

Том 60, Номер 4

ISSN 0374-0641

Апрель 2024



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 4, 2024

ЛЮДИ НАУКИ

К восьмидесятипятилетию Виктора Антоновича Садовниченко 435

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Асимптотически устойчивые решения с пограничными и внутренними слоями
в прямых и обратных задачах для сингулярно возмущённого уравнения теплопроводности
с нелинейной тепловой диффузией
М. А. Давыдова, Г. Д. Рублев 439
- Формула Кристоффеля–Дарбу для полиномиальных собственных функций
линейных дифференциальных уравнений второго порядка
В. Е. Круглов 463
- О существовании нелинеаризуемых решений в неклассической двухпараметрической
нелинейной краевой задаче
В. Ю. Мартынова 472
- Оптимизационная обратная спектральная задача для одномерного оператора Шрёдингера
на всей оси
В. А. Садовнический, Я. Т. Султанаев, Н. Ф. Валеев 492
- О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных
дифференциальных систем
А. Х. Сташ, Н. А. Лобода 500
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Обратная задача для волнового уравнения с двумя нелинейными членами
В. Г. Романов 508
-

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Начальная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свёртки
третьего порядка
С. Н. Асхабов 521
- Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений,
возникающих в теории вязкоупругости
Д. В. Георгиевский, Н. А. Раутиан 533
-

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Стабилизация переключаемой системы с соизмеримыми запаздываниями
при медленных переключениях

А. В. Ильин, А. С. Фурсов

550

Сингулярно возмущённая задача оптимального слежения

В. А. Соболев

561

ЛЮДИ НАУКИ

К ВОСЬМИДЕСЯТИПЯТИЛЕТИЮ ВИКТОРА АНТОНОВИЧА САДОВНИЧЕГО



3 апреля 2024 г. исполнилось 85 лет выдающемуся учёному, всемирно известному специалисту в области математического анализа, функционального анализа, дифференциальных уравнений, прикладной математики, информатики, теоретической и прикладной механики, главному редактору журнала “Дифференциальные уравнения”, ректору Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, академику РАН, крупнейшему организатору науки и образования, видному общественному деятелю Виктору Антоновичу Садовничему.

Виктор Антонович родился и вырос в селе Краснопаловка Харьковской области. После окончания школы в связи с затруднительным материальным положением в семье работал на шахте в г. Горловка. В 1958 г. поступил на механико-математический факультет Московского университета, с отличием его окончил и всю дальнейшую жизнь посвятил Московскому университету. Преподавательскую деятельность В.А. Садовничий начал на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета. В 1967 г. он блестяще защитил кандидатскую диссертацию на тему “Регуляризованные суммы собственных значений общих задач для обыкновенных дифференциальных уравнений” под руководством проф. А.Г. Костюченко, а уже в 1974 г. — докторскую диссертацию на тему “О некоторых вопросах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от спектрального параметра”.

Все годы работы в Московском университете В.А. Садовничий успешно сочетает научно-педагогическую и административно-организационную деятельность. В 1972 г. он стал заме-

стителем декана механико-математического факультета, в 1981–1982 гг. заведовал кафедрой функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики, в 1982 г. был назначен на должность проректора, а в 1984 г. — на должность первого проректора. С 1982 г. и по настоящее время В.А. Садовнический возглавляет кафедру математического анализа механико-математического факультета. В 1994 г. Виктор Антонович избран членом-корреспондентом, а в 1997 г. — действительным членом Российской академии наук. В период с 2008 по 2013 гг. являлся вице-президентом РАН.

В начале 1992 г., в сложнейшее для страны время политических и экономических перемен, В.А. Садовнический был избран ректором Московского университета на первых в истории университета демократических выборах на альтернативной основе, а после ещё трижды избирался, а также неоднократно назначался ректором МГУ Указами Президента России.

Благодаря самоотверженной работе Виктора Антоновича Московскому университету в тяжёлые для образования и науки 90-е годы удалось не только сохранить свой высокий учебный и научный потенциал, но и подняться на новый уровень развития. При руководстве В.А. Садовнического были построены новая Фундаментальная библиотека, Шуваловский, Ломоносовский, 3-й и 4-й гуманитарные корпуса, Медицинский научно-образовательный центр, новое общежитие на пять тысяч мест и здание лицея для одарённых детей. По его инициативе в МГУ созданы как новые факультеты по актуальным направлениям, так и новые научно-исследовательские институты, открыты филиалы университета в странах СНГ и Европы и совместный университет в г. Шэньчжэне Китая. При руководстве Виктора Антоновича был запущен масштабный федеральный проект — новая технологическая долина МГУ в центре Москвы. Общая площадь территории инновационного научного центра будет составлять 17 гектаров, а центр будет включать 9 кластеров: “Ломоносов”, “Нанотех”, “Инфотех”, “Биомед”, “Космос”, “Геотех”, “Междисциплинарный кластер”, “Инжиниринг” и “Образовательный”, первый построенный из которых — “Ломоносов” (размещается на территории в 65 тысяч квадратных метров) — уже успешно функционирует и является местом притяжения компаний, занимающихся передовыми технологиями и разработками.

По инициативе Виктора Антоновича созданы Российский союз ректоров, Российский союз олимпиад школьников и Евразийская ассоциация университетов. В.А. Садовнический — почётный доктор многих российских и зарубежных университетов, почётный член многих зарубежных академий наук, входит в состав Совета при Президенте Российской Федерации по науке и образованию.

В.А. Садовнический — лауреат Государственной премии СССР (1989), Государственной премии Российской Федерации в области науки и техники (2002), премии Правительства Российской Федерации в области образования (2006, 2012), премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники (2011), Государственной премии Республики Казахстан (2004), Государственной премии Республики Башкортостан в области науки и техники (2011), награждён золотой медалью РАН имени М.В. Келдыша за цикл работ по спектральной теории операторов (с подробным списком работ В.А. Садовнического можно ознакомиться по адресу <https://istina.msu.ru/profile/SVA/>). Указом Президента РФ от 3 апреля 2024 г. В.А. Садовническому присвоено звание Героя труда Российской Федерации. Среди правительственных наград Виктора Антоновича: орден Александра Невского, ордена “За заслуги перед Отечеством” II, III, IV степеней, два ордена Трудового Красного Знамени; ордена Русской православной церкви: орден святого благоверного князя Даниила Московского II степени (1997), ордена святителя Иннокентия — митрополита Московского и Коломенского II степени (1999) и I степени (2024), орден Преподобного Сергия Радонежского II степени (2002). В.А. Садовнический имеет награды зарубежных государств: степень Командора ордена Почётного Легиона (Франция), орден Восходящего Солнца II степени “Золотые и серебряные

лучи” (Япония), орден Франциска Скорины (Республика Беларусь), орден “Достык” (Казахстан), орден “Барыс” (Казахстан), орден “Честь и слава” I степени (Абхазия), орден Дружбы (Южная Осетия), орден Дружбы (Узбекистан). Виктор Антонович — Почётный гражданин г. Москвы.

Под руководством Виктора Антоновича почти 70 его учеников успешно защитили кандидатские диссертации и более 20 — докторские. Он подготовил и в разные годы прочитал на механико-математическом факультете МГУ несколько спецкурсов, а также обязательные курсы по математическому анализу и функциональному анализу, которые легли в основу большого ряда монографий, учебников и учебных пособий.

В.А. Садовничий известен не только как гениальный автор научных математических работ, но и как автор содержательных работ по проблемам развития образования в нашей стране, поддержке и развитию фундаментальных и прикладных исследований, академической науке, гуманитарному образованию, сохранению научного потенциала, проблемам развития и укрепления научных и педагогических связей внутри страны и между народами, поддержке молодежи.

Выдающийся талант, огромное трудолюбие, искреннее желание принести пользу науке и образованию в родной стране — всё это отличает В.А. Садовниченко как авторитетнейшего общественного деятеля, пользующегося заслуженным признанием и уважением.

Желаем дорогому Виктору Антоновичу крепкого здоровья, неиссякаемой энергии, долгих активных лет жизни и успехов во всех его начинаниях.

Редакционная коллегия

*Авторы публикуемых в этом номере
статей посвящают их юбилею
Главного редактора журнала
“Дифференциальные уравнения”
академика Российской академии наук
Виктора Антоновича Садовниченко*

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.54

**АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ
С ПОГРАНИЧНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ
В ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИЕЙ**

М. А. Давыдова¹, Г. Д. Рублев²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

²Институт физики атмосферы имени А.М. Обухова РАН, г. Москва

e-mail: ¹m.davydova@physics.msu.ru, ²rublev.gd15@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 30.09.2023 г., после доработки 30.11.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Предложен новый подход к исследованию прямых и обратных задач для сингулярно возмущённого уравнения теплопроводности с нелинейно зависящей от температуры тепловой диффузией, основанный на развитии и использовании методов асимптотического анализа в нелинейных сингулярно возмущённых задачах реакция–диффузия–адвекция. Суть подхода рассмотрена на примере класса одномерных стационарных задач с нелинейными граничными условиями, для которого выделен случай применимости асимптотического анализа. Сформулированы достаточные условия существования классических решений пограничного типа и типа контрастных структур, построены асимптотические приближения произвольного порядка точности таких решений, обоснованы алгоритмы построения формальных асимптотик и исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову стационарных решений с пограничными и внутренними слоями как решений соответствующих параболических задач. Рассмотрен класс нелинейных задач, учитывающих боковой теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Доказана теорема существования и единственности классического решения с пограничными слоями в задачах такого типа. В качестве приложений исследования представлены методы решения конкретных прямой и обратной задач нелинейного теплообмена, связанных с повышением эффективности эксплуатации прямолинейных нагревательных элементов в плавильных печах — теплообменниках: расчёт тепловых полей в нагревательных элементах и метод восстановления коэффициентов тепловой диффузии и теплообмена по данным моделирования.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности с нелинейной тепловой диффузией, задача нелинейной теплопроводности, задача нелинейного теплообмена, сингулярно возмущённая задача, решение с пограничными и внутренними переходными слоями, тепловая структура, асимптотический метод, коэффициентная обратная задача теплообмена.

DOI: 10.31857/S0374064124040018, EDN: PGHBJK

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы особый интерес вызывают задачи нелинейного тепломассопереноса в связи с появлением новых аналитических методов их исследования, а также интенсивным развитием методов численного моделирования, способствующих получению и применению новых результатов как в технических разработках, в промышленности и энергетике, так

и при решении современных задач экологии, биологии, химии и материаловедения (см., например, [1–7]). Первые работы в этом направлении появились ещё в начале прошлого века (см., например, [8]). Основные методы исследования диффузионных моделей, предложенные в те годы, наиболее полно рассмотрены в [9]. Новый важный этап в изучении задач нелинейного теплопереноса был связан с разработкой методов, направленных на поиск точных [1] и приближённых [10] автомодельных решений. Интерес к этому ограниченному классу решений обусловлен тем, что он наиболее прост для изучения эффектов нелинейности. С использованием автомодельных решений были описаны диссипативные структуры в нелинейных средах и, в частности, тепловые структуры, связанные с явлением пространственной локализации тепла при воздействии нелинейных тепловых источников (см., например, [1]).

Одновременно развивались альтернативные методы исследования таких задач, основанные, например, на использовании группового анализа (см., например, [4]). Среди приближённых методов отметим методы теории возмущений [2, 11], которые оказались эффективными, например, при изучении свойств композиционных материалов с мелкими включениями, при рассмотрении регулярных тепловых режимов, соответствующих развитой стадии процесса, при изучении задач типа реакция–диффузия экологии и генетики.

