений в ряд Тейлора (4) и (13). Так как коэффициент b_{11} отличен от нуля, то из вида разложения (18) по теореме о неявной функции следует, что в окрестности точки $(\tau = 0, V = 0)$ переменная h определена как гладкая функция независимых переменных τ и V , которая в этой точке разлагается в двойной ряд Тейлора

$$h(\tau, V) = \left(\frac{\tau}{b_{11}} + \sum_{k>2} h_{0k} \tau^k \right) + V \sum_{k>0} h_{1k} \tau^k + V^2 \left(-\frac{1}{4} + \sum_{k>0} h_{2k} \tau^k \right) + \sum_{m>2, k \geq 0} h_{mk} V^m \tau^k \quad (21)$$

с постоянными коэффициентами h_{mk} , однозначно определяемыми по коэффициентам b_{ij} . Подстановка в разложение (19) вместо h правой части данного двойного ряда задаёт разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \xi(\tau, V) = & \left(\xi_{02} \tau^2 + \sum_{j>3} \xi_{0j} \tau^j \right) + V \left(-\tau + \xi_{12} \tau^2 + \sum_{j>3} \xi_{1j} \tau^j \right) + \\ & + V^2 \sum_{j>0} \xi_{2j} \tau^j + V^3 \left(\frac{5b_{11}}{12} + \sum_{j>0} \xi_{3j} \tau^j \right) + \sum_{k>3, j \geq 0} \xi_{kj} V^k \tau^j \end{aligned} \quad (22)$$

гладкой в окрестности точки $(\tau = 0, V = 0)$ функции ξ независимых переменных τ и V . Коэффициенты ξ_{ij} этого ряда также однозначно вычисляются через коэффициенты α_k, b_{0k} рядов (4) и (13).

Функция $\xi(0, V)$ посредством диффеоморфной в окрестности точки $W = 0$ функции $V = V(W)$, которая при $W \rightarrow 0$ разлагается в ряд Тейлора (его коэффициенты v_j однозначно находятся через коэффициенты h_{j0} разложения (22))

$$V = V(W) = \left(\frac{12}{5b_{11}} \right)^{1/3} W + \sum_{j=2}^{\infty} v_j W^j \quad (23)$$

[16, гл. 4, теорема 4.4], переводится в одночлен

$$W^3 = \xi(0, W) = \xi(0, V(W)).$$

Функцию же $\xi(\tau, W)$ этот диффеоморфизм сводит к бесконечно дифференцируемой в окрестности точки $(\tau=0, W=0)$ функции $\xi(\tau, W)=\xi(\tau, V(W))$, которая, как это следует из вида ряда (22), при $\tau^2+W^2 \rightarrow 0$ разлагается в следующий двойной ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \xi(\tau, W) = & \left(\xi_{02}\tau^2 + \sum_{j>3} \xi_{0j}\tau^j \right) + W \left(-\left(\frac{12}{5b_{11}} \right)^{1/3} \tau + r_{12}\tau^2 + \sum_{j>3} r_{1j}\tau^j \right) + \\ & + W^2 \left(\sum_{j>0} r_{2j}\tau^j \right) + W^3 \left(1 + \sum_{j>0} r_{3j}\tau^j \right) + \sum_{k>3, j>0} r_{kj} W^k \tau^j. \end{aligned} \quad (24)$$

Постоянные коэффициенты r_{ij} данного ряда также однозначно выражаются через коэффициенты α_k и b_{0k} разложений (4) и (13).

Равенство $W^3 = \xi(0, W)$ означает, что функция $\xi(\tau, W)$ есть деформация с параметром τ ростка одночлена W^3 [20, с. 94]. Этот одночлен обладает [20, § 13, пример 13.6] также так называемой *R-миниверсальной* деформацией, являющейся ростком в нуле кубического многочлена $W^3 + \lambda_1 W + \lambda_2$, поэтому, в частности, существуют [20, с. 95, 100, 102] такие гладкие отображения $U(\tau, W)$, $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, что $U(0, W) = W$, $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(0) = 0$ и

$$\xi(\tau, W) = U^3(\tau, W) + \lambda_1(\tau)U(\tau, W) + \lambda_2(\tau) \quad (25)$$

в достаточно малой окрестности точки $(\tau=0, W=0)$.

Непосредственной подстановкой в левую часть последнего равенства разложения (24), а в его правую часть разложений в ряд Тейлора

$$\lambda_k(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{jk}\tau^j \quad (k=1, 2), \quad U(\tau, W) = \sum_{j>0} U_{j0}\tau^j + W \left(1 + \sum_{j>0} U_{j1}\tau^j \right) + \sum_{i>1, j>0} U_{ji}W^i\tau^j \quad (26)$$

однозначно находятся коэффициенты λ_{j1} , λ_{j2} и U_{ji} : из равенства коэффициентов при τ^1 получающихся левой и правой частей находятся постоянные U_{1k} и $\lambda_{12}=0$, $\lambda_{11}=(-12/(5b_{11}))^{1/3}$, так что при $\tau \rightarrow 0$

$$\lambda_1(\tau) = \left(-\frac{12}{5b_{11}} \right)^{1/3} \tau + \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_{j1}\tau^j, \quad \lambda_2(\tau) = \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_{j2}\tau^j, \quad (27)$$

а из равенства их коэффициентов при τ^m с $m>1$ — постоянные λ_{m1} , λ_{m2} и U_{mk} .

Согласно виду ряда (26) при достаточно малых значениях $\lambda_2(\tau) - \xi$ и $\lambda_1(\tau)$ переменная W является гладкой функцией параметра τ и решения U кубического уравнения сборки (25), которая при $\tau \rightarrow 0$ и $U \rightarrow 0$ обладает разложением в ряд Тейлора

$$W(\tau, U) = \sum_{j>0} W_{j0}\tau^j + U \left(1 + \sum_{j>0} W_{j1}\tau^j \right) + \sum_{i>1, j>0} W_{ji}U^i\tau^j, \quad (28)$$

где коэффициенты W_{ji} однозначно выписываются через коэффициенты α_k и b_{0k} разложений (4), (12).

Таким образом, можем утверждать, что доказана

Теорема 1. Допустим, что $\alpha(h)$ — локально аналитическая функция, представляемая сходящимся рядом (4). И пусть $B(h, v)$ — гладкое в достаточно малой окрестности точки $(h=0, v=v_*)$ решение линейного дифференциального уравнения (8), у которого в разложении в ряд Тейлора (12) $b_{02}=0$, $b_{11}=12b_{03} \neq 0$, а t_* и x_* — значения гладких отображений (7) при

$h=0$ и $v=v_*$. Тогда данные отображения (7) задают сингулярные в точке (t_*, x_*) решения системы (1). После перехода к независимым переменным (17), сдвига (20) и локального диффеоморфизма $V=f(W)$ с разложением в ряд Тейлора (23) компоненты v этих сингулярных решений при $t \rightarrow t_*$ и $x \rightarrow x_*$ задаются любым из трёх корней $U(\tau, \xi)$ кубического уравнения сборки (25) посредством двух гладких функций $\lambda_1(\tau)$ и $\lambda_2(\tau)$ с разложениями в ряд Тейлора (27) и гладкой в точке $(\tau=0, U=0)$ функции $W=W(\tau, U)$, разлагающейся в двойной ряд Тейлора (28). Компоненты h данных сингулярных решений системы (1) при этом определяются первым из отображений (7) как гладкие в точке $(\tau=0, V=0)$ функции, разлагающиеся в двойной ряд Тейлора (21).

Таким образом, асимптотики решений (1), соответствующие типичной провальной особенности сборки гладких отображений (7), описаны со сверхстепенной точностью.

Замечание 3. Решение U канонического уравнения катастрофы сборки (25) для всех значений $\lambda_2 - \xi$ единственно и гладко по обоим управляющим параметрам $\lambda_1, \lambda_2 - \xi$ лишь при положительных λ_1 . Однако для неположительных значений λ_1 однозначность и гладкость имеет место лишь вне промежутка

$$|\lambda_2 - \xi| < \left(\frac{-4(\lambda_1)^3}{27} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

На ξ, τ -плоскости границы этого интервала представляют собой две кривые $\xi_{\pm, c}(\tau)$, которые изначально исходят из точки $(\xi=0, \tau=0)$ в полуплоскость $\tau b_{11} < 0$ и при $\tau \rightarrow 0$ в главном порядке задаются формулами

$$\xi_{\pm, c}(\tau) = \pm \frac{4}{3} \left| \frac{\tau^3}{5b_{11}} \right|^{1/2} (1 + o(1)). \quad (30)$$

Во всех внутренних точках промежутка (29) кубическое уравнение (25) имеет три различных корня. Как следует из разложений (21) и (22), две кривые $\xi_{\pm, z}(\tau)$ обращения в нуль компоненты h сингулярных решений системы (1), описываемых в теореме 1, при малых τ также расположены в полуплоскости $\tau b_{11} < 0$ и при $\tau \rightarrow 0$ обладают асимптотиками

$$\xi_{\pm, z}(\tau) = \pm \frac{4}{3} \left| \frac{\tau^3}{b_{11}} \right|^{1/2} (1 + o(1)). \quad (31)$$

Сравнение асимптотик (30) и (31) показывает, что по крайней мере при малых τ данные кривые провала $\xi_{\pm, z}(\tau)$ лежат в области единственности решения уравнения сборки (25). Нужно иметь в виду, что по разные стороны от этих кривых провала решения системы (1), описанные в теореме 1, в применении к задаче описания квазиклассических приближений к решениям НУШ (2) могут иметь смысл лишь для одного из двух вариантов — эллиптического или гиперболического — данной системы. Отметим, что решения уравнения движения одномерного изоэнтропического газа с произвольным давлением, совпадающие с гиперболическим вариантом системы (1), частным случаем которых являются уравнения мелкой воды (11), физически осмыслены лишь при неотрицательных значениях плотности h (для уравнений мелкой воды (11) — отклонения уровня жидкости от дна). Но во всяком случае методическим достоинством данной статьи её авторы как раз считают “абстрагирование от физического смысла” при обосновании формальных асимптотик решений системы (11) сразу же для эллиптического и гиперболического вариантов. Первоначальные же наши попытки проведения такого обоснования отдельно для каждой из областей $h \geq 0$ и $h \leq 0$ вызвали значительные затруднения.

Замечание 4. Доказанная теорема 1 носит несколько условный характер, поскольку априори неочевидна даже непустота множества гладких в точке $(h=0, v=v_*)$ решений уравнения (8), имеющих разложения в ряд Тейлора (12) с коэффициентами $b_{02}=0$, $b_{11}=12b_{03}\neq 0$. Но для частного случая $\alpha(h)\equiv 4$ можно доказать, что этому множеству принадлежат все локально аналитические в точке $(h=0, v=v_*)$ решения $B(h, v)$, определяемые любыми функциями $B(0, v)$ со сходящимися при достаточно малых значениях V рядами Тейлора

$$B(0, v) = v_* t_* - x_* + t_* V + b_{03} V^3 + \sum_{j=4}^{\infty} b_{0j} V^j, \quad b_{03} \neq 0.$$

Это возможно из-за сводимости заменой $B(h, v) = C(h, v)/h$ уравнения (8) к уравнению

$$hC''_{hh} = \alpha(h)C''_{vv}, \quad (32)$$

для которого согласно теореме, сформулированной Ю.Ф. Коробейником [21], при $\alpha(h)\equiv 4$ из аналитичности в точке $u = u_* = v_*/2$ функции $g_1(u)$, однозначно определяющей формальное решение (32) в виде ряда

$$C(h, v) = G(h, u) = g_1(u)h + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(u)h^k, \quad u = \frac{v}{2}, \quad (33)$$

следует, что данный ряд является аналитической функцией переменных h и u в некотором бикруге

$$D(R_1, R) := \{h, u \in \mathbb{C}: |h| < R_1, |u - u_*| < R\}. \quad (34)$$

Замечание 5. Теорема в работе [21] касается решений более широкого класса уравнений вида $\partial^k G / \partial u^k = h^m \partial^n G / \partial h^n$ с $n > m$. Нам нигде не удалось найти опубликованное доказательство этой теоремы. Но для случая $k=n=2$ и $m=1$, т.е. для решений уравнения

$$hG''_{hh} = G''_{uu}, \quad (35)$$

её доказательство нами было получено независимо.

3. ТЕОРЕМА КОРОБЕЙНИКА

Отметим, что коэффициенты $g_{k+1}(u)$ при $k \geq 1$ формального решения в виде ряда (33) уравнения (35) выражаются через производные $g_1^{(2k)}(u)$ порядка $2k$ коэффициента $g_1(u)$ в некоторой окрестности точки $u = u_*$ равенствами $g_{k+1}(u) = g_1^{(2k)}(u)/(k!(k+1)!)$. Поэтому в дальнейшем речь пойдёт о формальном решении уравнения (35) в виде ряда

$$G(h, u) = g_1(u)h + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} g_1^{(2k)}(u) h^{k+1}. \quad (36)$$

Приведём точную формулировку интересующей нас части теоремы Ю.Ф. Коробейника.

Теорема 2 (Ю.Ф. Коробейник, 1961 г.). Пусть R, R_1 — произвольные вещественные положительные числа, u_* — произвольное комплексное число, $G(h, u)$ — формальное решение в виде ряда (36) уравнения (35), где функция $g_1(u) = g_1(\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u)$ бесконечно дифференцируема в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R\}$ как функция двух вещественных переменных $\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u$. Для того чтобы функция $G(h, u)$ была аналитической в бикруге (34) и ряд (36) сходил по h в круге $\{h \in \mathbb{C}: |h| < R_1\}$ при любом u из круга $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R\}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $g_1(u)$ была аналитической в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$.

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$, $r \in (0, \infty)$. Для произвольных $r_0 \in [0, r)$ и $\varepsilon \in (0, r - r_0)$ существует такая положительная постоянная $C(\varepsilon)$, что при всех натуральных n в круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq r_0\}$ справедлива оценка

$$|f^{(n)}(z)| \leq C(\varepsilon) \frac{n!(r - \varepsilon)}{(r - r_0 - \varepsilon)^{n+1}}.$$

Доказательство. Вследствие интегральной формулы Коши для любого $z \in \mathbb{C}$, лежащего в круге $|z| \leq r_0$, при всех натуральных n выполняется равенство

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|t|=r-\varepsilon} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt.$$

Отсюда следует, что

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi(r - \varepsilon) \max_{|t|=r-\varepsilon} \frac{|f(t)|}{|t-z|^{n+1}} \leq C(\varepsilon) \frac{n!(r - \varepsilon)}{(r - r_0 - \varepsilon)^{n+1}},$$

где $C(\varepsilon) = \max_{|t|=r-\varepsilon} |f(t)|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Предположим, что функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$. Покажем, что для любого $\delta \in (0, R)$ ряд в правой части (36) сходится равномерно на бикруге

$$E(\delta) = \{h, u \in \mathbb{C}: |h| \leq R_1, |u - u_*| \leq R - \delta\}. \quad (37)$$

Рассмотрим величины

$$\beta_k = \sup \left\{ \frac{|h|^{k+1}}{k!(k+1)!} |g_1^{(2k)}(u)|, |h| \leq R_1, |u - u_*| \leq R - \delta \right\}.$$

В силу доказанной леммы, если в ней положить $f(z) = g_1(z + u_*)$, $z = u - u_*$, $r = R + 2\sqrt{R_1}$, $r_0 = R - \delta$, для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ существует такая положительная постоянная $C(\varepsilon)$, что при всех натуральных k на круге $|u - u_*| \leq R - \delta$ имеет место оценка

$$|g_1^{(2k)}(u)| \leq \frac{C(\varepsilon)(2k)!(R + 2\sqrt{R_1} - \varepsilon)}{(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^{2k+1}}.$$

Значит,

$$\beta_k \leq (R_1)^{k+1} \frac{C(\varepsilon)(2k)!(R + 2\sqrt{R_1} - \varepsilon)}{k!(k+1)!(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^{2k+1}} =: \alpha_k.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится. Действительно, для любого $k \geq 1$

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{R_1(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+2)(2\sqrt{R_1} + \delta - \varepsilon)^2}$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{R_1}{(\sqrt{R_1} + (\delta - \varepsilon)/2)^2} < 1.$$

Таким образом, ряд (36) равномерно сходится на множестве $E(\delta)$ (см. (37)) для любого $\delta \in (0, R)$. Поэтому в бикруге (34) функция $G(h, u)$ действительно аналитична.

Необходимость. Предположим, что функция $G(h, u)$ аналитична в бикруге (34) и ряд (36) сходится по h в круге $\{h \in \mathbb{C}: |h| < R_1\}$ для любого u , удовлетворяющего неравенству $|u - u_*| < R$. Поскольку $g_1(u) = \partial G(0, u)/\partial h$, $|u - u_*| < R$, то функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R\}$. Покажем, что её можно аналитически продолжить в круг $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$ с помощью степенного ряда

$$g_1(u) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_1^{(j)}(u)}{j!} h^j. \quad (38)$$

Вследствие представления (36) для любого $u \in \mathbb{C}$ такого, что $|u - u_*| < R$, при каждом натуральном k справедливо равенство

$$g_1^{(2k)}(u) = k! \frac{\partial^{k+1} G}{\partial h^{k+1}}(0, u).$$

Зафиксируем числа $t \in (0, R)$, $t_1 \in (t, R)$ и числа $r_0 \in (0, 2\sqrt{R_1})$, $\rho \in (r_0, 2\sqrt{R_1})$. Из равенств

$$\frac{\partial^{k+1} G}{\partial h^{k+1}}(0, u) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{|h|=\rho^2/4} \frac{G(h, u)}{h^{k+2}} dh$$

следует, что для любого $u \in \mathbb{C}$, для которого $|u - u_*| \leq t_1$, при всяком натуральном $k \geq 1$

$$|g_1^{(2k)}(u)| \leq \frac{k!(k+1)!M(\rho, t_1)}{(\rho^2/4)^{k+1}} = \frac{4^{k+1}k!(k+1)!}{\rho^{2k+2}}M(\rho, t_1), \quad (39)$$

где

$$M(\rho, t_1) := \max\{|G(h, u)|, |h| \leq \rho^2/4, |u - u_*| \leq t_1\}.$$

Функция $g^{(2k+1)}(u)$ является производной $g^{(2k)}(u)$, поэтому, используя формулу Коши

$$g^{(2k+1)}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|v-u_*|=t_1} \frac{g^{(2k)}(v)}{(v-u)^2} dv,$$

получаем, что для любого натурального $k \geq 1$ и всякого $u \in \mathbb{C}$ такого, что $|u - u_*| \leq t$, выполняется неравенство

$$|g_1^{(2k+1)}(u)| \leq \frac{t_1 4^{k+1}k!(k+1)!M(\rho, t_1)}{(t_1 - t)^2 \rho^{2k+2}}. \quad (40)$$

Вследствие неравенства (39) для любого натурального $k \geq 1$

$$\sup \left\{ \frac{|g^{(2k)}(u)|}{(2k)!} |h|^{2k}, |u - u_*| \leq t_1, |h| \leq r_0 \right\} \leq M(\rho, t_1) \frac{4^{k+1}k!(k+1)!}{(2k)! \rho^{2k+2}} (r_0)^{2k}.$$

Отсюда следует (см. доказательство достаточности), что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} h^{2k} g^{(2k)}(u)/(2k)!$ для любого $t_1 \in (0, R)$ и каждого $u \in \mathbb{C}$ из круга $|u - u_*| \leq t_1$ сходится равномерно на круге $\{h \in \mathbb{C}: |h| \leq r_0\}$, значит, он сходится для любых $u, h \in \mathbb{C}$ таких, что $|u - u_*| < R$, $|h| < 2\sqrt{R_1}$.

Аналогично с помощью (40) показывается, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} h^{2k+1} g^{(2k+1)}(u)/(2k+1)!$ также сходится для всех $u, h \in \mathbb{C}$ таких, что $|u - u_*| < R$, $|h| < 2\sqrt{R_1}$. Таким образом, для всех $u, h \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенствам $|u - u_*| < R$, $|h| < 2\sqrt{R_1}$, ряд (38) сходится, при этом его сумма для каждого $u \in \mathbb{C}$ из круга $|u - u_*| < R$ аналитически продолжает функцию $g_1(w)$

в круг $\{w \in \mathbb{C}: |w - u| < 2\sqrt{R_1}\}$. Поэтому $g_1(u)$ аналитически продолжима в больший круг $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R + 2\sqrt{R_1}\}$. Теорема доказана.

Если зафиксировать сумму $R + 2\sqrt{R_1}$, а положительные числа R и R_1 менять, то можно получить более широкую область, в каждой точке которой ряд Тейлора $G(h, u)$ вида (36) сходится (к $G(h, u)$) и функция $G(h, u)$ аналитическая. Эта область является объединением бикругов (34) с центром в точке $(h = 0, u = u_*)$ (см. теорему 2).

Зафиксируем положительное число R_0 . Определим область

$$P(R_0) = \{h, u \in \mathbb{C}: |u - u_*| + 2\sqrt{|h|} < R_0\}.$$

Очевидно, что

$$P(R_0) = \bigcup_{R, R_1 > 0, R + 2\sqrt{R_1} = R_0} D(R_1, R).$$

Предположим, что функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R_0\}$. Пусть функция $G(h, u)$ задаётся рядом (36). Возьмём точку (h, u) в $P(R_0)$. Найдутся числа $R, R_1 > 0$, для которых $R + 2\sqrt{R_1} = R_0$ и (h, u) принадлежит бикругу $D(R_1, R)$. По теореме 2 ряд в правой части формулы (36) сходится в каждой точке $D(R_1, R)$, функция $G(h, u)$ аналитична в $D(R_1, R)$ и является решением уравнения (35). Таким образом, справедливо

Следствие. Пусть функция $g_1(u)$ аналитична в круге $\{u \in \mathbb{C}: |u - u_*| < R_0\}$, где R_0 — положительное число. Тогда ряд в правой части (36) сходится в каждой точке из $P(R_0)$ к функции $G(h, u)$, являющейся решением уравнения (35), аналитическим в области $P(R_0)$.

Замечание 6. А.И. Янушаускасом в [22; 23, гл. 6, § 5] описывались аналитические решения ряда эллиптических и вырождающихся уравнений с частными производными. Эти решения для некоторых рассмотренных уравнений построены в виде рядов по одной из независимых переменных, сходимость которых обосновывается с помощью метода мажорант. В частности, изучена структура решений уравнения

$$s(v_k)''_{ss} + (k+1)(v_k)'_s + (v_k)''_{zz} = 0 \quad (41)$$

(уравнение (16) в [22] для случая оператора $L = \partial^2 / \partial z^2$), при $k = 1$ сводящегося к исследуемому нами уравнению (35). Но для уравнения (41) в монографии [22] нет обоснования сходимости соответствующих рядов, не описана область, в которой рассматриваемые ряды сходятся, не указана её зависимость от определяющей функции $v_0^{(k)}(z)$. Доказанные нами теорема 2 и её следствие позволяют проследить связь областей специального вида, в которых решение $G(h, u)$ уравнения (35) и коэффициент $g_1(u)$ аналитичны. Непосредственно же из формулировок в работах [22; 23, гл. 4, § 5] не видно, например, как обосновать утверждение, сделанное нами в замечании 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы предполагают, что в случае локальной аналитичности в точке $u = 2v_*$ функции $g_1(u)$ все формальные асимптотические решения вида (33) уравнения (32) с произвольным коэффициентом $\alpha(h)$, представимым сходящимся рядом (4), в некотором бикруге (34) по-прежнему будут рядами аналитических функций переменных h и u .

Подобно тому как доказанное утверждение теоремы 2 сняло вопрос об условности теоремы 1 для частного случая $\alpha(h) \equiv 4$ (см. замечание 4), строгое доказательство справедливости этого предположения устранило бы условный характер теоремы 1 и для общего случая произвольной аналитической в окрестности точки $h = 0$ функции $\alpha(h)$, принимающей при $h = 0$ значение 4. В самом деле, при справедливости этого предположения множеству гладких в

точке $(h=0, v=v_*)$ решений уравнения (8), имеющих разложения в ряд Тейлора (12) с коэффициентами $b_{02}=0$, $b_{11}=12b_{03}\neq 0$, будут, по крайней мере, принадлежать все его решения $B(h, v)$, определяемые любыми функциями $B(0, v)$ со сходящимися при малых значениях $v-v_*$ рядами Тейлора вида

$$B(0, v) = v_* t_* - x_* + t_* + b_{03}(v - v_*)^3 + \sum_{j=4}^{\infty} b_{0j}(v - v_*)^j, \quad b_{03} \neq 0.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Результаты А.М. Шавлукова получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00006).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А.М. Ильин. — М. : Наука, 1989. — 336 с.
2. Гуревич, А.В. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере / А.В. Гуревич, А.Б. Шварцбург. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
3. Шварцбург, А.Б. Геометрическая оптика в нелинейной теории волн / А.Б. Шварцбург. — М. : Наука, 1976. — 119 с.
4. Жданов, С.Л. Квазигазовые неустойчивые среды / С.Л. Жданов, А.Б. Трубников. — М. : Наука, 1991. — 174 с.
5. Кудашев, В.Р. Особенности некоторых типичных процессов самопроизвольного падения интенсивности в неустойчивых средах / В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов // Письма в журн. эксп. и теор. физики. — 1995. — Т. 65, № 4. — С. 358–363.
6. Кудашев, В.Р. Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн / В.Р. Кудашев, Б.И. Сулейманов // Прикл. математика и механика. — 2001. — Т. 3, № 3. — С. 456–466.
7. Гарифуллин, Р.Н. От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам / Р.Н. Гарифуллин, Б.И. Сулейманов // Журн. эксп. и теор. физики. — 2010. — Т. 137, № 1. — С. 149–164.
8. Dubrovin, B. On universality of critical behaviour in the critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the tritonque to the Painlevé-I equation / B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein // J. Nonlinear Sci. — 2009. — V. 19, № 1. — P. 57–94.
9. Konopelchenko, B.G. Quasi-classical approximation in vortex filament dynamics. Integrable systems, gradient catastrophe, and flutter / B.G. Konopelchenko, G. Ortenzi // Stud. Appl. Math. — 2013. — V. 130, № 2. — P. 167–199.
10. Konopelchenko, B.G. Jordan form, parabolicity and other features of change of type transition for hydrodynamic type systems / B.G. Konopelchenko, G. Ortenzi // J. Phys. A. — 2017. — V. 50, № 21. — Art. 215205.
11. Богаевский, И.А. Особенности многозначных решений квазилинейных гиперболических систем / И.А. Богаевский, Д.В. Туницкий // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2020. — Т. 308. — С. 76–87.
12. Сулейманов, Б.И. Типичная провальная особенность сборки решений уравнений движения одномерного изэнтропического газа / Б.И. Сулейманов, А.М. Шавлуков // Изв. РАН. Сер. физ. — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 664–666.
13. Сулейманов, Б.И. О наследовании решениями уравнений движения изэнтропического газа типичных особенностей решений линейного волнового уравнения / Б.И. Сулейманов, А.М. Шавлуков // Мат. заметки. — 2022. — Т. 112, № 4. — С. 625–640.

14. Рахимов, А.Х. Особенности римановых инвариантов / А.Х. Рахимов // Функц. анализ и его приложения. — 1993. — Т. 27, № 1. — С. 46–59.
15. Брёкер, Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Брёкер, Л. Ландер ; пер. с англ. А.Г. Кушнirenко. — М. : Мир, 1977. — 208 с.
16. Постон, Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт ; пер. с англ. А.В. Чернавского. — М. : Мир, 1980. — 617 с.
17. Арнольд, В.И. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. — М. : Наука, 1982. — 304 с.
18. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1 / Р. Гилмор ; пер. с англ. под ред. Ю.П. Гупало, А.А. Пионтковского. — М. : Мир, 1984. — 349 с.
19. Алексеев, Ю.К. Введение в теорию катастроф / Ю.К. Алексеев, В.П. Сухоруков; — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2000. — 182 с.
20. Седых, В.Д. Математические методы теории катастроф / В.Д. Седых. — М. : МЦНМО, 2021. — 224 с.
21. Коробейник, Ю.Ф. Об аналитических решениях одного класса уравнений в частных производных / Ю.Ф. Коробейник // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 6. — С. 1248–1251.
22. Янушаускас, А.И. Структурные свойства решений некоторых аналитических уравнений с частными производными / А.И. Янушаускас // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 1. — С. 182–194.
23. Янушаускас, А.И. Аналитические и гармонические функции многих переменных / А.И. Янушаускас. — Новосибирск : Наука, 1981. — 183 с.

TYPICAL DROPPING ASYMPTOTICS OF QUASICLASSICAL APPROXIMATIONS TO SOLUTIONS OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

S. N. Melikhov¹, B. I. Suleimanov², A. M. Shavlukov³

¹*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

¹*Southern Mathematical Institute of VSC of RAS, Vladikavkaz, Russia*

^{2,3}*Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision
of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Russia*

e-mail: ¹snmelikhov@yandex.ru, ²bisul@mail.ru, ³aza3727@yandex.ru

Formal asymptotics are substantiated that describe typical dropping cusp singularity of quasiclassical approximations to solutions of two cases of the integrable nonlinear Schrödinger equation $-i\varepsilon\Psi_t' = \varepsilon^2\Psi_{xx}'' \pm 2|\Psi|^2\Psi$, where ε is a small parameter. The substantiation uses the ideology and facts of the mathematical catastrophe theory and the part of the theorem of Yu.F. Korobeinik, concerning analytical as $h \rightarrow 0$ solutions $G(h, u)$ of the mixed type linear equation $hG_{hh}'' = G_{uu}''$ to which the hodograph images of both cases of the systems of equations of these quasiclassical approximations are equivalent.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, gas dynamics equation, shallow water equation, asymptotics, singularity theory, catastrophe theory, gradient catastrophe, dropping singularity, cusp.

FUNDING

The work of A.M. Shavlukov was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 21-11-00006)

REFERENCES

1. И'ин, А.М., *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, Providence: Am. Math. Soc., 1992.
2. Gurevich, A.V. and Shvartsburg, A.B., *Nelineynaya teoriya rasprostraneniya radiovoln v ionosfere* (Nonlinear Theory of Radio Wave Propagation in the Ionosphere), Moscow: Nauka, 1973.

3. Shvartsburg, A.B., *Geometricheskaya optika v nelineynoy teorii voln* (Geometrical Optics in the Nonlinear Theory of Waves), Moscow: Nauka, 1976.
4. Zhdanov, S.L. and Trubnikov, B.A., *Kvazigazovyye neustoychivyye sredy* (Quasigaseous Unstable Media), Moscow: Nauka, 1991.
5. Kudashev, V.R. and Suleimanov, B.I., Characteristic features of some typical spontaneous intensity collapse processes in unstable media, *JETP Lett.*, 1995, vol. 62, no. 4, pp. 382–388.
6. Kudashev, V.R. and Suleimanov, B.I., The effect of small dissipation on the onset of one-dimensional shock waves, *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 441–451.
7. Garifullin, R.N. and Suleimanov, B.I., From weak discontinuities to nondissipative shock waves, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2010, vol. 110, no. 1, pp. 133–146.
8. Dubrovina, B., Grava, T., and Klein, C., On universality of critical behaviour in the critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the tritonque to the Painlevé-I equation, *J. Nonlinear Sci.*, 2009, vol. 19, no. 1, pp. 57–94.
9. Konopelchenko, B.G. and Ortenzi, G., Quasi-classical approximation in vortex filament dynamics. Integrable systems, gradient catastrophe, and flutter, *Stud. Appl. Math.*, 2013, vol. 130, no. 2, pp. 167–199.
10. Konopelchenko, B.G. and Ortenzi, G., Jordan form, parabolicity and other features of change of type transition for hydrodynamic type systems, *J. Phys. A*, 2017, vol. 50, no. 21, art. 215205.
11. Bogachev, I.A. and Tunitsky, D.V., Singularities of multivalued solutions of quasilinear hyperbolic systems, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, no. 21, pp. 67–78.
12. Shavlukov, A.M. and Suleimanov, B.I., A typical dropping cusp singularity of solutions to equations of a one-dimensional isentropic gas flow, *Bull. of the RAS: Phys.*, 2020, vol. 84, no. 5, pp. 552–554.
13. Shavlukov, A.M. and Suleimanov, B.I., Inheritance of generic singularities of solutions of a linear wave equation by solutions of isentropic gas motion equations, *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 4, pp. 608–620.
14. Rakhimov, A.Kh., Singularities of Riemannian invariants, *Funct. Anal. Appl.*, 1993, vol. 27, no. 1, pp. 39–50.
15. Brocker, Th. and Lander, L., *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975.
16. Poston, T. and Stewart, I., *Catastrophe Theory and its Applications*, New York: Dover Publications, 1978.
17. Arnol'd, V.I., Gusein-Zade, S.M., and Varchenko, A.N., *Singularities of Differentiable Mappings. Volume 1: The Classification of Critical Points Caustics and Wave Fronts*, Berlin: Birkhäuser, 1985.
18. Gilmore, R., *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, New York: Dover Publications, 1993.
19. Alexeyev, Y.K. and Sukhorukov, V.P., *Vvedenie v teoriyu katastrof* (The Introduction to Catastrophe Theory), Moscow: MSU Press, 2000.
20. Sedukh, V.D., *Matematicheskiye metody teorii katastrof* (Mathematical Methods of the Catastrophe Theory), Moscow: MCCME, 2021.
21. Korobeinik, Yu.F., Analytic solutions to a certain class of partial differential equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1961, no. 2, pp. 1337–1340.
22. Yanushauskas, A.I., Structural properties of solutions of some analytic partial differential equations, *Differ. Uravn.*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 182–194.
23. Yanushauskas, A.I., *Analiticheskiye i garmonicheskiye funktsii mnogikh peremennykh* (Analytical and Harmonic Functions of Several Variables), Novosibirsk: Nauka, 1981.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952

О СТРУКТУРЕ ЯДРА ЗАДАЧИ ШВАРЦА
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
НА ПЛОСКОСТИ

© В. Г. Николаев

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

e-mail: vg14@inbox.ru

Поступила в редакцию 08.12.2023 г., после доработки 08.12.2023 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Исследована задача Шварца для J -аналитических функций в произвольном эллипсе. Матрица J предполагается двумерной с разными собственными числами, лежащими выше вещественной оси. Приведен пример непостоянного решения однородной задачи Шварца в виде вектор-полинома третьей степени. Рассмотрен численный параметр l матрицы J , выражающийся через её собственные векторы. Проведён анализ соотношения, на основе которого получен метод вычисления размерности и структуры ядра задачи Шварца в произвольном эллипсе. Получены достаточные условия тривиальности ядра, выраженные через параметры эллипса, собственные значения матрицы J и параметр l . Приведены примеры одномерного и тривиального ядер.

Ключевые слова: задача Шварца, ядро, матрица, собственные значения.

DOI: 10.31857/S0374064124050053, EDN: LBMJGE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование краевых задач для различных классов аналитических функций имеет давнюю историю [1, с. 264; 2, с. 140; 3, с. 125] и в последние годы развивалось в нескольких направлениях: как теоретически [4, с. 80; 5], так и в приложении к задачам общей теории краевых задач для (псевдо)дифференциальных уравнений [6–8].

Задача Римана–Гильберта [1, с. 264; 2, с. 140] о нахождении аналитической в области функции по заданному на границе значению её вещественной части относится к основным краевым задачам. Одним из возможных её обобщений является задача Шварца для аналитических по Дуглису функций, специальный случай которой рассматривается в настоящей работе. Отметим, что задача Шварца находит применение в теории эллиптических систем второго порядка на плоскости [9].

Пусть все собственные числа матрицы $J \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ лежат в верхней полуплоскости. Аналитической по Дуглису, или J -аналитической с матрицей J [4, с. 80; 5; 10] называется комплексная ℓ -вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, которая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \quad (1)$$

Примерами J -аналитических функций могут служить векторные полиномы следующего вида:

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^N (xE + Jy)^n c_n, \quad c_n \in \mathbb{C}^{\ell},$$

где E — единичная матрица.

В монографии [4] показано, что комплексная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1) является эллиптической. Рассмотрим для (1) следующую задачу Шварца [10–12].

Пусть конечная односвязная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ . Требуется найти J -аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = \psi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad (2)$$

где $\psi(\xi) \in C(\Gamma)$ — заданная вещественная функция.

Определение [10]. Ядром задачи Шварца в области D называется линейное пространство решений задачи Шварца с однородным краевым условием

$$\operatorname{Re} \phi(z)|_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

Как показано в [10], разрешимость задачи (2) в классах Гёльдера тесно связана со структурой ядра задачи Шварца. Настоящая статья посвящена вычислению размерности и структуры ядра в произвольном эллипсе для двумерных диагонализируемых матриц $J \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Очевидными решениями задачи (3) являются постоянные векторы $\phi = ic$, $c \in \mathbb{R}^{\ell}$, которые принято называть *тривиальными*, или *постоянными решениями*. Если ядро состоит только из вектор-констант, то его назовём *тривиальным*. Как известно [2], при $\ell = 1$ решения однородной задачи (3) только постоянные, но при $\ell \geq 2$ это не так. Приведём пример.

Пример 1. Пусть $\ell = 2$,

$$J = \begin{pmatrix} 10i & -49/3 \\ -27/7 & -6i \end{pmatrix}, \quad \phi_3(z) = \begin{pmatrix} -6x(x^2 + y^2 - 1) + (-20y^3 - 12x^2y + 18y)i \\ 54y(x^2 + y^2 - 1)/7 + (-24x^3/7 + 18x/7)i \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица J имеет разные собственные числа: $\lambda = 3i$, $\mu = i$. Вектор-полином третьей степени $\phi_3(z)$ — функция, J -аналитическая с данной матрицей J . Имеем $\operatorname{Re} \phi_3(z)|_{\Gamma} = 0$ на единичной окружности $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$. В п. 5 будет показано, что $\phi_3(z)$ — единственный нетривиальный элемент ядра задачи Шварца для функций, аналитических по Дуглису с данной матрицей J в единичном круге.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть вещественные параметры $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ — полуоси эллипса Γ , $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол между полуосью эллипса длиной r_1 и направлением оси Ox , измеряемый в положительном направлении обхода. Как известно, параметризацию $\omega(t)$ эллипса Γ с центром в начале координат можно записать в следующем виде:

$$\Gamma: \omega(t) = \begin{cases} x(t) = r_1 \cos \alpha \cos t - r_2 \sin \alpha \sin t, \\ y(t) = r_1 \sin \alpha \cos t + r_2 \cos \alpha \sin t, \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi). \quad (4)$$

Будем называть *эллипсом* как кривую Γ с параметризацией (4), так и область K , ограниченную кривой Γ , в зависимости от контекста. Также договоримся для краткости вместо термина “вектор-полином” в некоторых случаях писать “полином”. Будем называть *задачей Шварца для матрицы J* задачу Шварца для функций, J -аналитических с данной матрицей J . Под *ядром задачи Шварца в эллипсе Γ* будем понимать ядро задачи Шварца в области K с границей Γ .

Замечание 1. Сделаем замену переменных $x' = x + x_0$, $y' = y + y_0$. Несложно показать, что функция $\phi(x', y')$ будет аналитической по Дуглису с той же матрицей J , что и функция $\phi(x, y)$. Отсюда следует, что ядро задачи Шварца в эллипсе $x'(t) = x(t) + x_0$, $y'(t) = y(t) + y_0$ с центром в точке (x_0, y_0) совпадает с ядром задачи Шварца в эллипсе (4) с центром в нуле, поэтому всюду ниже будем рассматривать только эллипсы с центром в начале координат.

Пусть $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $\operatorname{Im} \mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$, $r_1, r_2 > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Обозначим

$$\begin{aligned} a &:= a(\alpha, \lambda, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos \alpha + ir_2 \sin \alpha + \lambda(r_1 \sin \alpha - ir_2 \cos \alpha)}{2}, \\ b &:= b(\alpha, \lambda, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos \alpha - ir_2 \sin \alpha + \lambda(r_1 \sin \alpha + ir_2 \cos \alpha)}{2}, \\ a_1 &:= a_1(\alpha, \mu, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos \alpha + ir_2 \sin \alpha + \mu(r_1 \sin \alpha - ir_2 \cos \alpha)}{2}, \\ b_1 &:= b_1(\alpha, \mu, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos \alpha - ir_2 \sin \alpha + \mu(r_1 \sin \alpha + ir_2 \cos \alpha)}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Лемма 1 [13]. Пусть в соотношениях (5) $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $\operatorname{Im} \mu > 0$. Тогда имеют место неравенства

$$\left| \frac{b}{a} \right| < 1, \quad \left| \frac{b_1}{a_1} \right| < 1. \quad (6)$$

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — собственные векторы 2×2 -матрицы J с диагональной жордановой формой $J_1 = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$, где $\lambda \neq \mu$. Таким образом, столбцы матрицы $Q = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\det Q \neq 0$, образуют жорданов базис матрицы J . Следуя [11], определим вещественный параметр $l = l(J)$ как функцию векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$:

$$l := l(J) = \left| \frac{\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right|, \quad l \in \mathbb{R}, \quad l \geq 0. \quad (7)$$

Справедлива следующая лемма, в силу которой параметр $l(J)$ определён корректно.