Отметим также результаты численного моделирования в задачах нелинейной теплопроводности (см., например, [2, 3]) как результаты основного подхода при изучении нелинейных процессов. Одним из наиболее значимых примеров использования такого подхода является математическое моделирование процесса эволюции тепловых структур (см., например, [1, 2]), в частности, многомерных [12].

В настоящей работе рассмотрен новый подход к исследованию задач нелинейного теплообмена, основанный на дальнейшем развитии и использовании методов асимптотического анализа [13–15] для систем тихоновского типа [13] с нелинейными граничными условиями в условно устойчивом случае. Возможности нового подхода продемонстрированы на примере класса одномерных сингулярно возмущённых стационарных задач для квазилинейного уравнения теплопроводности с учётом конвекции. Изучены различные нелинейные краевые режимы, соответствующие наличию тепловых потоков на границе или конвективного теплообмена с постоянным или нелинейно зависящим от температуры коэффициентом теплообмена.

Квазилинейное уравнение теплопроводности может быть сведено к уравнению с квадратичной зависимостью от градиента решения. Впервые одномерная стационарная задача Дирихле для уравнения такого типа исследовалась в работе [14], где на основе метода сшивания доказано существование классического решения с внутренним переходным слоем. Многомерный аналог такой задачи изучался в работе [5] с использованием метода дифференциальных неравенств [15], на основе которого доказано существование устойчивых решений с пограничными и внутренними слоями. В настоящей работе впервые рассматриваются стационарные сингулярно возмущённые задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в наиболее общей постановке с учётом нелинейной диффузии, конвекции и заданием нелинейных условий на границе расчётной области. Для данного класса задач исследуются вопросы о существовании классических решений с пограничными и внутренними слоями (одномерные тепловые структуры) и об асимптотической устойчивости по Ляпунову таких стационарных решений с использованием метода [15] и принципа сравнения (см., например, [16, 17]).

В последнее время в теории сингулярных возмущений сформировалось и активно развивается новое направление, ориентированное на разработку эффективных численных алгоритмов решения прямых и обратных задач для нелинейных сингулярно возмущённых уравнений типа реакция–диффузия–адвекция на основе предварительного асимптотическо-

го анализа (см., например, [18, 19]). Новый численно-асимптотический подход основан на использовании информации о свойствах решений прямых сингулярно возмущённых задач, полученной в результате строгого асимптотического анализа. В итоге удаётся свести исходную задачу к задаче с более простым численным решением и значительно сэкономить вычислительные ресурсы, сократить время счёта, повысить стабильность работы вычислительного процесса по сравнению с обычными вариационными методами [20]. Данный подход использует априорную информацию о положении внутреннего слоя решения прямой задачи. Другая модификация данного метода впервые предложена в статье [21], где в задаче восстановления параметров модели применяется параметризованное асимптотическое приближение решения прямой задачи. Данный подход оказался эффективным при решении некоторых прикладных задач геофизики [6, 21, 22]. Он же использован в настоящей работе при решении конкретной обратной задачи нелинейного теплообмена, связанной с повышением эффективности эксплуатации прямолинейных нагревательных элементов в плавильных печах — теплообменниках с конвективным или излучающим режимами. Разработан новый метод восстановления теплофизических характеристик нелинейных сред (коэффициентов тепловой диффузии и теплообмена) по данным моделирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пространственно-одномерное стационарное тепловое поле в нелинейной диссипативной среде описывается задачей

$$\frac{d}{dx} \left(k(u, x) \frac{du}{dx} \right) - A \frac{du}{dx} = -f(u, x), \quad x \in (0, l), \quad N[u]|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = \bar{g}, \quad (1)$$

где $u(x)$ — значение температуры в точке с координатой x ; $k(u, x)$ — коэффициент теплопроводности, $0 < k_1 < k(u, x) < k_2$; A — локальная скорость среды, $f(u, x)$ — мощность распределённых источников тепла; $\bar{g}$ — значение температуры при $x = l$. В качестве нелинейного оператора $N[u]$ при $x = 0$ может быть задан один из следующих операторов:

$$N[u]|_{x=0} = \left[k(u, x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} + q,$$

соответствующий наличию теплового потока плотности q при $x = 0$;

$$N[u]|_{x=0} = \left[k(u, x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} - \alpha_0(u(0) - U),$$

соответствующий наличию конвективного теплообмена с окружающей средой (с температурой U и коэффициентом теплообмена $\alpha_0 > 0$) при $x = 0$;

$$N[u]|_{x=0} = \left[k(u, x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} - \alpha_1(u(0))(u(0) - U),$$

соответствующий наличию конвективного теплообмена с учётом излучения границы $x = 0$ по закону Стефана–Больцмана, где $\alpha_1(u) = \alpha_0 + \sigma(u + U)(u^2 + U^2)$, σ — постоянная Стефана–Больцмана.

Заметим, что в случае $A = A(x)$ в правой части уравнения из задачи (1) появляется слагаемое, пропорциональное $\operatorname{div} A$, но и в этом случае уравнение сводится к уравнению того же типа при условии, что скорость $A(x)$ задана.

Определяя безразмерные температуру и длину как отношение соответствующих размерных величин к U и l (предполагается, что температура не сильно отличается от температуры

окружающей среды), а также полагая, что процесс энергоснабжения преобладает над процессом тепловой диффузии, приходим к задаче в безразмерных переменных:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} - A_1(u, x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - A_2(u, x) \frac{du}{dx} \right) = B(u, x), \quad x \in (0, 1),$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} + g_1(u(0, \varepsilon)) = 0, \quad u|_{x=1} = g_2, \quad (2)$$

где наличие малого параметра $\varepsilon \in I_\varepsilon$, $I_\varepsilon := (0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, определяет соотношение между членами уравнения. Обозначения для безразмерных переменных сохранены для удобства.

Преобладание процесса энергоснабжения над процессом тепловой диффузии характерно, например, для работы промышленных химических печей-реакторов, в которых протекают эндотермические (экзотермические) процессы, связанные с химической трансформацией вещества. В настоящей работе одномерная модель типа (2) применена в задачах оптимизации работы печей-теплообменников (см. п. 8) и восстановления коэффициента тепловой диффузии нелинейной среды по данным моделирования.

Для задачи (2) предполагаем выполненными следующие условия.

Условие 1. Функции $A_1(u, x)$, $A_2(u, x)$, $B(u, x)$, $g_1(u)$ достаточно гладкие при $x \in [0, 1]$, $u \in I$, I — некоторый интервал.

Условие 2. Вырожденное уравнение $B(u, x) = 0$ имеет решение $u = \varphi(x) \in I$, причём $B_u(\varphi(x), x) > 0$, $x \in [0, 1]$.

Степень гладкости коэффициентов задачи (2) определяется порядком строящегося асимптотического приближения решения.

2. ФОРМАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

Исследуем решение погранслоного типа задачи (2), которое близко к решению $u = \varphi(x)$ вырожденного уравнения внутри отрезка $[0, 1]$, а в точках $x = 0$, $x = 1$ удовлетворяет граничным условиям из задачи (2).

С целью описания решения в окрестности граничной $x = 1$ определим присоединённую систему уравнений:

$$\frac{d\tilde{v}}{d\rho} = A_1(\tilde{u}, 1)\tilde{v}^2 + B(\tilde{u}, 1), \quad \frac{d\tilde{u}}{d\rho} = \tilde{v}, \quad -\infty < \rho < 0, \quad \tilde{u}(-\infty) = \varphi(1), \quad \tilde{u}(0) = g_2. \quad (3)$$

В силу условия 2 точка покоя $(\varphi(1), 0)$ на фазовой плоскости системы (3) классифицируется как точка покоя типа седла. Положим, для определённости, что $g_2 > \varphi(1)$.

Для существования решения краевой задачи (3) достаточно, чтобы сепаратриса, входящая в точку покоя $(\varphi(1), 0)$ при $\rho \rightarrow -\infty$, пересекала прямую $\tilde{u} = g_2$. Уравнение соответствующей сепаратрисы

$$\tilde{v}(\tilde{u}) = \left[2 \int_{\varphi(1)}^{\tilde{u}} B(\xi, 1) \exp \left\{ 2 \int_{\xi}^{\tilde{u}} A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi \right]^{1/2} \quad (4)$$

получается с использованием выражения для первого интеграла системы уравнений из задачи (3), который выписывается в явном виде. С учётом уравнения (4) имеем ограничение на выбор краевого режима при $x = 1$ в задаче (2) (см. ниже условие 3).

Условие 3. Справедливо неравенство

$$\int_{\varphi(1)}^s B(\xi, 1) \exp \left\{ 2 \int_{\xi}^s A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi > 0, \quad \varphi(1) < s \leq g_2 \in I.$$

В соответствии с методом пограничных функций [13] асимптотическое приближение решения погранслоного типа ищем в виде

$$U(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon) + R(\rho, \varepsilon). \quad (5)$$

Здесь $\bar{u}(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$ — регулярное разложение, $\Pi(\tau, \varepsilon) = \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \dots$, $R(\tau, \varepsilon) = R_0(\rho) + \varepsilon R_1(\rho) + \dots$ — погранслоные разложения, описывающие пограничные слои в окрестности граничных точек $x=0$ и $x=1$ соответственно, $\tau = x/\varepsilon$, $\rho = (x-1)/\varepsilon$.

Подставляя разложение (5) в задачу (2) и используя алгоритм построения асимптотики [13], определяем коэффициенты разложения (5). В частности, коэффициенты регулярного разложения при $n \geq 1$ являются решениями линейных уравнений и определяются равенствами $\bar{u}_n(x) = B_u^{-1}(\varphi(x), x) \bar{f}_n(x)$, где $\bar{f}_n(x)$ — известные функции, выражающиеся через члены асимптотики $\bar{u}_k(x)$, $k < n$. Например, $\bar{f}_1(x) = 0$.

Старший член погранслоного разложения $\Pi(\tau, \varepsilon)$ описывается нелинейной задачей

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Pi_0}{d\tau^2} &= A_1(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0) \left(\frac{d\Pi_0}{d\tau} \right)^2 + B(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0), \quad 0 < \tau < +\infty, \\ \frac{d\Pi_0}{d\tau} \Big|_{\tau=0} &= 0, \quad \Pi_0(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В качестве решения задачи (6) берём функцию $\Pi_0(\tau) = 0$.

Аналогично старший член погранслоного разложения $R(\rho, \varepsilon)$ определяется задачей

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_0}{d\rho^2} &= A_1(\varphi(1) + R_0(\rho), 1) \left(\frac{dR_0}{d\rho} \right)^2 + B(\varphi(1) + R_0(\rho), 1), \quad -\infty < \rho < 0, \\ R_0(0) &= g_2 - \varphi(1), \quad R_0(-\infty) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Системе (7), если в ней положить $\tilde{u}(\rho) := \varphi(1) + R_0(\rho)$, соответствует присоединённая система (3). В силу условия 3 существует решение задачи (7), которое даётся квадратурной формулой

$$\int_{g_2}^{\varphi(1)+R_0(\rho)} \left[2 \int_{\varphi(1)}^{\zeta} B(\xi, 1) \exp \left\{ 2 \int_{\xi}^{\zeta} A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi \right]^{-1/2} d\zeta = \rho. \quad (8)$$

Формула (8) получается с использованием уравнения (4). Имеет место следующая

Лемма 1. *Справедливы оценки*

$$\tilde{C} \exp\{(\bar{\lambda} + \delta)\rho\} \leq |R_0(\rho)| \leq \tilde{C} \exp\{(\bar{\lambda} - \delta)\rho\}, \quad (9)$$

$$\tilde{C} \exp\{(\bar{\lambda} + \delta)\rho\} \leq \tilde{v}(\rho) \leq \tilde{C} \exp\{(\bar{\lambda} - \delta)\rho\}, \quad (10)$$

где $\bar{\lambda} := \sqrt{B_u(\varphi(1), 1)}$, $0 < \delta < \bar{\lambda}$, $-\infty < \rho < 0$.

Под обозначением $\tilde{C}$ подразумеваются некоторые положительные константы, независимые от ε и различные в оценках (9) и (10). Доказательство этого утверждения аналогично соответствующему доказательству из работы [23].

При $n \geq 1$ для нахождения функций $\Pi_n(\tau)$ имеем краевые задачи

$$\frac{d^2 \Pi_n}{d\tau^2} - B_u(\varphi(0), 0) \Pi_n = H_n^-(\tau), \quad \frac{d\Pi_n(0)}{d\tau} = g_l^{(n)}, \quad \Pi_n(+\infty) = 0, \quad (11)$$

где $g_l^{(n)}$, $H_n^-(\tau)$ — известные на n -м шаге функции, выражающиеся рекуррентно через члены асимптотики порядка $k < n$, в частности, $g_l^{(1)} = -(g_1(\varphi(0)) + \varphi'(0))$, $H_1^{(-)}(\tau) = 0$. Решения задач (11) даются формулами

$$\begin{aligned} \Pi_n(\tau) = & -\frac{g_l^{(n)}}{\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} e^{-\tau \sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} - \\ & -\frac{1}{2\sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} \left[\int_0^\tau e^{-\tau \sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} \left(e^{s \sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} + e^{-s \sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} \right) H_n^-(s) ds + \right. \\ & \left. + \int_\tau^\infty \left(e^{-\tau \sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} + e^{\tau \sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} \right) e^{-s \sqrt{B_u(\varphi(0), 0)}} H_n^-(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки $|\Pi_n(\tau)| \leq C e^{-\kappa \tau}$, $\kappa > 0$, $n \geq 1$. Здесь и далее под C и κ подразумеваются подходящие положительные константы, значения которых не зависят от ε , различные в разных оценках.

Члены погранслоного разложения $R(\rho, \varepsilon)$ определяются как решения линейных задач ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_n}{d\rho^2} - 2A_1(\tilde{u}, 1) \tilde{v}(\rho) \frac{dR_n}{d\rho} - \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \right] R_n(\rho) &= H_n^{(+)}(\rho), \quad -\infty < \rho < 0, \\ R_n(0) &= -\bar{u}_n(1), \quad R_n(-\infty) = 0, \end{aligned}$$

и представимы в явном виде

$$R_n(\rho) = \tilde{v}(\rho) \int_0^\rho \frac{d\xi}{p(\xi) \tilde{v}^2(\xi)} \int_{-\infty}^\xi \tilde{v}(s) p(s) H_n^{(+)}(s) ds - \bar{u}_n(1) \frac{\tilde{v}(\rho)}{\tilde{v}(0)}, \quad (12)$$

где $p(\rho) = \exp\{-\int_0^\rho 2A_1(\tilde{u}, 1) \tilde{v} d\xi\}$, $H_n^{(+)}(\rho)$ — известные на n -м шаге функции, выражающиеся рекуррентно через члены асимптотики порядка $k < n$. В частности,

$$\begin{aligned} H_1^{(+)}(\rho) &= \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \varphi'(1) + \frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial x} \right] \tilde{v}^2(\rho) \rho + \\ &+ [2A_1(\tilde{u}, 1) \varphi'(1) + A_2(\tilde{u}, 1)] \tilde{v}(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \rho \varphi'(1) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial x} \rho. \end{aligned}$$

Используя лемму 1 и формулы (12), по аналогии с работой [23] получаем оценки $|R_n(\rho)| < C e^{\kappa \rho}$, $n \geq 1$.

Таким образом, ряд (5) построен. Обозначим через $U_n(x, \varepsilon)$ частичную сумму n -го порядка ряда (5):

$$U_n(x, \varepsilon) := \varphi(x) + R_0(\rho) + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k (\bar{u}_k(x) + \Pi_k(\tau) + R_k(\rho)). \quad (13)$$

Из алгоритма построения ряда (5) следует, что

$$L_\varepsilon[U_n] := \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 U_n}{dx^2} - A_1(U_n, x) \left(\frac{dU_n}{dx} \right)^2 - A_2(U_n, x) \frac{dU_n}{dx} \right) - B(U_n, x) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in (0, 1), \quad (14)$$

$$N[U_n]|_{x=0} := \frac{dU_n(0, \varepsilon)}{dx} + g_1(U_n(0, \varepsilon)) = O(\varepsilon^n), \quad U_n(1, \varepsilon) = g_2, \quad n \geq 0. \quad (15)$$

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Доказательство существования классического решения задачи (2), для которого справедливо разложение (5), основано на использовании принципа сравнения (см., например, [16, 17]).

Функции $\alpha(x, \varepsilon), \beta(x, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2(0, 1) \cap \mathbb{C}^1[0, 1] \cap \mathbb{C}[0, 1]$ называются *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи* (2) соответственно, если при $\varepsilon \in I_\varepsilon$ выполняются дифференциальные неравенства

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1], \quad L_\varepsilon[\beta] \leq 0 \leq L_\varepsilon[\alpha], \quad x \in (0, 1),$$

$$N[\beta]|_{x=0} \leq 0 \leq N[\alpha]|_{x=0}, \quad \beta(1, \varepsilon) \geq g_2, \quad \alpha(1, \varepsilon) \leq g_2.$$

Существование нижнего и верхнего решений задачи (2) гарантирует существование решения $u(x, \varepsilon)$ этой задачи такого, что $\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$. Основная идея метода [15] состоит в получении нижнего и верхнего решений путём модификаций частичной суммы (13) определённым образом:

$$\begin{aligned} \alpha_n(x, \varepsilon) &= U_n(x, \varepsilon) - \varepsilon^n(e^{-\mu\tau} - r_\alpha(\rho) + \gamma), \\ \beta_n(x, \varepsilon) &= U_n(x, \varepsilon) + \varepsilon^n(e^{-\mu\tau} + r_\beta(\rho) + \gamma) \end{aligned} \quad (16)$$

при фиксированном n , где $n \geq 1$, числа $\mu > 0$, $\gamma > 0$, параметр $\varepsilon \in I_\varepsilon$, а функции $r_{\alpha, \beta}(\rho)$ являются решениями задач вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r_{\alpha, \beta}}{d\rho^2} - 2A_1(\tilde{u}, 1)\tilde{v}(\rho)\frac{dr_{\alpha, \beta}}{d\rho} - \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u}\tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \right] r_{\alpha, \beta} = \\ = \pm C e^{\kappa\rho} \mp \gamma \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u}\tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} - \frac{\partial B(\varphi(1), 1)}{\partial u} \right], \\ r_{\alpha, \beta}(0) = 0, \quad r_{\alpha, \beta}(-\infty) = 0, \end{aligned}$$

$C > 0$, $\kappa > 0$. В правой части уравнения знаки в верхней строке соответствуют индексу “ α ”, знаки в нижней строке — индексу “ β ”.

Соответствующий выбор параметров γ , μ , C , κ обеспечивает выполнение дифференциальных неравенств. Например, с учётом оценки (14) имеем

$$L_\varepsilon[\beta_n] = O(\varepsilon^{n+1}) - \varepsilon^n \gamma B_u(\varphi(x), x) + \varepsilon^n e^{-\mu\tau} (\mu^2 - B_u(\varphi(0), 0)) - \varepsilon^n C e^{\kappa\rho} \leq 0$$

при достаточно большом γ и достаточно малом μ . Аналогично $L_\varepsilon[\alpha_n] \geq 0$.

Докажем упорядоченность верхнего и нижнего решений. Для этого рассмотрим разность

$$\beta_n(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon) = 2\varepsilon^n \gamma + \varepsilon^n (r_\beta(\rho) - r_\alpha(\rho)) + 2\varepsilon^n e^{-\mu\tau}.$$

Пусть $F_n(\rho) := r_\beta(\rho) - r_\alpha(\rho)$. Тогда функция F_n является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_n}{d\rho^2} - 2A_1(\tilde{u}, 1)\tilde{v}(\rho)\frac{dF_n}{d\rho} - \left(\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u}\tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \right) F_n = \\ = -2C e^{\kappa\rho} + 2\gamma \left(\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u}\tilde{v}^2(\rho) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} - \frac{\partial B(\varphi(1), 1)}{\partial u} \right), \\ F_n(0) = 0, \quad F_n(-\infty) = 0 \end{aligned}$$

и представима в явном виде:

$$F_n(\rho) = -\tilde{v}(\rho) \int_{\rho}^0 \frac{d\xi}{p(\xi)\tilde{v}^2(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{v}(s)p(s) \left[-2Ce^{ks} + 2\gamma \left(\frac{\partial A_1(\tilde{u}, 1)}{\partial u} \tilde{v}^2(s) + \frac{\partial B(\tilde{u}, 1)}{\partial u} - \frac{\partial B(\varphi(1), 1)}{\partial u} \right) \right] ds.$$

Поскольку выражение в круглых скобках экспоненциально убывает при $s \rightarrow -\infty$, то, выбирая параметры C , κ , γ так, чтобы выполнялось неравенство $F_n(\rho) \geq 0$, $-\infty < \rho \leq 0$, имеем $\beta_n(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon) \geq 0$.

Учитывая равенства (15), в граничных точках находим

$$N[\beta_n]|_{x=0} = -\mu\varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n) < 0, \quad N[\alpha_n]|_{x=0} = \mu\varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n) > 0, \\ \beta_n|_{x=1} = g_2 + \varepsilon^n \gamma > g_2, \quad \alpha_n|_{x=1} = g_2 - \varepsilon^n \gamma < g_2,$$

так как $\mu > 0$, $\gamma > 0$, а ε — достаточно малое. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ существует классическое решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2) такое, что для любого фиксированного $n \geq 0$ имеет место оценка в равномерной норме

$$\|u(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $U_n(x, \varepsilon)$ — частичная сумма (13).