Лемма 2. Число $l(J)$ (7) не зависит от выбора жорданова базиса матрицы J . Кроме того, это число инвариантно относительно вещественных преобразований, т.е. оно совпадает для матриц J и BJB^{-1} , где $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Доказательство. Собственные векторы матрицы J определены с точностью до комплексного множителя, поэтому пусть столбцы матрицы $Q^* = (a\mathbf{x}, b\mathbf{y})$, где числа $a, b \neq 0$, образуют другой жорданов базис матрицы J . Обозначим через l^* параметр (7), вычисляемый по жорданову базису Q^* :

$$l^* = \left| \frac{\det(a\mathbf{x}, \bar{b}\mathbf{y})}{\det(a\mathbf{x}, b\mathbf{y})} \right| = \left| \frac{a\bar{b} \det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{ab \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right| = \left| \frac{a\bar{b}}{ab} \right| \left| \frac{\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right| = l,$$

что доказывает независимость $l(J)$ от жорданова базиса.

Докажем инвариантность $l(J)$ относительно вещественных преобразований. Так как векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — собственные для матрицы J , то $J\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $J\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$. Эти два равенства запишем в следующем эквивалентном виде: $BJB^{-1}B\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$, $BJB^{-1}B\mathbf{y} = \mu B\mathbf{y}$. Таким образом, $Q^* = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') = (B\mathbf{x}, B\mathbf{y})$ — жорданов базис матрицы $J^* = BJB^{-1}$. Эта матрица подобна матрице J и поэтому имеет те же собственные числа λ , μ . Обозначим, как и выше, через l^* параметр (7), вычисляемый по жорданову базису матрицы Q^* матрицы J^* . Тогда

$$l^*(J^*) = \left| \frac{\det(B\mathbf{x}, \bar{B}\mathbf{y})}{\det(B\mathbf{x}, B\mathbf{y})} \right| = \left| \frac{\det(B\mathbf{x}, \bar{B}\mathbf{y})}{\det(B\mathbf{x}, B\mathbf{y})} \right| = \left| \frac{\det[B \cdot (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})]}{\det[B \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y})]} \right| = \left| \frac{\det B \cdot \det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det B \cdot \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right| = l(J).$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В работе [11] показано, что параметр $l(J)$ (7) выражается через коэффициенты матрицы J и её собственные числа λ, μ следующим образом:

$$l(J) = \frac{|2i \operatorname{Im}(a_{11}\bar{a}_{21}) + \bar{\mu}a_{21} - \lambda\bar{a}_{21}|}{|(\mu - \lambda)a_{21}|}, \quad a_{21} \neq 0, \quad \lambda \neq \mu;$$

$$l(J) = \frac{|2i \operatorname{Im}(a_{22}\bar{a}_{12}) + \bar{\mu}a_{12} - \lambda\bar{a}_{12}|}{|(\mu - \lambda)a_{12}|}, \quad a_{12} \neq 0, \quad \lambda \neq \mu.$$

Ниже будет использована следующая

Теорема 1 [11, 13]. Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ имеет разные собственные числа λ, μ , где $\operatorname{Im} \lambda > 0, \operatorname{Im} \mu > 0$; числа a, b, a_1, b_1 для эллипса Γ (4) найдены по формулам (5); параметр $l = l(J)$ определён по формуле (7). Пусть также выполнены следующие соотношения:

$$\Delta_n := \Delta_n(l) = l^2 \left| \frac{b^n}{a^n} - \frac{\bar{b}_1^n}{\bar{a}_1^n} \right|^2 - \left| 1 - \frac{b^n}{a^n} \frac{\bar{b}_1^n}{\bar{a}_1^n} \right|^2 \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Тогда в эллипсе K с границей Γ ядро задачи Шварца в классе J -аналитических функций $\phi(z) \in H^\sigma(\bar{K})$, $0 < \sigma < 1$, тривиально.

В [11] показано, что если $l \in [0, 1]$, то все соотношения (8) выполняются при любых значениях (5), т.е. ядро задачи Шварца тривиально, причём в произвольном эллипсе. Однако более сложный случай $l > 1$ ранее рассмотрен не был, его и исследуем ниже.

Приведём ещё два утверждения, которые будут использованы.

Теорема 2 [12]. Пусть все собственные числа диагонализируемой матрицы J лежат в верхней полуплоскости. Тогда ядро задачи Шварца в произвольном эллипсе Γ конечномерно и состоит только из вектор-полиномов.

Теорема 3 [11, 13]. Пусть согласно (7) $l_0 = l(J)$. Тогда существование в эллипсе K с границей Γ решения однородной задачи Шварца (3) в виде J -аналитического вектор-полинома $\phi_n(z)$ степени n равносильно условию $\Delta_n(l_0) = 0$. При этом вектор-полином $\phi_n(z)$ является единственным с точностью до вещественного множителя.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СООТНОШЕНИЯ (8) И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

Выразим с учётом (8) формально параметр l из уравнения $\Delta_n(l) = 0$:

$$l = l_{n,\beta} = \frac{\left| 1 - \frac{b^n}{a^n} \frac{\bar{b}_1^n}{\bar{a}_1^n} \right|}{\left| \frac{b^n}{a^n} - \frac{\bar{b}_1^n}{\bar{a}_1^n} \right|}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Параметр β будет определён ниже в (12). С учётом неравенств (6) обозначим

$$\xi := \frac{b}{a} = |\xi|e^{it_1}, \quad \zeta := \frac{b_1}{a_1} = |\zeta|e^{it_2}, \quad 0 \leq |\xi| < 1, \quad 0 \leq |\zeta| < 1. \quad (10)$$

Преобразуем (9), используя обозначения (10):

$$l_{n,\beta} = \frac{|1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in(t_1 - t_2)}|}{||\xi|^n e^{int_1} - |\zeta|^n e^{int_2}||} = \frac{|1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in(t_1 - t_2)}|}{|e^{int_1}| ||\xi|^n - |\zeta|^n e^{in(t_2 - t_1)}||} = \frac{|1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in\beta}|}{||\xi|^n - |\zeta|^n e^{-in\beta}|}, \quad (11)$$

$$\beta = t_1 - t_2 = \arg \xi - \arg \zeta = \arg \left(\frac{b}{a} \right) - \arg \left(\frac{b_1}{a_1} \right). \quad (12)$$

Далее преобразуем равенство (11) к более удобному для изучения виду, используя известную из курса элементарной математики теорему.

Теорема 4. Пусть x, y — длины двух сторон треугольника ABC и $\alpha \in (0, \pi]$ — угол между этими сторонами. Тогда длина третьей стороны z треугольника ABC вычисляется по формуле $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}$. Данное утверждение справедливо и в предельном случае $\alpha = \pi$.

Рассмотрим числитель последней дроби в (11). Пусть сторона x треугольника ABC имеет длину $x = 1$ и лежит на оси Ox . Пусть сторона y имеет длину $y = |\xi|^n |\zeta|^n$ и образует со стороной x угол $n\beta$. Тогда модуль вектора (комплексного числа) $\chi = 1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in\beta}$ равен длине третьей стороны z треугольника ABC . Аналогично для знаменателя. Поэтому с учётом теоремы 4 можем записать (11) в следующем виде:

$$l_{n,\beta}^2 = l_{n,\beta}^2(\xi, \zeta) := \frac{|1 - |\xi|^n |\zeta|^n e^{in\beta}|^2}{| |\xi|^n - |\zeta|^n e^{-in\beta} |^2} = \frac{1 + |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos(n\beta)}{|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos(n\beta)}. \quad (13)$$

Изучение ядра задачи Шварца в пп. 4 и 5 основано на анализе выражения (13), а в некоторых случаях — выражения (8).

Замечание 2. В пп. 3 и 4 рассмотрен случай $\xi, \zeta \neq 0$, $|\xi| > |\zeta|$, который является наиболее общим, поэтому в силу (9) и (11) знаменатель в (13) не равен нулю.

Изучим соотношение (13). Введём следующую вспомогательную функцию, которая отличается от (13) формальной заменой постоянной величины $n\beta$ на переменную t :

$$l_{n,t}^2 = \frac{1 + |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t}{|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t}. \quad (14)$$

Вычислим частную производную функции (14) по t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{n,t}^2}{\partial t} &= \frac{2|\xi|^n |\zeta|^n \sin t (|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t)}{(|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t)^2} - \frac{2(1 + |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t) |\xi|^n |\zeta|^n \sin t}{(|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos nt)^2} = \\ &= \frac{2|\xi|^n |\zeta|^n (|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 1 - |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n}) \sin t}{(|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 2|\xi|^n |\zeta|^n \cos t)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим выражение в круглых скобках в числителе последней дроби в (15):

$$|\xi|^{2n} + |\zeta|^{2n} - 1 - |\xi|^{2n} |\zeta|^{2n} = (1 - |\zeta|^{2n})(|\xi|^{2n} - 1) < 0, \quad |\xi|, |\zeta| \in (0, 1). \quad (16)$$

В силу (16) знак частной производной (15) противоположен знаку $\sin t$, т.е.

$$\frac{\partial l_{n,t}^2}{\partial t} < 0, \quad t \in (0, \pi); \quad \frac{\partial l_{n,t}^2}{\partial t} > 0, \quad t \in (\pi, 2\pi). \quad (17)$$

Пусть $|\xi| > |\zeta|$. Тогда ввиду (15) и (17) при фиксированных значениях ξ, ζ, n имеем

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} l_{n,t} = l_{n,t}|_{t=\pi} = \frac{1 + |\xi|^n |\zeta|^n}{|\xi|^n + |\zeta|^n}, \quad \max_{t \in [0, 2\pi]} l_{n,t} = l_{n,t}|_{t=0} = \frac{1 - |\xi|^n |\zeta|^n}{|\xi|^n - |\zeta|^n}. \quad (18)$$

Формулы (18) будут использованы в п. 4. Докажем также следующее вспомогательное утверждение (не вытекающее из (18)).

Лемма 3. Пусть вещественные числа $\xi, \zeta \in (0, 1)$, причём $\xi > \zeta$. Пусть также для некоторого $m > 0$ справедливо соотношение

$$\xi(1 - \xi^m) > \zeta(1 + \zeta^m). \quad (19)$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{1 + \xi^{n+m+x} \zeta^{n+m+x}}{\xi^{n+m+x} + \zeta^{n+m+x}} > \frac{1 - \xi^n \zeta^n}{\xi^n - \zeta^n}. \quad (20)$$

Доказательство. Числитель преобразованного неравенства (20) имеет вид

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^{n+m+x} \zeta^{n+m+x})(\xi^n - \zeta^n) - (1 - \xi^n \zeta^n)(\xi^{n+m+x} + \zeta^{n+m+x}) = \\ & = \xi^n - \zeta^n + \xi^{2n+m+x} \zeta^{n+m+x} - \xi^{n+m+x} \zeta^{2n+m+x} - \xi^{n+m+x} + \xi^{2n+m+x} \zeta^n - \zeta^{n+m+x} + \xi^n \zeta^{2n+m+x} = \\ & = \xi^n(1 - \xi^{m+x}) + \xi^n \zeta^{2n+m+x}(1 - \xi^{m+x}) + \zeta^n \xi^{2n+m+x}(1 + \zeta^{m+x}) - \zeta^n(1 + \zeta^{m+x}) > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как $\xi, \zeta \in (0, 1)$, то в силу (19) для выполнения (21), т.е. для выполнения (20), достаточно условия

$$\xi^n(1 - \xi^{m+x}) - \zeta^n(1 + \zeta^{m+x}) > 0. \quad (22)$$

Так как $\xi > \zeta$, то для выполнения (22), в свою очередь, достаточно условия

$$\xi(1 - \xi^{m+x}) - \zeta(1 + \zeta^{m+x}) > 0. \quad (23)$$

Обозначив через $g(x)$ левую часть (23), при $\xi, \zeta \in (0, 1)$ имеем

$$\frac{dg}{dx} = -\xi^{m+1+x} \ln \xi - \zeta^{m+1+x} \ln \zeta > 0, \quad \ln \xi < 0, \quad \ln \zeta < 0. \quad (24)$$

Согласно (24) функция $g(x)$ возрастает при $x > 0$. Поэтому если неравенство (23) верно при $x = 0$, то оно верно и для всех $x > 0$. Но (23) при $x = 0$ — это неравенство (19). Следовательно, (19) — достаточное условие для выполнения (22), т.е. и для выполнения (20). Лемма доказана.

4. РАЗМЕРНОСТЬ И СТРУКТУРА ЯДРА. ПРИМЕРЫ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Построения, выполненные в пп. 2 и 3, используем для изучения структуры ядра задачи Шварца в эллипсе Γ . Пусть для данной матрицы J вычислен параметр $l_0 = l(J)$ согласно (7). Рассмотрим функцию $l_{n,\beta}$ (13). Согласно (5), (10) и (12) данному эллипсу однозначно соответствуют некоторые параметры ξ, ζ, β . Пусть число n_1 таково, что выполнены следующие соотношения:

$$l_{n_1,\beta} \geq l_0, \quad l_{k,\beta} \neq l_0, \quad k < n_1. \quad (25)$$

Замечание 3. В (25) возможен случай, когда $l_{k,\beta} > l_0$ при $k < n_1$. Таким образом, число n_1 определено неоднозначно. Однако здесь принципиально именно условие $l_{k,\beta} \neq l_0$ при $k < n_1$. Кроме того, число n_1 , удовлетворяющее (25), существует. Действительно, в силу (13) при фиксированных значениях ξ, ζ, β имеем $l_{n,\beta} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Пусть, как и ранее, матрица J имеет разные собственные числа λ, μ , лежащие выше вещественной оси. С учётом обозначения (25) докажем следующее утверждение.

Теорема 5 (верхняя оценка размерности ядра). Пусть числа $\xi, \zeta \neq 0$, где $|\xi| > |\zeta|$, определены формулами (10), (5). Тогда размерность ядра задачи Шварца для данной матрицы J в эллипсе Γ (4) не превосходит минимального значения $m \in \mathbb{N}$, при котором выполняется неравенство

$$|\xi|(1 - |\xi|^m) > |\zeta|(1 + |\zeta|^m). \quad (26)$$

Замечание 4. Неравенство (26) будет выполняться при достаточно больших значениях m , так как $|\xi| > |\zeta|$, где $|\xi|, |\zeta| \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 5. Пусть m — некоторое число, при котором справедливо неравенство (26). Пусть число n_1 удовлетворяет (25) и пусть $x > 0$. Выпишем следующую цепочку соотношений, бинарные операции между которыми занумеруем по порядку:

$$\begin{aligned} l_{n_1+m+x, \beta} &\stackrel{[1]}{=} l_{n, t}|_{t=(n_1+m+x)\beta} \stackrel{[2]}{\geq} \min_{t \in [0, 2\pi]} l_{n_1+m+x, t} \stackrel{[3]}{=} \frac{1 + |\xi|^{n_1+m+x} |\zeta|^{n_1+m+x}}{|\xi|^{n_1+m+x} + |\zeta|^{n_1+m+x}} \stackrel{[4]}{>} \\ &\stackrel{[4]}{>} \frac{1 - |\xi|^{n_1} |\zeta|^{n_1}}{|\xi|^{n_1} - |\zeta|^{n_1}} \stackrel{[5]}{=} l_{n_1, t}|_{t=0} \stackrel{[6]}{=} \max_{t \in [0, 2\pi]} l_{n_1, t} \stackrel{[7]}{\geq} l_{n_1, t}|_{t=n\beta} \stackrel{[8]}{=} l_{n_1, \beta} \stackrel{[9]}{\geq} l_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Равенства [1] и [8] в (27) вытекают из (13) и (14). Неравенства [2] и [7] следуют из 2π -периодичности функции (14). Равенство [3] доказано в (18). Согласно (10) и условию теоремы имеем $|\xi|, |\zeta| \in (0, 1)$, поэтому строгое неравенство [4] справедливо ввиду леммы 3, неравенств (26) и (20). Равенство [5] вытекает из (14), [6] доказано в (18). Неравенство [9] записано согласно (25). Тем самым в (27) доказано соотношение

$$l_{n_1+m+x, \beta} > l_0, \quad x > 0. \quad (28)$$

Пусть согласно (7) число $l(J) = l_0$. В силу определения (9) равенства $l_{n, \beta} = l_0$ и $\Delta_n(l_0) = 0$ равносильны. Поэтому с учётом теоремы 3 наличие в ядре (единственного) вектор-полинома степени n равносильно условию $l_{n, \beta} = l_0$. Но из (28) в силу произвольности $x > 0$ и из (25) следует, что равенство $l_{n_1+k, \beta} = l_0$ возможно только для значений $k = \overline{0, m-1}$. Количество таких значений не превосходит m , поэтому ввиду теорем 2 и 3 размерность ядра задачи Шварца в данном эллипсе Γ также не превосходит m . В наших рассуждениях число m , для которого справедливо неравенство (26), было выбрано произвольно, поэтому, не умаляя общности, его можно считать минимальным. Теорема доказана.

Критерий (26) не требует вычисления значения n_1 в (25), что делает его удобным для оценки размерности ядра сверху. Однако если число n_1 в (25) известно, то неравенство (26) можно заменить на более слабое неравенство, что упростит нахождение m . Здесь имеет место следующее утверждение, при доказательстве которого используются схемы доказательств леммы 3 и теоремы 5.

Теорема 6 (альтернативная оценка размерности ядра и его структура). Пусть числа $\xi, \zeta \neq 0$, где $|\xi| > |\zeta|$, определены формулами (10), (5) и пусть известно число n_1 , удовлетворяющее (25). Тогда

1) размерность ядра задачи Шварца не превосходит минимального значения $m \in \mathbb{N}$, при котором выполняется более слабое, чем (26), неравенство

$$|\xi|^{n_1} (1 - |\xi|^m) > |\zeta|^{n_1} (1 + |\zeta|^m); \quad (29)$$

2) в ядро могут входить только полиномы степеней $n_1 + k$, где $k = \overline{0, m-1}$.

Доказательство. Пусть m — некоторое число, при котором справедливо неравенство (29). Здесь выполнены условия теоремы 5, поэтому используем схему её доказательства. Заметим, что при доказательстве соотношений (27) применяется неравенство (20), которое вытекает из (22). Обозначим через $h(x)$ левую часть (22). Тогда имеем

$$\frac{dh}{dx} = -\xi^{m+n+x} \ln \xi - \zeta^{m+n+x} \ln \zeta > 0, \quad \ln \xi < 0, \quad \ln \zeta < 0.$$

Таким образом, если неравенство (22) верно при $x = 0$, то оно верно и для всех $x > 0$. Но (22) при $x = 0$ совпадает с (29) с точностью до обозначения $n = n_1$, т.е. из (29) вытекает

(22) для всех $x > 0$, а значит, и (20) для произвольного $x > 0$. Таким образом, из (29) по схеме доказательства теоремы 5 следует справедливость п. 1). Поскольку число m , удовлетворяющее (29), выбрано произвольно, то его можно взять минимальным.

Как было отмечено в завершении доказательства теоремы 5, равенство $l_{n_1+k,\beta} = l_0$ возможно только для значений $k = \overline{0, m-1}$. Кроме того, в силу (9) равносильны условия $l_{n,\beta} = l_0$ и $\Delta_n(l_0) = 0$, поэтому с учётом теоремы 3 полиномы ядра могут иметь только степени $n_1 + k$, $k = \overline{0, m-1}$, что доказывает п. 2). Теорема доказана.

Замечание 5. Из п. 2) теоремы 6 вовсе не следует, что ядро имеет размерность, равную именно m . Для вычисления его структуры нужно найти значения $l_{n_1+k,\beta}$ для всех $k = \overline{0, m-1}$, где m удовлетворяет (29). Если окажется, что все $l_{n_1+k,\beta} \neq l_0$, то ядро тривиально. Если же $l_{n_1+r,\beta} = l_0$, то ядро содержит, в частности, один вектор-полином степени $n_1 + r$.

Пусть $l(J) = l_0$. Очевидным следствием из теоремы 6 является следующее утверждение.

Лемма 4 (достаточные условия одномерности и тривиальности ядра). Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда если в (25) $l_{n_1,\beta} = l_0$ и в (29) $m = 1$, то ядро одномерно. Если же в (25) $l_{n_1,\beta} > l_0$ и в (29) $m = 1$, то ядро тривиально.

Доказательство. Равенство $l_{n_1,\beta} = l_0$ ввиду (9) означает, что $\Delta_{n_1}(l_0) = 0$. Отсюда согласно теореме 3 ядро содержит один вектор-полином $\phi_{n_1}(z)$ степени n_1 , который в силу теоремы 2 и п. 2) теоремы 6 при $m = 1$ является единственным элементом ядра.

Строгое неравенство $l_{n_1,\beta} > l_0$ означает согласно (25), что $l_{k,\beta} \neq l_0$ при $k \leq n_1$. Отсюда следует, что $\Delta_k(l_0) \neq 0$ при $k \leq n_1$. Поэтому в силу теоремы 3 в ядро могут входить только полиномы степени больше n_1 . Но согласно теореме 6 при $m = 1$ в ядро входят полиномы степени не выше $n_1 + (m - 1) = n_1$. Противоречие доказывает тривиальность ядра. Лемма доказана.

Для упрощения вычисления ядра задачи Шварца в конкретных случаях используем приведённые ниже леммы.

Лемма 5 [14]. Обозначим $J = A + Bi$, где A, B — вещественные матрицы. Утверждается, что ядро задачи Шварца содержит вектор-полином $\phi_1(z)$ первой степени тогда и только тогда, когда $\det B = 0$. В этом случае $\operatorname{Re} \phi_1(z) \equiv 0$.

Лемма 5 означает, что если $\det B \neq 0$, то $l_{1,\beta} \neq l_0$. Действительно, в противном случае в силу определения (9) функции $l_{n,\beta}$ имеем $\Delta_1(l_0) = 0$. Отсюда, согласно теореме 3, однородная задача Шварца имеет решение в виде вектор-полинома первой степени, что противоречит утверждению леммы 5.

Тем самым доказана

Лемма 6. Пусть $J = A + Bi$, где $\det B \neq 0$. Тогда в (25) и, соответственно, в (29) число $n_1 \geq 2$.

В качестве иллюстрации к леммам 4–6 приведём два примера.

Пример 2. Пусть

$$\phi_2(z) = \begin{pmatrix} -3(x^2 + 2y^2)i \\ x^2 + 8y^2 - 4 - 4xyi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 2 & 4i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Матрица J в (30) имеет разные собственные числа $\lambda = i$, $\mu = 2i$, при этом $\operatorname{Re} \phi_2(z)|_{\Gamma_1} = 0$ на эллипсе $\Gamma_1: x^2 + 8y^2 = 4$. Записав эллипс Γ_1 в каноническом виде, согласно (4) имеем $r_1 = 2$, $r_2 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha = 0$. Найдём числа ξ , ζ , β по формулам (5), (10) и (12) при $\lambda = i$, $\mu = 2i$:

$$\xi = \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, \quad \xi > \zeta, \quad \beta = \arg \xi - \arg \zeta = 0. \quad (31)$$

Собственные векторы матрицы J (30) имеют вид $\mathbf{x}_i = (3, 2i)$, $\mathbf{y}_{2i} = (1, i)$ для собственных чисел $\lambda = i$, $\mu = 2i$ соответственно. По формуле (7) число $l(J) = l_0 = 5$.

Непосредственная подстановка в (13) чисел ξ, ζ, β (31) при $n=2$ даёт то же значение $l_{2,0}=5$. Кроме того, $\det B = -4 \neq 0$. Поэтому в силу (25) и леммы 6 можно взять число $n_1=2$ (это число согласно замечанию 3 определено неоднозначно).

Как показывают вычисления (их не приводим), неравенство (29) выполнено для чисел ξ, ζ (31) при $n_1=2, m=1$. Отсюда, согласно лемме 4, следует, что ядро задачи Шварца для матрицы J (30) в эллипсе Γ_1 содержит только один нетривиальный элемент $\phi_2(z)$, определённый в (30).

Пример 3. Пусть $\phi_2(z), J, B$ определены в (30), эллипс Γ_2 задан уравнением

$$\Gamma_2: x^2/9 + y^2/4 = 1. \quad (32)$$

Здесь $r_1=3, r_2=2, \alpha=0$.

Согласно (5), (10) и (12) при $\lambda=i, \mu=2i$ имеем

$$\xi=1/5, \quad \zeta=-1/7, \quad |\xi| > |\zeta|, \quad \beta = \arg \xi - \arg \zeta = 0 - \pi = -\pi. \quad (33)$$

Как и в примере 2, здесь $l(J)=l_0=5$. Подстановка чисел ξ, ζ, β из (33) в (13) при $n=2$ даёт неравенство

$$l_{2,\beta} = l_{2,0} = 51 > 5 = l_0.$$

Поскольку $\det B \neq 0$, то согласно (25) и лемме 6 можно положить $n_1=2$.

В свою очередь, подстановка чисел ξ, ζ (33) в неравенство (29) при $n_1=2, m=1$ даёт верное неравенство

$$\frac{8}{250} > \frac{8}{343}.$$

Таким образом, согласно лемме 4 ядро задачи Шварца для матрицы J (30) в эллипсе Γ_2 (32) тривиально.

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

В п. 4 были существенно использованы условия $\xi, \zeta \neq 0, |\xi| > |\zeta|$. Они выполняются почти для всех матриц и эллипсов. Однако есть исключения. Рассмотрим два случая, которые не подходят под эти условия.

1. Пусть $\xi=0, \zeta \neq 0$. Тогда согласно (8) и (10) имеем $\Delta_n(l) = l^2|\zeta|^{2n} - 1$. Так как данная функция строго убывающая по n при фиксированном $|\zeta| \in (0, 1)$, то равенство

$$\Delta_n(l_0) = l_0^2|\zeta|^{2n} - 1 = 0 \quad (34)$$

может иметь место только при одном значении n . Напомним, что параметры ξ, ζ находим по эллипсу Γ и собственным числам матрицы J . Пусть матрица J такова, что $l(J) = l_0 = |\zeta|^{-n}$. Тогда согласно (34) $\Delta_n(l_0) = 0$. В этом случае с учётом теорем 2 и 3 ядро задачи Шварца в эллипсе Γ состоит из одного вектор-полинома степени n . Если же $l_0 \neq |\zeta|^{-n}, n \in \mathbb{N}$, что несложно доказать, то в силу тех же двух теорем ядро тривиально.

В примере 1 число $\xi=0, \zeta=1/2, l_0=l(J)=8$. Для $n=3$ имеем

$$l_0 = 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = |\zeta|^{-n}.$$

Таким образом, в примере 1 вектор-полином третьей степени $\phi_3(z)$ является единственным нетривиальным элементом ядра.

2. Пусть $\xi=\zeta$. Тогда согласно (8) и (10) имеем $\Delta_n(l) \equiv -|1 - |\xi|^{2n}|^2 \neq 0, n \in \mathbb{N}$, так как $|\xi| \in [0, 1)$. Поэтому в силу теорем 2 и 3 ядро тривиально.

Случай $\xi \neq \zeta, |\xi|=|\zeta|$ является весьма частным. Однако его рассмотрение требует довольно сложного анализа выражения (13), что выходит за рамки данной статьи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М. : Наука, 1977. — 641 с.
2. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — М. : Наука, 1968. — 513 с.
3. Бицадзе, А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1966. — 202 с.
4. Солдатов, А.П. Функции, аналитические по Дуглису / А.П. Солдатов. — Белгород : Изд-во БелГУ, 2016. — 88 с.
5. Солдатов, А.П. Гипераналитические функции и их приложения / А.П. Солдатов // Совр. математика и ее приложения. — 2004. — Т. 15. — С. 142–99.
6. Vasilyev, V.B. General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations / V.B. Vasilyev // Adv. Differ. Equat. — 2013. — V. 289. — P. 1–7.
7. Vasilyev, V.B. Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries / V.B. Vasilyev // Differ. and Difference Equat. Appl. — 2013. — V. 47. — P. 625–637.
8. Vasilyev, V.B. On some transmission problems in a plane corner / V.B. Vasilyev // Tatra Mt. Math. Publ. — 2015. — V. 63. — P. 291–301.
9. Soldatov, A.P. On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane / A.P. Soldatov // More Progresses in Analysis. Proc. of the 5th Int. ISAAC Congress. 25–30 July 2009. — Catania, Italy, 2009. — V. 2. — P. 1171–1184.
10. Солдатов, А.П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису / А.П. Солдатов // Совр. математика и ее приложения. — 2010. — Т. 67. — С. 99–102.
11. Nikolaev, V. On a certain functional equation and its application to the Schwarz problem / V. Nikolaev, V. Vasilyev // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 12. — Art. 2789.
12. Nikolaev, V.G. Solutions to the Schwarz problem with diagonalizable matrices in ellipse / V.G. Nikolaev // J. Math. Sci. — 2020. — V. 244, № 4. — P. 655–670.
13. Nikolaev, V.G. A class of orthogonal polynomials on the boundary of an ellipse / V.G. Nikolaev // J. Math. Sci. — 2019. — V. 239, № 3. — P. 363–380.
14. Николаев В.Г. Об одном преобразовании задачи Шварца / В.Г. Николаев // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Сер. естественная. — 2012. — Т. 6, № 97. — С. 27–34.

ABOUT THE CORE STRUCTURE OF THE SCHWARTZ PROBLEM FOR FIRST-ORDER ELLIPTIC SYSTEMS ON A PLANE

V. G. Nikolaev

*Novgorod State University, Russia
e-mail: vg14@inbox.ru*

The Schwarz problem for J -analytic functions in an arbitrary ellipse is considered. The matrix J is assumed to be two-dimensional, with different eigenvalues lying above the real axis. An example of a nonconstant solution of the homogeneous Schwarz problem in the form of a vector-polynomial of degree three is given. The numerical parameter l of the matrix J , which is expressed through its eigenvectors, is introduced. After that, one relation derived earlier by the author is analyzed. Based on this analysis, a method for computing the dimension and structure of the kernel of the Schwarz problem in an arbitrary ellipse is obtained. Sufficient conditions for the triviality of the kernel expressed through the ellipse parameters, the eigenvalues of the matrix J and the parameter l are obtained. Examples of one-dimensional and trivial kernels are given.

Keywords: Schwarz problem, kernel, matrix, eigenvalues.

REFERENCES

1. Gahov, F.D., *Kraevie zadachi* (Boundary Value Problems), Moscow: Nauka, 1977.
2. Mushelishvili, N.I., *Singulyarnie integral'nie uravneniya* (Singular Integral Equations), Moscow: Nauka, 1968.
3. Bitsadze, A.V., *Kraevie zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka* (Boundary Value Problems for Elliptic Equations of the Second Order), Moscow: Nauka, 1968.
4. Soldatov, A.P., *Funkziy, analyticheskie po Duglisy* (Douglis Analytic Functions), Belgorod: BSU Press, 2016.
5. Soldatov, A.P., Hyperanalytic functions and their applications, *Modern Math. Appl.*, 2004, vol. 15, pp. 142–199.
6. Vasilyev, V.B., General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations, *Adv. Differ. Equat.*, 2013, vol. 289. pp. 1–7.
7. Vasilyev, V.B., Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries, *Differ. and Difference Equat. Appl.*, 2013, vol. 47. pp. 625–637.
8. Vasilyev, V.B., On some transmission problems in a plane corner, *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2015, vol. 63. pp. 291–301.
9. Soldatov, A.P., On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane, in *More Progresses in Analysis. Proc. of the 5th Int. ISAAC Congress*, Catania, Italy, 25–30 July, 2009, vol. 2, pp. 1171–1184.
10. Soldatov, A.P., The Schwarz problem for Douglis analytic functions, *Modern Math. Appl.*, 2010, vol. 67, pp. 99–102.
11. Nikolaev, V. and Vasilyev, V., On a certain functional equation and its application to the Schwarz problem, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 12, art. 2789.
12. Nikolaev, V.G., Solutions to the Schwarz problem with diagonalizable matrices in ellipse, *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 244, no. 4, pp. 655–670.
13. Nikolaev, V.G., A class of orthogonal polynomials on the boundary of an ellipse, *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 239, no. 3, pp. 363–380.
14. Nikolaev, V.G., On one transformation of the Schwarz problem, *Bull. Samara State Univ.*, 2012, vol. 6, no. 97, pp. 27–34.

УДК 517.977

ЗАДАЧИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ДРЕЙФОВОЙ МОДЕЛИ ЗАРЯДКИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯРНОГО ДИЭЛЕКТРИКА

© Р. В. Бризицкий¹, Н. Н. Максимова²¹Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток²Амурский государственный университет, г. Благовещенскe-mail: ¹mlnwizard@mail.ru, ²knnamursu@mail.ru

Поступила в редакцию 22.11.2023 г., после доработки 22.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Исследуется двухпараметрическая задача мультипликативного управления для модели электронно-индуцированной зарядки неоднородного полярного диэлектрика. Выводятся точные оценки локальной устойчивости её оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функции краевой задачи. Для одного из управлений устанавливается свойство релейности или принцип bang–bang.

Ключевые слова: задача мультипликативного управления, система оптимальности, оценка локальной устойчивости, принцип bang–bang, модель дрейфа–диффузии электронов.

DOI: 10.31857/S0374064124050062, EDN: LBKGWR

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При моделировании процессов зарядки диэлектриков в неравновесных внешних условиях часто используется диффузионно-дрейфовое приближение. С практической точки зрения это обосновано необходимостью прогнозирования состояния функциональных диэлектрических материалов при диагностике и модификации их свойств методами растровой электронной микроскопии (см. работы [1, 2] и библиографию в них).

Математическая модель процесса зарядки неоднородного полярного диэлектрика может быть представлена следующей краевой задачей, рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ :

$$-\operatorname{div}(d \nabla \rho) + \mu_n \mathbf{E} \cdot \nabla \rho + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \beta |\rho| \rho = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\rho = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma. \quad (3)$$

Здесь ρ — объёмная плотность заряда, $\mathbf{E}$ — вектор-функция напряжённости электрического поля, $d(\mathbf{x}) > 0$ — коэффициент диффузии электронов, μ_n — дрейфовая подвижность электронов, ε — диэлектрическая проницаемость материала, ε_0 — электрическая постоянная, f — генерационное слагаемое, отвечающее за действие объёмного источника зарядов в объекте, $\beta(\mathbf{x}) > 0$ — нормализованный коэффициент потери заряда.

Ниже на задачу (1)–(3) будем ссылаться как на задачу 1.

Несмотря на длительное использование модели (1)–(3) на практике, глобальная разрешимость и локальная единственность решения задачи 1 впервые доказаны в 2022 г. в статье [3]

при $\beta = 1$. Краевые и экстремальные задачи для модели дрейфа–диффузии электронов с переменным коэффициентом β , учитывающим неоднородность потери заряда в пространстве, исследованы в [4]. В частности, для задачи 1 доказана разрешимость задачи управления с двумя мультипликативными управлениями d и β и с распределённым управлением f . Для указанной задачи получена система оптимальности и на основе её анализа доказана локальная единственность решения задачи распределённого управления.

Из близких по тематике отметим работы [5–11], посвящённые моделям диффузии–реакции–конвекции и сложного теплообмена с переменными коэффициентами, а также статьи [12–14], обобщающие приближение Буссинеска, и [15–17], в которых рассматриваются задачи оптимизации для моделей неньютоновских жидкостей с переменной вязкостью. В нашем случае аналогом скорости является вектор $\mathbf{E}$.

В настоящей работе выводятся оценки локальной устойчивости оптимальных решений двухпараметрической задачи мультипликативного управления, роль управлений в которой играют коэффициенты d и β , относительно малых возмущений как функционала качества, так и заданной функции f (см. также [6]). В п. 6 для экстремальной задачи с одним управлением β устанавливается свойство релейности такого управления или справедливость принципа bang–bang. Последнее означает, что управление β в зависимости от $\mathbf{x} \in \Omega$ может принимать только два значения: отвечающие верхней и нижней границе множества управлений. Другими словами, происходит скачок управления из одного состояния в другое (bang–bang) или его переключение между ними (релейность) (см. [5, 11]).

Отметим, что в рамках оптимизационного подхода к рассматриваемым задачам мультипликативного управления могут быть сведены обратные задачи восстановления неизвестных коэффициентов диффузии электронов d и потери заряда β по дополнительной информации о решении $(\rho, \mathbf{E})$ задачи 1 (см., например, [18]).

2. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При анализе краевой задачи будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω , либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо границу Γ . Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot, \cdot)_{s,Q}$ будем записывать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в пространствах $L^2(Q)$ и $L^2(\Omega)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot, \cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot, \cdot)_\Omega$.

Введём функциональные пространства

$$H^1(\Delta, \Omega) = \{h \in H^1(\Omega) : \Delta h \in L^2(\Omega)\}, \quad H_N^1(\Omega) = \{\mathbf{h} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{h} \times \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{0}\},$$

$$\tilde{H}_N^1(\Omega) = H_N^1(\Omega) \cap \ker(\operatorname{rot}),$$

функциональные множества $L_{d_0}^p(\Omega) = \{h \in L^p(\Omega) : h \geq d_0 > 0 \text{ п.в. в } \Omega\}$, $1 \leq p \leq \infty$, $H_{d_0}^s(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geq d_0 > 0 \text{ п.в. в } \Omega\}$, $s \geq 0$, где d_0 — положительная константа, и произведение пространств $X = H_0^1(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega)$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

- (i) Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;
- (ii) $f \in L^2(\Omega)$, $d \in H_{d_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$;
- (iii) $\beta \in L_{\beta_0}^4(\Omega)$, $\beta_0 \geq 1/2$.

Напомним, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$, компактно при $s < 6$ и с некоторой константой C_s , зависящей от s и Ω , справедлива оценка

$$\|h\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s \|h\|_{1,\Omega} \quad \text{для любой } h \in H^1(\Omega). \quad (4)$$

При $s=2$ мы полагаем $C_2=1$.

Справедливы следующие леммы (см. [3; 19, п. 6.1.3]).

Лемма 1. При выполнении условий (i), $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$ существуют положительные константы C_0 , δ_1 , γ'_1 и γ_1 , зависящие от Ω , такие, что

$$\begin{aligned} |(\nabla h, \nabla \eta)| &\leq C_0 \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \\ |(\mathbf{E} \cdot \nabla h, \eta)| &\leq \gamma'_1 \|\mathbf{E}\|_{L^4(\Omega)^3} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \leq \gamma_1 \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \quad h, \eta \in H^1(\Omega), \\ (\nabla h, \nabla h) &\geq \delta_1 \|h\|_{1,\Omega}^2, \quad h \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Если функции $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$ и $\rho \in H_0^1(\Omega)$ связаны вторым соотношением в (2), то справедливо равенство

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, h) = -(\nabla h \cdot \mathbf{E}, \rho) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (h, \rho^2), \quad h \in H_0^1(\Omega),$$

принимаяющее при $h=\rho$ следующий вид:

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \rho) = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon \varepsilon_0} (\rho, \rho^2).$$

Лемма 2. При выполнении условия (i) для любой функции $\sigma \in L^2(\Omega)$ существует единственное решение $\mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega)$ задачи $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = \sigma$ в Ω , $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ на Γ , для которого справедлива оценка $\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq C_N \|\sigma\|_\Omega$, где C_N — положительная константа, зависящая от Ω .

Пусть $(\rho, \mathbf{E}) \in (C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})) \times (C^1(\Omega)^3 \cap \tilde{H}_N^1(\Omega))$ — классическое решение задачи 1. Умножив уравнение (1) на функцию $h \in H_0^1(\Omega)$ и проинтегрировав по Ω с помощью формулы Грина, приходим к слабой формулировке задачи 1

$$(d \nabla \rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho| \rho, h) = (f, h), \quad h \in H_0^1(\Omega), \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega. \quad (6)$$

Справедлива следующая

Теорема 1 [4]. При выполнении условий (i)–(iii) существует слабое решение $(\rho, \mathbf{E}) \in X$ задачи 1 и справедливы оценки

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq C_* \|f\|_\Omega, \quad C_* = (d_0 \delta_1)^{-1}, \quad \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_* \|f\|_\Omega.$$

Если к тому же выполняется условие

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\gamma_1 C_N + C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)}) \|f\|_\Omega < \lambda_*^2, \quad \lambda_* = d_0 \delta_1,$$

то слабое решение задачи 1 единственно.

Пусть в дополнение к (i)–(iii) выполняется условие

(iv) $0 \leq f \leq f_{\max}$ п.в. в Ω , где $f_{\max}$ — положительная константа.

Справедлив следующий принцип максимума для плотности заряда ρ (см. [4]).

Теорема 2. При выполнении условий (i)–(iv) для компоненты $\rho \in H_0^1(\Omega)$ слабого решения задачи 1 справедлив следующий принцип минимума и максимума:

$$0 \leq \rho \leq M \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad M = \left(\frac{f_{\max} \varepsilon \varepsilon_0}{\mu_n \beta_0} \right)^{1/2}.$$

3. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ И СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОСТИ

В данном пункте исследуется задача управления на слабых решениях задачи 1 с мультипликативными управлениями d и β .

Будем считать, что функции d и β могут изменяться, соответственно, во множествах K_1 и K_2 , удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H_{d_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $K_2 \subset H_{\beta_0}^r(\Omega)$, $r > 3/4$, — непустые выпуклые замкнутые множества.

Введём функциональные пространства $X = H_0^1(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega)$, $Y = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и положим $\mathbf{x} = (\rho, \mathbf{E}) \in X$, $u = (d, \beta) \in K$, где $K = K_1 \times K_2$. Далее введём оператор $F = (F_1, F_2): X \times K \rightarrow Y$ как

$$\langle F_1(\mathbf{x}, u), h \rangle = (d \nabla \rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho| \rho, h) - (f, h), \quad h \in H_0^1(\Omega),$$

$$F_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде операторного уравнения $F(\mathbf{x}, u) = 0$.