Уравнение из задачи (2) может быть представлено в виде нелинейной системы из двух уравнений первого порядка. Переписанная таким образом задача (2) классифицируется как двухточечная задача для тихоновской системы с нелинейным граничным условием в условно устойчивом случае [13]. С учётом выводов работы [13] имеем оценку

$$\left\| \frac{du(x, \varepsilon)}{dx} - \frac{dU_n(x, \varepsilon)}{dx} \right\| = O(\varepsilon^n), \quad n \geq 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (17)$$

Лемма 2. Пусть $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ — нижнее и верхнее решения задачи (2), а $u_\varepsilon(x) := u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (2) из теоремы 1. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ имеют место оценки

$$\left\| \frac{d(\beta_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right\| = O(\varepsilon^{n-1}), \quad \left\| \frac{d(\alpha_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right\| = O(\varepsilon^{n-1}), \quad n \geq 1, \quad x \in [0, 1].$$

Докажем, например, вторую оценку:

$$\frac{d}{dx}(\alpha_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x)) = \frac{d}{dx}(\alpha_n(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)) + \frac{d}{dx}(U_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x)). \quad (18)$$

Из равенства (18) с учётом (16) и (17) следует искомая оценка.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

Асимптотический метод дифференциальных неравенств используется для исследования асимптотической устойчивости по Ляпунову решений с пограничными и внутренними слоями как решений соответствующих параболических задач (см., например, [24]). Исследуем

асимптотическую устойчивость стационарного решения $u_\varepsilon(x)$ как решения следующей параболической задачи:

$$\begin{aligned} M_\varepsilon[v] &:= \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - A_1(v, x) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - A_2(v, x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - B(v, x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ \frac{\partial v(x, t, \varepsilon)}{\partial x} \Big|_{x=0} + g_1(v(0, t, \varepsilon)) &= 0, \quad v(1, t) = g_2, \quad t \geq 0, \\ v(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (19)$$

при $u_{init}(x, \varepsilon) = u_\varepsilon(x)$. Будем полагать, что дополнительные условия в задаче (19) согласованы:

$$\frac{\partial u_{init}}{\partial x} \Big|_{x=0} + g_1(u_{init}(0, \varepsilon)) = 0, \quad u_{init}(1, \varepsilon) = g_2.$$

Функции $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon), \hat{\beta}(x, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}^{2,1}((0, 1) \times (0, +\infty)) \cap \mathbb{C}^{1,0}([0, 1] \times [0, +\infty)) \cap \mathbb{C}([0, 1] \times [0, +\infty))$ называются, соответственно, *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи* (19), если при $\varepsilon \in I_\varepsilon$ выполняются неравенства:

- 1⁰. $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, t, \varepsilon), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0;$
- 2⁰. $M_\varepsilon[\hat{\beta}] \leq 0 \leq M_\varepsilon[\hat{\alpha}], \quad x \in (0, 1), \quad t > 0;$
- 3⁰. $N[\hat{\beta}]|_{x=0} \leq 0 \leq N[\hat{\alpha}]|_{x=0}, \quad \hat{\beta}(1, t, \varepsilon) \geq g_2, \quad \hat{\alpha}(1, t, \varepsilon) \leq g_2, \quad t \geq 0;$
- 4⁰. $\hat{\alpha}(x, 0, \varepsilon) \leq u_{init}(x, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, 0, \varepsilon), \quad x \in [0, 1].$

Известно [17], что если существуют функции $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$, то задача (19) имеет решение $v(x, t, \varepsilon)$ такое, что $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) \leq v(x, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$.

Пусть

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon) &= u_\varepsilon(x) + (\alpha_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))e^{-\lambda t}, \\ \hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon) &= u_\varepsilon(x) + (\beta_n(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\lambda > 0$, n фиксировано ($n \geq 1$). В силу свойств функций $\alpha_n(x, \varepsilon), \beta_n(x, \varepsilon)$ функции (20) удовлетворяют неравенству 1⁰, а также неравенствам 3⁰ при $x = 1$. Неравенство 4⁰ выполняется, если $\alpha_n(x, \varepsilon) \leq u_{init}(x, \varepsilon) \leq \beta_n(x, \varepsilon)$. Покажем, что функции (20) удовлетворяют неравенствам 2⁰ и неравенствам 3⁰ при $x = 0$. С использованием леммы 2 докажем выполнение неравенств 2⁰. Рассмотрим

$$\begin{aligned} M_\varepsilon[\hat{\beta}_n] &= \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 \hat{\beta}_n}{dx^2} - A_1(\hat{\beta}_n, x) \left(\frac{d\hat{\beta}_n}{dx} \right)^2 - A_2(\hat{\beta}_n, x) \frac{d\hat{\beta}_n}{dx} \right) + \varepsilon^2 \lambda (\beta_n - u_\varepsilon) e^{-\lambda t} - B(\hat{\beta}_n, x) = \\ &= L_\varepsilon[u_\varepsilon] + e^{-\lambda t} [L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u_\varepsilon]] + \varepsilon^2 e^{-\lambda t} \left(A_1(\beta_n, x) \left(\frac{d\beta_n}{dx} \right)^2 + A_2(\beta_n, x) \frac{d\beta_n}{dx} \right) - \\ &- \varepsilon^2 e^{-\lambda t} \left(A_1(u_\varepsilon, x) \left(\frac{du_\varepsilon}{dx} \right)^2 + A_2(u_\varepsilon, x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) + \varepsilon^2 \left(A_1(u_\varepsilon, x) \left(\frac{du_\varepsilon}{dx} \right)^2 + A_2(u_\varepsilon, x) \frac{du_\varepsilon}{dx} - A_1(\hat{\beta}_n, x) \left(\frac{d\hat{\beta}_n}{dx} \right)^2 - \right. \\ &- \left. A_2(\hat{\beta}_n, x) \frac{d\hat{\beta}_n}{dx} \right) + \varepsilon^2 \lambda (\beta_n - u_\varepsilon) e^{-\lambda t} + B(u_\varepsilon, x) - B(\hat{\beta}_n, x) + e^{-\lambda t} [B(\beta_n, x) - B(u_\varepsilon, x)] = \\ &= L_\varepsilon[u_\varepsilon] + e^{-\lambda t} [L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u_\varepsilon]] + \varepsilon^2 e^{-\lambda t} \left[f\left(\frac{d\beta_n}{dx}, \beta_n, x\right) - f\left(\frac{du_\varepsilon}{dx}, u_\varepsilon, x\right) \right] + \varepsilon^2 \left[f\left(\frac{du_\varepsilon}{dx}, u_\varepsilon, x\right) - \right. \\ &- \left. f\left(\frac{d\hat{\beta}_n}{dx}, \hat{\beta}_n, x\right) \right] + \varepsilon^2 \lambda (\beta_n - u_\varepsilon) e^{-\lambda t} + B(u_\varepsilon, x) - B(\hat{\beta}_n, x) + e^{-\lambda t} [B(\beta_n, x) - B(u_\varepsilon, x)], \end{aligned}$$

где $f(v, u, x) := A_1(u, x)v^2 + A_2(u, x)v$. Применяя формулу Лагранжа, теорему 1 и лемму 2, находим

$$\begin{aligned} M_\varepsilon[\hat{\beta}_n] &= L_\varepsilon[u_\varepsilon] + e^{-\lambda t} \left[L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u_\varepsilon] + f_{vv}^*(\theta_1 - \theta_3 e^{-\lambda t}) \left(\varepsilon \frac{d(\beta_n - u_\varepsilon)}{dx} \right)^2 + \right. \\ &+ \varepsilon^2 f_{uu}^{**}(\theta_2 - \theta_4 e^{-\lambda t})(\beta_n - u_\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 (f_{vu}^*(\theta_2 - \theta_4 e^{-\lambda t}) + f_{uv}^{**}(\theta_1 - \theta_3 e^{-\lambda t}))(\beta_n - u_\varepsilon) \frac{d}{dx}(\beta_n - u_\varepsilon) + \\ &\left. + B_{uu}^*(\theta_5 - \theta_6 e^{-\lambda t})(\beta_n - u_\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \lambda(\beta_n - u_\varepsilon) \right] \leq \\ &\leq e^{-\lambda t} (-\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi(x), x) + O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{n+2}) + O(\varepsilon^{2n})) < 0, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

при достаточно большом γ и $\varepsilon \in I_\varepsilon$. Здесь f_{vv}^* , f_{uu}^{**} , f_{vu}^* , f_{uv}^{**} и B_{uu}^* — значения производных в некоторых промежуточных точках, $0 < \theta_i < 1$, $i = \overline{1, 6}$. Аналогично $M_\varepsilon[\hat{\alpha}_n] \geq 0$.

Учитывая равенства (15) и граничное условие при $x = 0$, имеем

$$\begin{aligned} N[\hat{\beta}_n]|_{x=0} &= \frac{\partial [u_\varepsilon(0) + (\beta_n(0, \varepsilon) - u_\varepsilon(0))e^{-\lambda t}]}{\partial x} + g_1(u_\varepsilon(0) + (\beta_n(0, \varepsilon) - u_\varepsilon(0))e^{-\lambda t}) + \\ &+ g_1(u_\varepsilon(0)) - g_1(u_\varepsilon(0)) + (g_1(\beta_n(0, \varepsilon)) - g_1(\beta_n(0, \varepsilon)))e^{-\lambda t} + (g_1(u_\varepsilon(0)) - g_1(u_\varepsilon(0)))e^{-\lambda t} = \\ &= e^{-\lambda t} (g_{1u}^*(\beta_n - u_\varepsilon)|_{x=0} - g_{1u}^{**}(\beta_n - u_\varepsilon)|_{x=0} - \mu \varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n)) = \\ &= e^{-\lambda t} (-\mu \varepsilon^{n-1} - g_{1uu}^*(\theta_7 - \theta_8 e^{-\lambda t})(\beta_n - u_\varepsilon)|_{x=0}^2 + O(\varepsilon^n)) = \\ &= e^{-\lambda t} (-\mu \varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{2n})) < 0, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

где g_{1u}^* , g_{1u}^{**} и g_{1uu}^* — значения производных в некоторых промежуточных точках. Аналогично $N[\hat{\alpha}_n]|_{x=0} > 0$.

Итак, функции $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$ при соответствующем выборе параметров γ , μ и λ , достаточно малом ε и фиксированном $n \geq 1$ являются нижним и верхним решениями задачи (19). Следовательно, задача (19) имеет решение $v(x, t, \varepsilon)$ такое, что $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon) \leq v(x, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$. С учётом этого приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ стационарное решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (19) асимптотически устойчиво по Ляпунову с локальной областью притяжения $u_{init}(x, \varepsilon) \in [\alpha_1(x, \varepsilon), \beta_1(x, \varepsilon)]$ и, следовательно, единственно в этой области.

5. КОНТРАСТНАЯ СТРУКТУРА ТИПА СТУПЕНЬКИ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} - A_1(u, x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - A_2(u, x) \frac{du}{dx} \right) &= B(u, x), \quad x \in (0, 1), \\ N_1[u]|_{x=0} &= 0, \quad N_2[u]|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\varepsilon \in I_\varepsilon$, $I_\varepsilon := (0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, $N_i[u] := \pm du/dx + g_i(u)$ — нелинейные операторы, причём знак “+” соответствует индексу $i = 1$, знак “−” соответствует индексу $i = 2$. Для задачи (21) предполагаем выполненными следующие условия.

Условие 4. Функции $A_1(u, x)$, $A_2(u, x)$, $B(u, x)$, $g_i(u)$ достаточно гладкие при $x \in [0, 1]$, $u \in I$, I — некоторый интервал.

Условие 5. Вырожденное уравнение $B(u, x) = 0$ имеет три корня $u = \varphi_i(x) \in I$, $i = \overline{1, 3}$, причём $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$, $B_u(\varphi_i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$, и $B_u(\varphi_2(x), x) < 0$.

Степень гладкости коэффициентов задачи определяется порядком асимптотического приближения решения, которое предстоит построить.

Асимптотическое приближение решения типа контрастной структуры, соответствующее переходу с корня вырожденного уравнения $\varphi_1(x)$ на корень $\varphi_3(x)$, получается путём C^1 -сшивания двух асимптотик погранслоного типа:

$$U^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \Pi^{(\mp)}(\tau_{(\mp)}, \varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi, \hat{x}, \varepsilon), \quad (22)$$

где

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x) + \varepsilon^2 \bar{u}_2^{(\mp)}(x) + \dots, \quad x \in [0, 1], \quad (23)$$

$$\Pi^{(\mp)}(\tau_{(\mp)}, \varepsilon) = \varepsilon \Pi_1^{(\mp)}(\tau_{(\mp)}) + \varepsilon^2 \Pi_2^{(\mp)}(\tau_{(\mp)}) + \dots, \quad \tau_{(-)} = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tau_{(+)} = \frac{x-1}{\varepsilon}, \quad (24)$$

$$Q^{(\mp)}(\xi, \hat{x}, \varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) + \varepsilon^2 Q_2^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) + \dots, \quad \xi = \frac{x - \hat{x}}{\varepsilon}. \quad (25)$$

Здесь (23) — регулярные ряды, $\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x)$, $\bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(x)$; (24) — пограничные ряды, описывающие пограничные слои в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ соответственно; (25) — функции внутреннего переходного слоя, описывающие пограничные слои в окрестности точки сшивания $x = \hat{x}$, положение которой определим условием $u(\hat{x}, \varepsilon) = \varphi_2(\hat{x})$, а саму точку $\hat{x}(\varepsilon)$ найдем в виде разложения по степеням ε в процессе построения асимптотического приближения решения с внутренним слоем. Ниже будет показано, что задачи, определяющие коэффициенты разложения (25), содержат зависимость от $\hat{x}$ как от параметра, чем и объясняется наличие зависимости коэффициентов разложения (25) от $\hat{x}$.

С целью построения асимптотического приближения (22) рассмотрим две вспомогательные краевые задачи:

$$\varepsilon^2(d^2u/dx^2 - f(du/dx, u, x)) = B(u, x), \quad 0 < x < \hat{x}, \quad N_1[u]|_{x=0} = 0, \quad u(\hat{x}, \varepsilon) = \varphi_2(\hat{x}), \quad (26)$$

$$\varepsilon^2(d^2u/dx^2 - f(du/dx, u, x)) = B(u, x), \quad \hat{x} < x < 1, \quad u(\hat{x}, \varepsilon) = \varphi_2(\hat{x}), \quad N_2[u]|_{x=1} = 0. \quad (27)$$

При условиях 4 и 5 существуют классические решения погранслоного типа задач (26) и (27), асимптотические приближения которых имеют вид (22), что следует из алгоритмов пп. 2 и 3, при этом задаче (26) отвечает разложение (22) с индексом “−”; задаче (27) — разложение (22) с индексом “+”. С использованием алгоритма построения формальной асимптотики из п. 2 получим последовательность задач для определения членов разложения (22).

5.1. ПРИСОЕДИНЁННАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим присоединённую систему уравнений

$$\frac{d\tilde{v}}{d\xi} = A_1(\tilde{u}, x)\tilde{v}^2 + B(\tilde{u}, x), \quad \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \tilde{v}, \quad (28)$$

где x — параметр. На фазовой плоскости системы (28) сепаратрисы седла $(\varphi_1(x), 0)$ и $(\varphi_3(x), 0)$ при $\tilde{v} > 0$ описываются явными уравнениями

$$\tilde{v}^{(-)}(\tilde{u}, x) = \left[2 \int_{\varphi_1(x)}^{\tilde{u}} B(\mu, x) \exp \left\{ 2 \int_{\mu}^{\tilde{u}} A_1(\chi, x) d\chi \right\} d\mu \right]^{1/2}, \quad (29)$$

$$\tilde{v}^{(+)}(\tilde{u}, x) = \left[2 \int_{\varphi_3(x)}^{\tilde{u}} B(\mu, x) \exp \left\{ 2 \int_{\mu}^{\tilde{u}} A_1(\chi, x) d\chi \right\} d\mu \right]^{1/2}. \quad (30)$$

В силу вида функции $B(u, x)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} B(\mu, x) \exp \left\{ 2 \int_{\mu}^{\varphi_2(x)} A_1(\chi, x) d\chi \right\} d\mu &> 0, \\ \int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_2(x)} B(\mu, x) \exp \left\{ 2 \int_{\mu}^{\varphi_2(x)} A_1(\chi, x) d\chi \right\} d\mu &> 0, \end{aligned} \quad (31)$$

которые гарантируют пересечение сепаратрис вертикальной прямой $\tilde{u} = \varphi_2(x)$ при $x \in [0, 1]$.

Определим функцию

$$H(x) = \tilde{v}^{(+)}(\varphi_2(x), x) - \tilde{v}^{(-)}(\varphi_2(x), x) = \frac{-2I(x)}{\tilde{v}^{(+)}(\varphi_2(x), x) + \tilde{v}^{(-)}(\varphi_2(x), x)},$$

где $I(x) := \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} B(\mu, x) \exp \left\{ 2 \int_{\mu}^{\varphi_2(x)} A_1(\chi, x) d\chi \right\} d\mu$. Заметим, что

$$H'(x) = -\frac{2I'(x)}{\tilde{v}^{(+)}(\varphi_2(x), x) + \tilde{v}^{(-)}(\varphi_2(x), x)} + \frac{2I(x)(\tilde{v}_x^{(+)}(\varphi_2(x), x) + \tilde{v}_x^{(-)}(\varphi_2(x), x))}{(\tilde{v}^{(+)}(\varphi_2(x), x) + \tilde{v}^{(-)}(\varphi_2(x), x))^2}. \quad (32)$$

Достаточными условиями существования контрастной структуры в задаче (21) являются следующие требования.

Условие 6. Существует значение $x = x_0$ такое, что $I(x_0) = 0$, $x_0 \in (0, 1)$.

Условие 7. Справедливо неравенство $I'(x_0) < 0$.

При выполнении условия 6 на фазовой плоскости системы (28) при $x = x_0$ реализуется ячейка [14]: седла $(\varphi_1(x_0), 0)$ и $(\varphi_3(x_0), 0)$ соединены двумя сепаратрисами, одна из которых расположена в полуплоскости $\tilde{v} < 0$. Существование двух соединительных сепаратрис при некотором значении параметра x обеспечивает сосуществование двух контрастных структур в задаче (21). Заметим, что условие $I'(x_0) < 0$ в силу равенства (32) эквивалентно требованию $H'(x_0) > 0$ и возникает в задачах с симметричным расположением соединительных сепаратрис на фазовой плоскости (см., например, [5, 15]), которое соответствует ячейке.

5.2. ФУНКЦИИ ВНУТРЕННЕГО СЛОЯ

В нулевом приближении имеем задачи

$$\frac{d^2 \tilde{u}^{(\mp)}}{d\xi^2} = A_1(\tilde{u}^{(\mp)}, \hat{x}) \left(\frac{d\tilde{u}^{(\mp)}}{d\xi} \right)^2 + B(\tilde{u}^{(\mp)}, \hat{x}), \quad \tilde{u}^{(\mp)}(0) = \varphi_2(\hat{x}), \quad \tilde{u}^{(\mp)}(\mp\infty) = \bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x}), \quad (33)$$

где $\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) = \bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x}) + Q_0^{(\mp)}(\xi, \hat{x})$.

Уравнениям из задач (33) с условиями на бесконечности соответствует присоединённая система (28) при $x = \hat{x}$ с условиями на бесконечности $\tilde{u}^{(\mp)}(\mp\infty) = \bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x})$, $\tilde{v}^{(\mp)}(\mp\infty) = 0$. В силу неравенств (31) задачи (33) разрешимы и их решения даются квадратурными формулами, которые получаются с использованием уравнений (29), (30):

$$\int_{\varphi_2(\hat{x})}^{\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x})} \left[2 \int_{\bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x})}^{\zeta} B(\lambda, \hat{x}) \exp \left\{ 2 \int_{\lambda}^{\zeta} A_1(\chi, \hat{x}) d\chi \right\} d\lambda \right]^{-1/2} d\zeta = \xi. \quad (34)$$

При $n \geq 1$ имеем линейные задачи

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Q_n^{(\mp)}}{d\xi^2} - 2A_1(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}), \hat{x}) \tilde{u}_\xi^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) \frac{dQ_n^{(\mp)}}{d\xi} - \\ & - \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}), \hat{x})}{\partial u} (\tilde{u}_\xi^{(\mp)}(\xi, \hat{x}))^2 + B_u(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}), \hat{x}) \right] Q_n^{(\mp)}(\xi) = H_n^{(\mp)}(\xi, \hat{x}), \\ & Q_n^{(\mp)}(0) = -\bar{u}_n^{(\mp)}(\hat{x}), \quad Q_n^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \end{aligned}$$

где $H_n^{(\mp)}(\xi, \hat{x})$ — известные функции, $\tilde{u}_\xi^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) := \partial \tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) / \partial \xi$. Функции $Q_n^{(\mp)}(\xi, \hat{x})$ представимы в явном виде по аналогии с функциями (12).

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТОЧКИ СШИВАНИЯ

Положение точки сшивания $\hat{x}$ определяется путём C^1 -сшивания асимптотик (22) при $x = \hat{x}$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\frac{dU^{(+)}}{dx} - \frac{dU^{(-)}}{dx} \right) \Big|_{x=\hat{x}} = \frac{dQ_0^{(+)}(0, \hat{x})}{d\xi} - \frac{dQ_0^{(-)}(0, \hat{x})}{d\xi} + \varepsilon \left(\frac{d\bar{u}_0^{(+)}(\hat{x})}{dx} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(\hat{x})}{dx} \right) + \\ & + \varepsilon \left(\frac{dQ_1^{(+)}(0, \hat{x})}{d\xi} - \frac{dQ_1^{(-)}(0, \hat{x})}{d\xi} \right) + \dots = H(\hat{x}(\varepsilon)) + \varepsilon G(\hat{x}(\varepsilon)) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} G(\hat{x}(\varepsilon)) &:= \frac{dQ_1^{(+)}(0, \hat{x})}{d\xi} - \frac{dQ_1^{(-)}(0, \hat{x})}{d\xi} + \varphi'_3(\hat{x}) - \varphi'_1(\hat{x}) = \\ &= \frac{1}{\tilde{u}_\xi^{(+)}(0, \hat{x})} \int_{+\infty}^0 p^{(+)}(s, \hat{x}) \tilde{u}_\xi^{(+)}(s, \hat{x}) H_1^{(+)}(s, \hat{x}) ds - \\ &- \frac{1}{\tilde{u}_\xi^{(-)}(0, \hat{x})} \int_{-\infty}^0 p^{(-)}(s, \hat{x}) \tilde{u}_\xi^{(-)}(s, \hat{x}) H_1^{(-)}(s, \hat{x}) ds + \varphi'_3(\hat{x}) - \varphi'_1(\hat{x}) \end{aligned}$$

с учётом того, что $\bar{u}_1^{(\mp)}(\xi) = 0$, функция $p^{(\mp)}(\xi, \hat{x}) := \exp\{-\int_0^\xi 2A_1(\tilde{u}^{(\mp)}(\chi, \hat{x}), \hat{x}) \tilde{u}_\xi^{(\mp)}(\chi, \hat{x}) d\chi\}$.

Полагая $\hat{x} = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$, где x_0 определено условием 6, и представляя в виде разложения по степеням ε каждое слагаемое в уравнении (35), приходим к равенству

$$H(x_0) + \varepsilon (H'(x_0) x_1 + G(x_0)) + \dots = 0, \quad (36)$$

выполнение которого в нулевом приближении обеспечивается условием 6. Следовательно, существует решение $\tilde{u}(\xi, x_0) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ задач (33), представимое квадратурной формулой (34) при $\hat{x} = x_0$ и описывающее внутренний слой контрастной структуры в нулевом приближении.