Пусть $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$J(\mathbf{x}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2} \|d\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{r, \Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \quad (7)$$

Через $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, u) \in X \times K: F(\mathbf{x}, u) = 0, J(\mathbf{x}, u) < \infty\}$ обозначим множество допустимых пар для задачи (7).

Пусть в дополнение к (j) выполняется условие

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2$, множество K ограничено или $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_Q^2, \quad I_2(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_Q^2. \quad (8)$$

Здесь $\rho^d \in L^2(Q)$ обозначает заданное поле концентрации в подобласти $Q \subset \Omega$. Функция $\mathbf{E}^d$ имеет аналогичный смысл для электрического поля.

Из результатов статьи [4] вытекает следующая

Теорема 3. Пусть выполняются условия (i)–(iii) и (j), (jj), функционал $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и $Z_{ad} \neq \emptyset$. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\mathbf{x}, u) \in X \times K$ задачи управления (7).

Замечание. Очевидно, что все функционалы качества из (8) удовлетворяют условиям теоремы 3.

Далее получим для задачи (7) систему оптимальности, которая играет ключевую роль при выводе оценок устойчивости оптимальных решений указанной задачи управления.

Через

$$X^* = H^{-1}(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega)^*, \quad Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

обозначим пространства, двойственные к пространствам X и Y .

Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F: X \times K \rightarrow Y$ по состоянию $\mathbf{x}$ в любой точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = (\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{d}, \hat{\beta})$ является линейным непрерывным оператором $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}): X \rightarrow Y$, который каждому элементу $(\tau, \mathbf{E}) \in X$ ставит в соответствие элемент

$$F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})(\tau, \mathbf{E}) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y.$$

Здесь $\hat{y}_1 \in H^{-1}(\Omega)$ и $\hat{y}_2 \in L_0^2(\Omega)$ определяются по паре $(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}})$ и $(\tau, \mathbf{E})$ как

$$\langle \hat{y}_1, (\tau, \mathbf{E}) \rangle = (\hat{d} \nabla \tau, \nabla h) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \tau, h) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \hat{\rho}, h) + \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} \mu_n(\hat{\beta} |\hat{\rho}| \tau, h),$$

$$\hat{y}_2 = \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \tau, \quad (\tau, \mathbf{E}) \in X.$$

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач (см. [20, гл. 2, § 1]), введём элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma) \in Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, на который будем ссылаться как на сопряжённое состояние, и введём лагранжиан $\mathcal{L}: X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, u) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle F_1(\mathbf{x}, u), \theta \rangle + \langle F_2(\mathbf{x}), \sigma \rangle.$$

Через $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^*: Y^* \rightarrow X^*$ обозначим сопряжённый к $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ оператор.

Следующая теорема также вытекает из результатов работы [4].

Теорема 4. Пусть выполняются условия (i)–(iii) и (j), (jj), а элемент $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) \in X \times K$ является точкой локального минимума для задачи (7). Предположим, что функционал качества $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию $\mathbf{x}$ в точке $\hat{\mathbf{x}}$. Тогда

1) существует ненулевой множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$, с которым выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ в X^* , эквивалентное соотношениям

$$(\hat{d} \nabla \tau, \nabla \theta) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\hat{\beta} |\hat{\rho}| \tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma) = -\lambda_0 \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\hat{\mathbf{x}}), \tau \rangle, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \quad (9)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \hat{\rho}, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = -\lambda_0 \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{E} \rangle, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega), \quad (10)$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ для всех $u \in K$, эквивалентный неравенствам

$$\lambda_0 \mu_1 (\hat{d}, d - \hat{d})_{s, \Omega} + ((d - \hat{d}) \nabla \hat{\rho}, \nabla \theta) \geq 0, \quad d \in K_1, \quad (11)$$

$$\lambda_0 \mu_2 (\hat{\beta}, \beta - \hat{\beta})_{r, \Omega} + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} ((\beta - \hat{\beta}) |\hat{\rho}| \hat{\rho}, \theta) \geq 0, \quad \beta \in K_2; \quad (12)$$

2) если к тому же выполняется условие

$$\frac{\gamma_1 \mu_n C_N}{\varepsilon \varepsilon_0} \|f\|_\Omega \leq \lambda_*^2,$$

то любой нетривиальный множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, удовлетворяющий (9)–(12), является регулярным, т.е. имеет вид $(1, \mathbf{y}^*)$, и определяется единственным образом по заданной паре $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$.

4. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1) = (\rho_1, \mathbf{E}_1, d_1, \beta_1) \in X \times K$ решение задачи (7), отвечающее заданной функции $f = f_1 \in L^2(\Omega)$. Через $(\mathbf{x}_2, u_2) = (\rho_2, \mathbf{E}_2, d_2, \beta_2) \in X \times K$ обозначим решение задачи

$$\tilde{J}(\mathbf{x}, u) = \frac{\mu_0}{2} \tilde{I}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2} \|d\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{r, \Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u, \tilde{f}) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K, \quad (13)$$

которое получается из (7) заменой функционала $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ функционалом $\tilde{I}: X \rightarrow \mathbb{R}$ и заменой функции f функцией $f_2 = \tilde{f} \in L^2(\Omega)$. Считая множество K ограниченным, а функционалы $I(\mathbf{x})$ и $\tilde{I}(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемыми на X , выведем одно важное для дальнейшего анализа неравенство для разности решений задач (7) и (13). Напомним, что в силу теоремы 1 справедливы следующие оценки для ρ_i и $\mathbf{E}_i$:

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq M_\rho \equiv \sup_{u \in K} C_* \|f\|_\Omega, \quad \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq M_{\mathbf{E}} \equiv \sup_{u \in K} \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_* \|f\|_\Omega, \quad C_* = \lambda_*^{-1}. \quad (14)$$

Ясно, что $M_\rho < \infty$ и $M_{\mathbf{E}} < \infty$ в случае, когда множество K ограничено.

Предполагая, что выполняются условия теоремы 4, запишем (9), (10) при $\lambda_0 = 1$ для $(\mathbf{x}_i, \mathbf{E}_i) = (\rho_i, \mathbf{E}_i, d_i, \beta_i)$ и отвечающих им множителей Лагранжа (θ_i, σ_i) . Будем иметь

$$(d_i \nabla \tau, \nabla \theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i \cdot \nabla \tau, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_i |\rho_i| \tau, \theta_i) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma_i) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_i), \tau \rangle, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \quad (15)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_i, \theta_i) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma_i) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_i), \mathbf{E} \rangle, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \quad (16)$$

Положим

$$\begin{aligned} d &= d_1 - d_2, \quad \beta = \beta_1 - \beta_2, \quad \rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \\ \theta &= \theta_1 - \theta_2, \quad \sigma = \sigma_1 - \sigma_2, \quad f = f_1 - f_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычитая уравнения (5), (6), записанные при $(\mathbf{x}_2, u_2) = (\rho_2, \mathbf{E}_2, d_2, \beta_2)$ и f_2 , из уравнений (5), (6) для $(\mathbf{x}_1, u_1) = (\rho_1, \mathbf{E}_1, d_1, \beta_1)$ и f_1 , с учётом обозначений (17) получаем

$$\begin{aligned} (d_1 \nabla \rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \rho, h) &= -(d \nabla \rho_2, \nabla h) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, h) - \\ &- \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, h) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho_2, h) + (f, h), \quad h \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega. \quad (19)$$

Далее вычтем уравнения (15), (16) при $(\mathbf{x}_2, u_2, \theta_2, \sigma_2)$ из уравнений (15), (16) при $(\mathbf{x}_1, u_1, \theta_1, \sigma_1)$ и будем иметь

$$\begin{aligned} (d_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma) &= -(d \nabla \tau, \nabla \theta_2) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \tau, \theta_2) - \\ &- \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \tau, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \tau, \theta_2) - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \tau \rangle, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \quad (21)$$

Положим $h = \theta$ в (18). Далее умножим (19) на $\sigma \in L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω . Приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} (d_1 \nabla \rho, \nabla \theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \rho, \theta) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) &= -(d \nabla \rho_2, \nabla \theta) - \\ &- \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho_2, \theta) + (f, \theta), \end{aligned} \quad (22)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\rho, \sigma). \quad (23)$$

Полагая $\tau = \rho$ в (20) и $\mathbf{e} = \mathbf{E}$ в (21), найдём

$$\begin{aligned} (d_1 \nabla \rho, \nabla \theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0}(\rho, \sigma) = \\ = -(d \nabla \rho, \nabla \theta_2) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) - \\ - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle. \quad (25)$$

Вычитая (22) из (24), а (23) из (25), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0}(\rho, \sigma) = (d \nabla \rho_2, \nabla \theta) - (d \nabla \rho, \nabla \theta_2) + \\ + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_2) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) + \\ + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - (f, \theta) - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle, \\ \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0}(\rho, \sigma) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle. \end{aligned}$$

Сложив полученные соотношения, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) = (d \nabla \rho_2, \nabla \theta) - (d \nabla \rho, \nabla \theta_2) - \\ - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1 + \theta_2) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) + \\ + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - (f, \theta) - \\ - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (26) с учётом соотношений

$$\begin{aligned} (d \nabla \rho_2, \nabla \theta) - (d \nabla \rho, \nabla \theta_2) = -[(d \nabla \rho_2, \nabla \theta_2) - (d \nabla \rho_1, \nabla \theta_1) + (d \nabla \rho, \nabla (\theta_1 + \theta_2))], \\ \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) = -\frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}[(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta_2) - (\beta |\rho_2| \rho_1, \theta_1) + (\beta |\rho_2| \rho, \theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle + \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle + [(d \nabla \rho_2, \nabla \theta_2) - (d \nabla \rho_1, \nabla \theta_1)] + \\ + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}[(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta_2) - (\beta |\rho_1| \rho_1, \theta_1)] = -(d \nabla \rho, \nabla (\theta_1 + \theta_2)) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_1 + \theta_2) + \\ + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) - \\ - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_1, \theta_1) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1 + \theta_2) - (f, \theta). \end{aligned} \quad (27)$$

Положив $d = d_1$ в неравенстве (11) (при $\lambda_0 = 1$), записанном для (d_2, ρ_2, θ_2) , и $d = d_2$ в (11) при (d_1, ρ_1, θ_1) , будем иметь

$$\mu_1(d_2, d)_{s,\Omega} + (d \nabla \rho_2, \nabla \theta_2) \geq 0, \quad -\mu_1(d_1, d)_{s,\Omega} - (d \nabla \rho_1, \nabla \theta_1) \geq 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к оценке

$$(d \nabla \rho_2, \nabla \theta_2) - (d \nabla \rho_1, \nabla \theta_1) \geq \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2. \quad (28)$$

Пусть $\beta = \beta_1$ в (12) (при $\lambda_0 = 1$), записанном для $(\beta_2, \rho_2, \theta_2)$, и пусть $\beta = \beta_2$ в (12) при $(\beta_1, \rho_1, \theta_1)$, тогда справедливы неравенства

$$\mu_2(\beta_2, \beta)_{r,\Omega} + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho_2, \theta_2) \geq 0, \quad -\mu_2(\beta_1, \beta)_{r,\Omega} - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_1| \rho_1, \theta_1) \geq 0,$$

сложение которых даёт оценку

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} ((\beta |\rho_2| \rho_2, \theta_2) - (\beta |\rho_1| \rho_1, \theta_1)) \geq \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2. \quad (29)$$

Наконец, сложив (27) с (28) и (29), выводим основное неравенство относительно разностей состояний и управлений:

$$\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle + \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle + \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 \leq \mathcal{R} + \mathcal{E} - (f, \theta), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & -(d \nabla \rho, \nabla (\theta_1 + \theta_2)) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho, \theta_1 + \theta_2) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \\ & - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_1, \theta_1) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho, \theta_2), \\ \mathcal{E} = & -\mu_n (\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Теперь получим оценку норм разностей состояний ρ и $\mathbf{E}$ через нормы разностей управлений d и β и норму разности возмущений f . Из (19) в силу леммы 2 вытекает оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N \|\rho\|_{1,\Omega}. \quad (31)$$

Полагая в (18) $h = \rho$, запишем

$$\begin{aligned} & (d_1 \nabla \rho, \nabla \rho) + \mu_n (\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \rho, \rho) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \rho, \rho) = \\ & = -(d \nabla \rho_2, \nabla \rho) - \mu_n (\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \rho) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \rho) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho_2, \rho) + (f, \rho). \end{aligned}$$

С учётом (31) при выполнении условия

$$(\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta) \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} M_\rho \leq \lambda_*/2 \quad (32)$$

из неравенства

$$\lambda_* \|\rho\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta) M_\rho \|\rho\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho^2 \|\beta\|_{r,\Omega} \|\rho\|_{1,\Omega} + C_0 \|d\|_{s,\Omega} M_\rho \|\rho\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega \|\rho\|_{1,\Omega}$$

приходим к оценке

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq 2C_*(a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega), \quad a = C_0 M_\rho, \quad b = \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho^2, \quad (33)$$

ввиду которой соотношение (31) примет вид

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_* (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}). \quad (34)$$

Полученный результат обобщает

Теорема 5. Пусть в дополнение к условиям (i) и (j) $K \subset H_{d_0}^s(\Omega) \times H_{\beta_0}^r(\Omega)$ — ограниченное множество; пары $(\mathbf{x}_1, u_1) \in X \times K$ и $(\mathbf{x}_2, u_2) \in X \times K$ являются решениями соответственно задач (7) при $f = f_1 \in L^2(\Omega)$ и (13) при $f = f_2 \in L^2(\Omega)$; $(\theta_i, \sigma_i) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — множители Лагранжа, отвечающие решениям $(\mathbf{x}_i, u_i)$, $i = 1, 2$; функционалы I и $\tilde{I}$ непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$. Тогда для разностей ρ , $\mathbf{E}$, d , β , θ , σ и f , введённых в (17), при выполнении условия (32) справедливы оценки (33), (34) и выполняется неравенство (30).

5. ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Опираясь на теорему 5, установим достаточные условия единственности и устойчивости решений конкретных экстремальных задач. Начнём с анализа следующей экстремальной задачи, отвечающей функционалу качества $I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_Q^2$:

$$J(\rho, u) = \frac{\mu_0}{2} I_1(\rho) + \frac{\mu_1}{2} \|d\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{r,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u, f) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \quad (35)$$

Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1)$ решение задачи (35), отвечающее заданным функциям $\rho^d = \rho_1^d \in L^2(Q)$ и $f = f_1 \in L^2(\Omega)$. Через $(\mathbf{x}_2, u_2)$ обозначим решение задачи (35), отвечающее возмущённым функциям $\tilde{\rho}^d = \rho_2^d \in L^2(Q)$ и $\tilde{f} = f_2 \in L^2(\Omega)$. Полагая $\rho^d = \rho_1^d - \rho_2^d$, в дополнение к (17) в силу (8) имеем

$$\langle I'_1(\rho_i), \tau \rangle = 2(\rho_i - \rho_i^d, \tau)_Q, \quad \langle I'_1(\rho_1) - \tilde{I}'_1(\rho_2), \tau \rangle = 2((\rho, \tau)_Q - (\rho^d, \tau)_Q), \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

Ввиду (36) равенства (15), (16) для множителей Лагранжа $(\theta_i, \sigma_i) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, отвечающие решениям $(\mathbf{x}_i, u_i)$, $i = 1, 2$, принимают вид

$$(d_i \nabla \tau, \nabla \theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i \cdot \nabla \tau, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_i |\rho_i| \tau, \theta_i) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma_i) = -\mu_0(\rho_i - \rho_i^d, \tau)_Q, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \quad (37)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_i, \theta_i) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma_i) = 0, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \quad (38)$$

В (20), (21) подставим производную Фреше от конкретного функционала качества и запишем (20) в виде уравнения относительно разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$:

$$(d_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma) = -(d \nabla \tau, \nabla \theta_2) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \tau, \theta_2) - \\ - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \tau, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \tau, \theta_2) - \mu_0(\rho - \rho^d, \tau)_Q, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \quad (39)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = 0, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \quad (40)$$

Тогда (30) примет следующий вид:

$$\mu_0(\|\rho\|_Q^2 - (\rho^d, \rho)_Q) + \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 \leq \mathcal{R} + \mathcal{E} - (f, \theta). \quad (41)$$

Получим оценки множителей Лагранжа θ_i и σ_i . В силу (14) и оценок $\|\rho_i\|_Q \leq \|\rho_i\|_{1,\Omega}$, $\|\tau\|_Q \leq \|\tau\|_{1,\Omega}$ имеем

$$|(\rho_i - \rho_i^d, \tau)_Q| \leq M_\rho^0 \|\tau\|_{1,\Omega}, \quad \tau \in H^1(\Omega), \quad M_\rho^0 \equiv M_\rho + \max\{\|\rho_1^d\|_Q, \|\rho_2^d\|_Q\}.$$

Согласно лемме 2 существуют функции $\tilde{\mathbf{E}}_i$ такие, что $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}_i = \sigma_i$ и $\|\tilde{\mathbf{E}}_i\|_{1,\Omega} \leq C_N \|\sigma_i\|_\Omega$, $i = 1, 2$. Полагая $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_i$ в (38), приходим к неравенству

$$\|\sigma_i\|_\Omega \leq \mu_n \gamma_1 C_N M_\rho \|\theta_i\|_{1,\Omega}, \quad i = 1, 2. \quad (42)$$

Полагая $\tau = \theta_i$ в (37), с учётом лемм 1 и 2 и оценки (42) при выполнении условия

$$\frac{\mu_n \gamma_1 C_N}{\varepsilon \varepsilon_0} M_\rho \leq \frac{\lambda_*}{2} \quad (43)$$

получаем оценку для θ_i :

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 M_\theta, \quad M_\theta \equiv 2C_*(M_\rho + \|\rho^d\|_Q), \quad i = 1, 2. \quad (44)$$

В силу (44) из (42) находим оценку для σ_i :

$$\|\sigma_i\|_\Omega \leq \mu_0 M_\sigma, \quad M_\sigma \equiv 2\mu_n \gamma_1 C_N M_\rho M_\theta, \quad i = 1, 2. \quad (45)$$

Получим далее оценки норм разностей $\theta = \theta_1 - \theta_2$ и $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$.

Рассуждая аналогично выводу (45), из (40) с учётом (33) получаем к неравенство

$$\begin{aligned} \|\sigma\|_\Omega &\leq \mu_0 \mu_n \gamma_1 M_\theta C_N \|\rho\|_{1,\Omega} + \mu_n \gamma_1 M_\rho C_N \|\theta\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq 2\mu_0 \mu_n \gamma_1 C_* M_\theta C_N (a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega) + \mu_n \gamma_1 M_\rho C_N \|\theta\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (46)$$

Подставим $\tau = \theta$ в (39). Применяя неравенство Гёльдера и оценки леммы 1, с учётом (33), (34) будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega} &\leq \mu_0 C_0 M_\theta \|d\|_{s,\Omega} + \mu_0 \mu_n \gamma_1 M_\theta \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} + \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_\beta M_\theta \|\rho\|_{1,\Omega} + \\ &+ \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho M_\theta \|\beta\|_{r,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \|\sigma\|_\Omega + \mu_0 (\|\rho\|_{1,\Omega} + \|\rho^d\|_Q). \end{aligned} \quad (47)$$

Ввиду оценок (33), (34) и (46) неравенство (47) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega} &\leq \mu_0 C_0 M_\theta \|d\|_{s,\Omega} + \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \gamma_1 M_\theta C_N C_*(a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega) + \\ &+ 2\mu_0 C_* \left[\frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_\beta M_\theta + 1 + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \gamma_1 M_\theta C_N \right] (a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega) + \\ &+ \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho M_\theta \|\beta\|_{r,\Omega} + \mu_0 \|\rho^d\|_Q + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \gamma_1 M_\rho C_N \|\theta\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (48)$$

При выполнении условия (43) из (48) выводим оценку для разности θ :

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \leq 2\mu_0 C_*(\alpha_1 \|d\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{r,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_\Omega + \|\rho^d\|_Q), \quad (49)$$

$$\alpha_1 = C_0 M_\theta + 2C_* + \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_* M_\theta (\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta) a,$$

$$\alpha_2 = \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho M_\theta + 2C_* + \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_* M_\theta (\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta) b,$$

$$\alpha_3 = 2C_* + \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_* M_\theta (\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta).$$

С учётом (49) из (46) получаем оценку для разности σ :

$$\begin{aligned}\|\sigma\|_{\Omega} &\leq 2\mu_0 C_*(\kappa_1 \|d\|_{s,\Omega} + \kappa_2 \|\beta\|_{r,\Omega} + \kappa_3 \|f\|_{\Omega} + \kappa_4 \|\rho^d\|_Q), \\ \kappa_1 &= \mu_n \gamma_1 C_N (M_{\theta} a + M_{\rho} \alpha_1), \quad \kappa_2 = \mu_n \gamma_1 C_N (M_{\theta} b + M_{\rho} \alpha_2), \\ \kappa_3 &= \mu_n \gamma_1 C_N (M_{\theta} + M_{\rho} \alpha_3), \quad \kappa_4 = \mu_n \gamma_1 C_N M_{\rho}.\end{aligned}$$

С помощью полученных выше неравенств (33), (34) и (49) оценим теперь слагаемые, входящие в выражение для величин $\mathcal{R}$, $\mathcal{E}$ и (f, θ) в (41). Учитывая (4) и неравенство Юнга $2ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ для $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\varepsilon > 0$, последовательно оценим каждое из семи слагаемых, входящих в $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}& |(d \nabla \rho, \nabla(\theta_1 + \theta_2))| \leq \mu_0 4C_0 C_* M_{\theta} \|d\|_{s,\Omega} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\& \leq \mu_0 4C_0 C_* M_{\theta} [(a+1) \|d\|_{s,\Omega}^2 + 0.5b^2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_{\Omega}^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta |\rho_2| \rho, \theta_1 + \theta_2)| \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} \|\beta\|_{r,\Omega} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\& \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} [0.5a^2 \|d\|_{s,\Omega}^2 + (b+1) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_{\Omega}^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta)| \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\rho} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \times \\& \times (\alpha_1 \|d\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{r,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\rho^d\|_Q) \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\rho} [(a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) \|d\|_{s,\Omega}^2 + \\& + (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) \|f\|_{\Omega}^2 + 1.5 \|\rho^d\|_Q^2], \\& \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2)| \leq \mu_0 \frac{8\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\theta} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega})^2 \leq \\& \leq \mu_0 \frac{8\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\theta} [3a^2 \|d\|_{s,\Omega}^2 + 3b^2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 3 \|f\|_{\Omega}^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta)| \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\rho} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \times \\& \times (\alpha_1 \|d\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{r,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\rho^d\|_Q) \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\rho} [(a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) \|d\|_{s,\Omega}^2 + \\& + (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) \|f\|_{\Omega}^2 + 1.5 \|\rho^d\|_Q^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_1, \theta_1)| \leq \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} \|\beta\|_{r,\Omega} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\& \leq \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} [0.5a^2 \|d\|_{s,\Omega}^2 + (b+1) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_{\Omega}^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2)| \leq \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} \|\beta\|_{r,\Omega} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\& \leq \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} [0.5a^2 \|d\|_{s,\Omega}^2 + (b+1) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_{\Omega}^2].\end{aligned}\tag{50}$$

Выражение для $\mathcal{E}$ содержит только одно слагаемое:

$$\mu_n |(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1 + \theta_2)| \leq 2\mu_0 \mu_n \gamma_1 M_{\theta} \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \|\rho\|_{1,\Omega} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu_0 \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 C_N \gamma_1 M_\theta (a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega)^2 \leq \\
&\leq \mu_0 \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 C_N \gamma_1 M_\theta [3a^2\|d\|_{s,\Omega}^2 + 3b^2\|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 3\|f\|_\Omega^2].
\end{aligned} \tag{51}$$

Наконец, получим оценку для последнего слагаемого в правой части (41):

$$\begin{aligned}
|(f, \theta)| &\leq \|f\|_\Omega \|\theta\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 2C_* \|f\|_\Omega (\alpha_1\|d\|_{s,\Omega} + \alpha_2\|\beta\|_{r,\Omega} + \alpha_3\|f\|_\Omega + \|\rho^d\|_Q) \leq \\
&\leq \mu_0 2C_* [0.5\alpha_1^2\|d\|_{s,\Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2\|\beta\|_{r,\Omega}^2 + (\alpha_3 + 1.5)\|f\|_\Omega^2 + 0.5\|\rho^d\|_Q^2].
\end{aligned} \tag{52}$$

Используя (50)–(52), для величин $\mathcal{R}$, $\mathcal{E}$ и (f, θ) , определённых в (41), имеем

$$|\mathcal{R}| + |\mathcal{E}| + |(f, \theta)| \leq \mu_0 (\omega_1^2\|d\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2\|\beta\|_{r,\Omega}^2 + \omega_3^2\|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2\|\rho^d\|_Q^2). \tag{53}$$

Здесь положительные константы ω_i , $i = \overline{1, 4}$, зависящие от величин M_ρ и M_θ , определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= 4C_0 C_* M_\theta (a + 1) + C_* \alpha_1^2 + \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 C_* M_\rho M_\theta a^2 + \\
&+ \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 (C_4^3 C_\beta M_\rho (a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) + 3a^2 M_\theta (C_4^3 C_\beta + C_N \gamma_1)), \\
\omega_2^2 &= 2C_0 C_* M_\theta b^2 + C_* \alpha_2^2 + \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 C_* M_\rho M_\theta (b + 1) + \\
&+ \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 (C_4^3 C_\beta M_\rho (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) + 3b^2 M_\theta (C_4^3 C_\beta + C_N \gamma_1)), \\
\omega_3^2 &= 2C_0 C_* M_\theta + C_* (2\alpha_3 + 3) + \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 C_* M_\rho M_\theta + \\
&+ \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 (C_4^3 C_\beta M_\rho (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) + 3M_\theta (C_4^3 C_\beta + C_N \gamma_1)), \\
\omega_4^2 &= C_* + \frac{12\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_\beta M_\rho.
\end{aligned} \tag{54}$$

Пусть исходные данные задачи (35) таковы, что выполняются условия

$$\mu_0 \omega_1^2 < \mu_1 (1 - \varepsilon_1), \quad \mu_0 \omega_2^2 < \mu_2 (1 - \varepsilon_2), \tag{55}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ — произвольные числа. При выполнении (55) оценка (53) принимает вид

$$|\mathcal{R}| + |\mathcal{E}| + |(f, \theta)| \leq \mu_1 (1 - \varepsilon_1) \|d\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 (1 - \varepsilon_2) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + \mu_0 (\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2). \tag{56}$$

Используя (56), из неравенства (41) получаем

$$\mu_0 \|\rho\|_Q^2 \leq \mu_0 (\rho, \rho^d)_Q - \varepsilon_1 \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2 - \varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + \mu_0 (\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2), \tag{57}$$

откуда, отбрасывая неположительные слагаемые $-\varepsilon_1 \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2$ и $-\varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2$ в правой части, следует оценка

$$\|\rho\|_Q^2 \leq \|\rho\|_Q \|\rho^d\|_Q + \omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2. \tag{58}$$

Неравенство (58) представляет собой квадратичное неравенство относительно $\|\rho\|_Q$. Решив его, приходим к следующей оценке для $\|\rho\|_Q$:

$$\|\rho\|_Q \leq (\omega_4 + 1)\|\rho^d\|_Q + \omega_3\|f\|_\Omega.$$

Поскольку $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\rho^d = \rho_1^d - \rho_2^d$, $f = f_1 - f_2$, то это неравенство эквивалентно оценке

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_Q \leq (\omega_4 + 1)\|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q + \omega_3\|f_1 - f_2\|_\Omega. \quad (59)$$

В случае когда $Q = \Omega$ (59) имеет смысл $L^2(\Omega)$ -оценки устойчивости компоненты $\hat{\rho}$ решения $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ задачи (35) относительно малых возмущений функций $\rho^d \in L^2(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. При $f_1 = f_2$ (59) переходит в оценку

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_Q \leq (\omega_4 + 1)\|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q,$$

справедливую при выполнении условия (55). Если, кроме того, $\rho_1^d = \rho_2^d$, то из неё следует, что $\rho_1 = \rho_2$ в Q . Это даёт вместе с (57) при $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, что $d = 0$ и $\beta = 0$, а из (33) при $d = 0$, $\beta = 0$ и $f = 0$ тогда следует, что $\rho = 0$, т.е. $\rho_1 = \rho_2$ в Ω . Последнее означает единственность решения задачи (13) при выполнении условия (55).

В общем случае, когда $f_1 \neq f_2$, используя неравенство

$$\|\rho\|_Q \|\rho^d\|_Q \leq \|\rho\|_Q^2 + \frac{1}{4}\|\rho^d\|_Q^2,$$

вытекающее из неравенства Юнга, из (57) выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2 + \varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 &\leq -\mu_0 \|\rho\|_Q^2 + \mu_0 (\rho, \rho^d)_Q + \mu_0 (\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2) \leq \\ &\leq \frac{\mu_0}{4} \|\rho^d\|_Q^2 + \mu_0 (\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2). \end{aligned} \quad (60)$$

Из (60) следуют оценки

$$\|d\|_{s,\Omega} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1 \mu_1}} (\omega_3 \|f\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\rho^d\|_Q),$$

$$\|\beta\|_{r,\Omega} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2 \mu_2}} (\omega_3 \|f\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\rho^d\|_Q),$$

которые с учётом (17) примут вид

$$\|d_1 - d_2\|_{s,\Omega} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1 \mu_1}} (\omega_3 \|f_1 - f_2\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q), \quad (61)$$

$$\|\beta_1 - \beta_2\|_{r,\Omega} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2 \mu_2}} (\omega_3 \|f_1 - f_2\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q). \quad (62)$$

Из (61), (62) и (33), (34) вытекают следующие оценки для разностей $\rho_1 - \rho_2$ и $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$:

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_{1,\Omega} \leq 2C_*(A\omega_3 + 1)\|f_1 - f_2\|_\Omega + 2C_*A(\omega_4 + 0.5)\|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q, \quad (63)$$

$$\|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_{1,\Omega} \leq \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_*(A\omega_3 + 1)\|f_1 - f_2\|_\Omega + \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_* A(\omega_4 + 0.5)\|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q, \quad (64)$$

где $A = a\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_1 \mu_1)} + b\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_2 \mu_2)}$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 6. Пусть в дополнение к условиям (i) и (j) K — ограниченное множество и пара $(\mathbf{x}_i, u_i) \in X \times K$ является решением задачи (35), отвечающим заданным функциям $\rho_i^d \in L^2(Q)$ и $f_i \in L^2(\Omega)$, $i=1, 2$, где $Q \subset \Omega$ — произвольное открытое ограниченное множество. Предположим, что $\mu_0 > 0$ и выполняются условия (32), (55). Тогда справедливы оценки устойчивости (59) и (61)–(64), где ω_i , $i=\overline{1, 4}$, определены в (54).

Следствие. Пусть в дополнение к условиям (i) и (j) K — ограниченное множество, $\rho_1^d = \rho_2^d$ в Q и $f_1 = f_2$ в Ω . Тогда если $\mu_0 > 0$ и выполняются условия (32), (55), то решение $(\mathbf{x}, u) \in X \times K$ задачи (35) единственно.

6. РЕЛЕЙНОСТЬ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим однопараметрическую задачу мультипликативного управления

$$J(\rho) \equiv \mu_0 \|\rho - \rho^d\|_Q^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, \beta) = 0, \quad (\rho, \beta) \in H_0^1(\Omega) \times K_\beta. \quad (65)$$

Пусть выполняется условие

(j') $1/4 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_{\max}$ п.в. в Ω для всех $\beta \in K_\beta$, где $\beta_{\max}$ — положительное число.

Разрешимость задачи управления (65) при $\beta \in L_{\beta_0}^4(\Omega)$ вытекает из результатов статьи [4], в которой также выведены соответствующие системы оптимальности. В частности, неравенство (12) принимает вид

$$((\beta - \hat{\beta})|\hat{\rho}|\hat{\rho}, \theta) \geq 0, \quad \beta \in K_\beta. \quad (66)$$

Из (66) методом от противного получаем неравенство

$$(\beta - \hat{\beta})|\hat{\rho}|\hat{\rho}\theta \geq 0 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \beta \in K_\beta, \quad (67)$$

откуда вытекает, что в зависимости от знака произведения функций $|\hat{\rho}|\hat{\rho}\theta$ управление β принимает либо значение β_0 , либо значение $\beta_{\max}$. Такое свойство управления называется *релейностью*, так как поведение β аналогично его переключению между двумя состояниями β_0 и $\beta_{\max}$. Иначе говоря, происходит скачок управления из одного состояния в другое (bang–bang) и имеет место свойство bang–bang, или справедлив принцип bang–bang (см. подробнее в [5, 11]).

Если выполняется условие (iv), при котором справедлив принцип максимума и минимума для плотности заряда ρ (см. теорему 2), то переход управления из одного состояния в другое происходит при смене знака множителя Лагранжа θ , поскольку $\hat{\rho} \geq 0$ п.в. в Ω . Однако при $\hat{\rho} = 0$ или $\theta = 0$, как вытекает из (67), управление β может как перейти из одного состояния в другое, так и не переходить. В таком случае свойство релейности называют *нестрогим*. Отметим работу [11], в которой установлено строгое свойство релейности для конкретных задач управления, что скорее является исключением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы дополняющие друг друга свойства оптимальных решений задач мультипликативного управления. Единственность и устойчивость таких задач может быть доказана только с использованием регуляризации, в то время как релейность устанавливается только при её отсутствии. Последнее свойство для управления β было получено за счёт низких требований к его гладкости: $\beta \in L^4(\Omega)$. Для сравнения, $d \in H^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $s > 1/2$, что исключает “скачки” (см. [4]).

Отметим также недавно опубликованную статью [21], в которой доказана локальная единственность решения задачи управления для модели (1)–(3) при $\beta = 1$ с одним мультипликативным управлением d .

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания Института прикладной математики ДВО РАН (№ 075-00459-24-00) и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 122082400001-8).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maslovskaya, A.G. Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain structure switching / A.G. Maslovskaya // J. Surf. Investig. — 2013. — V. 7. — P. 680–684.
2. Pavelchuk, A.V. Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source / A.V. Pavelchuk, A.G. Maslovskaya // Russ. Phys. J. — 2020. — V. 63. — P. 105–112.
3. Бризицкий, Р.В. Теоретический анализ и численная реализация стационарной диффузионно-дрейфовой модели зарядки полярных диэлектриков / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова, А.Г. Масловская // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 10. — С. 1696–1706.
4. Бризицкий, Р.В. Обратные задачи для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова, А.Г. Масловская // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 9. — С. 1537–1552.
5. Бризицкий, Р.В. Анализ некоторых краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции / Р.В. Бризицкий, В.С. Быстрова, Ж.Ю. Сарницкая // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 5. — С. 635–648.
6. Бризицкий, Р.В. Об устойчивости решений задач управления для нелинейной модели реакции–диффузии–конвекции / Р.В. Бризицкий, П.А. Максимов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 3. — С. 409–421.
7. Ковтаниук, А.Е. Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом / А.Е. Ковтаниук, А.Ю. Чеботарев // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 12. — С. 1590–1597.
8. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions / A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk [et al.] // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2018. — V. 57. — P. 290–298.
9. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange / A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk [et al.] // J. Math. Anal. Appl. — 2018. — V. 460, № 2. — P. 737–744.
10. Chebotarev, A.Yu. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type / A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — V. 75. P. 262–269.
11. Чеботарев, А.Ю. Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения / А.Ю. Чеботарев // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 3. — С. 381–390.
12. Baranovskii, E.S. Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids / E.S. Baranovskii // J. Optim. Theory Appl. — 2021. — V. 189. — P. 623–645.
13. Brizitskii, R.V. Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model / R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia // J. Dynam. Control Syst. — 2021. — V. 27, № 2. — P. 379–402.
14. Барановский Е.С. Задача оптимального стартового управления для двумерных уравнений Буссинеска / Е.С. Барановский // Изв. РАН. Сер. мат. — 2022. — Т. 86, № 2. — С. 3–24.
15. Baranovskii, E.S. Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model / E.S. Baranovskii, M.A. Artemov // Int. J. Differ. Equat. — 2016. — V. 2016. — Art. 9428128.
16. Барановский, Е.С. Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости / Е.С. Барановский // Мат. сб. — 2020. — Т. 211, № 4. — С. 27–43.

17. Барановский, Е.С. Задача оптимального управления с обратной связью для сетевой модели движения вязкой жидкости / Е.С. Барановский // Мат. заметки. — 2022. — Т. 112, № 1. — С. 31–47.
18. Brizitskii, R.V. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation / R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya // J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2018. — V. 26, № 6. — P. 821–833.
19. Алексеев, Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / Г.В. Алексеев. — М.: Научный мир, 2010. — 410 с.
20. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 350 с.
21. Бризицкий, Р.В. О единственности решения задачи мультипликативного управления для модели дрейфа-диффузии электронов / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2024. — Т. 34, № 1. — С. 3–18.

MULTIPLICATIVE CONTROL PROBLEMS FOR THE DIFFUSION-DRIFT CHARGING MODEL OF AN INHOMOGENEOUS POLAR DIELECTRIC

R. V. Brizitskii¹, N. N. Maksimova²

¹*Institute of Applied Mathematics, Far East Branch of RAS, Vladivostok, Russia*

²*Amur State University, Blagoveshchensk, Russia*

e-mail: ¹mlnwizard@mail.ru, ²knnamursu@mail.ru

A two-parameter multiplicative control problem is studied for a model of electron-induced charging of an inhomogeneous polar dielectric. Exact estimates of the local stability of its optimal solutions with respect to small perturbations of both the cost functionals and the given function of the boundary value problem are derived. For one of the controls, the relay property or the bang-bang principle is established.

Keywords: multiplicative control problem, optimality system, local stability estimate, bang-bang principle, diffusion-drift model.

FUNDING

This work was supported by the state assignment of Institute of Applied Mathematics FEB RAS (no. 075-00459-24-00) and by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation (Project no. 122082400001-8).

REFERENCES

1. Maslovskaya, A.G., Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain structure switching, *J. Surf. Investig.*, 2013, vol. 7, pp. 680–684.
2. Pavelchuk, A.V. and Maslovskaya, A.G., Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source, *Russ. Phys. J.*, 2020, vol. 63, pp. 105–112.
3. Brizitskii, R.V., Maksimova, N.N., and Maslovskaya, A.G., Theoretical analysis and numerical implementation of a stationary diffusion-drift model of polar dielectric charging, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 10, pp. 1680–1690.
4. Brizitskii, R.V., Maksimova, N.N., and Maslovskaya, A.G., Inverse problems for the diffusion-drift model of charging of an inhomogeneous polar dielectric, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 9, pp. 1685–1699.
5. Brizitskii, R.V., Bystrova, V.S., and Saritskaia, Zh.Yu., Analysis of boundary value and extremum problems for a nonlinear reaction-diffusion-convection equation, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 5, pp. 615–629.
6. Brizitskii, R.V. and Maksimov, P.A., On the stability of solutions to control problems for a nonlinear reaction-diffusion-convection model, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 414–427.
7. Kovtanyuk, A.E. and Chebotarev, A.Yu., Stationary free convection problem with radiative heat exchange, *Differ. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1592–1599.

8. Chebotarev, A.Yu., Grenkin, G.V., Kovtanyuk, A.E., Botkin N.D., and Hoffmann, K.-H., Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 57, pp. 290–298.
9. Chebotarev, A.Yu., Grenkin, G.V., Kovtanyuk, A.E., Botkin, N.D., and Hoffmann, K.-H., Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange, *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, vol. 460, no. 2, pp. 737–744.
10. Chebotarev, A.Yu., Kovtanyuk, A.E., and Botkin, N.D., Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 75, pp. 262–269.
11. Chebotarev, A.Yu., Optimal control problems for complex heat transfer equations with Fresnel matching conditions, *Comp. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 3, pp. 372–381.
12. Baranovskii, E.S., Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids, *J. Optim. Theory Appl.*, 2021, vol. 189, pp. 623–645.
13. Brizitskii, R.V. and Saritskaia, Z.Y., Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model, *J. Dynam. Control Syst.*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 379–402.
14. Baranovskii, E.S., The optimal start control problem for 2D Boussinesq equations, *Izvestiya: Mathematics*, 2022, vol. 86, no. 2, pp. 221–242.
15. Baranovskii, E.S. and Artemov M.A., Existence of optimal control for a nonlinear–viscous fluid model, *Int. J. Differ. Equat.*, 2016, vol. 2016, art. 9428128.
16. Baranovskii, E.S., Optimal boundary control of nonlinear-viscous fluid flows, *Sbornik: Mathematics*, 2020, vol. 211, no. 4, pp. 505–520.
17. Baranovskii, E.S., Feedback optimal control problem for a network model of viscous fluid flows, *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 1, pp. 26–39.
18. Brizitskii, R.V. and Saritskaya, Zh.Yu., Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation, *J. Inv. Ill-Posed Probl.*, 2018, vol. 26, iss. 6, pp. 821–833.
19. Alekseev, G.V., *Optimizatsiya v stationarnykh zadachakh teplomassoperenosa i magnitnoy gidrodinamiki* (Optimization in the Stationary Problems of the Heat-Mass Transfer and Magnetic Hydrodynamics), Moscow: Nauchiy Mir, 2010.
20. Fursikov, A.V., *Optimal control of distributed systems: Theory and applications*, Providence: Am. Math. Soc., 2000.
21. Brizitskii, R.V. and Maksimova, N.N., On the uniqueness of a solution to the multiplicative control problem for the electron drift–diffusion model, *Vestn. Udmurt. Un-ta: Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, no. 1, pp. 3–18.

УДК 517.977

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЁТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СОСТОЯНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА БЭКСТЕППИНГА

© А. Е. Голубев

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлунского РАН, г. Москва

e-mail: v-algolu@hotmail.com

Поступила в редакцию 27.10.2023 г., после доработки 18.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Решена задача стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейных динамических систем специального вида с учётом ограничений на абсолютные величины переменных состояния. Управление построено на основе метода бэкстеппинга с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова. Полученные стабилизирующие обратные связи, в отличие от аналогичных известных результатов, основаны на использовании линейных виртуальных стабилизирующих функций, у которых отсутствует свойство неограниченного роста при приближении переменных состояния к граничным значениям. В качестве примера рассмотрено решение задачи позиционирования подводного объекта в заданной точке пространства с учётом ограничений на состояние.

Ключевые слова: стабилизация, нелинейная динамическая система, бэкстеппинг, ограничение на состояние, управление механической системой.

DOI: 10.31857/S0374064124050074, EDN: LBJSHT

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одним из популярных направлений исследований последних лет в области нелинейных систем управления является построение законов управления с учётом различных ограничений на переменные состояния и управления системы. Наиболее эффективный аналитический подход к синтезу стабилизирующих обратных связей с учётом ограничений на состояние или выход объекта управления основан на использовании метода бэкстеппинга [1, гл. 2] в сочетании с барьерными функциями Ляпунова [2–14]. По аналогии с барьерными функциями в методах оптимизации [15, гл. 11] барьерные функции Ляпунова представляют собой специальный класс функций Ляпунова, неограниченно возрастающих при стремлении аргумента к граничным значениям переменных состояния или выходных переменных. Применение метода бэкстеппинга для построения стабилизирующих обратных связей с учётом ограничений, как правило, основывается на использовании логарифмических [2, 3] или тангенциальных [4, 6] барьерных функций Ляпунова. Логарифмические барьерные функции в качестве функции Ляпунова замкнутой обратной связью системы впервые предложены в работе [2], где при помощи метода бэкстеппинга синтезирована стабилизирующая обратная связь, гарантирующая выполнение заданных ограничений на абсолютные значения переменных состояния системы. Учёт ограничений на значения выходных переменных системы при синтезе управления на основе метода бэкстеппинга исследовался в работах [3–7]. Решения различных прикладных задач с использованием барьерных функций Ляпунова представлены, например, в статьях [8, 9, 12–14].

Отметим, что для достижения максимального качества и производительности системы управления может потребоваться функционирование объекта в режиме, когда соответствующие переменные принимают значения, близкие к граничным. Однако рассматриваемые в большинстве работ обратные связи могут приводить к значениям управляющих переменных, неограниченно возрастающим при приближении выходных переменных или переменных состояния к граничным значениям [2, 3, 5, 7]. При этом неограниченный рост переменных управления является нежелательным, так как может приводить к насыщению управляющих воздействий и перерасходу ресурса управления.

В статье [14] для механических систем, описываемых уравнениями Эйлера–Лагранжа, предложена процедура построения стабилизирующих обратных связей, гарантирующих выполнение заданных ограничений на абсолютные величины обобщённых координат, скоростей и ускорений, а также отсутствие неограниченного роста переменных управления при приближении переменных состояния к граничным значениям.

Настоящая работа посвящена развитию подхода, предложенного в [14], для задачи стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейной динамической системы, которая может быть представлена как совокупность подсистем

$$\dot{x}_{1i} = x_{2i}, \quad \dots, \quad \dot{x}_{r_i-1,i} = x_{r_i i}, \quad \dot{x}_{r_i i} = f_i(x) + g_i(x)u_i, \quad i \in \overline{1, l}, \quad (1)$$

$x_i = (x_{1i}, \dots, x_{r_i i})^T \in \mathbb{R}^{r_i}$, $x = (x_1^T, \dots, x_l^T)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u = (u_1, \dots, u_l)^T$ — вектор управляющих воздействий, функции $f_i(x)$ и $g_i(x)$ локально липшицевы, $g_i(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Задача. Для произвольных заданных положительных констант $M_{ji} > 0$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, требуется найти компоненты вектора управляющих воздействий u в системе (1) в виде обратных связей по состоянию, обеспечивающих при любых начальных значениях $x(0)$ таких, что $|x_{ji}(0)| < M_{ji}$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, выполнение условия $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ с учётом ограничений

$$|x_{ji}(t)| < M_{ji}, \quad j \in \overline{1, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

В п. 2 для решения рассматриваемой задачи стабилизации системы (1) с ограничениями (2) синтезирована обратная связь по состоянию на основе метода бэкстеппинга с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова. Исследованы различные варианты выбора виртуальных стабилизирующих функций. В п. 3 в качестве примера решена задача позиционирования подводного объекта в заданной точке пространства с учётом ограничений на состояние.

2. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ С УЧЁТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Стабилизирующее управление будем искать с помощью метода бэкстеппинга [1, гл. 2]. Справедлива следующая

Теорема. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha_{1i}(x_{1i}) &= -c_{1i}z_{1i}, \quad z_{1i} = x_{1i}, \\ \alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji}) &= \sum_{s=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{si}} x_{s+1,i} - c_{ji}z_{ji} - N_{ji}^2 z_{ji}, \\ z_{ji} &= x_{ji} - \alpha_{j-1,i}(x_{1i}, \dots, x_{j-1,i}), \quad j \in \overline{2, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $c_{1i} > 0$, $N_{ji} > 0$, $c_{ji} > 0$ — положительные постоянные, удовлетворяющие неравенствам

$$N_{2i} \leq M_{2i} - c_{1i}M_{1i},$$

$$N_{ji} \leq M_{ji} - \sum_{s=1}^{j-2} \left| \frac{\partial \alpha_{j-2,i}}{\partial x_{si}} \right| M_{s+1,i} - c_{j-1,i} N_{j-1,i} - N_{j-1,i}^3, \quad j \in \overline{3, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}. \quad (4)$$

Тогда система (1), замкнутая обратной связью $u = u(x)$, покомпонентно заданной соотношениями

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} (-f_i(x) + \alpha_{r_i i}(x_{1i}, \dots, x_{r_i i})), \quad i \in \overline{1, l}, \quad (5)$$

асимптотически устойчива в точке $x = 0$, причём при любых начальных значениях $x(0)$ таких, что $|z_{ji}(0)| < N_{ji}$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, выполнено условие $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и справедливы неравенства (2). Дополнительно имеют место рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} &= -c_{1i}, & \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} &= \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}}(c_{2i} + N_{2i}^2), & \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} &= \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} - (c_{2i} + N_{2i}^2), \\ \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial x_{1i}} &= \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{1i}}(c_{ji} + N_{ji}^2), & \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial x_{si}} &= \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{si}}(c_{ji} + N_{ji}^2) + \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{s-1,i}}, & s &= \overline{2, j-1}, \\ \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial x_{ji}} &= \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{j-1,i}} - (c_{ji} + N_{ji}^2), & j &\in \overline{3, r_i}, & i &\in \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Рассмотрим z_{ji} , $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, определяемые равенствами (3), как новые переменные состояния системы (1) и используем далее обозначения $z_i = (z_{1i}, \dots, z_{r_i i})^T \in \mathbb{R}^{r_i}$, $z = (z_1^T, \dots, z_l^T)^T \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что соотношения (3) задают диффеоморфизм из $\mathbb{R}^n = \{x\}$ в $\mathbb{R}^n = \{z\}$, причём нулевое значение вектора состояния x взаимно-однозначно отображается в нулевое значение вектора состояния z . В переменных z система (1), замкнутая обратной связью $u = u(x)$, покомпонентно заданная выражениями (5), примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= z_{2i} - c_{1i}z_{1i}, & \dot{z}_{2i} &= z_{3i} - c_{2i}z_{2i} - N_{2i}^2 z_{2i}, & \dots \\ \dots, & & \dot{z}_{r_i-1,i} &= z_{r_i i} - c_{r_i-1,i} z_{r_i-1,i} - N_{r_i-1,i}^2 z_{r_i-1,i}, & \dot{z}_{r_i i} &= -c_{r_i i} z_{r_i i} - N_{r_i i}^2 z_{r_i i}, & i &\in \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (7)$$

Покажем, что положение равновесия $z = 0$ системы (7) асимптотически устойчиво. В качестве функции Ляпунова для системы (7) рассмотрим барьерную функцию

$$V(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{r_i} \kappa_{ji} \ln \frac{N_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2}, \quad (8)$$

где $\kappa_{ji} > 0$ — произвольные постоянные, $N_{1i} = M_{1i}$. Заметим, что функция $V(z)$ является положительно определённой в области $\{z \in \mathbb{R}^n : |z_{ji}| < N_{ji}, j \in \overline{1, r_i}, i \in \overline{1, l}\}$ и неограниченно возрастает $V(z) \rightarrow +\infty$ при стремлении $|z_{ji}| \rightarrow N_{ji} - 0$ хотя бы для одной пары значений j и i , $1 \leq j \leq r_i$, $1 \leq i \leq l$.

Производная по времени функции $V(z)$ в силу системы (7) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} z_{ji} \dot{z}_{ji}}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} = \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} - \sum_{j=2}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} N_{ji}^2 z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} + \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{\kappa_{ji} z_{ji} z_{j+1,i}}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} - \sum_{j=2}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} (N_{ji}^2 - z_{ji}^2) z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} - \sum_{j=2}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} z_{ji}^4}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} + \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{\kappa_{ji} z_{ji} z_{j+1,i}}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} + \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{\kappa_{ji} z_{ji} z_{j+1,i}}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} - \sum_{j=2}^{r_i} \kappa_{ji} z_{ji}^2 \right).$$

В результате выделения полных квадратов справедлива оценка

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &\leq \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{2(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} - \sum_{j=1}^{r_i-1} z_{j+1,i}^2 \left(\kappa_{j+1,i} - \frac{\kappa_{ji}}{2c_{ji}(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{r_i-1} \left(z_{ji} \sqrt{\frac{\kappa_{ji} c_{ji}}{2(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)}} - z_{j+1,i} \sqrt{\frac{\kappa_{ji}}{2c_{ji}(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)}} \right)^2 \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i-1} z_{j+1,i}^2 \left(\kappa_{j+1,i} - \frac{\kappa_{ji}}{2c_{ji}(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} \right) - \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{2(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, производная по времени функции $V(z)$ в силу системы (7) отрицательно определена в области

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z_{ji}| < \sqrt{N_{ji}^2 - \kappa_{ji}/(2\kappa_{j+1,i}c_{ji})}, \quad |z_{ri}| < N_{ri}, \quad j \in \overline{1, r_i-1}, \quad i \in \overline{1, l} \right\}.$$

Заметим, что для любых коэффициентов усиления $c_{ji} > 0$ в управлениях (5) за счёт выбора положительных постоянных κ_{ji} и $\kappa_{j+1,i}$ в функции Ляпунова $V(z)$ значения величин $N_{ji}^2 - \kappa_{ji}/(2\kappa_{j+1,i}c_{ji})$ можно сделать положительными и сколь угодно близкими к значениям соответствующих констант N_{ji}^2 , $j \in \overline{1, r_i-1}$, $i \in \overline{1, l}$.

Тогда согласно монографии [16, гл. 4] положение равновесия $z=0$ системы (7) асимптотически устойчиво с областью притяжения

$$\{z \in \mathbb{R}^n : |z_{ji}| < N_{ji}, \quad j \in \overline{1, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}\}, \quad (10)$$

являющейся положительно инвариантным множеством. Таким образом, для любого решения $z=z(t)$ системы (7) с начальной точкой в множестве (10) выполнено условие $\|z(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и справедливы ограничения

$$|z_{ji}(t)| < N_{ji}, \quad j \in \overline{1, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Отметим, что для любых положительных постоянных M_{ji} , $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, найдутся константы $c_{ji} > 0$ и $N_{ji} > 0$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, такие, что справедливы неравенства (4). Следовательно, с учётом соотношений (3) и (4) положение равновесия $x=0$ замкнутой системы (1) асимптотически устойчиво и для любых начальных значений $x(0)$, удовлетворяющих условиям $|z_{ji}(0)| < N_{ji}$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, выполнено $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, причём в силу неравенств (11) при всех $t \geq 0$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} |x_{1i}(t)| &= |z_{1i}(t)| < N_{1i} = M_{1i}, \\ |x_{2i}(t)| &= |z_{2i}(t) + \alpha_{1i}(x_{1i}(t))| \leq |z_{2i}(t)| + |\alpha_{1i}(x_{1i}(t))| \leq |z_{2i}(t)| + c_{1i}|x_{1i}(t)| < N_{2i} + c_{1i}M_{1i} \leq M_{2i}, \\ |x_{ji}(t)| &= |z_{ji}(t) + \alpha_{j-1,i}(x_{1i}(t), \dots, x_{j-1,i}(t))| \leq |z_{ji}(t)| + |\alpha_{j-1,i}(x_{1i}(t), \dots, x_{j-1,i}(t))| \leq \\ &\leq |z_{ji}(t)| + \sum_{s=1}^{j-2} \left| \frac{\partial \alpha_{j-2,i}}{\partial x_{si}} \right| |x_{s+1,i}(t)| + c_{j-1,i}|z_{j-1,i}(t)| + N_{j-1,i}^2 |z_{j-1,i}(t)| < \\ &< N_{ji} + \sum_{s=1}^{j-2} \left| \frac{\partial \alpha_{j-2,i}}{\partial x_{si}} \right| M_{s+1,i} + c_{j-1,i}N_{j-1,i} + N_{j-1,i}^3 \leq M_{ji}, \quad j \in \overline{3, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}. \end{aligned}$$

Наконец, докажем справедливость соотношений (6) с помощью метода математической индукции. Для произвольного значения i , $1 \leq i \leq l$, запишем функцию

$$\alpha_{2i}(x_{1i}, x_{2i}) = \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} x_{2i} - c_{2i} z_{2i} - N_{2i}^2 z_{2i},$$

где $\partial \alpha_{1i} / \partial x_{1i} = -c_{1i}$, $z_{2i} = x_{2i} - \alpha_{1i}(x_{1i})$. Получим

$$\frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} = \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} (c_{2i} + N_{2i}^2) = -c_{1i} (c_{2i} + N_{2i}^2), \quad \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} = \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} - (c_{2i} + N_{2i}^2) = -c_{1i} - (c_{2i} + N_{2i}^2).$$

Далее рассмотрим функцию

$$\alpha_{3i}(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} x_{2i} + \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} x_{3i} - c_{3i} z_{3i} - N_{3i}^2 z_{3i},$$

где $z_{3i} = x_{3i} - \alpha_{2i}(x_{1i}, x_{2i})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{3i}}{\partial x_{1i}} &= \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} (c_{3i} + N_{3i}^2) = -c_{1i} (c_{2i} + N_{2i}^2) (c_{3i} + N_{3i}^2), \\ \frac{\partial \alpha_{3i}}{\partial x_{2i}} &= \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} (c_{3i} + N_{3i}^2) + \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} = -(c_{1i} + c_{2i} + N_{2i}^2) (c_{3i} + N_{3i}^2) - c_{1i} (c_{2i} + N_{2i}^2), \\ \frac{\partial \alpha_{3i}}{\partial x_{3i}} &= \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} - (c_{3i} + N_{3i}^2) = -c_{1i} - (c_{2i} + N_{2i}^2) - (c_{3i} + N_{3i}^2). \end{aligned}$$

Предположим, что соотношения (6) справедливы для $\alpha_{ki}(x_{1i}, \dots, x_{ki})$ при произвольном k , $3 < k < r_i$. Тогда для функции

$$\alpha_{k+1,i}(x_{1i}, \dots, x_{k+1,i}) = \sum_{s=1}^k \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{si}} x_{s+1,i} - c_{k+1,i} z_{k+1,i} - N_{k+1,i}^2 z_{k+1,i},$$

где $z_{k+1,i} = x_{k+1,i} - \alpha_{ki}(x_{1i}, \dots, x_{ki})$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{k+1,i}}{\partial x_{1i}} &= \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{1i}} (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2) = -c_{1i} (c_{2i} + N_{2i}^2) \dots (c_{ki} + N_{ki}^2) (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2), \\ \frac{\partial \alpha_{k+1,i}}{\partial x_{ji}} &= \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{ji}} (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2) + \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{j-1,i}}, \quad j = \overline{2, k}, \\ \frac{\partial \alpha_{k+1,i}}{\partial x_{k+1,i}} &= \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{ki}} - (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2) = -c_{1i} - (c_{2i} + N_{2i}^2) - \dots - (c_{ki} + N_{ki}^2) - (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Дополнительно отметим, что при $|z_{ks}| \rightarrow N_{ks} - 0$ для какой-либо пары значений k и s , $1 \leq k \leq r_i$, $1 \leq s \leq l$, функции $\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji})$, заданные соотношениями (3), в силу линейности не являются неограниченно возрастающими и имеют конечный предел. В этом свойстве виртуальных стабилизирующих функций $\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji})$, используемых в обратных связях (5), заключается существенное отличие предлагаемого в работе способа применения метода бэкстепинга от используемых в других работах (см., например, [2, 3]). Полученные в статьях [2, 3] обратные связи на основе метода бэкстепинга могут приводить к значениям виртуальных стабилизирующих функций, а следовательно, и управляющих переменных, неограниченно возрастающим при приближении переменных состояния к граничным значениям.

По аналогии с результатами работы [14] можно также использовать следующие виртуальные стабилизирующие функции в управлениях (5):

$$\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji}) = \sum_{s=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{si}} x_{s+1,i} - c_{ji} z_{ji} - z_{ji}(N_{ji}^2 - z_{ji}^2), \quad j \in \overline{2, r_i}. \quad (12)$$

Рассматривая производную функции (8) в силу соответствующей замкнутой системы в переменных z , которая примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= z_{2i} - c_{1i} z_{1i}, \quad \dot{z}_{2i} = z_{3i} - c_{2i} z_{2i} - z_{2i}(N_{2i}^2 - z_{2i}^2), \quad \dots \\ \dots, \quad \dot{z}_{r_i-1,i} &= z_{r_i i} - c_{r_i-1,i} z_{r_i-1,i} - z_{r_i-1,i}(N_{r_i-1,i}^2 - z_{r_i-1,i}^2), \\ \dot{z}_{r_i i} &= -c_{r_i i} z_{r_i i} - z_{r_i i}(N_{r_i i}^2 - z_{r_i i}^2), \quad i \in \overline{1, l}, \end{aligned} \quad (13)$$

и рассуждая аналогичным образом, легко показать, что справедлива оценка (9) и имеет место асимптотическая устойчивость положения равновесия $z=0$ системы (13) с областью притяжения (10), являющейся положительно инвариантным множеством. Тем не менее отметим, что виртуальные стабилизирующие функции, заданные соотношениями (3), предпочтительнее функций (12) в силу линейности и более простых соотношений между постоянными M_{ji} , c_{ji} и N_{ji} , $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, имеющими вид (4).

Далее, согласно работам [2, 3], также возможными виртуальными стабилизирующими функциями в управлениях (5) являются

$$\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji}) = \sum_{s=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{si}} x_{s+1,i} - c_{ji} z_{ji} - \frac{\kappa_{j-1,i} z_{j-1,i} (N_{ji}^2 - z_{ji}^2)}{\kappa_{ji} (N_{j-1,i}^2 - z_{j-1,i}^2)}, \quad j \in \overline{2, r_i}. \quad (14)$$

Соответствующая замкнутая система в переменных z запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= z_{2i} - c_{1i} z_{1i}, \quad \dot{z}_{2i} = z_{3i} - c_{2i} z_{2i} - \frac{\kappa_{1i} z_{1i} (N_{2i}^2 - z_{2i}^2)}{\kappa_{2i} (N_{1i}^2 - z_{1i}^2)}, \quad \dots \\ \dots, \quad \dot{z}_{r_i-1,i} &= z_{r_i i} - c_{r_i-1,i} z_{r_i-1,i} - \frac{\kappa_{r_i-2,i} z_{r_i-2,i} (N_{r_i-1,i}^2 - z_{r_i-1,i}^2)}{\kappa_{r_i-1,i} (N_{r_i-2,i}^2 - z_{r_i-2,i}^2)}, \\ \dot{z}_{r_i i} &= -c_{r_i i} z_{r_i i} - \frac{\kappa_{r_i-1,i} z_{r_i-1,i} (N_{r_i i}^2 - z_{r_i i}^2)}{\kappa_{r_i i} (N_{r_i-1,i}^2 - z_{r_i-1,i}^2)}, \quad i \in \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (15)$$

Производная функции (8) в силу системы (15) имеет вид

$$\dot{V}(z) = - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2}$$

и является отрицательно определённой в области (10). Следовательно, положение равновесия $z=0$ системы (15) асимптотически устойчиво с областью притяжения (10), являющейся положительно инвариантным множеством.

Однако в отличие от функций, заданных соотношениями (3) и (12), при $|z_{j-1,i}| \rightarrow N_{j-1,i} - 0$ хотя бы для одной пары значений j и i , $2 \leq j \leq r_i$, $1 \leq i \leq l$, соответствующая виртуальная стабилизирующая функция $\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji})$ (14) может неограниченно возрастать, что приведёт к неограниченному росту соответствующего управления (5).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ПОДВОДНОГО ОБЪЕКТА

Рассмотрим уравнения пространственного движения подводного аппарата, записанные в векторной форме [14; 17, гл. 2]:

$$M_\eta(\eta)\ddot{\eta} + C_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} + D_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} + \tilde{g}(\eta) = \tau, \quad \nu = J^{-1}(\eta)\dot{\eta}, \quad (16)$$

где $\eta = (\eta_1^T, \eta_2^T)^T$, $\nu = (\nu_1^T, \nu_2^T)^T$, $\eta_1 = (x, y, z)^T$ — координаты начала O_b неинерциальной системы координат, жёстко связанной с корпусом подводного аппарата, в инерциальной неподвижной системе координат; $\eta_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$ — угловые координаты поворота неинерциальной системы координат относительно инерциальной системы координат; φ — угол крена; θ — угол тангажа; ψ — угол рысканья; $\nu_1 = (u, v, w)^T$ — координаты вектора скорости точки O_b в неинерциальной системе координат; $\nu_2 = (p, q, r)^T$ — координаты вектора угловых скоростей вращения корпуса аппарата относительно осей неинерциальной системы координат; $M_\eta(\eta) = MJ^{-1}(\eta)$, $C_\eta(\eta, \nu) = [C(\nu) - MJ^{-1}(\eta)\dot{J}(\eta)]J^{-1}(\eta)$, $D_\eta(\eta, \nu) = D(\nu)J^{-1}(\eta)$, $M = M_{RB} + M_A$, $C(\nu) = C_{RB}(\nu) + C_A(\nu)$, M_{RB} — матрица инерции твёрдого тела; M_A — матрица добавочной инерции; $C_{RB}(\nu)$ — матрица кориолисовых и центробежных сил; $C_A(\nu)$ — матрица гидродинамических кориолисовых и центробежных сил; $D(\nu)$ — матрица гидродинамического демпфирования; слагаемое $\tilde{g}(\eta)$ характеризует действие силы тяжести и выталкивающей силы на корпус аппарата; $J(\eta)$ — матрица Якоби линейных и угловых скоростей; вектор $\tau \in \mathbb{R}^6$ представляет собой силы и моменты, создаваемые управляющими органами аппарата.

Согласно монографии [17, гл. 2] соответствующие матрицы системы (16) покомпонентно имеют следующий вид:

$$M_{RB} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix},$$

$$C_{RB}(\nu) = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & -\bar{C}_{RB}^T(\nu) \\ \bar{C}_{RB}(\nu) & J_{RB}(\nu) \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_{RB}(\nu) = \begin{pmatrix} -m(y_G q + z_G r) & m(y_G p + w) & m(z_G p - v) \\ m(x_G q - w) & -m(z_G r + x_G p) & m(z_G q + u) \\ m(x_G r + v) & m(y_G r - u) & -m(x_G p + y_G q) \end{pmatrix},$$

$$J_{RB}(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -I_{yz}q - I_{xz}p + I_z r & I_{yz}r + I_{xy}p - I_y q \\ I_{yz}q + I_{xz}p - I_z r & 0 & -I_{xz}r - I_{xy}q + I_x p \\ -I_{yz}r - I_{xy}p + I_y q & I_{xz}r + I_{xy}q - I_x p & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_A(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v & 0 & -N_{\dot{r}}r & M_{\dot{q}}q \\ Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u & N_{\dot{r}}r & 0 & -K_{\dot{p}}p \\ -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 & -M_{\dot{q}}q & K_{\dot{p}}p & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_A = -\text{diag}(X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}),$$

$$D(\nu) = -\text{diag}(X_u + X_{u|u}|u|, Y_v + Y_{v|v}|v|, Z_w + Z_{w|w}|w|, K_p + K_{p|p}|p|, M_q + M_{q|q}|q|, N_r + N_{r|r}|r|),$$

$$\tilde{g}(\eta) = \begin{pmatrix} (W-B)\sin\theta \\ -(W-B)\cos\theta\sin\varphi \\ -(W-B)\cos\theta\cos\varphi \\ -(y_G W - y_B B)\cos\theta\cos\varphi + (z_G W - z_B B)\cos\theta\sin\varphi \\ (z_G W - z_B B)\sin\theta + (x_G W - x_B B)\cos\theta\cos\varphi \\ -(x_G W - x_B B)\cos\theta\sin\varphi - (y_G W - y_B B)\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$J(\eta) = \begin{pmatrix} J_1(\eta_2) & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & J_2(\eta_2) \end{pmatrix},$$

$$J_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\varphi\sin\theta - \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sin\theta & \cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$J_2(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 & \sin\varphi\operatorname{tg}\theta & \cos\varphi\operatorname{tg}\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi/\cos\theta & \cos\varphi/\cos\theta \end{pmatrix},$$

где $O_{3 \times 3}$ — нулевая матрица порядка 3×3 ; M_A и $D(\nu)$ — диагональные 6×6 -матрицы с соответствующими элементами на главной диагонали; m — масса аппарата; $r_G = (x_G, y_G, z_G)^T$ — координаты центра масс корпуса аппарата в неинерциальной системе координат; I_x, I_y, I_z — моменты инерции корпуса относительно соответствующих осей неинерциальной системы координат; I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} — центробежные моменты инерции; $X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}, X_u, Y_v, Z_w, K_p, M_q, N_r, X_{u|u}, Y_{v|v}, Z_{w|w}, K_{p|p}, M_{q|q}, N_{r|r}$ — некоторые отрицательные коэффициенты; $r_B = (x_B, y_B, z_B)^T$ — координаты центра плавучести корпуса аппарата в неинерциальной системе координат; $W = mg, B = \rho g \bar{V}$ — величины, соответственно, силы тяжести и выталкивающей силы, действующих на корпус аппарата, ρ — плотность воды, $\bar{V}$ — объём вытесненной корпусом аппарата жидкости.

Отметим, что динамическая система (16) может быть представлена как

$$\ddot{\eta} = M_\eta^{-1}(\eta)(-C_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} - D_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} - \tilde{g}(\eta)) + u, \quad \nu = J^{-1}(\eta)\dot{\eta}, \quad (17)$$

где $u \in \mathbb{R}^6$ — новые переменные управления, $u = M_\eta^{-1}(\eta)\tau$. Рассмотрим задачу позиционирования корпуса аппарата в точке с координатами $\eta_1 = 0$ и угловой ориентацией $\eta_2 = 0$, соответствующую задаче стабилизации нулевого значения вектора состояния $(\eta^T, \dot{\eta}^T)^T$ системы (17), с учётом заданных ограничений на абсолютные значения переменных состояния.

Используем далее обозначения $x_{11} = x, x_{21} = \dot{x}, x_{12} = y, x_{22} = \dot{y}, x_{13} = z, x_{23} = \dot{z}, x_{14} = \varphi, x_{24} = \dot{\varphi}, x_{15} = \theta, x_{25} = \dot{\theta}, x_{16} = \psi, x_{26} = \dot{\psi}$ для переменных состояния системы (17). С учётом введённых обозначений система (17) имеет вид (1), где $r_i = 2, g_i(x) = 1, f_i(x)$ представляет собой i -ю компоненту вектор-функции $M_\eta^{-1}(\eta)(-C_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} - D_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} - \tilde{g}(\eta)), i \in \overline{1, 6}$. Тогда управление $u = u(x)$, являющееся решением рассматриваемой задачи стабилизации системы (17), при заданных значениях констант $M_{ji}, j \in \overline{1, 2}, i \in \overline{1, 6}$, в ограничениях (2) покомпонентно имеет вид (5), где $i \in \overline{1, 6}$.

Результаты численного моделирования системы (17) с соответствующими управлениями (5) для значений физических и геометрических параметров модели подводного аппарата Kambara [14, 18] $m = 117$ кг, $g = 9.81$ м·с⁻², $B = 1108$ Н, $I_x = 10.7$ кг·м², $I_y = 11.8$ кг·м², $I_z = 13.4$ кг·м², $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ кг·м², $x_G = 0$ м, $y_G = 0$ м, $z_G = 0$ м, $x_B = -0.017$ м, $y_B = 0$ м, $z_B = -0.115$ м, $X_{\dot{u}} = -58.4$ кг, $Y_{\dot{v}} = -23.8$ кг, $Z_{\dot{w}} = -23.8$ кг, $K_{\dot{p}} = -3.38$ кг·м²/рад, $M_{\dot{q}} = -1.18$ кг·м²/рад, $N_{\dot{r}} = -2.67$ кг·м²/рад, $X_u = -120$ кг/с, $Y_v = -90$ кг/с, $Z_w = -150$ кг/с,

$K_p = -15$ Н·м·с/рад, $M_q = -15$ Н·м·с/рад, $N_r = -18$ Н·м·с/рад, $X_{u|u} = -90$ кг/м, $Y_{v|v} = -90$ кг/м, $Z_{w|w} = -120$ кг/м, $K_{p|p} = -10$ кг·м²/рад², $M_{q|q} = -12$ кг·м²/рад², $N_{r|r} = -15$ кг·м²/рад² представлены на рисунке. Использованы следующие начальные значения переменных состояния: $\eta(0) = (10, 20, 25, \pi/3, \pi/6, \pi/8)^T$ и $\dot{\eta}(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, а также значения параметров управлений (5): M_{2i} задано как i -я компонента строки $(0.7, 0.7, 0.8, 0.1, 0.2, 0.3)$, $M_{1i} = 1.001|\eta_i(0)|$, $c_{1i} = 0.999M_{2i}/M_{1i}$, $c_{2i} = 1$, $N_{1i} = M_{1i}$, $N_{2i} = 0.001M_{2i}$, $i = \overline{1, 6}$.

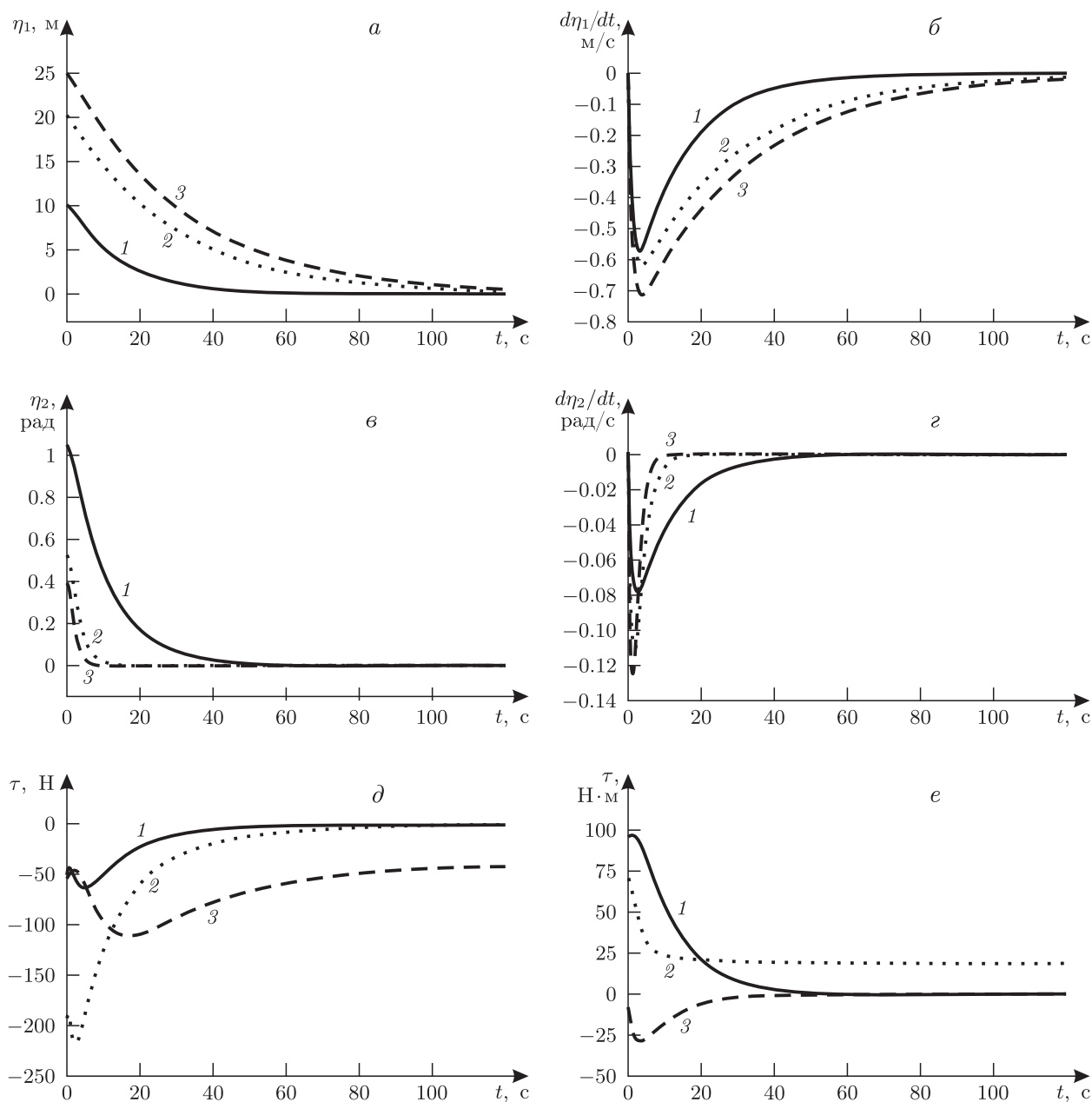


Рисунок. Параметры модели как функции времени: *a* — координаты $\eta_1 = (x, y, z)^T$ центра масс: $x(t)$ (1), $y(t)$ (2), $z(t)$ (3); *б* — координаты вектора скорости $\dot{\eta}_1 = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ поступательного движения центра масс: $dx(t)/dt$ (1), $dy(t)/dt$ (2), $dz(t)/dt$ (3); *в* — угловые координаты $\eta_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$ вращения корпуса аппарата вокруг центра масс: $\varphi(t)$ (1), $\theta(t)$ (2), $\psi(t)$ (3); *г* — угловые скорости $\dot{\eta}_2 = (\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T$ вращения корпуса аппарата вокруг центра масс: $d\varphi(t)/dt$ (1), $d\theta(t)/dt$ (2), $d\psi(t)/dt$ (3); *д* — управляющие силы τ_1 (1), τ_2 (2), τ_3 (3); *е* — управляющие моменты τ_4 (1), τ_5 (2), τ_6 (3).

Заметим, что выбор коэффициентов усиления c_{1i} , $i \in \overline{1, 6}$, при заданных ограничениях (2) на состояние системы (17), характеризуемых значениями постоянных M_{ji} , $j \in \overline{1, 2}$, $i \in \overline{1, 6}$, в силу соотношений (4) обусловлен необходимостью выполнения неравенств $M_{2i} - c_{1i}M_{1i} > 0$, $i \in \overline{1, 6}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейных динамических систем специального вида с учётом ограничений на абсолютные величины переменных состояния. Для построения стабилизирующих законов управления применён метод бэкстеппинга в сочетании с логарифмическими барьерными функциями Ляпунова. Полученные стабилизирующие обратные связи, в отличие от аналогичных известных результатов, основаны на использовании линейных виртуальных стабилизирующих функций, у которых отсутствует свойство неограниченного роста при приближении переменных состояния к граничным значениям. В качестве примера решена задача позиционирования подводного объекта в заданной точке пространства с учётом ограничений на состояние. Отметим, что необходимые и достаточные условия существования и, соответственно, методы поиска замен переменных состояния, в которых нелинейная динамическая система с управлением произвольного вида может быть представлена в форме (1), хорошо известны и описаны, например, в монографиях [19, гл. 5; 20, гл. 2].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской федерации в рамках государственного задания № 124012500443-0.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krstić, M. Nonlinear and Adaptive Control Design / M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotović. — New York : John Wiley and Sons, 1995. — 592 p.
2. Ngo, K.B. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints / K.B. Ngo, R. Mahony, Z.P. Jiang // Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. — Seville, Spain, 2005. — P. 8306–8312.
3. Tee, K.P. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems / K.P. Tee, S.S. Ge, E.H. Tay // Automatica. — 2009. — V. 45, № 4. — P. 918–927.
4. Tang, Z.L. Tangent barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems / Z.L. Tang, K.P. Tee, W. He // IFAC Proceedings Volumes. — 2013. — V. 46, № 20. — P. 449–455.
5. Niu, B. Barrier Lyapunov functions for the output tracking control of constrained nonlinear switched systems / B. Niu, J. Zhao // Systems and Control Letters. — 2013. — V. 62, № 10. — P. 963–971.
6. Xu, J. Adaptive finite-time fault-tolerant tracking control for a class of MIMO nonlinear systems with output constraints / J. Xu // Int. J. of Robust and Nonlin. Control. — 2017. — V. 27, № 5. — P. 722–741.
7. Sachan, K. Barrier Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler–Lagrange systems / K. Sachan, R. Padhi // Proc. 15th Int. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV). — Singapore, 2018. — P. 686–691.
8. Golubev, A.E. Backstepping control of aircraft take-off in windshear / A.E. Golubev, N.D. Botkin, A.P. Krishchenko // IFAC-PapersOnLine. — 2019. — V. 52, № 16. — P. 712–717.
9. 3D UAV navigation with moving-obstacle avoidance using barrier Lyapunov functions / E. Restrepo, I. Sarras, A. Loria, J. Marzat // IFAC-PapersOnLine. — 2019. — V. 52, № 12. — P. 49–54.

10. Garg, T. Barrier Lyapunov function based controller design for Euler-Lagrange systems with reduced control effort / T. Garg, S.B. Roy // IFAC-PapersOnLine. — 2020. — V. 53, № 1. — P. 459–464.
11. Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy / X. Wang, J. Xu, M. Lv [et al.] // Nonlinear Dynamics. — 2022. — V. 110. — P. 381–394.
12. Golubev, A. Modeling of cerebral blood flow autoregulation using mathematical control theory / A. Golubev, A. Kovtanyuk, R. Lampe // Mathematics. — 2022. — V. 10, № 12. — Art. 2060.
13. Barrier Lyapunov function-based finite-time reliable trajectory tracking control of fixed-wing UAV with error constraints / Y. Xu, R. Zhou, Z. Yu [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2022. — V. 55, № 6. — P. 597–602.
14. Голубев, А.Е. Стабилизация программных движений механических систем с учётом ограничений / А.Е. Голубев // Изв. РАН. ТиСУ. — 2023. — № 4. — С. 153–167.
15. Boyd, S. Convex Optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. — Cambridge : Cambridge University Press, 2009. — 699 p.
16. Khalil, H.K. Nonlinear Systems. 3d ed. / H.K. Khalil. — Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 2002. — 750 p.
17. Fossen T.I. Guidance and Control of Ocean Vehicles / T.I. Fossen. — Chichester : John Wiley and Sons, 1994. — 494 p.
18. Silpa-Anan, C. Kambara: past, present, and future / C. Silpa-Anan, A. Zelinsky // Proc. 2001 Australian Conference on Robotics and Automation. — 2001. — P. 61–66.
19. Isidori, A. Nonlinear Control Systems. 3rd ed. / A. Isidori. — London : Springer-Verlag, 1995. — 549 p.
20. Краснощеченко, В.И. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза / В.И. Краснощеченко, А.П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2005. — 519 с.

BACKSTEPPING STABILIZATION OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS UNDER STATE CONSTRAINTS

A. E. Golubev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: v-algolu@hotmail.com

The problem of stabilizing the zero value of the state vector of constrained nonlinear dynamical systems written in a special form is solved. The proposed control design accounts for magnitude constraints on the values of state variables and is based on the integrator backstepping approach using logarithmic Lyapunov barrier functions. The obtained stabilizing feedbacks, in contrast to similar known results, are based on the use of linear virtual stabilizing functions that do not grow unbounded as state variables approach the boundary values. As an example, we consider a state constraints aware solution to the control problem of positioning an autonomous underwater vehicle at a given point in space.

Keywords: stabilization, nonlinear dynamical system, integrator backstepping, state constraint, control of mechanical system.

FUNDING

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract no. 124012500443-0.

REFERENCES

1. Krstić, M., Kanellakopoulos, I., and Kokotović, P.V., *Nonlinear and Adaptive Control Design*, New York: John Wiley and Sons, 1995.
2. Ngo, K.B., Mahony, R., and Jiang, Z.P., Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints, *Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, Seville, Spain, 2005, pp. 8306–8312.