Приравнявая к нулю коэффициенты при ε^n в уравнении (36), получаем однозначно разрешимые уравнения относительно x_n , $n > 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \quad & I'(x_0) x_1 - \tilde{u}_\xi(\varphi_2(x_0), x_0) G(x_0) = 0, \\ \varepsilon^n: \quad & I'(x_0) x_n + \tilde{f}_n(x_0) = 0, \quad n > 1, \end{aligned}$$

где $\tilde{u}_\xi(\varphi_2(x_0), x_0) := \tilde{u}_\xi^{(+)}(\varphi_2(x_0), x_0) = \tilde{u}_\xi^{(-)}(\varphi_2(x_0), x_0)$, $\tilde{f}_n(x_0)$ — известные значения. В качестве примера получим выражение для $G(x_0)$. С этой целью рассмотрим выражение

$$H_1^{(\mp)}(\xi) = \left[\frac{\partial A_1(\tilde{u}, x_0)}{\partial u} \bar{u}_0^{(\mp)}(x_0) + \frac{\partial A_1(\tilde{u}, x_0)}{\partial x} \right] \left(\frac{d\tilde{u}}{d\xi} \right)^2 \xi + \\ + \left[2A_1(\tilde{u}, x_0) \bar{u}_0^{(\mp)}(x_0) + A_2(\tilde{u}, x_0) \right] \frac{d\tilde{u}}{d\xi} + B_u(\tilde{u}, x_0) \bar{u}_0^{(\mp)}(x_0) \xi + B_x(\tilde{u}, x_0) \xi,$$

где учтено, что $B_u(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0), x_0) \bar{u}_0'^{(\mp)}(x_0) + B_x(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0), x_0) = 0$. Выполняя преобразование выражения для $G(x_0)$ аналогично тому как это было сделано в работе [14], находим

$$G(x_0) = -\frac{1}{\tilde{u}_\xi(\varphi_2(x_0), x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x_0) \tilde{u}_\xi(s, x_0) \tilde{H}_1(s, x_0) ds,$$

где

$$\tilde{H}_1(\xi, x_0) = A_{1x}(\tilde{u}, x_0) \tilde{v}^2 \xi + A_2(\tilde{u}, x_0) \tilde{v} + B_x(\tilde{u}, x_0) \xi.$$

Итак, построено асимптотическое приближение (22) решения типа контрастной структуры задачи (21). Обозначим через $U_n^\mp(x, \varepsilon)$ частичную сумму n -го порядка асимптотического ряда (22). Из алгоритма построения формальной асимптотики следует

$$L_\varepsilon[U_n^{(\mp)}] := \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 U_n^{(\mp)}}{dx^2} - A_1(U_n^{(\mp)}, x) \left(\frac{dU_n^{(\mp)}}{dx} \right)^2 - A_2(U_n^{(\mp)}, x) \frac{dU_n^{(\mp)}}{dx} \right) - B(U_n^{(\mp)}, x) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad (37)$$

$$N_1[U_n^{(-)}] \Big|_{x=0} := \frac{dU_n^{(-)}(0, \varepsilon)}{dx} + g_1(U_n^{(-)}(0, \varepsilon)) = O(\varepsilon^n), \quad N_2[U_n^{(+)}] \Big|_{x=1} = O(\varepsilon^n). \quad (38)$$

6. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ТИПА КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ

Функции $\alpha(x, \varepsilon), \beta(x, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2((0, \hat{x}_{\alpha, \beta}) \cup (\hat{x}_{\alpha, \beta}, 1)) \cap \mathbb{C}^1([0, \hat{x}_{\alpha, \beta}) \cup (\hat{x}_{\alpha, \beta}, 1]) \cap \mathbb{C}[0, 1]$ называются соответственно *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (21)*, если при $\varepsilon \in I_\varepsilon$ выполняются следующие неравенства:

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1], \quad L_\varepsilon[\beta(x, \varepsilon)] \leq 0 \leq L_\varepsilon[\alpha(x, \varepsilon)], \quad x \in (0, 1),$$

$$N_i[\beta(x, \varepsilon)] \Big|_{x=i-1} \leq 0 \leq N_i[\alpha(x, \varepsilon)] \Big|_{x=i-1}, \quad i = 1, 2,$$

$$\alpha'_x(\hat{x}_\alpha - 0, \varepsilon) - \alpha'_x(\hat{x}_\alpha + 0, \varepsilon) \leq 0, \quad \beta'_x(\hat{x}_\beta - 0, \varepsilon) - \beta'_x(\hat{x}_\beta + 0, \varepsilon) \geq 0.$$

При фиксированном n , $n \geq 2$, числах $\mu^{(\mp)} > 0$, $\gamma > 0$, параметре $\varepsilon \in I_\varepsilon$ определим верхнее решение $\beta_n(x, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\beta_n^{(-)}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + Q_0^{(-)}(\xi_\beta) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x) + \Pi_i^{(-)}(\tau_{(-)}) + Q_i^{(-)}(\xi_\beta) \right) + \\ + \varepsilon^n \left(\gamma + Q_\beta^{(-)}(\xi_\beta) + e^{-\mu^{(-)\tau_{(-)}}} \right), \quad 0 \leq x \leq \hat{x}_\beta; \\ \beta_n^{(+)}(x, \varepsilon) = \varphi_3(x) + Q_0^{(+)}(\xi_\beta) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x) + \Pi_i^{(+)}(\tau_{(+)}) + Q_i^{(+)}(\xi_\beta) \right) + \\ + \varepsilon^n \left(\gamma + Q_\beta^{(+)}(\xi_\beta) + e^{\mu^{(+)\tau_{(+)}}} \right), \quad \hat{x}_\beta \leq x \leq 1,$$

где $\hat{x}_\beta = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i x_i + \varepsilon^n (x_n - \delta)$, $\delta > 0$, $\xi_\beta = (x - \hat{x}_\beta)/\varepsilon$. Функции $Q_i^{(\mp)}(\xi_\beta)$ определяются как решения задач относительно функций $Q_i^{(\mp)}(\xi)$ при замене ξ на ξ_β и $\hat{x}$ на $\hat{x}_\beta$. Уравнения для определения функций $Q_\beta^{(\mp)}(\xi_\beta)$ получаются при замене в уравнениях относительно функций $Q_n^{(\mp)}(\xi)$ переменных ξ на ξ_β и $\hat{x}$ на $\hat{x}_\beta$, а также замене неоднородности уравнения на следующую функцию:

$$\gamma \left(B_u(\tilde{u}_\beta^{(\mp)}(\xi_\beta), \hat{x}_\beta) - B_u(\bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x}_\beta), \hat{x}_\beta) \right) + \gamma A_{1u}(\tilde{u}_\beta^{(\mp)}(\xi_\beta), \hat{x}_\beta) \left(\tilde{u}_{\beta\xi}^{(\mp)}(\xi_\beta) \right)^2,$$

причём $Q_\beta^{(\mp)}(0) = -\gamma$, $Q_\beta^{(\mp)}(\mp\infty) = 0$, $\tilde{u}_\beta^{(\mp)} = \tilde{u}^{(\mp)}(\xi_\beta, \hat{x}_\beta)$. Аналогично определяется нижнее решение.

Доказательство того, что полученная пара функций является упорядоченной, проводится как и в работе [15]. Аналогично тому как это сделано в п. 3 с учётом оценок (37), (38) проверяется выполнение дифференциальных неравенств при $x \in (0, 1)$ и на границе области. В частности,

$$L_\varepsilon[\beta_n^{(-)}] = -\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi_1(x), x) + O(\varepsilon^n) < 0, \quad 0 \leq x \leq \hat{x}_\beta,$$

$$L_\varepsilon[\beta_n^{(+)}] = -\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi_3(x), x) + O(\varepsilon^n) < 0, \quad \hat{x}_\beta \leq x \leq 1.$$

Производные по x функций $\alpha(x, \varepsilon)$ и $\beta(x, \varepsilon)$ испытывают скачок конечной величины и нужного знака в точках $\hat{x}_\alpha$ и $\hat{x}_\beta$ соответственно. Например,

$$\begin{aligned} & (\beta_n)'_x(\hat{x}_\beta - 0, \varepsilon) - (\beta_n)'_x(\hat{x}_\beta + 0, \varepsilon) = \\ & = \varepsilon^{n-1} \left(-\delta \frac{I'(x_0)}{\tilde{u}_\xi(0, x_0)} + \frac{\gamma}{\tilde{u}_\xi(0, x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x_0) \tilde{u}_\xi(s, x_0) \left[B_u(\tilde{u}^{(\mp)}(s), x_0) - B_u(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0), x_0) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + A_{1u}(\tilde{u}(s), x_0) (\tilde{u}_\xi^{(\mp)}(s, x_0))^2 \right] s ds \right) + O(\varepsilon^n) > 0 \end{aligned}$$

при $n \geq 2$ и достаточно большом δ в силу условия 7.

Итак, приходим к оценке в равномерной норме:

$$\|u(x, \varepsilon) - U_{n-2}^{(\mp)}(x, \varepsilon)\| \leq \|u(x, \varepsilon) - \beta_n^{(\mp)}(x, \varepsilon)\| + \|\beta_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) - U_{n-2}^{(\mp)}(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n-1}), \quad n \geq 2.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 4–7. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ существует классическое решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (21) такое, что для любого фиксированного $n \geq 0$ имеет место оценка в равномерной норме

$$\|u(x, \varepsilon) - U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ — частичная сумма n -го порядка асимптотического ряда (22):

$$U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x) + Q_0^{(-)}(\xi) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x) + \Pi_i^{(-)}(\tau_{(-)}) + Q_i^{(-)}(\xi) \right), & 0 \leq x \leq \hat{x}^*, \\ \varphi_3(x) + Q_0^{(+)}(\xi) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x) + \Pi_i^{(+)}(\tau_{(+)}) + Q_i^{(+)}(\xi) \right), & \hat{x}^* \leq x \leq 1, \end{cases}$$

переменная $\xi = (x - \hat{x}^*)/\varepsilon$, значение $\hat{x}^* = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i x_i$.

Поскольку решения погранслоного типа задач (26) и (27) существуют, то теорему 3 можно доказать на основе метода сшивания по аналогии с тем, как это сделано в работе [14] и получить оценку для производной такого решения, подобную оценке (17). С учётом этого

имеем следующую лемму, которую легко доказать, используя формулу (18), применительно к данному случаю.

Лемма 3. Пусть $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ — нижнее и верхнее решения задачи (21), а $u_\varepsilon(x) := u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (21) из теоремы 3. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ имеют место оценки

$$\left\| \frac{d(\beta_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right\| = O(\varepsilon^{n-2}), \quad \left\| \frac{d(\alpha_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right\| = O(\varepsilon^{n-2}), \quad n \geq 2, \quad x \in [0, 1].$$

7. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Соответствующая задаче (21) параболическая задача с граничными условиями $N_1[v]|_{x=0} = 0$, $N_2[v]|_{x=1} = 0$ и начальным условием $v_{init}(x, \varepsilon) = u_\varepsilon(x)$, где $u_\varepsilon(x)$ — решение с внутренним слоем задачи (21) из теоремы 3, имеет стационарное решение $v(x, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x)$. В данной работе для исследования вопроса об асимптотической устойчивости по Ляпунову такого стационарного решения используются сжимающиеся негладкие барьеры (см., например, [24]): в качестве упорядоченных нижнего и верхнего решений данной начально-краевой задачи берутся функции (20), где $u_\varepsilon(x)$ — решение с внутренним слоем задачи (21), $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ — нижнее и верхнее решения из п. 6 (при фиксированном $n \geq 2$, $\varepsilon \in I_\varepsilon$). Такие функции $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$ не являются гладкими в точках $\hat{x}_\alpha$ и $\hat{x}_\beta$ соответственно в силу свойств функций $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ в этих точках, причём знак скачка производных $\dot{\alpha}_n(x, t, \varepsilon)$ и $\dot{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$ по x определяется знаком скачка производных $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ и соответствует предъявляемым к функциям $\hat{\alpha}_n(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}_n(x, t, \varepsilon)$ требованиям [24].