3. Tee, K.P., Ge, S.S., and Tay, E.H., Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems, *Automatica*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 918–927.
4. Tang, Z.L., Tee, K.P., and He, W., Tangent barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems, *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, vol. 46, no. 20, pp. 449–455.
5. Niu, B. and Zhao, J., Barrier Lyapunov functions for the output tracking control of constrained nonlinear switched systems, *Systems and Control Letters*, 2013, vol. 62, no. 10, pp. 963–971.
6. Xu, J., Adaptive finite-time fault-tolerant tracking control for a class of MIMO nonlinear systems with output constraints, *Int. J. of Robust and Nonlin. Control*, 2017, vol. 27, № 5, pp. 722–741.
7. Sachan, K. and Padhi, R., Barrier Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler–Lagrange systems, *Proc. 15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, Singapore, 2018, pp. 686–691.
8. Golubev, A.E., Botkin, N.D., and Krishchenko, A.P., Backstepping control of aircraft take-off in windshear, *IFAC-PapersOnLine*, 2019, vol. 52, no. 16, pp. 712–717.
9. Restrepo, E., Sarras, I., Loria, A., and Marzat, J., 3D UAV navigation with moving-obstacle avoidance using barrier Lyapunov functions, *IFAC-PapersOnLine*, 2019, vol. 52, no. 12, pp. 49–54.
10. Garg, T. and Roy, S.B., Barrier Lyapunov function based controller design for Euler–Lagrange systems with reduced control effort, *IFAC-PapersOnLine*, 2020, vol. 53, no. 1, pp. 459–464.
11. Wang, X., Xu, J., Lv, M., Zhang, L., and Zhao, Z., Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy, *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 110, pp. 381–394.
12. Golubev, A., Kovtanyuk, A., and Lampe, R., Modeling of cerebral blood flow autoregulation using mathematical control theory, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 12, art. 2060.
13. Xu, Y., Zhou, R., Yu, Z., Chen, F., and Zhang, Y., Barrier Lyapunov function-based finite-time reliable trajectory tracking control of fixed-wing UAV with error constraints, *IFAC-PapersOnLine*, 2022, vol. 55, no. 6, pp. 597–602.
14. Golubev, A.E., Stabilization of programmed motions of constrained mechanical systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2023, vol. 62, no. 4, pp. 695–709.
15. Boyd, S. and Vandenberghe, L., *Convex Optimization*, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
16. Khalil, H.K., *Nonlinear Systems. 3d edition*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002.
17. Fossen, T.I., *Guidance and Control of Ocean Vehicles*, Chichester: John Wiley and Sons, 1994.
18. Silpa-Anan, C. and Zelinsky, A., Kambara: past, present, and future, *Proc. 2001 Australian Conference on Robotics and Automation*, 2001, pp. 61–66.
19. Isidori, A., *Nonlinear Control Systems. 3rd edition*, London: Springer-Verlag, 1995.
20. Krasnoshchchenko, V.I. and Krishchenko, A.P., *Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* (Nonlinear Systems: Geometric Methods of Analysis and Synthesis), Moscow: Izdatel'stvo MGTU imeni N.E. Baumana (Bauman Press), 2005.

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ
В ЗАДАЧЕ ЦЕЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ
СИСТЕМОЙ© П. А. Точилин¹, И. А. Чистяков²^{1,2}Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова¹Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, Китайe-mail: ¹tochilin@cs.msu.ru, ²chistyakov.ivan@yahoo.com

Поступила в редакцию 10.08.2023 г., после доработки 10.08.2023 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Рассмотрена нелинейная по фазовым переменным система обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами, на возможные значения которых наложены поточечные ограничения. Необходимо решить задачу о переводе траектории системы из произвольной начальной позиции в наименьшую возможную окрестность заданного целевого множества на фиксированном отрезке времени за счёт выбора соответствующего позиционного управления. Для её решения построена непрерывная кусочно-кубическая функция специального вида. Множества уровней этой функции задают внутренние оценки для множеств разрешимости исследуемой системы. Используя указанную функцию, можно также построить синтез управлений, решающий задачу целевого управления на конечном отрезке времени. Предложены формулы для расчёта значений кусочно-кубической функции, исследованы её свойства, рассмотрен алгоритм поиска задающих эту функцию параметров.

Ключевые слова: нелинейная динамика, позиционное управление, динамическое программирование, принцип сравнения.

DOI: 10.31857/S0374064124050083, EDN: LBIBKJ

1. ВВЕДЕНИЕ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Работа посвящена приближённому решению задачи целевого управления для нелинейной по фазовым переменным системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Траекторию такой системы необходимо перевести в заданное целевое множество на конечном заданном отрезке времени за счёт выбора подходящей позиционной стратегии управления. При этом на управляющие параметры наложены жёсткие поточечные ограничения. Данную задачу предполагается решать с помощью построения вспомогательных множеств разрешимости [1, с. 75–78] или их внутренних оценок. Такие множества могут быть получены как множества уровней специальных функций цены, являющихся обобщёнными решениями соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ). Непосредственное решение этого уравнения является сложной задачей, однако можно построить верхние оценки решения за счёт использования общих идей принципа сравнения [1, с. 197–213; 2] и кусочной линеаризации правой части системы дифференциальных уравнений. Функцию, аппроксимирующую неизвестное решение уравнения ГЯБ, можно искать в определённом (по возможности достаточно простом для анализа) классе функций. В работах [3–6] были предложены способы построения внутренних оценок множеств разрешимости с использованием непрерывных или разрывных кусочно-аффинных либо кусочно-квадратичных функций цены.

Основная цель данной статьи — построить оценки с привлечением непрерывных кусочно-кубических функций. Введение дополнительных параметров, задающих каждую конкретную оценку функции цены, позволит сделать её более точной. Ниже исследованы некоторые свойства непрерывных кусочно-кубических функций цены, заданных на разбиении части фазового пространства на симплексы; выведены формулы, с помощью которых можно построить кусочно-кубическую функцию, задающую внутренние оценки множеств разрешимости нелинейной системы и позволяющую определить субоптимальное позиционное управление, переводящее траекторию системы в наименьшую возможную окрестность целевого множества; проанализированы некоторые нюансы, связанные с вычислениями параметров кусочно-кубических функций.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор фазовых переменных, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — вектор управляющих параметров. Предположим, что функции $\mathbf{f}(t, x)$ и $\mathbf{g}(t, x)$ являются достаточно гладкими, а именно, каждая компонента вектор-функции $\mathbf{f}(t, x)$ два раза непрерывно дифференцируема по x , а каждая компонента матриц-функции $\mathbf{g}(t, x)$ один раз непрерывно дифференцируема по x при $x \in \Omega$. Здесь Ω — некоторая фиксированная выпуклая многогранная область в пространстве $\mathbb{R}^{n_x}$. Кроме того, указанные функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ непрерывны по $t \in [t_0, t_1]$, отрезок $[t_0, t_1]$ фиксирован.

На допустимые значения управляющих параметров $u = u(t, x)$ наложены жёсткие поточечные ограничения

$$u(t, x) \in \mathcal{P}(t), \quad (2)$$

где $\mathcal{P}(t)$ — непрерывное в смысле метрики Помпейю–Хаусдорфа [7, с. 39–44] многозначное отображение, принимающее выпуклые компактные значения при каждом $t \in [t_0, t_1]$.

2. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ

Пусть $\mathcal{U}$ — класс допустимых позиционных управлений, удовлетворяющих условию (2), при подстановке которых в уравнение (1) получаются дифференциальные включения, имеющие решения при любом начальном векторе фазовых переменных $x_0 \in \Omega$. Под *решением* дифференциального включения понимается абсолютно непрерывная функция $x(t) = x(t; t_0, x_0)|_{u(\cdot)}$, для которой выполнено условие $x(t_0) = x_0$ и которая удовлетворяет данному включению для п.в. $t \in [t_0, t_1]$. Решения $x(t)$ рассматриваются только до возможного момента их выхода из области Ω .

Рассмотрим некоторое компактное целевое множество $\mathcal{X}_1 \subset \text{int } \Omega$, заданное следующим соотношением:

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \Omega: \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq 0\}.$$

Здесь функция $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ предполагается известной, три раза непрерывно дифференцируемой при $x \in \Omega$.

Обозначим через $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ множество разрешимости системы (1) в некоторый фиксированный момент времени $t \in [t_0, t_1]$. Оно содержит все возможные начальные позиции $x(t) \in \Omega$, для каждой из которых существует управление $u(\tau, x) \in \mathcal{U}$, $\tau \in [t, t_1]$, такое, что

$$x(\tau; t, x)|_{u(\cdot)} \in \Omega, \quad \tau \in [t, t_1], \quad x(t_1; t, x)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1.$$

Далее будем предполагать, что множество Ω подобрано таким образом, что $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1) \subset \Omega$ для любого $t \in [t_0, t_1]$, поэтому при построении закона управления можно не следить за возможностью выхода траектории за границы Ω .

Рассмотрим вспомогательную функцию цены

$$\tilde{V}(t, x) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \{ \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) : x(t) = x \},$$

которая связана со множеством разрешимости соотношением

$$\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : \tilde{V}(t, x) \leq 0\}$$

(при дополнительном условии, что $\mathcal{W}(\tau, t_1, \mathcal{X}_1) \subset \text{int } \Omega$ для любого $\tau \in (t, t_1]$). Известно [1, с. 61–62], что функция цены $\tilde{V}(t, x)$ является (вообще говоря, обобщённым) решением уравнения ГЯБ

$$\min_{u \in \mathcal{P}(t)} \{ \tilde{V}'(t, x; (1; \mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u)) \} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

с краевым условием $\tilde{V}(t_1, x) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x)$, $x \in \Omega$. Здесь $\tilde{V}'(t, x; \bar{l})$ — производная по направлению $\bar{l} \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ функции $\tilde{V}$ в точке (t, x) .

Построим внутренние оценки множеств разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$, соответствующие верхним оценкам функции цены $\tilde{V}(t, x)$, а также выведем соотношения для позиционного управления, решающего задачу о переводе траектории системы в целевое множество $\mathcal{X}_1$ на заданном отрезке времени.

3. НЕПРЕРЫВНАЯ КУСОЧНО-КУБИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Предположим, что область Ω разбита на симплексы $\Omega^{(i)}$ так, что любые два симплекса $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ либо не пересекаются, либо пересекаются только по какой-либо их общей грани размерности меньшей n_x . Симплексы занумеруем значениями индекса $i = \overline{1, N}$. Далее всюду верхний индекс, заключённый в скобки, будет соответствовать величине (вектору, матрице, функции), сопоставленной симплексу с указанным номером.

В точках каждого симплекса $\Omega^{(i)}$ проведём локальную линеаризацию (подробный вывод формул для $A^{(i)}(t)$, $B^{(i)}(t)$, $f^{(i)}(t)$, $R(t, x)$ приведён в [3, 4]):

$$\mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u = A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + f^{(i)}(t) + R(t, x) = \bar{A}^{(i)}(t)\bar{x} + B^{(i)}(t)u + R(t, x),$$

где $\bar{A}^{(i)} = (A^{(i)}(t)f^{(i)}(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)}$, $\bar{x} = (x^T \ 1)^T$ — расширенный вектор фазовых переменных. Выпишем также ограничения на погрешность линеаризации:

$$R(t, x) \in \mathcal{Q}^{(i)}(t) = [R_{1,-}^{(i)}(t), R_{1,+}^{(i)}(t)] \times [R_{2,-}^{(i)}(t), R_{2,+}^{(i)}(t)] \times \dots \times [R_{n_x,-}^{(i)}(t), R_{n_x,+}^{(i)}(t)],$$

где $R_{k,-}^{(i)}(t)$, $R_{k,+}^{(i)}(t)$ — известные величины (соответствующие формулы приведены в [3, 4]). При этом если какое-то из уравнений системы (например, с номером k) изначально является линейным по x и u , то $R_{k,-}^{(i)}(t) = R_{k,+}^{(i)}(t) \equiv 0$.

Пусть $g_1^{(i)}, \dots, g_{n_x+1}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вершины симплекса $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$. Помимо локальной нумерации (числами от 1 до n_x+1) вершин в каждом симплексе далее будем использовать глобальную нумерацию: $g_1, \dots, g_S$, где S — общее количество уникальных вершин всех рассматриваемых симплексов. При использовании глобальной нумерации верхний индекс (i) отсутствует. Через $\sigma(i, l)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, S}$, обозначим номер вершины g_l в локальной нумерации симплекса $\Omega^{(i)}$, т.е. $g_{\sigma(i,l)}^{(i)} = g_l$; через $\bar{g}_l \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ — вектор g_l , дополненный единицей в (n_x+1) -й координате.

Рассмотрим кусочно-кубическую функцию

$$V(t, x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)}(t)\bar{x} \rangle, \quad x \in \Omega^{(i)}. \quad (4)$$

Здесь $\alpha_k^{(i)}(x)$, $k = \overline{1, n_x + 1}$, — барицентрические координаты точки $x \in \Omega^{(i)}$. Матрицы $\bar{P}_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$ подберём таким образом, чтобы были выполнены условия непрерывности функции $V(t, x)$ по переменной $x \in \Omega$. При этом достаточно исследовать поведение функции только на границах соседних симплексов. Свойство непрерывности упрощает использование данной функции для оценивания множеств разрешимости. Однако аналогичные, но более сложные вычисления могут быть проведены и для разрывных функций (как это было сделано в [4, 6] для кусочно-аффинных и кусочно-квадратичных функций соответственно).

Простейшее достаточное условие непрерывности функции $V(t, x)$ по переменной x имеет вид

$$\bar{P}_k^{(i)}(t) = \bar{P}_m^{(j)}(t), \quad \text{если} \quad g_k^{(i)} = g_m^{(j)}, \quad \text{для любых } i, j, k, m, \quad g_k^{(i)} \in \Omega^{(i)}, \quad g_m^{(j)} \in \Omega^{(j)}. \quad (5)$$

Здесь $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ — произвольные соседние симплексы,

$$\bar{P}_k^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} P_k^{(i)}(t) & p_k^{(i)}(t) \\ (p_k^{(i)}(t))^T & \pi_k^{(i)}(t) \end{pmatrix}, \quad P_k^{(i)}(t) = (P_k^{(i)}(t))^T. \quad (6)$$

Матрица $\bar{P}_k^{(i)}(t)$ симметрична, но может не быть знакоопределённой.

Условие непрерывности можно ослабить, не требуя полного совпадения матриц $\bar{P}_k^{(i)}(t)$, соответствующих одной и той же вершине для разных соседних симплексов. Для этого рассмотрим два соседних симплекса $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ с общей границей, являющейся симплексом

$$\mathcal{H}^{(ij)} = \text{conv}\{g_{m_1}, \dots, g_{m_{n_x}}\}, \quad (7)$$

т.е. здесь рассматриваются только соседние симплексы с границей максимальной возможной размерности.

Теорема 1. Пусть все матрицы $\bar{P}_k^{(i)}(t)$ (при разных i, k) непрерывны по t и для любой пары соседних симплексов $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ с общей границей вида (7) выполнено условие

$$\langle \bar{g}_{l_1}, \bar{P}_{\sigma(i, l_3)}^{(i)}(t) \bar{g}_{l_2} \rangle = \langle \bar{g}_{l_1}, \bar{P}_{\sigma(j, l_3)}^{(j)}(t) \bar{g}_{l_2} \rangle, \quad l_1, l_2, l_3 \in \{m_1, \dots, m_{n_x}\}, \quad l_1 \leq l_2. \quad (8)$$

Тогда функция $V(t, x)$ непрерывна при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \Omega$.

Доказательство. Поскольку матрицы $\bar{P}_{\sigma(i, l_3)}^{(i)}(t)$ и $\bar{P}_{\sigma(j, l_3)}^{(j)}(t)$ симметричны, то из выполнения условия (8) при любых $l_1 \leq l_2$ следуют аналогичные условия для любых $l_1 > l_2$.

Зафиксируем некоторую точку $x \in \mathcal{H}^{(ij)}$ и выразим вектор $\bar{x}$ через барицентрические координаты (относительно симплекса $\mathcal{H}^{(ij)}$):

$$\bar{x} = \sum_{l_1} \alpha_{l_1}(x) \bar{g}_{l_1} = \sum_{l_2} \alpha_{l_2}(x) \bar{g}_{l_2}.$$

Здесь l_1 и l_2 — два независимых индекса, пробегающих множество значений $\{m_1, \dots, m_{n_x}\}$. Умножим (8) на $\alpha_{l_1}(x) \alpha_{l_2}(x)$ и просуммируем по всем значениям l_1, l_2 . В результате получим равенство

$$\left\langle \sum_{l_1} \alpha_{l_1}(x) \bar{g}_{l_1}, (\bar{P}_{\sigma(i, l_3)}^{(i)}(t) - \bar{P}_{\sigma(j, l_3)}^{(j)}(t)) \sum_{l_2} \alpha_{l_2}(x) \bar{g}_{l_2} \right\rangle = 0,$$

т.е.

$$\langle \bar{x}, \bar{P}_{\sigma(i, l_3)}^{(i)}(t) \bar{x} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{P}_{\sigma(j, l_3)}^{(j)}(t) \bar{x} \rangle, \quad l_3 \in \{m_1, \dots, m_{n_x}\}.$$

Домножим эти равенства на барицентрические (относительно $\mathcal{H}^{(ij)}$) координаты $\alpha_{l_3}(x)$ и просуммируем их для разных значений $l_3 \in \{m_1, \dots, m_{n_x}\}$. В результате будет доказано совпадение предельных значений функции $V(t, y)$ при $y \rightarrow x$, если $y \in \Omega^{(i)}$ или $y \in \Omega^{(j)}$.

Далее можно доказать аналогичное утверждение о совпадении предельных значений функции V в любой точке x , лежащей на границе $\mathcal{H}^{(ij)}$ двух соседних симплексов $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$, если эта граница имеет размерность меньше n_x . В этом случае можно построить цепочку симплексов с номерами $i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_m = j$ таких, что каждые два последовательных симплекса с номерами i_k и i_{k+1} будут иметь общую границу размерности n_x . Осталось применить несколько раз доказанное выше утверждение для случая границы $\mathcal{H}^{(ij)}$ максимальной возможной размерности. Теорема доказана.

Условия (8) представляют собой систему линейных (относительно элементов матриц $\bar{P}_k^{(i)}$) уравнений. При составлении таких систем для разных пар симплексов нужно следить за возможным появлением заведомо лишних уравнений (дубликатов).

4. КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$

В работе [3] были предложены формулы для построения оценок заданной дважды непрерывно дифференцируемой функции $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ при помощи непрерывной кусочно-аффинной функции $l(x)$, для которой

$$\begin{aligned} l(g_k^{(i)}) &= \phi_{\mathcal{X}_1}(g_k^{(i)}) + c_k^{(i)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, n_x + 1}; \\ c_k^{(i)} &= c_m^{(j)}, \quad g_k^{(i)} = g_m^{(j)} \quad \text{для любых } i, j, k, m, \end{aligned}$$

где постоянные $c_k^{(i)}$ зависят от экстремумов собственных значений матрицы вторых производных $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ в точках соответствующих симплексов. Максимизируя или минимизируя собственные значения этой матрицы по x , можно получить константы $c_k^{(i)}$, соответствующие верхним или нижним оценкам $l(x)$. Из полученной функции $l(x)$ далее можно сконструировать непрерывную кусочно-кубическую оценку рассматриваемого в данной статье вида, если положить $P_k^{(i)}(t_1) = 0$, $p_k^{(i)}(t) = 0$, $\pi_k^{(i)}(t_1) = l(g_k^{(i)})$. Таким образом может быть получена аппроксимация второго порядка малости относительно диаметра симплексов $\Omega^{(i)}$.

Однако за счёт ненулевых значений $P_k^{(i)}(t_1)$ и $p_k^{(i)}(t_1)$ точность аппроксимации можно улучшить. Предположим, что функция $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ три раза непрерывно дифференцируема при $x \in \Omega$. Возьмём некоторый симплекс $\Omega^{(i)}$ с вершинами $g_{m_1}, \dots, g_{m_{n_x+1}}$. Разложим функцию $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ по формуле Тейлора до 3-го порядка малости с центром в точке g_{m_j} , $j = \overline{1, n_x + 1}$:

$$\varphi_{\mathcal{X}_1}(x) = \varphi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j}) + (x - g_{m_j})^T \frac{\partial \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x} + \frac{1}{2} (x - g_{m_j})^T \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x^2} (x - g_{m_j}) + \nu(x, g_{m_j}),$$

где остаточный член для некоторой константы $C^{(i)}$ можно оценить как $|\nu(x, g_{m_j})| \leq C^{(i)} \|x - g_{m_j}\|^3$ (здесь используется общая оценка для всех вершин g_{m_j}).

Теперь определим функцию $V(t_1, x)$ по формулам (4), (6), где

$$P_{\sigma(i, m_j)}^{(i)}(t_1) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x^2}, \quad p_{\sigma(i, m_j)}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x^2} g_{m_j} \right), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\sigma(i, m_j)}^{(i)} &= \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j}) - (g_{m_j})^T \frac{\partial \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x} + \frac{1}{2} (g_{m_j})^T \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x^2} g_{m_j} + \\ &+ \max_r \{ C^{(r)} \max_s \|g_s^{(r)} - g_{m_j}\|^3 \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь внешний максимум в последнем слагаемом должен быть взят по всем номерам r симплексов, содержащих общую вершину g_{m_j} , а внутренний максимум — по всем вершинам таких симплексов; эта конструкция нужна для обеспечения непрерывности функции $V(t_1, x)$ по $x \in \Omega$. Теперь видно, что для любых $x \in \Omega^{(i)}$ и g_{m_j} можем записать

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{X}_1}(x) &= (\bar{x})^T \bar{P}_{\sigma(i, m_j)}^{(i)}(t_1) \bar{x} + \nu(x, g_{m_j}) - \max_r \left\{ C^{(r)} \max_s \|g_s^{(r)} - g_{m_j}\|^3 \right\} \leq (\bar{x})^T \bar{P}_{\sigma(i, m_j)}^{(i)}(t_1) \bar{x}, \\ \phi_{\mathcal{X}_1}(x) &= \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \left((\bar{x})^T \bar{P}_k^{(i)}(t_1) \bar{x} + \nu(x, g_k^{(i)}) - \max_r \left\{ C^{(r)} \max_s \|g_s^{(r)} - g_k^{(i)}\|^3 \right\} \right) \leq V(t_1, x).\end{aligned}$$

Получена верхняя непрерывная кусочно-кубическая оценка функции $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ с порядком малости 3 относительно диаметра симплексов. В частности, эта формула точна в случае, если $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ — квадратичная функция ($\mathcal{X}_1$ — гиперповерхность 2-го порядка).

5. ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНОК МНОЖЕСТВ РАЗРЕШИМОСТИ

Для построения внутренних оценок множеств разрешимости воспользуемся принципом сравнения [1]. Основная цель здесь — построить верхнюю оценку $V(t, x)$ неизвестной функции цены $\tilde{V}(t, x)$, являющейся решением (3), с использованием специальных классов функций V и управлений u . Ниже аппроксимацию функции цены $\tilde{V}$ будем искать в классе введённых в п. 3 непрерывных кусочно-кубических функций. Для управлений же воспользуемся классом непрерывных кусочно-аффинных функций (аналогично методу, предложенному в статье [3]).

Рассмотрим кусочно-аффинное управление

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) y_k^{(i)}(t) = Y^{(i)}(t) \bar{H}^{(i)} \bar{x}, \quad y_k^{(i)}(t) \in \mathcal{P}(t). \quad (11)$$

Здесь $y_k^{(i)}(t)$ — искомые векторы; матрица $Y^{(i)}(t)$ составлена из столбцов $y_k^{(i)}(t)$ при разных $k = \overline{1, n_x+1}$; $\bar{H}^{(i)} = (H^{(i)} \ h^{(i)}) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$ — матрица, осуществляющая переход к барицентрическим координатам в симплексе $\Omega^{(i)}$: $\alpha(x) = \bar{H}^{(i)} \bar{x}$ (подробные формулы приведены в [3]).

Функция $u(t, x)$ будет непрерывной по $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \Omega$, если каждый из векторов $y_k^{(i)}(t)$ непрерывен по t и для любых i, j, k, m выполнено условие

$$y_k^{(i)}(t) = y_m^{(j)}(t) \quad \text{при} \quad g_k^{(i)} = g_m^{(j)}. \quad (12)$$

Выведем несколько вспомогательных формул, которые понадобятся для оценки выражения из уравнения (3). Найдём производную по x от квадратичной формы из определения $V(t, x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)}(t) \bar{x} \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\langle x, P_k^{(i)}(t) x \rangle + 2 \langle x, p_k^{(i)}(t) \rangle + \pi_k^{(i)}(t) \right) = \\ &= 2P_k^{(i)}(t)x + 2p_k^{(i)}(t) = 2 \begin{pmatrix} P_k^{(i)}(t) & p_k^{(i)}(t) \end{pmatrix} \bar{x} = 2\bar{I} \bar{P}_k^{(i)}(t) \bar{x}, \quad \bar{I} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n \times n} & \mathbb{O}_{n \times 1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Теперь найдём производную по x от компоненты вектора барицентрических координат:

$$\alpha^{(i)}(x) = H^{(i)}x + h^{(i)} = \bar{H}^{(i)} \bar{x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \alpha_k^{(i)}(x) = (H_k^{(i)})^T, \quad k = \overline{1, n_x},$$

где $H_k^{(i)}$ — k -я строка матрицы $H^{(i)}$.

Пусть (здесь для упрощения не указана зависимость от t , точкой обозначена производная по переменной t)

$$S_k^{(i)}(\bar{x}) = \dot{P}_k^{(i)} + \bar{P}_k^{(i)} \bar{I}^T (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)}) + (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)})^T \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} + \\ + \sum_{s=1}^{n_x+1} (H_s^{(i)} (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)}) \bar{x}) \bar{P}_s^{(i)}.$$

Подставим функцию $V(t, x)$ вида (4) в левую часть уравнения (3), возьмём управление (11) и преобразуем получившееся выражение при $x \in \Omega^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ (здесь также всюду не указана зависимость функций от t):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \langle \bar{x}, \dot{P}_k^{(i)} \bar{x} \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \rangle, \bar{A}^{(i)} \bar{x} + B^{(i)} u + R(t, x) \right\rangle = \\ & = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \left\langle \bar{x}, \dot{P}_k^{(i)} + (\bar{P}_k^{(i)} \bar{I}^T (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)}) + (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)})^T \bar{I} \bar{P}_k^{(i)}) \bar{x} \right\rangle + \\ & + \sum_{k=1}^{n_x+1} 2\alpha_k^{(i)}(x) \langle \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x}, R(t, x) \rangle + \sum_{k=1}^{n_x+1} \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \rangle \left\langle (H_k^{(i)})^T, (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)}) \bar{x} + R(t, x) \right\rangle = \\ & = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \left\langle \bar{x}, \dot{P}_k^{(i)} + (\bar{P}_k^{(i)} \bar{I}^T (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)}) + (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)})^T \bar{I} \bar{P}_k^{(i)}) \bar{x} \right\rangle + \\ & + \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \left\langle \bar{x}, \left(\sum_{s=1}^{n_x+1} (H_s^{(i)} (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)}) \bar{x}) \bar{P}_s^{(i)} \right) \bar{x} \right\rangle + \\ & + \sum_{k=1}^{n_x+1} \left\langle (H_k^{(i)})^T \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \rangle + 2\alpha_k^{(i)}(x) \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x}, R(t, x) \right\rangle = \\ & = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \langle \bar{x}, S_k^{(i)}(\bar{x}) \bar{x} \rangle + \sum_{k=1}^{n_x+1} \left\langle (H_k^{(i)})^T \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \rangle + 2\alpha_k^{(i)}(x) \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x}, R(t, x) \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим сверху каждую из двух полученных сумм. Для оценки первой суммы потребуем, чтобы $\langle \bar{x}, S_k^{(i)}(\bar{x}) \bar{x} \rangle \leq 0$ для любых $k = \overline{1, n_x+1}$ и $x \in \Omega^{(i)}$. Запишем выражение вектора $\bar{x}$ через вершины симплекса и барицентрические координаты:

$$\left(\sum_{k_2=1}^{n_x+1} \alpha_{k_2}(x) \bar{g}_{k_2}^{(i)} \right)^T S_k^{(i)} \left(\sum_{k_1=1}^{n_x+1} \alpha_{k_1}(x) \bar{g}_{k_1}^{(i)} \right) \left(\sum_{k_3=1}^{n_x+1} \alpha_{k_3}(x) \bar{g}_{k_3}^{(i)} \right) \leq 0.$$

Учитывая неотрицательность барицентрических координат, получаем, что для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы был неположительным каждый из коэффициентов получившейся линейной комбинации с барицентрическими координатами. Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{aligned} & (\bar{g}_{k_2}^{(i)})^T \left(\dot{P}_k^{(i)} + \bar{P}_k^{(i)} \bar{I}^T (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)}) + (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)})^T \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} + \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^{n_x+1} (H_s^{(i)} (\bar{A}^{(i)} \bar{g}_{k_1}^{(i)} + B^{(i)} y_{k_1}^{(i)})) \bar{P}_s^{(i)} \right) \bar{g}_{k_3}^{(i)} \leq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

для любых трёх (возможно, совпадающих) вершин $g_{k_1}^{(i)}$, $g_{k_2}^{(i)}$, $g_{k_3}^{(i)}$ симплекса $\Omega^{(i)}$. В силу симметричности матрицы в скобках достаточно рассмотреть индексы $k_2 \leq k_3$. Кроме того, нужно перебрать все значения $k = \overline{1, n_x + 1}$. Получена система из $(n_x + 1)^3(n_x + 2)/2$ скалярных неравенств (для каждого фиксированного симплекса с номером i).

Оценим теперь второе слагаемое в (13):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_x+1} \left\langle (H_k^{(i)})^T \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \rangle + 2\alpha_k^{(i)}(x) \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x}, R(t, x) \right\rangle \leq \\ & \leq \max_{x \in \Omega^{(i)}} \left\{ \rho \left(\sum_{k=1}^{n_x+1} \left((H_k^{(i)})^T \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \rangle + 2\alpha_k^{(i)}(x) \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \right) \middle| \mathcal{Q}^{(i)} \right) \right\}, \quad x \in \Omega^{(i)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\rho(\cdot | \mathcal{Q}^{(i)})$ — опорная функция, значения которой могут быть найдены следующим образом:

$$\rho(l | \mathcal{Q}^{(i)}) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_x} ((R_{s,-}^{(i)} + R_{s,+}^{(i)}) l_s + (R_{s,+}^{(i)} - R_{s,-}^{(i)}) |l_s|), \quad l \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Для упрощения вычислений можно исключить задачу максимизации негладкой функции в (15). Для этого можно оценить компоненты вектора, являющегося первым аргументом опорной функции:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \Omega^{(i)}} \left\{ \rho \left(\sum_{k=1}^{n_x+1} (H_k^{(i)})^T \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \rangle + 2\alpha_k^{(i)}(x) \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \middle| \mathcal{Q}^{(i)} \right) \right\} \leq \eta^{(i)}(t) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_x} \left(\max \{ (R_{s,-}^{(i)} + R_{s,+}^{(i)}) \lambda_s^-, (R_{s,-}^{(i)} + R_{s,+}^{(i)}) \lambda_s^+ \} + (R_{s,+}^{(i)} - R_{s,-}^{(i)}) \max \{ |\lambda_s^-|, |\lambda_s^+| \} \right), \\ & \lambda_s^- = \min_r \left\{ \lambda_{\min}(\tilde{P}_s^{(i)}) \sqrt{1 + \|g_r^{(i)}\|^2} \right\}, \quad \lambda_s^+ = \max_r \left\{ \lambda_{\max}(\tilde{P}_s^{(i)}) \sqrt{1 + \|g_r^{(i)}\|^2} \right\}, \\ & \tilde{P}_s^{(i)} = \sum_{k=1}^{n_x+1} \left(H_{ks}^{(i)} \bar{P}_k^{(i)} + (\bar{H}_k^{(i)})^T (\bar{P}_k^{(i)})_s + (\bar{P}_k^{(i)})_s \bar{H}_k^{(i)} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_{\min}(Q)$ и $\lambda_{\max}(Q)$ — минимальное и максимальное собственные значения симметричной матрицы Q ; $(\bar{P}_k^{(i)})_s$ — s -я строка матрицы $\bar{P}_k^{(i)}$. Квадратные корни в формулах являются характеристиками симплексов и могут быть подсчитаны один раз, до расчёта матриц $\bar{P}_k^{(i)}(t)$, что упростит вычисление оценки для второго слагаемого в (13).

На основании полученных неравенств теперь может быть сформулировано и доказано следующее утверждение о внутренних оценках множеств разрешимости.

Теорема 2. Пусть для каждой $t \in [t_0, t_1]$, $i = \overline{1, N}$, каждой четверки вершин $g_k^{(i)}$, $g_{k_1}^{(i)}$, $g_{k_2}^{(i)}$, $g_{k_3}^{(i)}$, $k_2 \leq k_3$, симплекса $\Omega^{(i)}$, для некоторых кусочно-непрерывных вектор-функций $y_j(t) \in \mathcal{P}(t)$, $j = \overline{1, S}$, и дифференцируемых матричнозначных функций $\bar{P}_k^{(i)}(t)$ вида (6) выполнены дифференциальные неравенства (14), а также условия непрерывности функций $V(t, x)$ (формула (5) или (8)) и $u(t, x)$ (формула (12)). Пусть значения матриц $\bar{P}_k^{(i)}(t_1)$ выбраны в соответствии с формулами (9), (10), а $\eta(\tau) = \max_i \eta^{(i)}(\tau)$. Тогда множество

$$\mathcal{W}^{int}(t) = \left\{ x \in \Omega : V(t, x) \leq - \int_t^{t_1} \eta(\tau) d\tau \right\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ нелинейной системы (1).

Доказательство. Заметим, что построенная функция $V(\tau, x)$ является дифференцируемой по любому направлению $l \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ в любой точке (τ, x) , $\tau \in [t_0, t_1]$, $x \in \Omega$. Более того, из (13) следует, что

$$V'(\tau, x; (1, \mathbf{f}(\tau, x) + \mathbf{g}(\tau, x)Y^{(i)}(\tau)\bar{H}^{(i)}\bar{x})^T) \leq \eta^{(i)}(\tau),$$

если $x \in \Omega^{(i)}$ для некоторого $i \in \{1, \dots, N\}$. Для любой начальной (в момент времени t) точки $x(t) \in \mathcal{W}^{int}(t)$ построим траекторию системы (1), замкнутой управлением вида (11). Условие (12) гарантирует допустимость этого управления и существование траектории $x(\tau)$, $\tau \in [t, t_1]$. Подставим траекторию в формулу для производной функции $V(\tau, x)$ и проинтегрируем на отрезке $\tau \in [t, t_1]$:

$$V(t_1, x(t_1)) - V(t, x(t)) \leq \int_t^{t_1} \eta^{i(x(\tau))}(\tau) d\tau \leq \int_t^{t_1} \eta(\tau) d\tau.$$

Здесь $i(x(\tau))$ — номер симплекса, в котором находится точка $x(\tau)$. Если $x(\tau)$ лежит на общей границе нескольких симплексов, то в качестве $i(x(\tau))$ можно взять любой из номеров этих симплексов.

Из (9), (10) следует, что $\phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) \leq V(t_1, x(t_1))$. Объединяя неравенства, получаем

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) \leq V(t, x(t)) + \int_t^{t_1} \eta(\tau) d\tau \leq 0,$$

т.е. $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$, а значит, $x(t) \in \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$. Теорема доказана.

6. О ВЫЧИСЛЕНИИ $\bar{P}_k(t)$, $y_k(t)$

При вычислении внутренних оценок множеств разрешимости следует выбирать векторы $y_k(t) \in \mathcal{P}(t)$ таким образом, чтобы минимизировать отклонение величин из (14) от нуля при выполнении указанных неравенств. При известных матрицах $\bar{P}_k(t)$ получим совокупность задач оптимизации относительно неизвестных $\dot{\bar{P}}_j(t)$ и $y_j(t)$, которые нужно решить для получения $\bar{P}_k(t+0)$ в каждый следующий момент времени. В зависимости от нормы, в которой минимизируется погрешность выполнения уравнения ГЯБ, эти задачи могут быть, например, либо задачами линейного программирования, либо задачами минимизации квадратичных функций с линейными ограничениями. Второй вариант является более предпочтительным с точки зрения непрерывности полученного решения по исходным данным. В результате получим следующие соотношения:

$$\sum_{i,k,l_1,l_2,l_3} \delta_{i,k,l_1,l_2,l_3}^2 \rightarrow \min, \quad (16)$$

$$\delta_{i,k,l_1,l_2,l_3} \geq 0, \quad \text{выполнены равенства (12)}, \quad (17)$$

$$\langle \bar{g}_{l_1}, \dot{\bar{P}}_{\sigma(i,l_3)}^{(i)}(t) \bar{g}_{l_2} \rangle = \langle \bar{g}_{l_1}, \dot{\bar{P}}_{\sigma(j,l_3)}^{(j)}(t) \bar{g}_{l_2} \rangle, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (\bar{g}_{l_1})^T & \left(\dot{\bar{P}}_k^{(i)} + \bar{P}_k^{(i)} \bar{I}^T (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)}) + (\bar{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \bar{H}^{(i)})^T \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} + \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^{n_x+1} (H_s^{(i)} (\bar{A}^{(i)} \bar{g}_{l_3} + B^{(i)} y_{l_3})) \bar{P}_s^{(i)} \right) \bar{g}_{l_2} + \delta_{i,k,l_1,l_2,l_3} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где минимизация проводится по совокупности переменных $\dot{\bar{P}}_j(t)$, $y_j(t)$, а также вспомогательных величин δ_{i,k,l_1,l_2,l_3} , соответствующих погрешностям выполнения уравнения ГЯБ в вер-

пинах симплексов. Здесь (i, k, l_1, l_2, l_3) , $i \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, \dots, n_x + 1\}$, $l_1, l_2, l_3 \in \{1, \dots, S\}$, — все возможные наборы индексов, для которых $g_{l_1} \in \Omega^{(i)}$, $g_{l_2} \in \Omega^{(i)}$, $g_{l_3} \in \Omega^{(i)}$, $l_1 \leq l_2$. Условия (18) должны быть выписаны только для тех наборов индексов (i, j, l_1, l_2, l_3) , для которых $g_{l_1} \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, $g_{l_2} \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, $g_{l_3} \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$.

Рассмотрим ситуацию, когда сначала некоторым образом фиксируется управление, а затем уже пересчитываются значения $\dot{P}_j(t)$. Управления в вершинах симплексов можно определить, например, по аналогии с методом, ранее применённым для случая кусочно-аффинных функций цены в [3, 4]. А именно, для заданной вершины g_k рассмотрим все номера $i_1, \dots, i_r$ симплексов, содержащих эту вершину. Для каждой пары k, i , где $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$, найдём минимизатор выражения (13) при $x \in \Omega^{(i)}$ в точке $x = g_k$:

$$y_{\sigma(i,k)}^{(i),*} = \arg \min_{y_k \in \mathcal{P}(t)} \left\{ 2(\bar{g}_k)^T \bar{P}_k^{(i)} \bar{I}^T B^{(i)} y_k + \sum_{s=1}^{n_x+1} (H_s^{(i)} B^{(i)} y_k) (\bar{g}_k)^T \bar{P}_s^{(i)} \bar{g}_k \right\}.$$

Среди этих векторов найдём минимизатор для следующего выражения:

$$\min_y \max_{i \in \{i_1, \dots, i_r\}} \left\{ 2(\bar{g}_k)^T \bar{P}_k^{(i)} \bar{I}^T (\bar{A}^{(i)} \bar{g}_k + B^{(i)} y) + \sum_{s=1}^{n_x+1} (H_s^{(i)} (\bar{A}^{(i)} \bar{g}_k + B^{(i)} y)) (\bar{g}_k)^T \bar{P}_s^{(i)} \bar{g}_k \right\},$$

где внешний минимум берётся только по

$$y \in \{y_{\sigma(i_1,k)}^{(i_1),*}, \dots, y_{\sigma(i_r,k)}^{(i_r),*}\}.$$

Найденный минимизатор используем в качестве вектора y_k . Эту процедуру следует проделать отдельно для каждой из вершин симплексов.

При фиксированных управлениях в вершинах симплексов задача оптимизации (16)–(19) для поиска $\dot{P}_j(t)$ упрощается. Теперь условие (19) можно переписать в виде

$$(\bar{g}_{l_1})^T (\dot{P}_k^{(i)} + \Xi_{k,l_3}^{(i)}) \bar{g}_{l_2} + \delta_{i,k,l_1,l_2,l_3} = 0, \quad (20)$$

где $\Xi_{k,l_3}^{(i)}$ — некоторая известная матрица. Минимизация теперь проводится по переменным $\dot{P}_j(t)$ и вспомогательным величинам δ_{i,k,l_1,l_2,l_3} .

Покажем, что множество допустимых (т.е. удовлетворяющих (18), (20)) величин $\dot{P}_j(t)$, δ_{i,k,l_1,l_2,l_3} не пусто. Пусть снова $i_1, \dots, i_r$ — все номера симплексов, содержащих некоторую фиксированную вершину g_s . Рассмотрим некоторый вспомогательный, достаточно большой симплекс $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, для которого $\Omega^{(i)} \subset \tilde{\Omega}$, $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$. Пусть $h_1, \dots, h_{n_x+1}$ — вершины этого симплекса. Существует единственная симметричная матрица $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$, для которой

$$(\bar{h}_{s_1})^T \Lambda \bar{h}_{s_2} = \min_{i,l_3} \{ -(\bar{h}_{s_1})^T \Xi_{\sigma(i,s),l_3}^{(i)} \bar{h}_{s_2} \}, \quad s_1, s_2 \in \{1, \dots, n_x + 1\},$$

где минимум нужно взять по всем $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$, $l_3 \in \{1, \dots, S\}$, для которых $g_{l_3} \in \Omega^{(i)}$. Значит, выполнены неравенства

$$(\bar{h}_{j_1})^T (\Lambda + \Xi_{\sigma(i,s),l_3}^{(i)}) \bar{h}_{j_2} \leq 0, \quad j_1, j_2 \in \{1, \dots, n_x + 1\}, \quad i \in \{i_1, \dots, i_r\}.$$

Поскольку любая точка $g_k^{(i)}$, $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$, $k = \overline{1, n_x + 1}$, лежит внутри $\tilde{\Omega}$, то

$$\bar{g}_k^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_x+1} \tilde{\alpha}_j(\bar{g}_k^{(i)}) \bar{h}_j, \quad \tilde{\alpha}_j(\bar{g}_k^{(i)}) \in [0, 1].$$

Следовательно, для любых $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n_x + 1\}$ и $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$ выполнено неравенство

$$(\bar{g}_{k_1}^{(i)})^T (\Lambda + \Xi_{\sigma(i,s), l_3}^{(i)}) \bar{g}_{k_2}^{(i)} = \sum_{j_1=1}^{n_x+1} \sum_{j_2=1}^{n_x+1} \tilde{\alpha}_{j_1}(\bar{g}_{k_1}^{(i)}) \tilde{\alpha}_{j_2}(\bar{g}_{k_2}^{(i)}) (\bar{h}_{j_1})^T (\Lambda + \Xi_{\sigma(i,s), l_3}^{(i)}) \bar{h}_{j_2} \leq 0.$$

Если в качестве $\dot{\bar{P}}_s(t)$ взять построенную матрицу Λ , то найдутся такие неотрицательные δ_{i,k,l_1,l_2,l_3} , для которых будут выполнены условия (18), (20). Отсюда также следует непустота множества допустимых параметров для исходной задачи (16)–(19). Конечно, построенная матрица Λ не является решением данной задачи, а может быть использована лишь в качестве оценки решения.

Отметим, что задача (16)–(18), (20) может быть переформулирована в терминах задачи квадратичного выпуклого программирования и далее эффективно решена численно (см. [8, 9]).

Рассмотрим частный случай решения указанной выше задачи оптимизации, когда $P_k(t) \equiv 0$, $p_k(t) \equiv 0$. Тогда в матрице $\bar{P}_k(t)$ ненулевым будет только элемент $\pi_k(t) = V(t, g_k)$, соответствующий постоянной (не зависящей от x) величине в квадратичной форме $\langle \bar{x}, \bar{P}_k(t) \bar{x} \rangle$, при этом $\bar{I} \bar{P}_k = 0$ и неравенства (14) примут вид

$$\dot{\pi}_k^{(i)} + \sum_{s=1}^{n_x+1} (H_s^{(i)} (\bar{A}^{(i)} \bar{g}_{l_1}^{(i)} + B^{(i)} y_{l_1}^{(i)})) \pi_s^{(i)} \leq 0,$$

что соответствует неравенствам, полученным ранее для случая непрерывных кусочно-аффинных функций цены в [3, 4]. Таким образом, можно утверждать, что разработанный выше метод поиска кусочно-кубической функции цены является более общим, чем использованный авторами ранее. В то же время за счёт дополнительных переменных можно добиться меньших погрешностей решения уравнения ГЯБ даже при использовании того же синтеза управлений, что и в случае кусочно-аффинной функции цены.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В качестве примера рассмотрим задачу управления движением маятника с электромотором, ранее использованную для демонстрации применения кусочно-квадратичных функций цены в работе [5]. Система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{J} \sin x_1 - \frac{k_2}{J} x_2 + \frac{k_1}{J} u,$$

переменная x_1 соответствует углу отклонения маятника от вертикального положения, а x_2 — угловой скорости. Выбраны следующие значения параметров: $J = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $M = 0.1$, $L = 1$. На управление наложено ограничение $u \in [-1, 1]$. Требуется перевести траекторию из точки $x_0 = [1.2 \ 0.5]^T$ в начальный момент времени $t_0 = 0$ в точку $x_1 = [\pi/2 \ 0]^T$ в конечный момент времени $t_1 = 1$.

При реализации численного метода сначала были зафиксированы вершины $g_k \in \mathbb{R}^2$, расположенные на правильной сетке со сторонами длиной $\Delta = 0.15$, которые затем были использованы для разбиения области Ω на симплексы $\Omega^{(i)}$ с помощью триангуляции Делоне [10]. На рисунке показано, что при одинаковом разбиении кусочно-кубические функции могут давать лучшую апостериорную точность, чем кусочно-квадратичные (итоговое расстояние до целевого множества равно 0.018 в стандартной метрике пространства $\mathbb{R}^2$ для представленного алгоритма и 0.139 для метода из работы [5]). Штриховая линия в каждом из случаев показывает границу множества, куда априорно гарантируется попадание траектории при замыкании системы управлением вида (11).

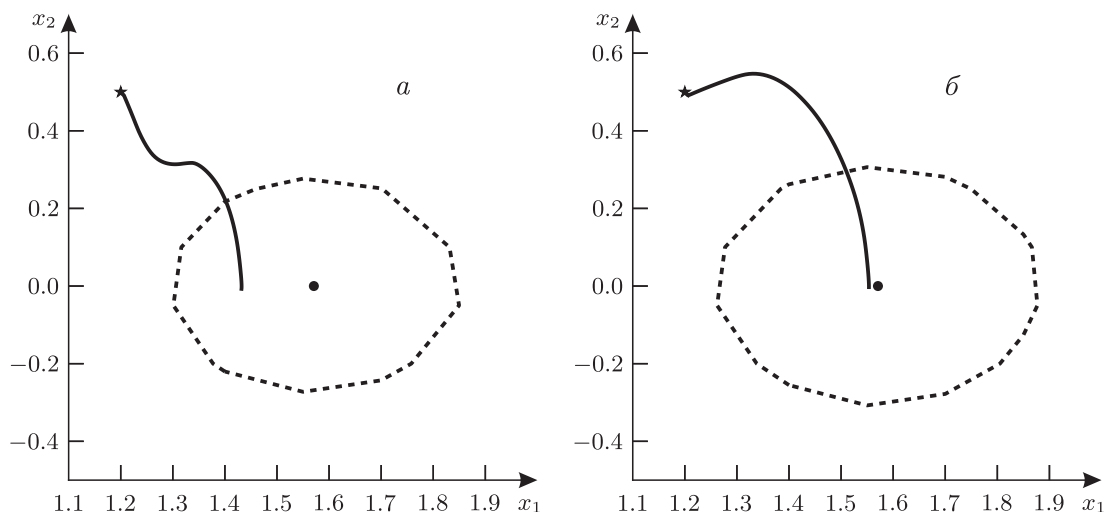


Рисунок. Траектории (сплошная линия) при использовании кусочно-квадратичной (а) и кусочно-кубической (б) функций цены: $\star$ — начальная точка; $\bullet$ — целевое множество.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённые в данной работе формулы и вспомогательные задачи оптимизации позволяют построить непрерывную кусочно-кубическую функцию, задающую оценку функции цены для задачи целевого управления. Соответствующий численный метод, конечно, является более сложным, чем в случаях с кусочно-аффинной или кусочно-квадратичной оценкой, однако за счёт дополнительных параметров можно получить более точную оценку неизвестной истинной функции цены. Предложенный метод может быть использован при решении задач управления сложными нелинейными системами с небольшой размерностью фазового пространства.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurzanski, A.B. Dynamics and Control of Trajectory Tubes / A.B. Kurzanski, P. Varaiya. — Basel : Birkhäuser, 2014. — 445 p.
2. Куржанский, А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 173–183.
3. Точилин, П.А. О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени / П.А. Точилин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 1. — С. 223–238.
4. Точилин, П.А. О построении разрывного кусочно-аффинного синтеза управлений в задаче целевого управления / П.А. Точилин, И.А. Чистяков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 3. — С. 194–210.

5. Чистяков, И.А. Применение кусочно-квадратичных функций цены для приближённого решения нелинейной задачи целевого управления / И.А. Чистяков, П.А. Точилин // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1545–1554.
6. Чистяков, И.А. Построение разрывных кусочно-квадратичных функций цены в задаче целевого управления / И.А. Чистяков, П.А. Точилин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2022. — Т. 28, № 3. — С. 259–273.
7. Половинкин, Е.С. Мнозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. — М. : Физматлит, 2015. — 524 с.
8. Interior-point methods for large-scale cone programming / M.S. Andersen, J. Dahl, Z. Liu, L. Vandenberghe // Optimization for Machine Learning / Eds. S. Sra, S. Nowozin, S.J. Wright. — Cambridge ; London : The MIT Press, 2011. — P. 55–83.
9. OSQP: an operator splitting solver for quadratic programs / B. Stellato, G. Banjac, P. Goulart [et al.] // Math. Prog. Comp. — 2020. — V. 12. — P. 637–672.
10. Скворцов, А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции / А.В. Скворцов, Н.С. Мирза. — Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2006. — 168 с.

ON PIECEWISE CUBIC ESTIMATES OF THE VALUE FUNCTION IN THE PROBLEM OF TARGET CONTROL FOR A NONLINEAR SYSTEM

P. A. Tochilin¹, I. A. Chistyakov²

^{1,2}Lomonosov Moscow State University, Russia

¹Shenzhen MSU-BIT University, China

e-mail: ¹tochilin@cs.msu.ru, ²chistyakov.ivan@yahoo.com

A nonlinear system of ordinary differential equations with control parameters is considered. Pointwise restrictions are imposed on the possible values of these parameters. It is required to solve the problem of transferring the trajectory of the system from an arbitrary initial position to the smallest possible neighborhood of a given target set at a fixed time interval by selecting the appropriate feedback control. To solve this problem, it is proposed to construct a continuous piecewise cubic function of a special kind. The level sets of this function correspond to internal estimates of the solvability sets of the system. Using this function, it is also possible to construct a feedback control function that solves the target control problem at a fixed time interval. The paper proposes formulas for calculating the values of a piecewise cubic function, examines its properties, and considers an algorithm for searching for parameters defining this function.

Keywords: nonlinear dynamics, position control, dynamic programming, comparison principle.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Kurzanski, A.B. and Varaiya, P., *Dynamics and Control of Trajectory Tubes*, Basel: Birkhäuser, 2014.
2. Kurzanski, A.B., Comparison principle for equations of the Hamilton–Jacobi type in control theory, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 253, pp. S185–S195.
3. Tochilin, P.A., On the construction of a piecewise affine value function in an infinite-horizon optimal control problem, *Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 223–238.
4. Tochilin, P.A. and Chistyakov, I.A., On the construction of a discontinuous piecewise affine synthesis in a target control problem, *Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 194–210.
5. Chistyakov, I.A. and Tochilin, P.A., Application of piecewise quadratic value functions to the approximate solution of a nonlinear target control problem, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1513–1523.

6. Chistyakov, I.A. and Tochilin, P.A., Construction of discontinuous piecewise quadratic value functions in a target control problem, *Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 259–273.
7. Polovinkin, E.S., *Mnogoznachniy analiz i differentialnie vklucheniya* (Set-valued Analysis and Differential Inclusions), Moscow: Fizmatlit, 2015.
8. Andersen, M.S., Dahl, J., Liu, Z., and Vandenberghe, L., Interior-point methods for large-scale cone programming, in *Optimization for Machine Learning*, Eds. S. Sra, S. Nowozin, S.J. Wright, Cambridge; London: The MIT Press, 2011, pp. 55–83.
9. Stellato, B., Banjac, G., Goulart, P., Bemporad, A., and Boyd, S., OSQP: an operator splitting solver for quadratic programs, *Math. Prog. Comp.*, 2020, vol. 12, pp. 637–672.
10. Skvortsov, A.V. and Mirza, N.S., *Algoritmi postroenia i analiza trianguliacii* (Algorithms of Construction and Analysis of Triangulations), Tomsk: Tomsk Univ. Press, 2006.

УДК 517.977

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И НАЗНАЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ЕДИНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ ПО НЕПОЛНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© В. Е. Хартовский

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь

e-mail: hartovskij@grsu.by, hartows@mail.ru

Поступила в редакцию 08.12.2023 г., после доработки 08.12.2023 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа доказан критерий существования и предложен метод проектирования регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу, обеспечивающего замкнутой системе одновременно финитную стабилизацию (решение задачи полной 0-управляемости) и конечный наперёд заданный спектр, что позволяет сделать замкнутую систему экспоненциально устойчивой. Конструктивность представленных результатов проиллюстрирована примером.

Ключевые слова: линейная система нейтрального типа, регулятор, наблюдаемый выходной сигнал, финитная стабилизация, конечный спектр.

DOI: 10.31857/S0374064124050093, EDN: LBELGX

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от конечномерных линейных автономных систем, стабилизируемость которых заключается в управлении всеми её неустойчивыми собственными движениями, для бесконечномерных систем вопрос стабилизируемости достаточно сложен [1–7] и на сегодняшний день до конца не изучен. Один из возможных подходов к его решению заключается в вычислении неустойчивых собственных значений спектра с последующей их заменой подходящим спектральным набором. Однако даже поиск таких значений является нетривиальной задачей. Кроме того, в случае некоторых бесконечномерных объектов, например систем нейтрального типа, из асимптотической устойчивости не следует экспоненциальная устойчивость, что обуславливает необходимость привлечения других методов. Поэтому более универсальным является подход, основанный на решении задачи назначения замкнутой системе конечного спектра [8–10], как правило состоящего из чисел с отрицательными действительными частями. Более слабый вариант этой задачи заключается в приведении системы к конечному, в общем случае не произвольному, спектру. Решение такой задачи для систем нейтрального типа [11] упрощает с вычислительной точки зрения исследование задачи стабилизации. Кроме того, при наличии конечного спектра отрицательность действительных частей всех собственных значений влечёт не только асимптотическую, но и экспоненциальную устойчивость.

В случае системы, функционирующей в различных режимах, возникает задача одновременной стабилизации семейства объектов с запаздыванием при помощи единого регулятора.

В статье [12] даётся общий подход выбора требуемого регулятора в виде некоторой линейной комбинации регуляторов, построенных для отдельных систем.

Множество собственных значений линейной системы с последствием в общем случае бесконечно, поэтому вопрос управления всеми собственными значениями такой системы естественно рассматривать как управление коэффициентами характеристического квазиполинома — задача модального управления [13–16]. Другое направление исследований, связанное с проблемой стабилизации, заключается [10, 17–19] в решении задачи построения регулятора с обратной связью, успокаивающего решение исходной системы, т.е. обеспечивающего финитную стабилизацию [20, 21] (другими словами, решение задачи полной 0-управляемости регулятором с обратной связью). Одна из оригинальных идей решения задачи финитной стабилизации заключается [17] в замыкании системы обратной связью так, чтобы замкнутая система стала системой с конечным спектром, точно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам вектора-решения исходной системы. Системное изложение результатов [11, 14, 18, 19] и более полное обсуждение затронутых здесь вопросов содержится в монографии [22].

В настоящей статье для линейных автономных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями предложено решение задачи синтеза регулятора полной стабилизации по выходу, под которым понимается регулятор в виде линейной обратной связи по измерениям наблюдаемого выходного сигнала, одновременно обеспечивающий финитную стабилизацию и приведение замкнутой системы к конечному наперёд заданному спектру. Последнее позволяет обеспечить замкнутой системе не только асимптотическую, но и экспоненциальную устойчивость. Подобная задача в случае системы запаздывающего типа со скалярными входным и выходным сигналами изучена в [21]. В настоящей статье, в отличие от [21], регулятор полной стабилизации по выходу представляет собой модификацию регуляторов из [18, 19], которая заключается в том, что во внутренний контур нового регулятора дополнительно встраивается система оценки решения в виде финитного наблюдателя [23] (т.е. наблюдателя, ошибка оценки решения которого является финитной функцией). Параметры регулятора выбираются таким образом, чтобы замкнутая система стала точно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам решения исходной (разомкнутой) системы и компонентам оценки этого решения контуром финитного наблюдателя.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исследуемый объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^m D_i \dot{x}(t-ih) &= \sum_{i=0}^m \left(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih) \right), \quad t > 0, \\ y(t) &= \sum_{i=0}^m C_i x(t-ih), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где x — решение этой системы, u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал (выход), $h > 0$ — постоянная; $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $n, r \in \mathbb{N}$.

Обозначим: $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ — единичная матрица, λ_h — оператор сдвига, определяемый для заданного числа $h > 0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$, $k \in \mathbb{N}$ (для произвольной функции f). Введём полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i C_i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i B_i$$

и перепишем исходный объект управления в операторном виде

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

В дальнейшем будем использовать исходную систему в виде (1), (2).

Решение уравнения (1) однозначно задаётся начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0]. \quad (3)$$

Считаем, что начальная функция φ в (3) принадлежит классу непрерывных функций, имеющих кусочно-непрерывную производную, и является неизвестной. Управление u выбирается из класса кусочно-непрерывных функций.

Цель настоящей работы — построить регулятор с линейной обратной связью по наблюдаемому выходу (2) в виде

$$u(t) = \mathcal{U}_1(y, x_1), \quad \dot{x}_1(t) = \mathcal{U}_2(y, x_1), \quad (4)$$

который обеспечит выполнение следующих условий: а) какова бы ни была начальная функция φ в (3), существует число $t_1 > 0$ такое, что компонента x вектора-решения $\text{col}[x, x_1]$ замкнутой системы (1), (4) равна нулю, начиная с момента времени t_1 : $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$; б) замкнутая система является асимптотически устойчивой линейной автономной системой нейтрального типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями и с наперёд заданным конечным спектром. Здесь x_1 — вспомогательная переменная, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ — некоторые операторы, обеспечивающие условие б), подробное описание $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ не приводится, поскольку ниже они будут выписаны в явном виде.

Регулятор, обеспечивающий реализацию условий а), б), будем называть *регулятором полной стабилизации по выходу*.

Таким образом, регулятор полной стабилизации по выходу обеспечивает одновременное решение трёх задач: задачу финитной стабилизации, задачу приведения к конечному спектру, задачу стабилизации. При этом, в отличие от [18; 19; 22, с. 358], решение указанных задач осуществляется по неполным измерениям, которые определяются выходом y при неизвестной начальной функции φ .

Обозначим $W(p, \lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$. Пусть для системы (1) существует регулятор полной стабилизации по выходу, а замкнутая этим регулятором система является системой нейтрального типа. В этом случае система (1) является полностью 0-управляемой. Кроме того, возможность обеспечить любой наперёд заданный конечный спектр предполагает наличие у системы (1) свойства модальной управляемости. Критерии полной 0-управляемости [24] и модальной управляемости [14] совпадают по форме и представляют собой одновременное выполнение следующих условий:

$$\text{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad (5)$$

$$\text{rank} [I_n - D(\lambda), B(\lambda)] = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Замечание 1. Требование того, чтобы замкнутая система (1), (2), (4) была системой нейтрального типа, отмеченное в условии б), является существенным. Действительно, обеспечить для любой начальной функции φ из (3) тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, регулятором в виде обратной связи, зависящей от $x(t)$, возможно [18; 19; 22, с. 358] и для более широкого класса систем нейтрального типа (1) (класс 0-управляемых систем [22, с. 358]). Кроме того, в [14;

22, с. 321] предложен подход, основанный на свойстве слабой модальной управляемости и позволяющий управлять коэффициентами характеристического квазиполинома в случае отсутствия у исходной системы (1) свойства модальной управляемости. Однако в обоих случаях замкнутая система будет дифференциально-алгебраической системой с запаздыванием.

Возможность восстановить “отрезок” решения $x(t)$, $t \in [t_0 - mh, t_0]$, при помощи непрерывного оператора, определённого на множестве всех выходов (2) системы (1), называют [22, с. 182] *финальной наблюдаемостью*. Критерий финальной наблюдаемости системы (1) представляет собой одновременное выполнение двух условий [22, с. 204; 24]:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad (7)$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Условие (7) необходимо и достаточно для взаимно-однозначного соответствия между множеством “отрезков” $x(t)$, $t \in [t_0 - mh, t_0]$, решений системы (1) и множеством выходов $y(t)$, $[0, t_0]$ (при достаточно большом $t_0 > 0$). Условие (8) необходимо для того, чтобы такое взаимно-однозначное соответствие было непрерывным, в частности, не содержало операцию дифференцирования выхода. При проектировании регулятора полной стабилизации по выходу будет доказано (теорема 2), что для его существования условия полной 0-управляемости (5), (6) и финальной наблюдаемости (7), (8) являются необходимыми.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приведём ряд обозначений, которые будем использовать ниже для описания распределённых запаздываний в регуляторе полной стабилизации по выходу.

Введём [22, с. 252] множество $\mathbf{J}^{r \times n}$, состоящее из операторов $\mathfrak{J}$, характеризующихся следующим условием: если $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r \times n}$, то $\mathfrak{J}: \mathbf{PC}^{(1)}(\Delta_{\mathfrak{J}}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^r$ и $\mathfrak{J}$ имеет вид

$$\mathfrak{J}[\varphi] = J_0(\lambda_h)\varphi(0) + J_1(\lambda_h)\dot{\varphi}(0) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)\varphi(-kh-s) ds. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{PC}^{(1)}(\Delta, \mathbb{R}^n)$ — множество кусочно-непрерывных на отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функций, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную; $J_0(\lambda), J_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times n}[\lambda]$; $\mathbb{R}^{r \times n}[\lambda]$ — множество матриц размерности $r \times n$, элементами которых являются полиномы переменной λ ; $\tilde{m} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — любое число;

$$J_0^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\tilde{m}_k} e^{\alpha_{k\rho}s} \left(J_1^{(k\rho)}(s) \cos(\beta_{k\rho}s) + J_2^{(k\rho)}(s) \sin(\beta_{k\rho}s) \right),$$

где $\alpha_{k\rho}, \beta_{k\rho} \in \mathbb{R}$, $\tilde{m}_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — произвольные числа, $J_j^{(k\rho)}(s) \in \mathbb{R}^{r \times n}[s]$, $j = 1, 2$. Число $h_{\mathfrak{J}}$ и отрезок $\Delta_{\mathfrak{J}}$ зависят от оператора $\mathfrak{J}$ и определяются формулами $h_{\mathfrak{J}} = h \max \{ \deg J_0(\lambda), \tilde{m} + 1 \}$, $\Delta_{\mathfrak{J}} = [-h_{\mathfrak{J}}, 0]$. Для любого оператора $\mathfrak{J}$ и кусочно-непрерывной функции $x(t)$, $t \geq -h_{\mathfrak{J}}$, будем обозначать: $x_t = x_t(\tau) = x(t + \tau)$, $\tau \in \Delta_{\mathfrak{J}}$, $t \geq 0$ (для переменных с нижним индексом вида x_1 будем использовать запись $x_{1,t}$),

$$\mathfrak{J}[x_t] = J_0(\lambda_h)x(t) + J_1(\lambda_h)\dot{x}(t) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)x(t - kh - s) ds.$$

Оператору (9) поставим в соответствие матрицу

$$J(p, e^{-ph}) = J_0(e^{-ph}) + pJ_1(e^{-ph}) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^h J_0^{(k)}(s) e^{-p(kh+s)} ds. \quad (10)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера для записи комплексных чисел в тригонометрической форме, вычислим интегралы в (10), после этого положим $\lambda = e^{-ph}$. В итоге соотношение (10) примет вид

$$J(p, \lambda) = J_0(\lambda) + pJ_1(\lambda) + J_2(p, \lambda). \quad (11)$$

Элементами матрицы $J_2(p, \lambda)$ (если она не нулевая) являются правильные относительно переменной p дробно-рациональные функции вида $b(p, \lambda)/c(p)$, где $b(p, \lambda)$ и $c(p)$ — полиномы с комплексными коэффициентами, причём $c(p) \not\equiv \text{const}$.

Определим отображение σ , которое каждому оператору $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r \times n}$ вида (9) ставит в соответствие матрицу $J(p, \lambda)$ вида (11), каковы бы ни были $r, n \in \mathbb{N}$. Действие отображения σ будем записывать как $\mathfrak{J} \mapsto J(p, \lambda)$.

Множество всевозможных матриц (11), которые представимы в виде (10), обозначим как $\mathcal{C}^{r \times n}(p, \lambda)$ ($\mathcal{C}^{1 \times 1}(p, \lambda) = \mathcal{C}(p, \lambda)$). Следующее утверждение (см. следствие 1 в [10] или теорему 5.2 в [22, с. 259]) является критерием принадлежности дробно-рациональной функции множеству $\mathcal{C}(p, \lambda)$.

Лемма. Рассмотрим дробно-рациональную функцию $a(p, \lambda) = a_1(p, \lambda)/a_2(p)$, где $a_2(p) = \prod_{i=1}^{\widehat{l}} (p - p_i)^{l_i}$, $p_i \in \mathbb{C}$ ($p_i \neq p_j$ при $i \neq j$), $\widehat{l}, l_i \in \mathbb{N}$. Функция $a(p, \lambda)$ принадлежит множеству $\mathcal{C}(p, \lambda)$ тогда и только тогда, когда $\deg_p a_1(p, \lambda) \leq \deg_p a_2(p)$ (символ $\deg_p$ обозначает степень полинома (матричного полинома), зависящего от переменной p), и выполняются равенства $d^j a_1(p, e^{-ph}) / (dp^j)|_{p=p_i} = 0$, $j = \overline{0, l_i - 1}$, $i = \overline{1, \widehat{l}}$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для построения регулятора полной стабилизации по выходу понадобится финитный наблюдатель, позволяющий за конечное время получить точную оценку решения системы (1), (2), т.е. наблюдатель, ошибка оценивания которого — финитная функция. В работе [23] для систем нейтрального типа предложен метод построения финитного наблюдателя в виде выхода системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями и с конечным наперёд заданным спектром. Однако для решения рассматриваемой нами задачи в конструкцию наблюдателя из [23] необходимо внести некоторые изменения. Остановимся на этом подробнее.

Будем считать, что выполняются условия (7), (8). В силу условия (8) найдутся [14, 19] матрицы $\tilde{L}_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times l}[\lambda]$ и $\tilde{L}_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times l}[\lambda]$ такие, что справедливо тождество

$$|I_{n+l} - D_{\tilde{L}}(\lambda)| \equiv 1, \quad (12)$$

где

$$D_{\tilde{L}}(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & \lambda \tilde{L}_1(\lambda) \\ C(\lambda) & \lambda \tilde{L}_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть $\Pi(\lambda)$ — матрица, присоединённая к матрице $I_{n+l} - D_{\tilde{L}}(\lambda)$, имеющая вид

$$\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(\lambda) & \Pi_{12}(\lambda) \\ \Pi_{21}(\lambda) & \Pi_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где блоки $\Pi_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\lambda]$, $\Pi_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times l}[\lambda]$, $\Pi_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times n}[\lambda]$, $\Pi_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times l}[\lambda]$. В силу тождества (12) получаем, что $\Pi(\lambda) = (I_{n+l} - D_{\tilde{L}}(\lambda))^{-1}$. Введём новую функцию $\tilde{x}(t)$ по формуле

$$\tilde{x}(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t), \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Пусть $\chi(t)$ ($\chi \in \mathbb{R}^l$, $t \in \mathbb{R}$) — произвольная функция. Действуя на очевидное равенство

$$\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda_h) & -\lambda_h \tilde{L}_1(\lambda_h) \\ -C(\lambda_h) & I_r - \lambda_h \tilde{L}_2(\lambda_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \chi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ -y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_h \tilde{L}_1(\lambda_h) \chi(t) \\ (I_r - \lambda_h \tilde{L}_2(\lambda_h)) \chi(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0,$$

слева оператором $\Pi(\lambda_h)$, приходим к соотношению

$$x(t) = \Pi_{11}(\lambda_h) \tilde{x}(t) - \Pi_{12}(\lambda_h) y(t), \quad t \geq \gamma_2 h, \quad (14)$$

где $\gamma_2 = \max\{\nu_{1j}\}$, $j = 1, 2$, $\nu_{ij} = \deg_{\lambda} \Pi_{ij}(\lambda)$. С учётом формул (13), (14) систему (1), (2) перепишем в виде

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(\lambda_h) \tilde{x}(t) + B(\lambda_h) u(t) - A(\lambda_h) \Pi_{12}(\lambda_h) y(t), \quad t > \gamma_3 h, \quad (15)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}(\lambda_h) \tilde{x}(t), \quad t \geq \gamma_3 h, \quad (16)$$

где $\tilde{A}(\lambda) = A(\lambda) \Pi_{11}(\lambda)$,

$$\tilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda) \Pi_{11}(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda)) \Pi_{11}(\lambda) - I_n \end{bmatrix},$$

выходной сигнал $\tilde{y}(t)$, $t \geq \gamma_3 h$, является известной функцией и определяется формулой

$$\tilde{y}(t) = C_y(\lambda_h) y(t), \quad C_y(\lambda) = \begin{bmatrix} I_l + C(\lambda) \Pi_{12}(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda)) \Pi_{12}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad t \geq \gamma_3 h, \quad \gamma_3 = m + \gamma_2.$$

Уравнение (15) является неоднородным линейным автономным дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями и неоднородной частью $B(\lambda_h)u - A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y$. При этом в силу соотношения (7) для системы (15), (16) выполняется условие [23]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \tilde{A}(e^{-ph}) \\ \tilde{C}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (17)$$

Зафиксируем произвольный номер $i_0 \in \{1, \dots, n+l\}$. Так как выполняется условие (17), то для любого фиксированного i_0 найдётся [8] матрица $V_{i_0}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times (n+l)}[\lambda]$ такая, что

$$\text{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \tilde{A}(e^{-ph}) - V_{i_0}(e^{-ph}) \tilde{C}(e^{-ph}) \\ \tilde{c}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

где $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$ — строка матрицы $\tilde{C}(\lambda)$ с номером i_0 . Положим

$$\tilde{A}_V(\lambda) = \tilde{A}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda) \tilde{C}(\lambda), \quad K_0(\lambda) = -A(\lambda) \Pi_{12}(\lambda_h) - V_{i_0}(\lambda) C_y(\lambda). \quad (19)$$

После этого, используя уравнения (15), (16), заменим систему (1), (2) системой запаздывающего типа со скалярным известным выходом

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}_V(\lambda_h)\tilde{x}(t) + B(\lambda_h)u(t) + K_0(\lambda_h)y(t), \quad t > \tilde{t}_1, \\ \tilde{y}_{i_0}(t) &= \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t \geq \tilde{t}_1,\end{aligned}\quad (20)$$

где $\tilde{y}_{i_0}(t)$ — компонента вектора $\tilde{y}$ с номером i_0 , $\tilde{t}_1 = (\nu_0 + \gamma_3)h$, $\nu_0 = \deg_\lambda V_{i_0}(\lambda)$.

Зададим произвольный приведённый полином $d(p)$, $\deg_p d(p) = n + 3$, имеющий по крайней мере один действительный корень. Этот полином будет характеристическим полиномом системы, определяющей финитный наблюдатель, поэтому его следует выбрать асимптотически устойчивым. В силу условия (18) для системы (20) существует финитный наблюдатель в виде системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями

$$\dot{z}(t) = \Omega[z_t] + K(\lambda_h)y(t) + \overline{B}(\lambda_h)u(t), \quad t > \tilde{t}_1, \quad (21)$$

с выходом

$$v_z(t) = [I_n, 0_{n \times 3}]z(t), \quad t \geq \tilde{t}_1. \quad (22)$$

Здесь $z = \text{col}[z_1, z_2]$, $z_1 \in \mathbb{R}^n$, $z_2 \in \mathbb{R}^3$, $\Omega \in \mathbf{J}^{(n+3) \times (n+3)}$, $0_{n \times m}$ — нулевая $n \times m$ -матрица,

$$\overline{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} B(\lambda) \\ 0_{3 \times r} \end{bmatrix}; \quad (23)$$

матрица $Q(p, \lambda)$, где $\Omega \xrightarrow{\sigma} Q(p, \lambda)$, определяется по схеме построения матрицы, задающей финитный наблюдатель для однородной системы запаздывающего типа, предложенной в работе [23], причём элементы матрицы $Q(p, \lambda)$ таковы, что

$$|pI_{n+3} - Q(p, \lambda)| = d(p); \quad (24)$$

матрица $K(\lambda)$ определяется из равенства

$$K(\lambda_h)y(t) = \text{col}[K_0(\lambda_h), 0_{3 \times l}]y(t) - e_{n+1}\tilde{y}_{i_0}(t) = (\text{col}[K_0(\lambda_h), 0_{3 \times l}] - e_{n+1}\tilde{e}'_{i_0}C_y(\lambda_h))y(t), \quad (25)$$

где e_i , $\tilde{e}_i$ — столбцы соответственно матриц I_{n+3} , I_{n+l} с номером i (символ “ $'$ ” обозначает операцию транспонирования). Приведём матрицу $Q(p, \lambda)$ в виде, который понадобится далее:

$$Q(p, \lambda) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{a}_{11}^V(\lambda) & \dots & \tilde{a}_{1n}^V(\lambda) & g_{11}(p, \lambda) & g_{12}(p, \lambda) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1}^V(\lambda) & \dots & \tilde{a}_{nn}^V(\lambda) & g_{n1}(p, \lambda) & g_{n2}(p, \lambda) & 0 \\ \hline \tilde{c}_{i_0}^1(\lambda) & \dots & \tilde{c}_{i_0}^n(\lambda) & g_{n+11}(p, \lambda) & g_{n+12}(p, \lambda) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_1(\lambda) & 0 & b_2(\lambda) \\ 0 & \dots & 0 & b_3(\lambda) & 0 & b_4(\lambda) \end{array} \right], \quad (26)$$

где $\tilde{a}_{ij}^V(\lambda)$ — элементы матрицы $\tilde{A}_V(\lambda) = [\tilde{a}_{ij}^V(\lambda)]_{n \times n}$; $\tilde{c}_{i_0}^j(\lambda)$ — элементы вектора $\tilde{c}_{i_0}(\lambda) = [\tilde{c}_{i_0}^1(\lambda), \dots, \tilde{c}_{i_0}^n(\lambda)]$; $g_{ij}(p, \lambda) \in \mathcal{C}(p, \lambda)$; $b_j(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$. Функции $g_{ij}(p, \lambda)$ и полиномы $b_j(\lambda)$ определяются согласно статье [23].

В качестве начальной функции для системы (21) берётся любая непрерывная на отрезке $[\tilde{t}_1 - h_\Omega, \tilde{t}_1]$ функция.

Оценка решения $\tilde{x}$ системы (20) наблюдателем (21), (22) определяется выходом v_z , который, начиная с некоторого момента времени, равен решению $\tilde{x}$ независимо от начальных функций систем (20) и (21).

Поясним идею выбора элементов матрицы $Q(p, \lambda)$. Обозначим через $\zeta = v_z - \tilde{x} = z_1 - \tilde{x}$ ошибку оценки, $\tilde{\zeta} = \text{col}[\zeta, z_2]$. Тогда из (26) видно, что вектор-функция $\tilde{\zeta}(t)$ определяется линейной автономной системой запаздывающего типа

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = \mathfrak{Q}[\tilde{\zeta}_t], \quad t > \tilde{t}_1. \quad (27)$$

Элементы матрицы $Q(p, \lambda)$ выбираются так, чтобы система (27) была точно вырожденной в направлениях, отвечающих первым n столбцам матрицы I_{n+3} , т.е. в направлениях e_i , $i = \overline{1, n}$. Согласно определению точечной вырожденности это означает [25], что найдётся момент времени $\tilde{t}_2$ такой, что какова бы ни была начальная функция, определяющая решение системы (27), будут выполняться тождества $e'_i \tilde{\zeta}(t) \equiv 0$, $t \geq \tilde{t}_2$, $i = \overline{1, n}$. Это, в свою очередь, значит, что

$$v_z(t) = \tilde{x}(t), \quad t \geq \tilde{t}_2. \quad (28)$$

Замечание 2. Если для построения матрицы $Q(p, \lambda)$ использовать подход [23], то у системы (27) будут вырождаться все компоненты вектора решения $\text{col}[\zeta, z_2]$, за исключением одной компоненты вектора z_2 (будем считать, что это последняя компонента), т.е. будут иметь место тождества $e'_i \tilde{\zeta}(t) \equiv 0$, $t \geq \tilde{t}_2$, $i = \overline{1, n+2}$.

Теперь сформируем оценку решения исходной системы (1), (2). Рассмотрим соотношение (14). Положим

$$v(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)[I_n, 0_{n \times 3}]z(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geq \tilde{t}_1. \quad (29)$$

В силу равенства (28) и формулы (14) получим, что

$$x(t) = v(t), \quad t \geq \tilde{t}_3, \quad \tilde{t}_3 = \tilde{t}_2 + \nu_{11}h. \quad (30)$$

Это завершает построение финитного наблюдателя, определяемого уравнениями (21), (29).

По аналогии с [23] несложно показать, что если существует финитный наблюдатель (21), (29), то для системы (1), (2) выполняются условия (7), (8).

Проведённые рассуждения обобщает

Теорема 1. Условия (7), (8) являются необходимыми и достаточными для существования финитного наблюдателя (21), (29) системы (1), (2), для которого имеет место условие (24).

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Регулятор полной стабилизации по выходу будем строить в виде

$$u(t) = \mathfrak{R}_{01}[x_{1,t}] + \mathfrak{R}_{02}[x_{2,t}] + \mathfrak{R}_{00}[y_t], \quad t > t_0, \quad (31)$$

$$\dot{x}_1(t) = \mathfrak{R}_{11}[x_{1,t}] + \mathfrak{R}_{12}[x_{2,t}] + \mathfrak{R}_{10}[y_t], \quad t > t_0, \quad (32)$$

$$\dot{x}_2(t) = \mathfrak{R}_{22}[x_{2,t}] + \overline{B}(\lambda_h)(\mathfrak{R}_{01}[x_{1,t}] + \mathfrak{R}_{02}[x_{2,t}] + \mathfrak{R}_{00}[y_t]) + S(\lambda_h)y(t), \quad t > t_0, \quad (33)$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, — вспомогательные переменные, $\mathfrak{R}_{0j} \in \mathbf{J}^{r \times n_j}$, $\mathfrak{R}_{1j} \in \mathbf{J}^{n_1 \times n_j}$, $j = 1, 2$, $\mathfrak{R}_{00} \in \mathbf{J}^{r \times l}$, $\mathfrak{R}_{10} \in \mathbf{J}^{n_1 \times l}$, $\mathfrak{R}_{22} \in \mathbf{J}^{n_2 \times n_2}$, $S(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2 \times l}[\lambda]$, матрица $\overline{B}(\lambda)$ определена формулой (23), $t_0 \geq \alpha h$, $\alpha = \max\{m + h^{-1}h_{\mathfrak{R}_{00}}, h^{-1}h_{\mathfrak{R}_{10}}, \deg_{\lambda} S(\lambda)\}$; считаем $u(t) \equiv 0$, $t < t_0$.

Замечание 3. При замыкании системы (1), (2) регулятором (31)–(33) начальное условие выбирается так, чтобы замкнутая система (1), (2), (31)–(33) имела единственное решение. Для определённости предполагаем, что функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \leq t_0$, являются произвольными непрерывными функциями с кусочно-непрерывными производными.

Пусть $\mathfrak{R}_{ij} \xrightarrow{\sigma} R_{ij}(p, \lambda)$. Выпишем характеристическую матрицу $W_1(p, e^{-ph})$ системы (1), (2), замкнутой регулятором полной стабилизации по выходу (31)–(33) ($\lambda = e^{-ph}$):

$$W_1(p, \lambda) = \begin{bmatrix} W(p, \lambda) - B(\lambda)R_{00}(p, \lambda)C(\lambda) & -B(\lambda)R_{01}(p, \lambda) & -B(\lambda)R_{02}(p, \lambda) \\ -R_{10}(p, \lambda)C(\lambda) & pI_{n_1} - R_{11}(p, \lambda) & -R_{12}(p, \lambda) \\ -\left(S(\lambda) + \bar{B}(\lambda)R_{00}(p, \lambda)\right)C(\lambda) & -\bar{B}(\lambda)R_{01}(p, \lambda) & pI_{n_2} - R_{22}(p, \lambda) - \bar{B}(\lambda)R_{02}(p, \lambda) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Теорема 2. Условия (5)–(8) необходимы и достаточны, чтобы для системы (1), (2) нашлись числа $\bar{n}_0 \in \mathbb{N}$, $t_1 > 0$ такие, что для любого заданного приведённого полинома $w(p)$, $\deg_p w(p) = \bar{n}$, $\bar{n} \geq \bar{n}_0$, имеющего два действительных корня (возможно равных между собой), существует регулятор полной стабилизации по выходу (31)–(33), обеспечивающий выполнение следующих условий:

1) каково бы ни было начальное условие системы (1), (2), (31)–(33), всегда выполняется тождество

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1; \quad (35)$$

2) система (1), (2), (31)–(33) является системой нейтрального типа с характеристической матрицей $W_1(p, \lambda)$ и $|W_1(p, \lambda)| = w(p)$.