С использованием свойств функций $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и $\beta_n(x, \varepsilon)$ из п. 6 доказываются соответствующие дифференциальные неравенства для функций $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$ по аналогии с тем, как это сделано в п. 4. В частности, учитывая лемму 3, имеем

$$M_\varepsilon[\hat{\beta}^{(-)}] = e^{-\lambda t} [-\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi_1(x), x) + O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{2n-2}) + O(\varepsilon^{n+1})] < 0, \quad 0 \leq x \leq \hat{x}_\beta,$$

$$M_\varepsilon[\hat{\beta}^{(+)}] = e^{-\lambda t} [-\varepsilon^n \gamma B_u(\varphi_3(x), x) + O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{2n-2}) + O(\varepsilon^{n+1})] < 0, \quad \hat{x}_\beta \leq x \leq 1,$$

при $n \geq 2$, достаточно большом $\gamma > 0$ и $\varepsilon \in I_\varepsilon$. Аналогично $M_\varepsilon[\hat{\alpha}^{(\pm)}] > 0$. При $x = 0$ и $x = 1$ имеем $N_i[\hat{\beta}_n^{(\mp)}]|_{x=i-1} < 0$, $N_i[\hat{\alpha}_n^{(\mp)}]|_{x=i-1} > 0$, $i = 1, 2$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 4–7. Тогда для любого $\varepsilon \in I_\varepsilon$ решение с внутренним слоем $u_\varepsilon(x, \varepsilon)$ задачи (21) из теоремы 3 асимптотически устойчиво по Ляпунову как стационарное решение соответствующей параболической задачи с локальной областью притяжения $u_{init}(x) \in [\alpha_2(x, \varepsilon), \beta_2(x, \varepsilon)]$ и, следовательно, единственно в этой области.

8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

8.1. ТЕПЛОВОЕ ПОЛЕ В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ НАГРЕВАТЕЛЕ

Одной из основных проблем эксплуатации прямолинейных нагревательных элементов в плавильных печах является выбор оптимального режима разогрева с целью повышения эффективности и срока службы нагревательных элементов. Для нормального протекания процесса преобразования электрической энергии в тепловую и длительной устойчивой работы нагревательные элементы должны обладать большим удельным электрическим сопротивлением, слабо зависящим от температуры, жаропрочностью и устойчивостью к окислительным

процессам, иметь постоянные линейные размеры. Поэтому чаще всего применяются угольные, графитовые или карбидокремниевые стержни [25].

Наибольшее значение и распространение в печной технике имеет косвенный нагрев, характеризующийся тем, что тепло выделяется в нагревательных элементах (сопротивлениях) и передаётся от них к обрабатываемому материалу теплоотдачей (рис. 1). При низкотемпературном нагреве (100–700 °С) большое значение имеет теплообмен между нагревателем и материалом конвекцией, которая интенсифицируется принудительной циркуляцией с большими скоростями газа или воздуха внутри печей. При средне- и высокотемпературном нагреве, особенно при отсутствии принудительной циркуляции газов, основное количество тепла передаётся от нагревателей к обрабатываемым материалам излучением. Способ закрепления нагревательных элементов в печи зависит от её конструкции. В связи с этим возможны различные краевые режимы. Далее будет рассмотрена модель типа (1) со смешанными граничными условиями.

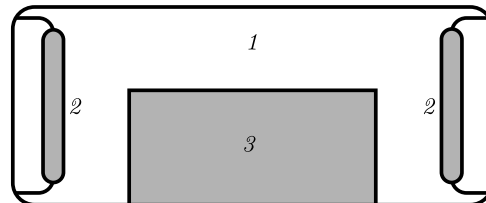


Рис. 1. Схема плавильной печи с косвенным нагревом: 1 — камера, 2 — нагреватели, 3 — обрабатываемый материал.

Тепловое поле в прямолинейном нагревательном элементе с длиной l описывается нелинейной моделью типа (1), учитывающей боковой теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой с температурой U и конвективный теплообмен на одном из двух торцов нагревателя:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k(u, x) \frac{du}{dx} \right) &= \gamma(u - U) - f(x), \quad x \in (0, l), \\ \left[k(u, x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} - \alpha_0(u(0) - U) &= 0, \quad u|_{x=l} = \bar{g}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\alpha_0 > 0$, $\gamma > 0$ — коэффициенты теплообмена, $f(x) > 0$ — мощность тепловых источников. Допустим достаточную гладкость коэффициентов задачи (39) и выполнение условия (см. ниже).

Условие 8. Справедливы неравенства $0 < k_1 < k(u, x) < k_2$, $|k_u(u, x)| \leq M$, $M > 0$ при $x \in [0, l]$, $u \in I$.

Лемма 4. Задача (39) не может иметь более одного классического решения.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что разность $w(x) := u_2(x) - u_1(x)$, где $u_i(x)$, $i = 1, 2$, — классические решения данной задачи, удовлетворяет задаче, которая имеет только тривиальное решение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k(u_2, x) \frac{dw}{dx} + \frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt \right) &= \gamma w(x), \\ \left[\frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt + k(u_2, x) \frac{dw}{dx} \right] \Big|_{x=0} &= \alpha_0 w(0), \quad w(l) = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

где $u_t := tu_2(x) + (1-t)u_1(x)$. Перепишем задачу (40) как

$$\begin{aligned} k(u_2, x) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left[\frac{du_1}{dx} \int_0^1 k_u(u_t, x) dt + \frac{dk(u_2, x)}{dx} \right] \frac{dw}{dx} + \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{du_1}{dx} \int_0^1 k_u(u_t, x) dt \right] - \gamma \right\} w(x) &= 0, \\ \left[\frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt + k(u_2, x) \frac{dw}{dx} \right] \Big|_{x=0} &= \alpha_0 w(0), \quad w(l) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $w(0) > 0$. Тогда в силу принципа максимума [3] $w(x) > 0$, $x \in (0, l)$, так как нуль — это минимальное значение и оно достигается на границе $x = l$. Значит, при любом $x \in [0, l]$ имеет место неравенство $w(x)\gamma > 0$. Следовательно, с учётом уравнения и граничного условия при $x = 0$ из задачи (40) приходим к выводу, что с увеличением x функция

$$k(u_2, x) \frac{dw}{dx} + \frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt$$

возрастает при $x \in [0, l]$. С другой стороны,

$$\left[k(u_2, x) \frac{dw}{dx} + \frac{du_1}{dx} w(x) \int_0^1 k_u(u_t, x) dt \right] \Big|_{x=l} = k(u_2(l), l) \frac{dw}{dx}(l) \leq 0,$$

что является противоречивым результатом. Аналогично, полагая $w(0) < 0$, также получаем противоречивый результат. Следовательно, $w(0) = w(l) = 0$. Отсюда, в силу принципа максимума, имеем $w(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$.

Вся тепловая энергия (без учёта потерь), полученная в нагревательном элементе в результате преобразования электроэнергии, должна быть передана теплоотдачей к перерабатываемым материалам, иначе температура может превышать допустимые для них пределы, что разрушит нагреватель. Следовательно, в уравнении (39), приведённом к безразмерному виду, слагаемые в правой части уравнения, описывающие процессы тепловыделения и теплоотдачи через боковую поверхность нагревателя, должны быть одинаково большими:

$$\frac{\gamma l^2}{k(u, x)} = O(\varepsilon^{-2}), \quad \frac{f(x) l^2}{U k(u, x)} = O(\varepsilon^{-2}), \quad (41)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Если

$$\frac{\alpha_0 l}{k(u, x)} \sim 1, \quad (42)$$

то задача (39) в безразмерных переменных при условиях (41), (42) является задачей типа (2):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - A_1(u, x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - A_2(u, x) \frac{du}{dx} &= \frac{\theta(u, x)}{\varepsilon^2} (\bar{\gamma}(u-1) - \bar{f}(x)), \quad x \in (0, 1), \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} - \beta(u(0))(u(0)-1) &= 0, \quad u|_{x=1} = g, \end{aligned} \quad (43)$$

где $\theta(u, x) > 0$, $\bar{f}(x) > 0$, $\beta(u) > 0$ при $x \in [0, 1]$, $0 < g := \bar{g}U^{-1} < 1$.

В случае задачи (43) вырожденное уравнение имеет решение $u = 1 + \bar{f}(x)\bar{\gamma}^{-1} := \varphi(x)$, причём производная по u от функции в правой части уравнения при $u = 1 + \bar{f}(x)\bar{\gamma}^{-1}$ положительна: $\theta(u, x)\bar{\gamma} > 0$ при $x \in [0, 1]$. Поскольку решение вырожденного уравнения и граничное условие при $x = 1$ удовлетворяют неравенствам $0 < g < 1 < \varphi(1)$, то уравнение сепаратрисы, входящей в точку покоя $(\varphi(1), 0)$ при $\rho \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$\tilde{v} = - \left[2 \int_{1+\bar{f}(1)\bar{\gamma}^{-1}}^{\tilde{u}} \theta(\xi, 1) (\bar{\gamma}(\xi-1) - \bar{f}(1)) \exp \left\{ 2 \int_{\xi}^{\tilde{u}} A_1(\chi, 1) d\chi \right\} d\xi \right]^{1/2}. \quad (44)$$

Так как $\xi = \varphi(1)$ — нуль подынтегральной функции в формуле (44), то подкоренное выражение больше нуля при $\tilde{u} = s$, $s \in (\varphi(1), g]$. Следовательно, условие 3 выполнено.

Теорема 5. Пусть выполнено условие 8. Тогда задача (39) при условиях (41), (42) имеет единственное классическое решение $u(x, \varepsilon)$, причём

$$u(x, \varepsilon) = \frac{f(x) - f(l)}{\gamma} + U\left(\tilde{u}\left(\frac{x l^{-1} - 1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon)\right), \quad x \in [0, l]. \quad (45)$$

Функция $\tilde{u}(\rho)$ описывает решение задачи (43) в окрестности границы $x = 1$ в нулевом приближении и определяется квадратурной формулой

$$-\int_g^{\tilde{u}(\rho)} \left[2 \int_{1+\bar{f}(1)\bar{\gamma}^{-1}}^{\zeta} \theta(\xi, 1)(\bar{\gamma}(\xi - 1) - \bar{f}(1)) \exp\left\{2 \int_{\xi}^{\zeta} A_1(\chi, 1) d\chi\right\} d\xi \right]^{-1/2} d\zeta = \rho.$$

8.2. РАСЧЁТ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ В КАРБИДОКРЕМНИЕВОМ НАГРЕВАТЕЛЕ

В качестве параметров модели (39) выберем параметры реальных карбидокремниевых нагревателей [26], используемых для поддержания алюминия в расплавленном состоянии в течении длительного времени: длина нагревателя $l \approx 3.5$ м, диаметр 54 мм ($\ll 3.5$ м), характерный диапазон рабочей температуры 350–1230 °С.