Доказательство. Необходимость. Необходимость условий (5), (6) очевидна. Докажем необходимость условий (7), (8). Введём вспомогательную систему

$$(I_n - \Phi_0(\lambda_h))\dot{\xi}(t) = \Phi(\lambda_h)\xi(t) + \Psi(\lambda_h)\bar{u}(t), \quad t > 0, \quad (36)$$

где $\Phi_0(\lambda_h) = (D(\lambda))'$, $\Phi(\lambda_h) = (A(\lambda))'$, $\Psi(\lambda) = (C(\lambda))'$, $\bar{u}$ — кусочно-непрерывное управление. Начальные условия для системы (36) выбираются аналогично начальным условиям (3).

Зададим произвольный полином $w(p)$ (из условия теоремы). Предположим, что для системы (1), (2) существует регулятор полной стабилизации по выходу, имеющий вид (31)–(33), который для заданного полинома $w(p)$ обеспечивает выполнение условий 1), 2). Используя параметры этого регулятора, определим для системы (36) регулятор следующего вида:

$$\bar{u}(t) = \mathfrak{H}_{01}[\xi_t] + \mathfrak{H}_{02}[\xi_{1,t}], \quad \dot{\xi}_1(t) = \mathfrak{H}_{11}[\xi_t] + \mathfrak{H}_{12}[\xi_{1,t}]. \quad (37)$$

Здесь $\mathfrak{H}_{01} \in \mathbf{J}^{l \times n}$, $\mathfrak{H}_{02} \in \mathbf{J}^{l \times (n_1 + n_2)}$, $\mathfrak{H}_{11} \in \mathbf{J}^{(n_1 + n_2) \times n}$, $\mathfrak{H}_{12} \in \mathbf{J}^{(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)}$ и $\mathfrak{H}_{ij} \xrightarrow{\sigma} H_{ij}(p, \lambda)$, где $H_{01}(p, \lambda) = (B(\lambda)R_{00}(p, \lambda))'$, $H_{02}(p, \lambda) = \left[(R_{10}(p, \lambda))', (S(\lambda) + \bar{B}(\lambda)R_{00}(p, \lambda))' \right]'$,

$$H_{11}(p, \lambda) = \left[(B(\lambda)R_{01}(p, \lambda))', (B(\lambda)R_{02}(p, \lambda))' \right]', \quad H_{12}(p, \lambda) = \left[(R_{11}(p, \lambda))', (\bar{B}(\lambda)R_{01}(p, \lambda))' \right]', \\ \left[(R_{12}(p, \lambda))', (R_{22}(p, \lambda) + \bar{B}(\lambda)R_{02}(p, \lambda))' \right]'$$

Обозначим через $W_\xi(p, e^{-ph})$ характеристическую матрицу системы (36), (37). Очевидно, что $W_\xi(p, \lambda) = (W_1(p, \lambda))'$, поэтому $|W_\xi(p, e^{-ph})| = w(p)$. Таким образом, получили, что для любого наперёд заданного полинома $w(p)$ существует регулятор (37) такой, что замкнутая система (36), (37) имеет нейтральный тип, а её характеристический полином равен $w(p)$.

Это означает [15; 22, с. 321], что система (36) является модально управляемой, поэтому для неё выполняются условия критерия модальной управляемости

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}[p(I_n - \Phi_0(e^{-ph})) - \Phi(e^{-ph}), \Psi(e^{-ph})] &= n, \quad p \in \mathbb{C}; \\ \operatorname{rank}[I_n - \Phi_0(\lambda), \Psi(\lambda)] &= n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (38)$$

совпадающие с условиями (7), (8). Необходимость доказана.

Замечание 4. Задача приведения системы к наперёд заданному конечному спектру в литературе [8–10] называется *задачей назначения конечного спектра*. Из доказательств критерия модальной управляемости в работах [15; 22, с. 321] следует, что задача модальной управляемости разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача назначения конечного спектра. Этот факт используется при формулировке условий (38).

Достаточность. Положим $\bar{n}_0 = 2n + r + 4$ и зададим произвольный приведённый полином $w(p)$, имеющий два действительных корня (или один двукратный действительный корень). Представим полином $w(p)$ в виде $w(p) = w_1(p)w_2(p)$, где каждый из приведённых полиномов $w_1(p)$ и $w_2(p)$ имеет по крайней мере один действительный корень, $\deg_p w_2(p) = n + 3$, $\deg_p w_1(p) = \bar{n} - n - 3$, $\bar{n} \geq \bar{n}_0$. Доказательство достаточности условий теоремы проведём в два этапа: построим регулятор (31)–(33) и докажем, что он обеспечивает выполнение условий 1) и 2) теоремы.

1. Зададим любую непрерывную функцию φ в (3), имеющую кусочно-непрерывную производную. Поскольку выполняются условия (5), (6), то [19; 22, с. 360] для системы (1) и любого приведённого полинома $w_1(p)$, указанного выше, существует регулятор с обратной связью по состоянию

$$u(t) = \mathfrak{L}_{00}[x_t] + \mathfrak{L}_{01}[\bar{x}_{1,t}], \quad \dot{\bar{x}}_1(t) = \mathfrak{L}_{10}[x_t] + \mathfrak{L}_{11}[\bar{x}_{1,t}], \quad t > 0, \quad (39)$$

где $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ — вспомогательная переменная, $\mathfrak{L}_{00} \in \mathbf{J}^{r \times n}$, $\mathfrak{L}_{01} \in \mathbf{J}^{r \times n_1}$, $\mathfrak{L}_{10} \in \mathbf{J}^{n_1 \times n}$, $\mathfrak{L}_{11} \in \mathbf{J}^{n_1 \times n_1}$, для которого выполняются следующие условия:

– найдётся число $\bar{t}_1 > 0$ такое, что каково бы ни было начальное условие системы (1), (39) выполняется тождество

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geq \bar{t}_1; \quad (40)$$

– система (1), (39) является линейной автономной системой нейтрального типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями и выполняется равенство

$$|W_2(p, \lambda)| = w_1(p). \quad (41)$$

Здесь $W_2(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (1), (39), имеющая вид (ниже используется обозначение $\mathfrak{L}_{ij} \xrightarrow{\sigma} L_{ij}(p, \lambda)$)

$$W_2(p, \lambda) = \begin{bmatrix} W(p, \lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda) & -B(\lambda)L_{01}(p, \lambda) \\ -L_{10}(p, \lambda) & pI_{n_1} - L_{11}(p, \lambda) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

В качестве начального условия для системы (1), (39) берутся любые непрерывные функции $x(t)$, $\bar{x}_1(t)$, $t < 0$, имеющие кусочно-непрерывные производные, причём для функции x выполняется соотношение (3).

Акцентируем внимание на идейной стороне построения регулятора (39). Параметры операторов $\mathfrak{L}_{ij}$ в (39) выбираются так, чтобы система, соответствующая характеристической матрице (42), была точечно вырожденной в направлениях $\bar{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\bar{e}_i$ — столбец матрицы I_{n+n_1} с номером i , $\bar{e}'_i \operatorname{col}[x, \bar{x}_1] \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 5. Если для построения регулятора (39) использовать подходы [19; 22, с. 358], то у системы (1), (39) будут вырождаться все компоненты её вектор-решения $\text{col}[x, \bar{x}_1]$, за исключением одной компоненты вектора $\bar{x}_1$ (считаем, что это последняя компонента), т.е. $\bar{e}'_i \text{col}[x, \bar{x}_1] \equiv 0$, $i = \bar{1}, n + n_1 - \bar{1}$.

Так как выполняются условия (7), (8), то согласно теореме 1 для системы (1), (2) при известном управлении $u(t)$ существует финитный наблюдатель. Считаем, что этот наблюдатель определяется формулами (21), (29) и имеет место равенство (24), в котором $d(p) = w_2(p)$ (далее будем использовать обозначения, определённые в формулах (21), (29)).

Подставим управление $u(t)$, определяемое первым соотношением в формулах (39), в уравнение (21) и перепишем полученную систему в виде

$$\dot{z}(t) = \mathfrak{L}[z_t] + K(\lambda_h)y(t) + \bar{B}(\lambda_h)(\mathfrak{L}_{00}[x_t] + \mathfrak{L}_{01}[\bar{x}_{1,t}]), \quad t > \tilde{t}_1. \quad (43)$$

Уравнение (43) зависит как от переменной z , так и от переменных x , $\bar{x}_1$, поэтому наблюдатель совместно с формулой (29) (т.е. системой, позволяющей получить оценку решения исходной системы) не определяют. Однако легко видеть, что в данном случае имеет место равенство (30). Заменим в соотношениях (39) и (43) функцию $x(t)$ функцией $v(t)$ при $t > \bar{t}_2$, где $\bar{t}_2 = \tilde{t}_1 + \gamma_4 h$, γ_4 — максимальная степень переменной λ в матрицах $B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)$ и $L_{10}(p, \lambda)$, и получим уравнения, описывающие регулятор (39) при $t > \bar{t}_2$ (при $t \in (0, \bar{t}_2]$ регулятор по-прежнему определяется уравнениями (39)):

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathfrak{L}_{00}[v_t] + \mathfrak{L}_{01}[\bar{x}_{1,t}], \quad \dot{\bar{x}}_1(t) = \mathfrak{L}_{10}[v_t] + \mathfrak{L}_{11}[\bar{x}_{1,t}], \quad t > \bar{t}_2, \\ \dot{z}(t) &= \mathfrak{L}[z_t] + K(\lambda_h)y(t) + \bar{B}(\lambda_h)(\mathfrak{L}_{00}[\theta_t] + \mathfrak{L}_{01}[\bar{x}_{1,t}]), \quad t > \tilde{t}_1, \\ v(t) &= \Pi_{11}(\lambda_h)[I_n, 0_{n \times 3}]z(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geq \tilde{t}_1. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь

$$\theta(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_3], \\ v(t), & t \geq \tilde{t}_3. \end{cases}$$

Заменив в первых двух соотношениях (44) при $t > \tilde{t}_3$ функцию $v(t)$ согласно формуле (29), а также поменяв переменные $\bar{x}_1$ и z на переменные x_1 и x_2 соответственно, получим уравнения, которые возьмём в качестве уравнений регулятора (31)–(33) при $t > t_0$. Для определённости выпишем матрицы $R_{ij}(p, \lambda)$ такого регулятора (напомним, что $\mathfrak{R}_{ij} \xrightarrow{\sigma} R_{ij}(p, \lambda)$):

$$\begin{aligned} R_{00}(p, \lambda) &= -L_{00}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda), \quad R_{01}(p, \lambda) = L_{01}(p, \lambda), \quad R_{02}(p, \lambda) = L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)[I_n, 0_{n \times 3}], \\ R_{10}(p, \lambda) &= -L_{10}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda), \quad R_{11}(p, \lambda) = L_{11}(p, \lambda), \quad R_{12}(p, \lambda) = L_{10}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)[I_n, 0_{n \times 3}], \\ R_{22}(p, \lambda) &= Q(p, \lambda), \quad S(\lambda) = K(\lambda). \end{aligned} \quad (45)$$

Регулятор (31)–(33) построен.

2. Докажем теперь, что регулятор (31)–(33) с матрицами (45) обеспечивает выполнение условий 1) и 2) теоремы для любого начального состояния, взятого согласно замечанию 3.

Представим переменную x_2 в соотношениях (31)–(33) как вектор, состоящий из двух векторных компонент: $x_2 = \text{col}[x_{21}, x_{22}]$, $x_{21} \in \mathbb{R}^n$, $x_{22} \in \mathbb{R}^3$, а матрицы $R_{i2}(p, \lambda)$, $i = \bar{1}, 2$, и $S(\lambda)$ в формулах (45) разобьём на блоки, отвечающие компонентам x_{21} , x_{22} , и запишем их подробно:

$$R_{02}(p, \lambda) = [L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda), 0_{r \times 3}], \quad R_{12}(p, \lambda) = [L_{10}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda), 0_{n_1 \times 3}],$$

$$R_{22}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)\tilde{C}(\lambda) & Q_{12}(p, \lambda) \\ Q_{21}(p, \lambda) & Q_{22}(p, \lambda) \end{bmatrix}, \quad S(\lambda) = \begin{bmatrix} K_0(\lambda) \\ -S_0(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Здесь вид блоков $Q_{12}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{n \times 3}[\lambda]$, $Q_{21}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{3 \times n}[\lambda]$, $Q_{22}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}[\lambda]$ соответствует разбиению на блоки матрицы $Q(p, \lambda)$ в формуле (26) (первый верхний блок матрицы (26) — это матрица $A_V(\lambda)$, описанная в (19)), $S_0(\lambda) = \text{col}[1, 0, 0]\tilde{e}'_{i_0}C_y(\lambda)$ (см. (25)).

Замечание 6. Ниже для доказательства теоремы необходимо будет выписать несколько матриц, разбитых на блоки, в обозначениях которых для компактности записей будем опускать аргументы. Например, записи типа B , $L_{00}\Pi_{11}$ и т.п. будут обозначать соответственно $B(\lambda)$, $L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)$ и т.п.

С учётом разбиения на блоки (46), определения матрицы $K_0(\lambda)$ по формуле (19) и вида матрицы $\bar{B}(\lambda)$ (см. (23)) перепишем характеристическую матрицу (34) в виде

$$W_1(p, \lambda) = \begin{bmatrix} W + BL_{00}\Pi_{12}C & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ L_{10}\Pi_{12}C & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ BL_{00}\Pi_{12}C + (A\Pi_{12} + V_{i_0}C_y)C & -BL_{01} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} - BL_{00}\Pi_{11} & -Q_{12} \\ S_0C & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Обратим внимание, что при записи матрицы (47) предполагали, что порядок переменных соответствует следованию компонент вектора $\text{col}[x, x_1, x_{21}, x_{22}]$.

В системе (1), (2), (31)–(33) введём новую переменную ε согласно формуле

$$x_{21}(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t) + \varepsilon(t), \quad t \geq t_0. \quad (48)$$

Напомним, что замена переменных в системе равносильна умножению справа характеристической матрицы этой системы на матрицу, определяющую соответствующую замену. Легко видеть, что замена переменных (48) определяется унимодулярной матрицей (квадратной невырожденной матрицей с постоянным определителем)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} = \Omega(\lambda_h) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ \varepsilon(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_1} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 3} \\ 0_{n_1 \times n} & I_{n_1} & 0_{n_1 \times n} & 0_{n_1 \times 3} \\ I_n - D(\lambda) & 0_{n \times n_1} & I_n & 0_{n \times 3} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & 0_{3 \times n} & I_3 \end{bmatrix}, \quad |\Omega(\lambda)| \equiv 1,$$

которая не меняет определитель характеристической матрицы: $|W_1(p, \lambda)| = |W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda)|$.

Для дальнейших преобразований матрицы $W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda)$ понадобятся некоторые соотношения. Предварительно заметим, что из определения матриц $\Pi_{ij}(\lambda)$ следует формула

$$\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) - \Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) = I_n. \quad (49)$$

В матрице (47) к блоку, стоящему на месте с номером (3,1), прибавим блок, стоящий на месте с номером (3,3), предварительно умноженный на матрицу $I_n - D(\lambda)$ справа. Используя формулу (49), выпишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + (A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)C_y(\lambda))C(\lambda) + \\ & + (pI_n - A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) - V_{i_0}(\lambda)\tilde{C}(\lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda))(I_n - D(\lambda)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + V_{i_0}(\lambda) \left[\begin{pmatrix} (I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda))C(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda))\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) \end{pmatrix} \right] + \\
&\quad + p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) - \\
&\quad - V_{i_0}(\lambda) \left[\begin{pmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) \\ ((I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n)(I_n - D(\lambda)) \end{pmatrix} \right] - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) = \\
&\quad = -B(\lambda)L_{00}(p, \lambda) + p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda) + \\
&\quad + V_{i_0}(\lambda) \left[\begin{pmatrix} C(\lambda) + C(\lambda)(\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) - \Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda))) \\ (I_n - D(\lambda))(\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) - \Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda))) + (I_n - D(\lambda)) \end{pmatrix} \right] = \\
&\quad = W(p, \lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda). \tag{50}
\end{aligned}$$

Затем в матрице (47) к первой строке блока, стоящего на месте с номером (4,1), прибавим первую строку блока, стоящего на месте с номером (4,3), умноженную на матрицу $I_n - D(\lambda)$ справа (обратим внимание, что оставшиеся две нижних строки указанных выше блоков являются нулевыми, это видно из (26) и вида матрицы $S_0(\lambda)$). На основе промежуточных рассуждений в равенствах (50) имеем соотношение

$$\begin{aligned}
&[1, 0, 0]S_0(\lambda)C(\lambda) - [1, 0, 0]Q_{21}(p, \lambda)(I_n - D(\lambda)) = \\
&= \tilde{e}'_{i_0} \left(\left[\begin{pmatrix} (I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda))C(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda))\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) \\ ((I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n)(I_n - D(\lambda)) \end{pmatrix} \right] \right) = 0. \tag{51}
\end{aligned}$$

Теперь, используя формулу (49) и соотношения (50), (51), выпишем матрицу

$$W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} W - BL_{00} & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ -L_{10} & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ W - BL_{00} & -BL_{01} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} - BL_{00}\Pi_{11} & -Q_{12} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix}. \tag{52}$$

В матрице (52) умножим первую строку блоков на -1 и прибавим к третьей, после чего полученной строкой заменим третью строку блоков. Матрицу, определяющую данное преобразование, обозначим Ω_1 . Очевидно, что $|\Omega_1| = 1$. В результате такого преобразования получаем

$$\begin{aligned}
\Omega_1 W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda) &= \begin{bmatrix} W - BL_{00} & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ -L_{10} & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n_1} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} & -Q_{12} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} W_2(p, \lambda) & \widetilde{W}(p, \lambda) \\ 0_{(n+1) \times (n+n_1)} & pI_{n+3} - Q(p, \lambda) \end{bmatrix}, \tag{53}
\end{aligned}$$

где блок $\widetilde{W}(p, \lambda)$ определяется очевидным образом. Из структуры матрицы (53) видно, что функция $\text{col}[\varepsilon, x_{21}]$ определяется системой с характеристической матрицей $I_{n+3} - Q(p, \lambda)$, т.е. системой вида (27), которая является точно вырожденной, поэтому $\varepsilon(t) \equiv 0$, $t \geq t_0 + \tilde{t}_2$. Значит, при $t \geq \tilde{t}_4$, $\tilde{t}_4 = t_0 + \tilde{t}_2 + \gamma_5 h$, где γ_5 — максимальная степень переменной λ в блоке $\widetilde{W}(p, \lambda)$, функция $\text{col}[x, x_1]$ определяется системой с характеристической матрицей (42),

которая является точно вырожденной. Поэтому при $t_1 = \bar{t}_1 + \bar{t}_4$, где $\bar{t}_1$ определено в (40), имеет место тождество (35).

Равенство $|W_1(p, \lambda)| = w(p)$ следует из вида матрицы $\Omega_1 W_1(p, \lambda) \Omega(\lambda)$ в (53) и равенств (41), (24) (напомним, что $d(p) = w_2(p)$). Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

Проиллюстрируем подход к построению регулятора полной стабилизации по выходу на примере системы (1), (2) с матрицами

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-2\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C(\lambda) = [1 + \lambda, 0], \quad h = \ln 2. \quad (54)$$

Выпишем для данной системы матрицу

$$W(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p(1-\lambda) - (2-2\lambda) & -1 \\ 0 & p \end{bmatrix}.$$

Несложная проверка показывает, что для системы (1), (2) с матрицами (54) условия (5)–(8) выполнены. Построение регулятора проведём в три этапа.

1. *Синтез регулятора с обратной связью (39)*. Способ построения регулятора (39) достаточно подробно описан в [19; 22, с. 358]. Однако в случае рассматриваемого примера выкладки можно существенно упростить и построить регулятор вида (39) с матрицами меньшего размера, чем предполагается в [19; 22, с. 358]. Схематично изложим процесс получения необходимого регулятора.

Выполним невырожденное преобразование переменных, в результате которого вектор B преобразуется в вектор $\hat{B} = \text{col}[0, 1]$. Такое преобразование можно определить, например, формулой

$$x = \hat{T}\hat{x}, \quad \hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\hat{x}$ — новая переменная. После этого в системе с характеристической матрицей $\hat{W}(p, e^{-ph})$, где $\hat{W}(p, \lambda) = \hat{T}^{-1}W(p, \lambda)\hat{T}$, введём новое управление $\hat{u}(t) = [1, -p_D \lambda_h + 3 - \lambda_h]\hat{x}(t) + u(t)$ ($p_D = d/dt$ — оператор дифференцирования). В результате получим систему с характеристической матрицей $\hat{W}_0(p, e^{-ph})$, где

$$\hat{W}_0(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p+1 & p\lambda+3-2\lambda \\ 0 & p \end{bmatrix},$$

и вектором $\hat{B}$ при управлении. Несложный анализ показывает, что такая система имеет характеристический квазиполином запаздывающего типа, поэтому [22, с. 229] при помощи подходящей замены можно перейти от системы нейтрального типа к системе запаздывающего типа. Введя переменную $\hat{x}$ согласно формуле

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x},$$

где $\bar{x}$ — новая переменная, приходим к системе запаздывающего типа с характеристической матрицей $\bar{W}(p, e^{-ph})$, где

$$\bar{W}(p, \lambda) = \hat{W}_0(p, \lambda) \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+1 & 3-3\lambda \\ 0 & p \end{bmatrix},$$

и вектором $\hat{B}$ при управлении.

Далее регулятор для полученной системы строим согласно работе [17], в которой изучена система второго порядка и предложены достаточно простые вычислительные процедуры для построения регулятора (39). При этом замкнутая система будет иметь третий порядок, в связи с чем желаемый полином $w_1(p)$ следует выбрать третьей степени (если применить подход работ [19; 22, с. 358], то в этом случае количество строк в матрицах регулятора будет на одну больше). Положим, например, $w_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$. После несложных вычислений согласно [17] и возвращения к переменной x получим регулятор (39) для системы (1), (2) с матрицами (54):

$$\begin{aligned} u(t) = & - \left[\frac{50}{9} - \frac{49}{72} \lambda_h^2 - \frac{11}{36} \lambda_h + p_D \lambda_h + \frac{1}{18} \lambda_h^3, \quad \frac{1}{18} \lambda_h^2 - \frac{2}{3} \lambda_h + \frac{25}{9} \right] x(t) - \\ & - \left[-\frac{1}{3} \lambda_h^3 + \frac{14}{3} \lambda_h^2 - \frac{56}{3} \lambda_h + \frac{64}{3} \right] x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = & - \left[-\frac{65}{576} \lambda_h - \frac{145}{288} + \frac{1}{144} \lambda_h^2, \quad \frac{\lambda_h}{144} - \frac{1}{9} \right] x(t) - \left[-\frac{1}{24} \lambda_h^2 + \frac{3}{4} \lambda_h - \frac{1}{3} \right] x_1(t). \end{aligned} \quad (55)$$

Замкнув регулятором (55) исходную систему, запишем полученную характеристическую матрицу $W_2(p, \lambda)$ (см. формулу (42)). Непосредственной проверкой убеждаемся, что $|W_2(p, \lambda)| = (p+1)(p+2)(p+3)$, а также выполняются условия теоремы 1 из [17]. Значит, у замкнутой системы вырождаются первые две компоненты. Это говорит о том, что регулятор (55) обеспечивает тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geq \bar{t}_1$, $\bar{t}_1 = 4h$.

2. *Синтез наблюдателя (21), (29).* Для системы (1), (2) с матрицами (54) строим формулу (14), которая в данном случае имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_h + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_h \\ 0 \end{bmatrix} y(t), \quad t \geq h.$$

На основании этой формулы исходная система преобразуется в систему (15):

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\lambda_h^2 - \lambda_h + 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} -\lambda_h^2 + \lambda_h \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad t > 2h, \quad (56)$$

с выходом (16), который запишем в виде

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} \lambda_h + \frac{1}{2} \lambda_h^2 \\ \frac{1}{2} \lambda_h - \frac{1}{2} \lambda_h^2 \end{bmatrix} y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_h^2 + \frac{3}{2} \lambda_h + 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \lambda_h^2 + \frac{1}{2} \lambda_h & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t), \quad t \geq 2h. \quad (57)$$

Несложные рассуждения показывают, что находить матрицу $V_{i_0}(\lambda)$ в данном случае не нужно, можно взять вторую строку в (57), умноженную на число 2. Тогда для системы (56) получим выход

$$\tilde{y}(t) = [\lambda_h^2 + \lambda_h, 0] \tilde{x}(t), \quad \tilde{y}(t) = y(t-h) - y(t-2h), \quad t \geq 2h. \quad (58)$$

Таким образом, система (20) здесь определяется соотношениями (56), (58), причём, что несложно проверить, выполняется условие вида (18) (с нулевой матрицей $V_{i_0}(\lambda)$).

Зададим желаемый характеристический полином $w_2(p)$ системы, определяющей наблюдатель. Возьмём, например, $w_2(p) = (p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)$. Согласно [23] строим матрицу $Q(p, \lambda)$ и получаем финитный наблюдатель (21), (29), имеющий вид (ниже $z = \text{col}[z_1, z_2]$, $z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_2 \in \mathbb{R}^3$)

$$\dot{z}(t) = \mathfrak{Q}[z_t] + \begin{bmatrix} -\lambda_h^2 + \lambda_h \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(-\lambda_h^2 + \lambda_h) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_h + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_h \\ 0 \end{bmatrix} y(t).$$

Пусть $Q(p, \lambda) = [q_{ij}(p, \lambda)]_{i,j=1}^5$ (напомним, что $\mathfrak{Q} \xrightarrow{\sigma} Q(p, \lambda)$). Выпишем элементы $q_{ij}(p, \lambda)$ (в общем случае функции $q_{ij}(p, \lambda)$ являются дробно-рациональными, однако ниже, для наглядности, они выписаны в виде (10)):

$$q_{11}(p, e^{-ph}) = 2 - e^{-ph} - e^{-2ph}, \quad q_{12}(p, e^{-ph}) = 1,$$

$$q_{13}(p, e^{-ph}) = -\frac{57828009598126030209}{39406496739491840} + \frac{e^{-ph}(-208320 + e^{-ph}(-97720 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph})))}{53760} +$$

$$+ \frac{1}{2485980758016000}(-685442674106302464 + e^{-ph}(-198425094626084139 +$$

$$+ 2e^{-ph}(-4503988174456107 + e^{-ph}(584043096046293 + e^{-ph}(-56856644519211 +$$

$$+ e^{-ph}(4195118885589 + e^{-ph}(-233965543211 + e^{-ph}(9677531989 +$$

$$+ e^{-ph}(-285535307 + 7e^{-ph}(803899 + 7e^{-ph}(-1343 + 7e^{-ph}))))))))) \int_0^h e^{-ps} ds +$$

$$+ \frac{1}{1303369879658692608000}(694396074392611184443392 + e^{-ph}(514444061079244375522893 +$$

$$+ e^{-ph}(1450689465298965428097 - 4e^{-ph}(43807694264321509503 + 4e^{-ph}(-1018126416806606721 +$$

$$+ 4e^{-ph}(18192395808868479 + 4e^{-ph}(-248343075944321 + 4e^{-ph}(2534699108479 +$$

$$+ 4e^{-ph}(-18543581057 + 28e^{-ph}(12975049 + 28e^{-ph}(-5393 + 28e^{-ph}))))))))) \int_0^h e^{-(p-2)s} ds,$$

$$q_{14}(p, e^{-ph}) = -\frac{27}{10} - \frac{2 + e^{-ph}}{2} \int_0^h e^{-ps} ds + \frac{5 + 4e^{-ph}}{5} \int_0^h e^{-(p-2)s} ds, \quad q_{15}(p, e^{-ph}) = 0,$$

$$q_{21}(p, e^{-ph}) = q_{22}(p, e^{-ph}) = 0, \quad q_{23}(p, e^{-ph}) = -\frac{215009128125}{1073741824},$$

$$q_{24}(p, e^{-ph}) = -1, \quad q_{25}(p, e^{-ph}) = 0,$$

$$q_{31}(p, e^{-ph}) = \frac{1}{2}e^{-ph}(1 + e^{-ph}), \quad q_{32}(p, e^{-ph}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
q_{33}(p, e^{-ph}) &= \frac{-1886208 + e^{-ph}(208320 + e^{-ph}(97720 + (450 - 7e^{-ph})e^{-ph}))}{107520} + \\
&+ \frac{1}{2606739759317385216000} (-694396074392611184443392 + e^{-ph}(-514444061079244375522893 + \\
&+ e^{-ph}(-1450689465298965428097 + 4e^{-ph}(43807694264321509503 + \\
&+ 4e^{-ph}(-1018126416806606721 + 4e^{-ph}(18192395808868479 + \\
&+ 4e^{-ph}(-248343075944321 + 4e^{-ph}(2534699108479 + 4e^{-ph}(-18543581057 + \\
&+ 28e^{-ph}(12975049 + 28e^{-ph}(-5393 + 28e^{-ph})))))))))) \int_0^h e^{-(p-2)s} ds + \\
&+ \frac{1}{4971961516032000} (685442674106302464 + e^{-ph}(198425094626084139 - \\
&- 2e^{-ph}(-4503988174456107 + e^{-ph}(584043096046293 + e^{-ph}(-56856644519211 + \\
&+ e^{-ph}(4195118885589 + e^{-ph}(-233965543211 + e^{-ph}(9677531989 + \\
&+ e^{-ph}(-285535307 + 7e^{-ph}(803899 + 7e^{-ph}(-1343 + 7e^{-ph})))))))))) \int_0^h e^{-ps} ds, \\
q_{34}(p, e^{-ph}) &= \frac{2 + e^{-ph}}{4} \int_0^h e^{-ps} ds - \frac{5 + 4e^{-ph}}{10} \int_0^h e^{-(p-2)s} ds, \quad q_{35}(p, e^{-ph}) = 0, \\
q_{41}(p, e^{-ph}) &= 0, \quad q_{42}(p, e^{-ph}) = 0, \\
q_{43}(p, e^{-ph}) &= \frac{1}{13364632550940160000} \times \\
&\times (56623052202075934949376 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (411662062586953728 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (1285495455744 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (1846272 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph})))))), \\
q_{44}(p, e^{-ph}) &= 0, \quad q_{45}(p, e^{-ph}) = (-32 + e^{-ph})(-16 + e^{-ph})(-8 + e^{-ph})(-4 + e^{-ph})(-2 + e^{-ph}), \\
q_{51}(p, e^{-ph}) &= 0, \quad q_{52}(p, e^{-ph}) = 0, \\
q_{53}(p, e^{-ph}) &= \frac{1}{14369652923237086003200000} (-36 + e^{-ph})(2304 + e^{-ph}(-184 + 7e^{-ph})) \times \\
&\times (-68352 + e^{-ph}(8112 + e^{-ph}(-422 + 7e^{-ph}))) (-47616 + e^{-ph}(6648 + e^{-ph}(-394 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (-30528 + e^{-ph}(4392 + e^{-ph}(-338 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (-18624 + e^{-ph}(2568 + e^{-ph}(-226 + 7e^{-ph}))), \\
q_{54}(p, e^{-ph}) &= 0, \quad q_{55}(p, e^{-ph}) = \frac{58368 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph})))}{107520}.
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $|I_5 - Q(p, \lambda)| = w_2(p)$. Пусть матрица $\bar{\Pi}(p)$ является присоединённой матрицей к матрице $I_5 - Q(p, e^{-ph})$. Несложные вычисления показывают, что корни полинома $w_2(p)$ обращают в нуль элементы первых четырёх строк матрицы $\bar{\Pi}(p)$, значит эти элементы матрицы $(I_5 - Q(p, e^{-ph}))^{-1}$ являются целыми функциями. Тогда [25] в системе (27) вырождаются первые четыре компонента вектор-решения (см. замечание 4), поэтому имеет место равенство (28) при $\tilde{t}_2 = 18$ (поясним, что максимальная степень переменной λ в указанных компонентах матрицы $(I_5 - Q(p, \lambda))^{-1}$ равна 18).

3. *Синтез регулятора (31)–(33)*. Используя формулы (45), выпишем параметры регулятора (31)–(33) (для большей наглядности матрицы в приведённых ниже формулах не перемножаются):

$$\begin{aligned}
 R_{00}(p, \lambda) &= - \begin{bmatrix} p\lambda - \frac{73}{12}\lambda + \frac{15}{8}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda^3 + 2 & \frac{1}{6}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{19}{3} \\ \frac{15}{8}\lambda^2 - \frac{73}{12}\lambda - p\lambda - \frac{1}{6}\lambda^3 & \frac{1}{6}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{19}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 R_{01}(p, \lambda) &= - \begin{bmatrix} -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 56\lambda + 64 \\ -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 56\lambda + 64 \end{bmatrix}, \\
 R_{02}(p, \lambda) &= \begin{bmatrix} p\lambda - \frac{73}{12}\lambda + \frac{15}{8}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda^3 + 2 & \frac{1}{6}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{19}{3} \\ \frac{15}{8}\lambda^2 - \frac{73}{12}\lambda - p\lambda - \frac{1}{6}\lambda^3 & \frac{1}{6}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{19}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [I_2, 0_{2 \times 3}], \\
 R_{10}(p, \lambda) &= - \left[-\frac{61}{576}\lambda + \frac{3}{32} + \frac{1}{144}\lambda^2, -\frac{\lambda}{144} + \frac{1}{9} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 R_{11}(p, \lambda) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{24}\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \\
 R_{12}(p, \lambda) &= \left[-\frac{61}{576}\lambda + \frac{3}{32} + \frac{1}{144}\lambda^2, -\frac{\lambda}{144} + \frac{1}{9} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [I_2, 0_{2 \times 3}], \\
 R_{12}(p, \lambda) &= Q(p, \lambda), \quad S(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^2 + \lambda \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(-\lambda^2 + \lambda) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Регулятор, определяемый полученными матрицами, является регулятором полной стабилизации по выходу, обеспечивающим замкнутой системе заданный спектр. Действительно, составим матрицу $W_1(p, \lambda)$ по формуле (34). Вычислив определитель этой матрицы, убеждаемся, что $|W_1(p, \lambda)| = w_1(p)w_2(p) = (p+1)^2(p+2)^2(p+3)^2(p+4)(p+5)$. Пусть $\Pi_1(p, e^{-ph})$ — матрица, присоединённая к матрице $W_1(p, e^{-ph})$. Обозначим через $\pi_{ij}(p, e^{-ph})$ элементы матрицы $\Pi_1(p, e^{-ph})$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\pi_{ij}(p, e^{-ph})|_{p=k} = 0$, $k = \overline{1, 5}$, $(d\pi_{ij}(p, e^{-ph})/dp)|_{p=k} = 0$, $k = \overline{1, 3}$, $i \in \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, $j = \overline{1, 8}$. Это означает, что элементы строк с номерами 1, 2, 4, 5, 6, 7 матрицы $(W_1(p, e^{-ph}))^{-1}$ являются целыми функциями. Соглас-

но [25] у вектор-решения системы, определяемой характеристической матрицей $W_1(p, \lambda)$, вырождаются компоненты с номерами 1, 2, 4, 5, 6, 7.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа доказан критерий существования и разработан метод проектирования регулятора полной стабилизации по выходу, обеспечивающего по неполным измерениям финитную стабилизацию, конечный спектр и экспоненциальную устойчивость. Представленный подход к построению регулятора полной стабилизации по выходу основан на использовании операций с полиномами и полиномиальными матрицами, имеющихся в большинстве систем компьютерной математики, и не требует знания корней характеристического уравнения. Конструктивность представленных результатов проиллюстрирована примером.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский, Н.Н. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования / Н.Н. Красовский, Ю.С. Осипов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1963. — № 6. — С. 3–15.
2. Осипов, Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием / Ю.С. Осипов // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1, № 5. — С. 606–618.
3. Pandolfi, L. Stabilization of neutral functional-differential equations / L. Pandolfi // J. Optimiz. Theory and Appl. — 1976. — V. 20, № 2. — P. 191–204.
4. Lu, W.-S. On the stabilization of linear neutral delay-difference systems / W.-S. Lu, E. Lee, S. Zak // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1986. — V. 31, № 1. — P. 65–67.
5. Rabah, R. On pole assignment and stabilizability of linear systems of neutral type systems / R. Rabah, G.M. Sklyar, A.V. Rezounenko // Topics in Time-Delay Systems. — Berlin : Springer, 2009. — P. 85–93.
6. Hu, G.-D. Numerical optimization for feedback stabilization of linear systems with distributed delays / G.-D. Hu, R. Hu // J. Comput. Appl. Math. — 2020. — V. 371. — Art. 112706.
7. Hu, G.-D. A frequency-domain method for stabilization of linear neutral delay systems / G.-D. Hu, R. Hu // Systems and Control Letters. — 2023. — V. 181. — Art. 105650.
8. Watanabe, K. Finite spectrum assignment of linear systems with a class of noncommensurate delays / K. Watanabe // Int. J. Control. — 1987. — V. 47, № 5. — P. 1277–1289.
9. Wang, Q.G. Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems / Q.G. Wang, T.H. Lee, K.K. Tan. — London : Springer, 1995.
10. Метельский, А.В. Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1436–1452.
11. Хартовский, В.Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 375–390.
12. Миняев, С.И. Топологический подход к одновременной стабилизации объектов с запаздыванием / С.И. Миняев, А.С. Фурсов // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1453–1461.
13. Марченко, В.М. Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 7. — С. 1003–1017.
14. Метельский, А.В. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1506–1521.

15. Хартовский, В.Е. Критерий модальной управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 4. — С. 514–529.
16. Zaitsev, V. Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays / V. Zaitsev, I. Kim // Mathematics. — 2021. — № 9. — Art. 2158.
17. Карпук, В.В. Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием / В.В. Карпук, А.В. Метельский // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 6. — С. 19–28.
18. Метельский, А.В. Успокоение решения дифференциальных систем с многими запаздываниями посредством обратной связи / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский, О.И. Урбан // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2015. — № 2. — С. 40–50.
19. Метельский, А.В. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский, О.И. Урбан // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 391–403.
20. Фомичев, В.В. Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем / В.В. Фомичев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1516–1521.
21. Метельский, А.В. Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 12. — С. 1665–1682.
22. Хартовский, В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей / В.Е. Хартовский. — Гродно : ГрГУ, 2022. — 500 с.
23. Метельский, А.В. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 12. — С. 80–102.
24. Хартовский, В.Е. Полная управляемость и управляемость линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский, А.Т. Павловская // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 59–80.
25. Kappel, F. On degeneracy of functional-differential equations / F. Kappel // J. Differ. Equat. — 1976. — V. 22, № 2. — P. 250–267.

FINITE STABILIZATION AND ASSIGNMENT OF A FINITE SPECTRUM BY A SINGLE CONTROLLER FOR INCOMPLETE MEASUREMENTS FOR LINEAR SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE

V. E. Khartovskii

*Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus
e-mail: hartovskij@grsu.by, hartows@mail.ru*

For linear autonomous differential-difference of a neutral type system, the existence criterion was proved and a method was proposed for designing a controller with feedback on the observed output, providing the closed loop system finite stabilization (solution to the problem of complete 0-controllability) and a finite predetermined spectrum. This makes the closed loop system exponentially stable. The constructiveness of the presented results is illustrated by an example.

Keywords: linear system of neutral type, controller, observed output signal, finite stabilization, finite spectrum.

REFERENCES

1. Krasovskii, N.N. and Osipov, Yu.S., On stabilization of motions of control object with delay in regulation system, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekhn. Kibernet.*, 1963, no. 6, pp. 3–15.
2. Osipov, Yu.S., On stabilization of control systems with delay, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 5, pp. 606–618.
3. Pandolfi, L., Stabilization of neutral functional-differential equations, *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 191–204.

4. Lu, W.-S., Lee, E., and Zak, S., On the stabilization of linear neutral delay-difference systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, no. 1, pp. 65–67.
5. Rabah, R., Sklyar, G.M., and Rezounenko, A.V., On pole assignment and stabilizability of neutral type systems, in *Topics in Time Delay Systems*, Berlin: Springer, 2009, pp. 85–93.
6. Hu, G.-D., Hu, R., Numerical optimization for feedback stabilization of linear systems with distributed delays, *J. Comput. Appl. Math.*, 2020, vol. 371, art. 112706.
7. Hu, G.-D. and Hu, R., A frequency-domain method for stabilization of linear neutral delay systems, *Systems and Control Letters*, 2023, vol. 181, November, art. 105650.
8. Watanabe, K., Finite spectrum assignment of linear systems with a class of noncommensurate delays, *Int. J. Control*, 1987, vol. 47, no. 5, pp. 1277–1289.
9. Wang, Q.G., Lee, T.H., and Tan, K.K., *Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems*, London: Springer, 1995.
10. Metel'skii, A.V., Spectral reduction, complete damping, and stabilization of a delay system by a single controller, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1405–1422.
11. Khartovskii, V.E., Spectral reduction of linear systems of the neutral type, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 366–381.
12. Minyaev, S.I. and Fursov, A.S., Topological approach to the simultaneous stabilization of plants with delay, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1423–1431.
13. Marchenko, V.M., Control of systems with aftereffect in scales of linear controllers with respect to feedback type, *Differ. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1014–1028.
14. Metel'skii, A.V. and Khartovskii, V.E., Criteria for modal controllability of linear systems of neutral type, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 11, pp. 1453–1468.
15. Khartovskii, V.E., Criteria for modal controllability of completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 509–524.
16. Zaitsev, V. and Kim, I., Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays, *Mathematics*, 2021, no. 9, art. 2158.
17. Karpuk, V.V. and Metel'skii, A.V., Complete calming and stabilization of linear autonomous systems with delay, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2009, no. 6, pp. 863–872.
18. Metel'skii, A.V., Khartovskii, V.E., and Urban, O.I., Damping of a solution of linear autonomous difference–differential systems with many delays using feedback, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 202–211.
19. Metel'skii, A.V., Khartovskii, V.E., and Urban, O.I., Solution damping controllers for linear systems of the neutral type, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 3, pp. 386–399.
20. Fomichev, V.V., Sufficient conditions for the stabilization of linear dynamical systems, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1512–1517.
21. Metel'skii, A.V., Complete and finite-time stabilization of a delay differential system by incomplete output feedback, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 12, pp. 1611–1629.
22. Khartovskii, V.E., *Upravleniye lineynymi sistemami neytral'nogo tipa: kachestvennyy analiz i realizatsiya obratnykh svyazey* (Control of linear systems of neutral type: qualitative analysis and implementation of feedback), Grodno: GrSU, 2022.
23. Metel'skii, A.V. and Khartovskii, V.E., Finite observer design for linear systems of neutral type, *Automat. Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 12, pp. 2152–2169.
24. Khartovskii, V.E. and Pavlovskaya, A.T., Complete controllability and controllability for linear autonomous systems of neutral type, *Automat. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 5, pp. 769–784.
25. Kappel, F. On degeneracy of functional-differential equations, *J. Differ. Equat.*, 1976, vol. 22, no. 2, pp. 250–267.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.63

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

© Д. М. Коростелева

Казанский (Приволжский) федеральный университет

e-mail: diana.korosteleva.kpfu@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2023 г., после доработки 29.02.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Предложена новая симметричная вариационная функционально-алгебраическая постановка задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра для класса математических моделей тонкостенных конструкций с присоединённым осциллятором. Установлено существование собственных значений и собственных векторов. Построена симметричная аппроксимация задачи в конечномерном подпространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра. Получены оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных векторов. Теоретические результаты иллюстрируются на примере задачи механики конструкций.

Ключевые слова: собственное колебание, балка, осциллятор, собственное значение, собственный вектор, задача на собственные значения, метод конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0374064124050107, EDN: LAXMVD

Задачи о собственных колебаниях тонкостенных конструкций с присоединёнными осцилляторами возникают при математическом моделировании в авиационной и космической технике, при проектировании надводных и подводных судов, при расчёте различных ёмкостей и резервуаров в химической и нефтяной промышленности [1, 2]. Применяемые ранее постановки таких задач состояли в решении симметричных задач на собственные значения с рациональной зависимостью от спектрального параметра и вызывали значительные трудности [3], для преодоления которых были предприняты многочисленные попытки линеаризации рациональных спектральных задач этого класса [4–9]. Однако используемые ранее подходы приводили к несимметричной линеаризованной задаче, что затрудняло исследование существования собственных значений и соответствующей полной ортонормированной системы собственных векторов, а также создавало сложности при решении несимметричных алгебраических задач на собственные значения с матрицами высокого порядка.

В настоящей статье предложена новая симметричная вариационная функционально-алгебраическая постановка задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра для класса математических моделей тонкостенных конструкций с присоединённым осциллятором. Эта постановка позволила традиционными вариационными методами установить существование последовательности конечнократных положительных собственных значений с предельной точкой на бесконечности и соответствующей полной ортонормированной системы собственных векторов, а также построить и исследовать симметричную аппроксимацию задачи в конечномерном подпространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра.

Обозначим через $\mathbb{R}$ вещественную числовую прямую, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, через V — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_V$. Зададим симметричные билинейные формы $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $\alpha_1 \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2 \|v\|_V^2$ для произвольного $v \in V$ при фиксированных $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$, $b(v, v) > 0$ для $v \in V \setminus \{0\}$, $b(v_i, v_i) \rightarrow b(v, v)$ при $i \rightarrow \infty$ для слабо сходящейся последовательности $v_i \rightarrow v$ в V при $i \rightarrow \infty$. Выберем ненулевой линейный непрерывный функционал $g: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Введём гильбертово пространство $\bar{V} = V \times \mathbb{R}$ с нормой $\|\bar{v}\|_{\bar{V}} = (\|v\|_V^2 + \zeta^2)^{1/2}$ для $\bar{v} = (v, \zeta)^T \in \bar{V}$. При фиксированных $\kappa, \mu \in \mathbb{R}^+$ определим симметричные билинейные формы $\bar{a}: \bar{V} \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\bar{b}: \bar{V} \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью соотношений $\bar{a}(\bar{u}, \bar{v}) = a(u, v) + \kappa(\xi - g(u))(\zeta - g(v))$ и $\bar{b}(\bar{u}, \bar{v}) = b(u, v) + \mu \xi \zeta$ при $\bar{u} = (u, \xi)^T \in \bar{V}$, $\bar{v} = (v, \zeta)^T \in \bar{V}$.

Сформулируем задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\bar{u} \in \bar{V} \setminus \{0\}$ из уравнения

$$\bar{a}(\bar{u}, \bar{v}) = \lambda \bar{b}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{v} \in \bar{V}. \quad (1)$$

Теорема 1. *Задача (1) имеет неубывающую последовательность конечнократных собственных значений λ_k , $k \in \mathbb{N}$, таких, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, и соответствующую систему собственных векторов $\bar{u}_k = (u_k, \xi_k)^T \in \bar{V}$, $k \in \mathbb{N}$, $\bar{a}(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $\bar{b}(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Векторы $\tilde{u}_k = \bar{u}_k / \sqrt{\lambda_k}$, $k \in \mathbb{N}$, составляют полную ортонормированную систему в пространстве $\bar{V}$, т.е. для любого вектора $\bar{v} \in \bar{V}$ имеет место разложение $\bar{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}(\bar{v}, \tilde{u}_i) \tilde{u}_i$.*

Доказательство. Существуют $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in \mathbb{R}^+$ такие, что $\bar{\alpha}_1 \|\bar{v}\|_{\bar{V}}^2 \leq \bar{a}(\bar{v}, \bar{v}) \leq \bar{\alpha}_2 \|\bar{v}\|_{\bar{V}}^2$ для любого $\bar{v} \in \bar{V}$. Кроме того, имеем $\bar{b}(\bar{v}, \bar{v}) > 0$ при $\bar{v} \in \bar{V} \setminus \{0\}$. Введём положительный компактный самосопряжённый оператор $A: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$, определяемый соотношением $\bar{a}(A\bar{u}, \bar{v}) = \bar{b}(\bar{u}, \bar{v})$ для любых $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{V}$. Тогда задача (1) примет операторный вид $\bar{u} = \lambda A\bar{u}$. Применив к операторной задаче теорему Гильберта–Шмидта [10, с. 283], получим требуемый результат.

Зададим подпространства V_h размерности $M = M_h$ бесконечномерного гильбертова пространства V . Предположим, что $\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ для любого v из пространства V . Для пространства $\bar{V}_h = V_h \times \mathbb{R}$ размерности $N = M + 1$ сформулируем конечномерную аппроксимацию задачи (1): найти $\lambda^h \in \mathbb{R}$ и $\bar{u}^h \in \bar{V}_h \setminus \{0\}$ из уравнения

$$\bar{a}(\bar{u}^h, \bar{v}^h) = \lambda^h \bar{b}(\bar{u}^h, \bar{v}^h), \quad \bar{v}^h \in \bar{V}_h. \quad (2)$$

Теорема 2. *Задача (2) имеет собственные значения λ_k^h , $k = \overline{1, N}$, $0 < \lambda_1^h \leq \lambda_2^h \leq \dots \leq \lambda_N^h$, и соответствующую систему собственных векторов $\bar{u}_k^h = (u_k^h, \xi_k^h)^T \in \bar{V}_h$, $k = \overline{1, N}$, $\bar{a}(\bar{u}_i^h, \bar{u}_j^h) = \lambda_i^h \delta_{ij}$, $\bar{b}(\bar{u}_i^h, \bar{u}_j^h) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, N}$. Векторы $\tilde{u}_k^h = \bar{u}_k^h / \sqrt{\lambda_k^h}$, $k = \overline{1, N}$, составляют полную ортонормированную систему в пространстве $\bar{V}_h$, т.е. для любого вектора $\bar{v}^h \in \bar{V}_h$ имеет место разложение $\bar{v}^h = \sum_{i=1}^N \bar{a}(\bar{v}^h, \tilde{u}_i^h) \tilde{u}_i^h$.*

Доказательство. Определим положительный самосопряжённый оператор $A_h: \bar{V}_h \rightarrow \bar{V}_h$ с помощью соотношения $\bar{a}(A_h \bar{u}^h, \bar{v}^h) = \bar{b}(\bar{u}^h, \bar{v}^h)$ для любых $\bar{u}^h, \bar{v}^h \in \bar{V}_h$. Тогда задача (2) эквивалентна операторной задаче $\bar{u}^h = \lambda^h A_h \bar{u}^h$. Применяя теорему 5.21 из [11, с. 134] для операторной задачи в конечномерном евклидовом пространстве, выводим требуемый результат.

Пусть $\bar{W}_1$ и $\bar{W}_2$ — подпространства гильбертова пространства $\bar{V}$, $\dim \bar{W}_1 = \dim \bar{W}_2 < \infty$, $\bar{P}_i$ — оператор ортогонального проектирования из $\bar{V}$ на $\bar{W}_i$, $i = 1, 2$. Тогда разность подпространств $\bar{W}_1$ и $\bar{W}_2$ вычисляется по формуле [12]

$$\vartheta(\bar{W}_1, \bar{W}_2) = \sup_{\bar{w} \in \bar{W}_2, \|\bar{w}\|_{\bar{V}}=1} \|\bar{w} - \bar{P}_1 \bar{w}\|_{\bar{V}} = \sup_{\bar{w} \in \bar{W}_1, \|\bar{w}\|_{\bar{V}}=1} \|\bar{w} - \bar{P}_2 \bar{w}\|_{\bar{V}}.$$

Пусть λ_k — собственное значение задачи (1) кратности s такое, что $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+s-1} < \lambda_{k+s}$, $\bar{u}_i = (u_i, \xi_i)^T$, $i = \overline{k, k+s-1}$, — соответствующие собственные векторы, λ_i^h , $\bar{u}_i^h$, $i = \overline{k, k+s-1}$, — приближения по схеме (2), $U_k = \text{span}\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+s-1}\}$, $\bar{U}_k = \text{span}\{\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_{k+s-1}\}$, $\bar{U}_k^h = \text{span}\{\bar{u}_k^h, \bar{u}_{k+1}^h, \dots, \bar{u}_{k+s-1}^h\}$.

Далее будем считать h достаточно малым, а через c будем записывать различные константы, не зависящие от h . Обозначим

$$\varepsilon_k^h = \sup_{u \in U_k, \|u\|_V=1} \varepsilon_h(u), \quad \bar{\varepsilon}_k^h = \sup_{\bar{u} \in \bar{U}_k, \|\bar{u}\|_{\bar{V}}=1} \bar{\varepsilon}_h(\bar{u}), \quad \bar{\varepsilon}_h(\bar{v}) = \inf_{\bar{v}^h \in \bar{V}_h} \|\bar{v} - \bar{v}^h\|_{\bar{V}}.$$

Так как U_k — конечномерное подпространство V , то $\varepsilon_k^h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Теорема 3. *Справедливы следующие оценки погрешности:*

$$0 \leq \lambda_i^h - \lambda_i \leq c(\varepsilon_k^h)^2, \quad i = \overline{k, k+s-1}, \quad \vartheta(\bar{U}_k, \bar{U}_k^h) \leq c\varepsilon_k^h.$$

Доказательство. С помощью теорем 10 и 11 из [12] находим требуемые оценки

$$0 \leq \lambda_i^h - \lambda_i \leq c(\bar{\varepsilon}_k^h)^2 = c(\varepsilon_k^h)^2, \quad \vartheta(\bar{U}_k, \bar{U}_k^h) \leq c\bar{\varepsilon}_k^h = c\varepsilon_k^h.$$

Для иллюстрации изложенных теоретических результатов сформулируем задачу о собственных колебаниях закреплённой на торцах неоднородной балки переменного сечения с присоединённым осциллятором. Будем предполагать, что ось балки длиной l в состоянии равновесия занимает отрезок $\bar{\Omega} = [0, l]$ горизонтальной оси Ox , $\Omega = (0, l)$. Пусть $\rho = \rho(x)$ и $E = E(x)$ — плотность и модуль упругости материала балки, $S = S(x)$ и $J = J(x)$ — площадь поперечного сечения балки и момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Пусть торцы балки с координатами $x=0$ и $x=l$ заделаны жёстко. Предположим, что в точке с координатой $z \in \Omega$ упруго присоединён груз массой $M > 0$ (гармонический осциллятор) с коэффициентом упругости подвески $K > 0$, при этом $\sqrt{K/M}$ — парциальная частота осциллятора.

Через $w(x, t)$ будем обозначать смещение от положения равновесия точки x оси балки в момент времени t , через $\eta(t)$ — смещение от положения равновесия груза массой M в момент времени t . Собственные колебания механической системы балка–осциллятор определяются функциями $w(x, t)$ и $\eta(t)$ следующего вида:

$$w(x, t) = u(x)v(t), \quad x \in \Omega, \quad \eta(t) = \xi v(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где $v(t) = a_0 \cos(\sqrt{\lambda}t) + b_0 \sin(\sqrt{\lambda}t)$, $t > 0$; a_0 , b_0 , λ — константы.

Функции вида (3) подчиняются уравнению вибрации балки [13, с. 146]

$$(E(x)J(x)w_{xx}(x, t))_{xx} + \rho(x)S(x)w_{tt}(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

и уравнению колебания осциллятора [1, с. 17]

$$M\eta''(t) + K(\eta(t) - w(z, t)) = 0, \quad t > 0. \quad (5)$$

Действие присоединённого осциллятора на балку моделируется [1, с. 17] функцией правой части дифференциального уравнения (4) согласно формуле

$$f(x, t) = K(\eta(t) - w(z, t))\delta(x - z), \quad (6)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $x=0$. К уравнениям (4)–(6) добавляются граничные условия защемления на торцах балки:

$$w(0, t) = w_x(0, t) = w(l, t) = w_x(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Подставив (3) в (4)–(7), получим задачу на собственные значения, состоящую в нахождении чисел λ , функций $u(x)$, $x \in \Omega$, и чисел ξ , составляющих ненулевые векторы $(u, \xi)^T$, для которых выполняется следующая система уравнений:

$$(E(x)J(x)u''(x))'' - K(\xi - u(z))\delta(x - z) = \lambda \rho(x)S(x)u(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

$$K(\xi - u(z)) = \lambda M\xi, \quad (9)$$

$$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0. \quad (10)$$

Число λ называется *собственным значением* задачи (8)–(10), а вектор $(u, \xi)^T$ — соответствующим *собственным вектором*.

Через $W_2^2(\Omega)$ обозначим вещественное гильбертово пространство Соболева, снабжённое нормой

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=0}^2 |v|_i^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_0 = \left(\int_0^l v^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad |v|_1 = |v'|_0, \quad |v|_2 = |v''|_0.$$

Пусть $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ — пространство функций v из пространства $W_2^2(\Omega)$, дополнительно удовлетворяющих граничным условиям $v(0) = v'(0) = v(l) = v'(l) = 0$. В пространстве $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ в качестве нормы применяется полунорма $|\cdot|_2$, которая определяет норму, эквивалентную исходной норме $\|\cdot\|_2$.

Обозначим $V = \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$, $\kappa = K$, $\mu = M$. Зададим достаточно гладкие функции E , J , ρ и S . Предположим, что для положительных констант E_1 , E_2 , J_1 , J_2 , ρ_1 , ρ_2 , S_1 , S_2 справедливы неравенства $E_1 \leq E(x) \leq E_2$, $J_1 \leq J(x) \leq J_2$, $\rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2$, $S_1 \leq S(x) \leq S_2$ при $x \in \bar{\Omega}$. Определим билинейные формы $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ соотношениями

$$a(u, v) = \int_0^l E(x)J(x)u''(x)v''(x) dx, \quad b(u, v) = \int_0^l \rho(x)S(x)u(x)v(x) dx,$$

а линейный непрерывный функционал $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью равенства $g(v) = v(z)$ для $v \in V$. Тогда обобщённая постановка задачи (8)–(10) примет вид задачи (1), для которой справедлива теорема 1.

На отрезке $\bar{\Omega}$ зададим сетку равноотстоящих узлов $x_i = ih$, $i = \overline{0, n}$, $h = l/n$, с ячейками сетки $e_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Предположим, что $z = x_m$, $0 < m < n$. Определим конечномерное пространство эрмитовых кубических конечных элементов [14, с. 73]

$$V_h = \{v^h: v^h \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega), \quad v^h|_{e_i} \in P_3(e_i), \quad i = \overline{1, n}\},$$

где $P_3(e)$ — пространство полиномов степени не выше 3 на множестве e . Здесь V_h является подпространством $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$, $\dim V_h = 2n - 2$. Введём вещественное гильбертово пространство $\bar{V}_h = V_h \times \mathbb{R}$. Заметим, что $\bar{V}_h$ — подпространство $\bar{V}$, $\dim \bar{V}_h = N$, $N = 2n - 1$. Приближение по методу конечных элементов задачи (8)–(10) сводится к решению задачи (2), для которой выполняются теоремы 2 и 3 при $\varepsilon_k^h \leq ch^2$ [14, с. 79].

Задача собственных колебаний балки с присоединённым осциллятором решалась численно с помощью сеточной схемы метода конечных элементов (2). Расчёты проводились при следующих значениях параметров: $E(x) = 1$, $J(x) = 1$, $\rho(x) = 1$, $S(x) = 1$, $l = 1$, $z = 0.3$. Решена серия задач при разных значениях K и M . Вычислены порядки погрешности σ_k , $k = \overline{1, 6}$, для собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 6}$, по формуле $\sigma_k = \log_2 (\lambda_k^h - \lambda_k^{h/2}) / (\lambda_k^{h/2} - \lambda_k^{h/4})$ при $n = 20$, $h = 0.05$. В результате вычислений экспериментально получена оценка погрешности $\lambda_k^h - \lambda_k \approx ch^{\sigma_k}$. Установлено, что порядок погрешности $\sigma_k \approx 4$ и не зависит от параметров K , M и z присоединённого осциллятора. В табл. 1 приведены собственные значения λ_k , $k = \overline{1, 6}$, вычисленные на мелкой сетке размера $h/4 = 0.0125$, и порядки погрешности σ_k , $k = \overline{1, 6}$, при $M = 0.2$ и $K = 10$, а в табл. 2 — при $K = 1000$. Полученные численные данные согласуются с теоретическими результатами теоремы 3.

Таблица 1. Собственные значения и порядки погрешности при $K = 10$

k	λ_k	σ_k
1	48.3785	4.0050
2	513.7568	3.9991
3	3826.5613	3.9963
4	14625.2273	3.9921
5	39945.6431	3.9863
6	89153.6318	3.9791

Таблица 2. Собственные значения и порядки погрешности при $K = 1000$

k	λ_k	σ_k
1	391.5022	3.9989
2	2399.3140	3.9968
3	8765.1172	3.9957
4	16190.1720	3.9927
5	40165.0208	3.9863
6	91092.2721	3.9791

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета в рамках реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, Л.В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л.В. Андреев, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Машиностроение, 1988. — 200 с.
2. Динамика тонкостенных конструкций с присоединёнными массами / Л.В. Андреев, А.И. Станкевич, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Изд-во МАИ, 2012. — 214 с.
3. Соловьёв, С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.
4. Algazin, S.D. Numerical study of free oscillations of a beam with oscillators / S.D. Algazin // J. Appl. Mech. Techn. Phys. — 2006. — V. 47, № 3. — P. 433–438.
5. Algazin, S.D. Numerical analysis of free vibrations of a beam with oscillators / S.D. Algazin // J. Appl. Mech. Techn. Phys. — 2006. — V. 47, № 4. — P. 573–581.
6. Stammberger, M. An unsymmetric eigenproblem governing vibrations of a plate with attached loads / M. Stammberger, H. Voss // Proc. of the 12th Int. Conf. on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing 2009. Funchal, Madeira, Portugal, 1–4 September 2009. — New York : Curran Associates, Inc., 2010. — V. 1. — P. 2880–2889.

7. Su, Y. Solving rational eigenvalue problems via linearization / Y. Su, Z. Bai // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2011. — V. 32, № 1. — P. 201–216.
8. Alam, R. Linearizations for rational matrix functions and Rosenbrock system polynomials / R. Alam, N. Behera // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2016. — V. 37, № 1. — P. 354–380.
9. Güttel, S. The nonlinear eigenvalue problem / S. Güttel, F. Tisseur // Acta Numerica. — 2017. — V. 26. — P. 1–94.
10. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука, 1989. — 624 с.
11. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М. : Наука, 1984. — 296 с.
12. Соловьев, С.И. Аппроксимация вариационных задач на собственные значения / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1022–1032.
13. Roseau, M. Vibrations in Mechanical Systems / M. Roseau. — Berlin : Springer-Verlag, 1987. — 515 p.
14. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс ; пер. с англ. В.И. Агошкова и др. — М. : Мир, 1977. — 350 с.

APPROXIMATION OF FUNCTIONAL-ALGEBRAIC EIGENVALUE PROBLEMS

D. M. Korosteleva

*Kazan (Volga Region) Federal University, Russia
e-mail: diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*

A new symmetric variational functional-algebraic formulation of the eigenvalue problem in the Hilbert space with linear dependence on the spectral parameter for a class of mathematical models of thin-walled structures with an attached oscillator is proposed. The existence of eigenvalues and eigenvectors is established. A new symmetric approximation of the problem in a finite-dimensional subspace with linear dependence on the spectral parameter is constructed. Error estimates of the approximate eigenvalues and eigenvectors are obtained. The theoretical results are illustrated on the example of the problem of structural mechanics.

Keywords: eigenvibration, beam, oscillator, eigenvalue, eigenvector, eigenvalue problem, finite element method.

FUNDING

This work was carried out with financial support from Kazan (Volga region) Federal University within the framework of the strategic academic leadership program “Priority-2030”.

REFERENCES

1. Andreev, L.V., Dyshko, A.L., and Pavlenko, I.D., *Dinamika plastin i obolochek s sosredotochennymi massami* (Dynamics of Plates and Shells with Concentrated Masses), Moscow: Mashinostroenie, 1988.
2. Andreev, L.V., Stankevich, A.I., Dyshko, A.L., and Pavlenko, I.D., *Dinamika tonkostennykh konstruksiy s pris-oedinennymi massami* (Dynamics of Thin-Walled Constructions with Attached Masses), Moscow: Izdatel'stvo MAI, 2012.
3. Solov'ev, S.I., *Nelineinye zadachi na sobstvennye znacheniya. Priblizhennye metody* (Nonlinear Eigenvalue Problems. Approximate Methods), Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011.
4. Algazin, S.D., Numerical study of free oscillations of a beam with oscillators, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 3, pp. 433–438.
5. Algazin, S.D., Numerical analysis of free vibrations of a beam with oscillators, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 4, pp. 573–581.
6. Stammberger, M. and Voss, H., An unsymmetric eigenproblem governing vibrations of a plate with attached loads, *Proceedings of the 12th International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing 2009, Funchal, Madeira, Portugal, 1–4 September 2009*, New York: Curran Associates, Inc., 2010, vol. 1, pp. 2880–2889.

7. Su, Y. and Bai, Z., Solving rational eigenvalue problems via linearization, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2011, vol. 32, no. 1, pp. 201–216.
8. Alam, R. and Behera, N., Linearizations for rational matrix functions and Rosenbrock system polynomials, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2016, vol. 37, no. 1, pp. 354–380.
9. Güttel, S. and Tisseur, F., The nonlinear eigenvalue problem, *Acta Numerica*, 2017, vol. 26, pp. 1–94.
10. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1989.
11. П'ин, В.А. and Позняк, Е.Г., *Lineynaya algebra* (Linear Algebra), Moscow: Nauka, 1984.
12. Solov'ev, S.I., Approximation of variational eigenvalue problems, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1030–1041.
13. Roseau, M., *Vibrations in Mechanical Systems*, Berlin: Springer-Verlag, 1987.
14. Strang, G. and Fix, G.J., *Teoriya metoda konechnykh elementov* (An Analysis of the Finite Element Method), Moscow: Mir, 1977.

УДК 517.927.4+517.988.63

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАЗИОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© А. Н. Наимов¹, М. В. Быстрецкий²

Вологодский государственный университет

e-mail: ¹naimovan@vogu35.ru, ²pmbmv@bk.ru

Поступила в редакцию 25.02.2024 г., после доработки 28.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с выделенной главной квазиоднородной нелинейностью. Доказана априорная оценка периодических решений этой системы в предположении неограниченности всех ненулевых решений невозмущённой системы. В отличие от предыдущих работ авторов, априорная оценка выведена без учёта множества нулей главной нелинейной части. С применением методов вычисления вращения векторных полей сформулирован и доказан критерий существования периодических решений при любом возмущении из заданного класса.

Ключевые слова: квазиоднородная нелинейность, возмущение, периодическое решение, априорная оценка, вращение векторного поля.

DOI: 10.31857/S0374064124050114, EDN: LAWFOL

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'' = Q(x, x') + g(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $Q: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию квазиоднородности [1, с. 14]

$$Q(\lambda y_1, \lambda^{1+\nu} y_2) \equiv \lambda^{1+2\nu} Q(y_1, y_2) \quad (2)$$

при некотором $\nu > 0$ и любых значениях $\lambda > 0$. Отображение $g: \mathbb{R}^{1+2n} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно и удовлетворяет условию периодичности по первой переменной

$$g(t + \omega, y_1, y_2) \equiv g(t, y_1, y_2) \quad (3)$$

с фиксированным периодом $\omega > 0$, а по остальным переменным удовлетворяет следующему условию на порядок роста:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \max_{t \in \mathbb{R}, |y_1| + |y_2| \leq 1} r^{-(1+2\nu)} |g(t, ry_1, r^{1+\nu} y_2)| = 0. \quad (4)$$

Учитывая условия (2)–(4), отображение Q называем *главной квазиоднородной нелинейностью*, а отображение g — *возмущением*.

Вектор-функцию $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ называем ω -периодическим решением системы (1), если x удовлетворяет уравнениям (1) и условию $x(t+\omega) \equiv x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе исследован в два этапа по схеме работы [2] вопрос существования ω -периодических решений системы уравнений (1). На первом этапе найдены условия, при которых для ω -периодических решений имеет место априорная оценка

$$\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) < M, \quad (5)$$

где константа M не зависит от x . На втором этапе в условиях априорной оценки, применяя методы вычисления вращения векторных полей, сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие существования ω -периодических решений при любом возмущении g . Отметим, что результаты работы [2] не применимы к системе уравнений (1).

В статье [3] найдена априорная оценка и изучен вопрос существования периодических решений системы уравнений вида (1) в случае, когда отображение Q положительно однородно порядка $m > 1$, т.е. $Q(\lambda y_1, \lambda y_2) \equiv \lambda^m Q(y_1, y_2)$, $\lambda > 0$, и его множество нулей $\{(y_1, y_2) : Q(y_1, y_2) = 0\}$ образовано из конечного числа поверхностей с определёнными свойствами. В отличие от указанной работы априорная оценка (5) выведена при условии квазиоднородности (2), но без учёта множества нулей отображения Q . Существенное ограничение состоит в том, что при условии (2) порядок роста $|Q(y_1, y_2)|$ по $|y_2|$ меньше $|y_2|^2$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наряду с системой (1) рассмотрим также невозмущённую систему уравнений

$$z'' = Q(z, z'), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Решение $z = z(t)$ системы (6) назовём *ограниченным*, если оно определено при всех $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (|z(t)| + |z'(t)|) < \infty.$$

Обозначим через $\mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ множество всех непрерывных отображений $g: \mathbb{R}^{1+2n} \mapsto \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям (3), (4). Если $Q(y, 0) \neq 0$ при $y \neq 0$, то определено вращение (степень отображения) $\gamma(Q(\cdot, 0))$ векторного поля $Q(\cdot, 0): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ на сфере $|y| = 1$ пространства $\mathbb{R}^n$ [4, с. 16].

Основные результаты статьи содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 1. Пусть система уравнений (6) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда при любом отображении $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ для ω -периодических решений системы (1) имеет место априорная оценка (5).

Доказательство. Пусть система (6) не имеет ненулевых ограниченных решений. Предположим, что для ω -периодических решений системы (1) не имеет место априорная оценка (5), тогда существует неограниченная последовательность ω -периодических решений x_k , $k \in \mathbb{N}$, этой системы

$$r_k := \max_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|)^{1/(1+\nu)} = (|x_k(t_k)| + |x'_k(t_k)|)^{1/(1+\nu)} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{-\nu} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, для которых

$$\begin{aligned} |y_k(t)| + |y'_k(t)|^{1/(1+\nu)} &\leq |y_k(0)| + |y'_k(0)|^{1/(1+\nu)} = 1, \\ y''_k(t) &= Q(y_k(t), y'_k(t)) + r_k^{-1-2\nu} g(t_k + r_k^{-\nu} t, r_k y_k(t), r_k^{1+\nu} y'_k(t)). \end{aligned}$$

Отсюда без ограничения общности можно считать, что последовательности вектор-функций $y_k, y'_k, k \in \mathbb{N}$, равномерно сходятся на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Переходя к пределу в системе уравнений для y_k и учитывая условие (4), получаем ненулевое ограниченное решение системы (6), что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Если система уравнений (6) не имеет ненулевых ограниченных решений, то ω -периодическое решение системы (1) существует при любом отображении $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(Q(\cdot, 0)) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система уравнений (6) не имеет ненулевых ограниченных решений и $\gamma(Q(\cdot, 0)) = 0$. Покажем, что при некотором $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ система (1) не имеет ω -периодических решений.

Согласно теореме 5.2 [4, с. 24] из равенства $\gamma(Q(\cdot, 0)) = 0$ следует, что отображение $Q(y, 0)$ можно непрерывно продолжить внутри шара $|y| < 1$ без нулей некоторым отображением $F(y)$ таким, что $F(y) = Q(y, 0)$ при $|y| = 1$ и $F(y) \neq 0$ при $|y| < 1$. Положим $g_0(y_1) = F(y_1) - Q(y_1, 0)$ при $|y_1| \leq 1$ и $g_0(y_1) = 0$ при $|y_1| > 1$. Легко проверить, что $g_0 \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ и при всех $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ справедливо неравенство

$$|y_2| + |Q(y_1, y_2) + g_0(y_1)| > 0. \quad (7)$$

Справедлива

Лемма. Система уравнений

$$x'' = Q(x, x') + g_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

при некотором $\omega_0 > 0$ не имеет ω_0 -периодических решений.

Доказательство. Если указанное число ω_0 не существует, то имеем последовательность $(1/k)$ -периодических решений $x_k, k \in \mathbb{N}$, системы (8). Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|) < \infty.$$

Учитывая систему (8), можно считать, что последовательности вектор-функций $x_k, x'_k, k \in \mathbb{N}$, равномерно сходятся на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$\sup_{a \leq t \leq b} (|x_k(t) - x_0(t)| + |x'_k(t) - x'_0(t)|) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, в силу $(1/k)$ -периодичности $x_k, k \in \mathbb{N}$, при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\frac{1}{k} \int_0^{1/k} (\langle x'_k(t), z_1 \rangle + \langle Q(x_k(t), x'_k(t)) + g_0(x_k(t)), z_2 \rangle) dt = 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Переходя здесь к пределу, получаем равенство

$$\langle x'_0(0), z_1 \rangle + \langle Q(x_0(0), x'_0(0)) + g_0(x_0(0)), z_2 \rangle = 0,$$

верное при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, что противоречит неравенству (7). Лемма доказана.

Если x — решение системы (8), то при любом $r > 0$ вектор-функция $\tilde{x}(t) = r^{-1}x(r^{-\nu}t)$, $t \in \mathbb{R}$, будет решением системы уравнений (1) с возмущением $g(y_1) = r^{-1-2\nu}g_0(ry_1)$, $y_1 \in \mathbb{R}^n$. Полагая $r = (\omega/\omega_0)^{1/\nu}$, получаем, что из ω -периодичности $\tilde{x}$ следует ω_0 -периодичность x . Отсюда в силу доказанной леммы вытекает, что для возмущения, заданного формулой $g(y_1) = (\omega_0/\omega)^{1+2\nu}g_0((\omega/\omega_0)^{1/\nu}y_1)$, $y_1 \in \mathbb{R}^n$, система уравнений (1) не имеет ω -периодических решений.

Достаточность. Пусть система уравнений (6) не имеет ненулевых ограниченных решений и $\gamma(Q(\cdot, 0)) \neq 0$. Покажем, что при любом $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ существует ω -периодическое решение системы (1).

Существование ω -периодического решения системы (1) равносильно существованию нуля вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi_g(x, y) := \left(x(t) - x(\omega) - \int_0^t y(s) ds, \quad y(t) - y(\omega) - \int_0^t (Q(x(s), y(s)) + g(s, x(s), y(s))) ds \right),$$

определённого в банаховом пространстве $E := C([0, \omega]; \mathbb{R}^{2n})$ с элементами вида (x, y) и нормой

$$\|(x, y)\|_E := \max_{0 \leq t \leq \omega} (|x(t)| + |y(t)|).$$

Из теоремы 1 вытекает, что $\Phi_{\lambda g}(x, y) \neq 0$ при любых $(x, y) \in E$, $\|(x, y)\|_E \geq M$ и $\lambda \in [0, 1]$. Отсюда, согласно теории вполне непрерывных векторных полей [4, с. 135], при каждом $\lambda \in [0, 1]$ определено вращение $\gamma_\infty(\Phi_{\lambda g})$ векторного поля $\Phi_{\lambda g}$ на бесконечности, равное вращению (степени отображения) $\Phi_{\lambda g}$ на сфере $\|(x, y)\|_E = r$ при $r \geq M$. Значение $\gamma_\infty(\Phi_{\lambda g})$ не меняется при изменении $\lambda \in [0, 1]$ [4, с. 135], поэтому верно равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_g) = \gamma_\infty(\Phi_0). \quad (9)$$

Докажем равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma(Q(\cdot, 0)). \quad (10)$$

Для этого рассмотрим семейство векторных полей

$$\Psi_\lambda(x, y) := \left(x(t) - x(\omega) - \left(\int_0^t + \lambda \int_t^\omega \right) y(s) ds, \quad y(t) - y(\omega) - \left(\int_0^t + \lambda \int_t^\omega \right) Q(x(s), y(s)) ds \right), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Проверим, что при любых $(x, y) \in E \setminus \{(0, 0)\}$, $\lambda \in [0, 1]$ верно

$$\Psi_\lambda(x, y) \neq 0. \quad (11)$$

Действительно, если при некоторых $(x_0, y_0) \in E \setminus \{(0, 0)\}$, $\lambda_0 \in [0, 1]$ справедливо равенство $\Psi_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\omega y_0(s) ds &= 0, \quad x_0(0) = x_0(\omega), \quad x'_0(t) = (1 - \lambda_0)y_0(t), \quad t \in (0, \omega), \\ \int_0^\omega Q(x_0(s), y_0(s)) ds &= 0, \quad y_0(0) = y_0(\omega), \quad y'_0(t) = (1 - \lambda_0)Q(x_0(t), y_0(t)), \quad t \in (0, \omega). \end{aligned}$$

В случае $\lambda_0 = 1$ получаем $x_0(t) \equiv y_0(t) \equiv 0$, что противоречит включению $(x_0, y_0) \in E \setminus \{(0, 0)\}$. А в случае $\lambda_0 < 1$ вектор-функция $z_0(t) = x_0(t)/(1 - \lambda_0)$, периодически продолженная на $\mathbb{R}$, будет ненулевым ограниченным решением системы уравнений (6), что противоречит условию теоремы. Следовательно, соотношение (11) верно.

Согласно теории вращения вполне непрерывных векторных полей [4, с. 135], во-первых, из (11) вытекает равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Psi_1), \quad (12)$$

во-вторых, для вращения векторного поля Ψ_1 имеем

$$\gamma_\infty(\Psi_1) = \gamma_\infty(F_1), \quad (13)$$

где векторное поле

$$F_1(\xi, \eta) := (-\omega\eta, -\omega Q(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n},$$

получается из Ψ_1 заменой вектор-функций x и y векторами $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. В третьих, верно равенство

$$\gamma_\infty(F_1) = \gamma(F_1), \quad (14)$$

где $\gamma(F_1)$ — вращение векторного поля F_1 на любой сфере $|\xi| + |\eta| = r$ ненулевого радиуса r пространства $\mathbb{R}^{2n}$. На сфере $|\xi| + |\eta| = r$ векторное поле F_1 формулой $(-\omega\eta, -\omega Q(\xi, \lambda\eta))$, $\lambda \in [0, 1]$, гомотопируется к векторному полю

$$F_0(\xi, \eta) := (-\omega\eta, -\omega Q(\xi, 0)), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Отсюда получаем

$$\gamma(F_1) = \gamma(F_0) = \gamma(Q(\cdot, 0)). \quad (15)$$

Таким образом, из (12)–(15) следует (10).

Из равенств (9) и (10) вытекает, что $\gamma_\infty(\Phi_g) \neq 0$. Тогда, согласно принципу ненулевого вращения [4, с. 138], существует нуль векторного поля Φ_g . Теорема доказана.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим систему уравнений вида

$$x'' = \varphi(x, \varepsilon x')Ax + g(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (16)$$

где $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$, A — квадратная матрица порядка n , $\varphi: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция, ε — параметр. Предположим, что матрица A и функция φ удовлетворяют условиям

$$\varphi(y, 0)\langle Ay, y \rangle > 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \varphi(\lambda y_1, \lambda^{1+\nu} y_2) \equiv \lambda^{2\nu} \varphi(y_1, y_2), \quad \lambda > 0. \quad (17)$$

Например, φ можно задать формулой

$$\varphi(y_1, y_2) = (|y_1|^{m_1} + c_1 |y_2|^{m_1/(1+\nu)}) \dots (|y_1|^{m_q} + c_q |y_2|^{m_q/(1+\nu)}),$$

где $q \in \mathbb{N}$, $m_j, c_j \in \mathbb{R}$, $m_j > 0$, $j = \overline{1, q}$, $m_1 + \dots + m_q = 2\nu$. Для главной нелинейной части $Q(y_1, y_2) \equiv \varphi(y_1, \varepsilon y_2)Ay_1$ в силу условий (17) имеем $\gamma(Q(\cdot, 0)) = 1$. Система уравнений

$$z'' = \varphi(z, \varepsilon z')Az, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (18)$$

при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ не имеет ненулевых ограниченных решений. Действительно, в противном случае при некоторых ε_k , $k \in \mathbb{N}$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, система (18) имеет ненулевые ограниченные решения $z_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$. Можно считать, что

$$|z_k(t)| + |z'_k(t)|^{1/(1+\nu)} \leq |z_k(0)| + |z'_k(0)|^{1/(1+\nu)} = r_k, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для вектор-функций $v_k(t) = r_k^{-1} z_k(r_k^{-\nu} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$v''_k(t) = \varphi(v_k(t), \varepsilon_k v'_k(t))Av_k(t),$$

$$|v_k(t)| + |v'_k(t)|^{1/(1+\nu)} \leq |v_k(0)| + |v'_k(0)|^{1/(1+\nu)} = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение $v_0(t)$ системы

$$v'' = \varphi(v, 0)Av, \quad v \in \mathbb{R}^n. \quad (19)$$

С другой стороны, в силу условий (17) система (19) не имеет ненулевых ограниченных решений, так как для любого ненулевого решения v этой системы имеет место неравенство

$$\langle v'(t), v(t) \rangle' = |v'(t)|^2 + \varphi(v(t), 0) \langle Av(t), v(t) \rangle > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ система уравнений (18) не имеет ненулевых ограниченных решений. Следовательно, при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и любом отображении $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$, согласно теореме 2, существует ω -периодическое решение системы (16).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00032).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд, В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. — М. : Наука, 1978. — 304 с.
2. Мухамадиев, Э. О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 280–282.
3. Мухамадиев, Э. О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 3. — С. 312–321.
4. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

ON THE EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS OF A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH QUASI-HOMOGENEOUS NON-LINEARITY

A. N. Naimov¹, M. V. Bystretsky²

Vologda State University, Russia
e-mail: ¹naimovan@vogu35.ru, ²pmbmv@bk.ru

In the paper was investigated the a priori estimate and the existence of periodic solutions of a fixed period for a system of second-order ordinary differential equations with the main quasi-homogeneous non-linearity. It is proved that an a priori estimate of periodic solutions takes place if the corresponding unperturbed system does not have non-zero bounded solutions. Under the conditions of an a priori estimate, using methods for calculating the mapping degree of vector fields, a criterion for the existence of periodic solutions under any perturbation from a given class is formulated and proven. The results obtained differ from earlier results in that the set of zeros of the main non-linear part is not taken into account.

Keywords: quasi-homogeneous non-linearity, perturbation, periodic solution, a priori estimate, the mapping degree of vector field.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00032).

REFERENCES

1. Arnold, V.I., *Dopolnitel'nyye glavy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Additional Chapters on the Theory of Ordinary Differential Equations), Moscow: Nauka, 1978.
2. Mukhamadiev, E. and Naimov, A.N., On the solvability of a periodic problem for a system of ordinary differential equations with the main positive homogeneous non-linearity, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 289–291.
3. Mukhamadiev, E. and Naimov, A.N., On the solvability of a periodic problem for a system of non-linear ordinary differential equations of second order, *Differ. Uravn.*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 312–321.
4. Krasnoselsky, M.A. and Zabreiko, P.P., *Geometricheskiye metody nelineynogo analiza* (Geometric Methods of Non-Linear Analysis), Moscow: Nauka, 1975.