Будем считать, что левый конец нагревателя теплоизолирован, а на правом поддерживается постоянный температурный режим. Температуру в рабочей камере примем равной $U = 700$ °С. В результате интерполяции (рис. 2) с использованием данных, полученных опытным путем [27], в указанном интервале температур имеем следующую функциональную зависимость коэффициента теплопроводности от температуры: $k(u) = 1674u^{-0.67}$ Вт/(м·К). Среднее значение коэффициента теплопроводности в области характерных рабочих температур нагревателя $\langle k \rangle \approx 17.6$ Вт/(м·К). Мощность выделения тепла на единицу длины нагревателя может достигать $f_{\text{макс}} = 63$ кВт/м. Безразмерная мощность тепловыделения $fl^2/U\langle k \rangle = \bar{f}/\varepsilon^2$, где $\varepsilon = \sqrt{U\langle k \rangle/(f_{\text{макс}}l^2)} \sim 0.1$, а функция $\bar{f}(x) \sim 1$. Пусть, например, $\bar{f}(x) \equiv 1$. С учётом этого оценим порядок безразмерного коэффициента теплообмена как $\bar{\gamma}/\varepsilon^2 = \gamma l^2/\langle k \rangle \sim \bar{f}/\varepsilon^2$, откуда имеем $\bar{\gamma} \sim 1$. Пусть $\bar{\gamma} = 2$. Опуская подробности процедуры обезразмеривания, приходим к задаче (43), где $A_2(u, x) = 0$, $\beta(u(0)) = 0$, $g = 0.6$, $\bar{\gamma} = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $\theta(u, x) = 0.86u^{0.67}$, $A_1(u, x) = 0.67u^{-1}$. Асимптотическое приближение решения нулевого порядка такой задачи имеет вид

$$U_0(x, \varepsilon) = \tilde{u}(\rho), \quad \rho = \frac{x - 1}{\varepsilon}, \quad (46)$$

где

$$-\int_{0.6}^{\tilde{u}(\rho)} \left[2 \cdot 0.86 \int_{1+\bar{f}(1)/\bar{\gamma}}^{\zeta} (\bar{\gamma}(\xi - 1) - \bar{f}(1)) \left(\frac{\zeta^2}{\xi}\right)^{\sigma} d\xi \right]^{-1/2} d\zeta = \rho, \quad \sigma = 0.67.$$

С учётом распределения (46) по аналогии с формулой (45) получаем распределение температуры в нагревателе. Заметим, что согласно теореме 1 использование асимптотического приближения нулевого порядка в качестве приближения решения прямой задачи может привести к существенной погрешности в определении этого решения, особенно если $\varepsilon \sim 0.1$. В таком случае обоснованный численный алгоритм по расчёту теплового поля в нагревателе получается с использованием теоремы 2 путём выбора асимптотического приближения (46) в качестве начального условия при численном решении параболической задачи:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{0.67}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) = 0.86v^{0.67}(2(v - 1) - \bar{f}(x)), \quad 0 < x < 1,$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad v(1, t) = 0.6, \quad v(x, 0, \varepsilon) = U_0(x, \varepsilon) \quad (47)$$

методом счёта на установление, так как $v(x, t, \varepsilon) \rightarrow u_\varepsilon(x)$ при $t \rightarrow +\infty$, где

$$u_\varepsilon(x) = U_0(x, \varepsilon) + O(\varepsilon) = \tilde{u}(\rho) + O(\varepsilon). \quad (48)$$

Задача (47) решена методом прямых [28], где при интегрировании по времени применялся метод “BDF” из библиотеки [29]. При выбранных значениях параметров прямой задачи оценка остаточного члена имеет вид $\max_{x \in [0, 1]} |u(x, \varepsilon) - U_0(x, \varepsilon)| \leq 3.77 \cdot 10^{-6}$, здесь в качестве точного решения $u(x, \varepsilon)$ прямой задачи используется численное решение задачи (47), полученное методом счёта на установление. Оценка остаточного члена подтверждает высокую эффективность метода.

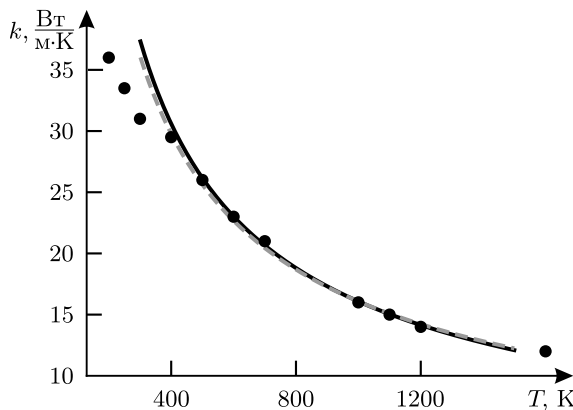


Рис. 2. Зависимость коэффициента тепловой диффузии карбида кремния от температуры: точки — истинный профиль $k(T)$, сплошная линия — восстановленный профиль $k(T)$, штриховая — интерполяция экспериментальных данных.

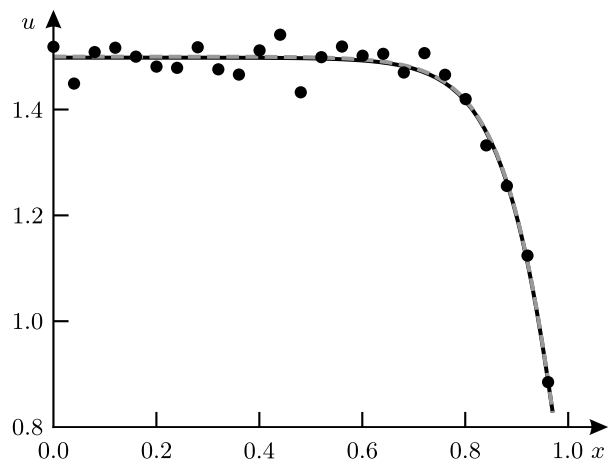


Рис. 3. Восстановленный профиль безразмерной температуры: штриховая линия — численное решение с истинными параметрами, сплошная — асимптотическое приближение с оптимальными параметрами $\bar{\gamma} = 2.008$, $\sigma = 0.702$, точки — симуляция экспериментальных данных.

8.3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для восстановления коэффициентов $k(u)$ и $\bar{\gamma} > 0$ используется степенная параметризация $k(u) = k_0(u_0/u)^\sigma$, $\sigma > 0$, при условии, что значение $k(u)$ в одной точке известно: $k(u_0) = k_0$, например, $k(700 \text{ K}) \approx 20.5 \text{ Вт/(м·К)}$ (см. рис. 2).

Алгоритму нахождения распределения температуры можно сопоставить оператор $G: R^{+2} \rightarrow \mathbb{C}[0, 1] \cap \mathbb{C}^1[0, 1] \cap \mathbb{C}^2(0, 1)$, который набору параметров $X \equiv (\sigma \bar{\gamma})^T$ ставит в соответствие распределение температуры $u(x, \varepsilon)$:

$$G[X] = u. \quad (49)$$

Обратная задача состоит в определении положительного набора параметров $(\sigma \bar{\gamma})^T$ по известной информации о распределении тепла вдоль нагревателя $u_s(x, \varepsilon)$, наблюдаемого экспериментально с ошибкой s ($\|u - u_s\|_{L_2} \leq s$, где u — точные данные):

$$G_\varepsilon[X_{\varepsilon, s}] = u_s, \quad X_{\varepsilon, s} \in \Pi^2 \subset \mathbb{R}^{+2}. \quad (50)$$

Решение обратной задачи (50) может быть найдено как элемент $X_{\varepsilon,s}$ компактного множества $\Pi^2 := [\sigma_1, \sigma_2] \times [\gamma_1, \gamma_2]$ из $\mathbb{R}^{+2}$, реализующий минимум функционала

$$F[X] = \|G_\varepsilon[X] - u_s\|_{L_2}^2 \quad (51)$$

на данном множестве априорных ограничений. Следовательно, обратная задача (50) является корректно поставленной [20].

Использование асимптотического приближения решения прямой задачи, которое даётся формулой (46), эквивалентно тому, что вместо точного оператора G в задаче (50) задаётся оператор G_ε с ошибкой $C\varepsilon$: $\|G - G_\varepsilon\|_{\Pi^2 \rightarrow C[0,1] \cap C^1[0,1] \cap C^2(0,1)} \leq C\varepsilon$, где C — некоторая константа (см. (48)). Таким образом, достаточно трудоёмкая процедура вычисления образа оператора (49) заменена более простыми операциями.

Поиск минимума функционала (51) реализован с использованием симплексного алгоритма Нелдера–Мида из библиотеки [30]. При минимизации была задана абсолютная погрешность на уровне 10^{-8} . В качестве симуляции экспериментальных данных u_s использовалось численное решение прямой задачи при $\sigma = 0.673$, $\bar{\gamma} = 2$, $g = 0.6$, $\bar{f}(1) = 1$ с наложением шума, который задавался как случайная величина с нормальным распределением, где среднее — “0” и стандартное отклонение “0.025” (рис. 3). Восстановлены следующие значения параметров: $\sigma = 0.702$, $\bar{\gamma} = 2.008$, ошибка восстановления составила: $\Delta\sigma = 0.029$, $\Delta\bar{\gamma} = 0.008$, причём $\|G - G_\varepsilon\|_{\Pi^2 \rightarrow C[0,1] \cap C^1[0,1] \cap C^2(0,1)} \leq 3.77 \cdot 10^{-6}$. Восстановленные профили коэффициента тепловой диффузии $k(T)$ и безразмерной температуры $u(x)$ приведены на рис. 2, 3.

Отметим, что коэффициент тепловой диффузии может быть восстановлен с использованием априорной информации о положении внутреннего слоя тепловой структуры, полученной (информации) на основе асимптотического анализа, и степенной параметризации для функции $k(u)$ (подробнее см. [5]).

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В.Ф. Бутузову за интерес к работе, рекомендации по её улучшению и полезное обсуждение результатов.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галактионов, В.А. Процессы в открытых диссипативных системах / В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.А. Самарский. — М. : Знание, 1988. — 599 с.
2. Маслов, В.П. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса. Эволюция диссипативных структур / В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.Л. Волосов. — М. : Наука, 1987. — 351 с.
3. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
4. Карташов, Э.М. Аналитические методы теории теплопроводности и её приложений / Э.М. Карташов, В.А. Кудинов. — 4-е изд., перераб. и сущ. доп. — М. : Ленанд, 2018. — 1078 с.
5. Davydova, M.A. Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient / M.A. Davydova, S.A. Zakharova // J. Comput. Appl. Math. — 2022. — V. 400. — Art. 113731.
6. Применение численно-асимптотического подхода в задаче восстановления параметров локального стационарного источника антропогенного загрязнения / Давыдова М.А., Н.Ф. Еланский, С.А. Захарова, О.В. Постыляков // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 496, № 1. — С. 34–39.
7. Теплообмен в теплозащитных композиционных материалах в условиях высокотемпературного нагружения / В.Ф. Формалев, С.А. Колесник, Е.Л. Кузнецова, Л.Н. Рабинский // Теплофизика высоких температур. — 2016. — Т. 54, № 3. — С. 415–422.

8. Колмогоров, А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюлл. МГУ. Сер. А. Математика и механика. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–26.
9. Crank, J. The Mathematics of Diffusion / J. Crank. — London : Oxford Univ. Press, 1956. — 347 p.
10. Галактионов, В.А. Методы построения приближённых автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. IV / В.А. Галактионов, А.А. Самарский // Мат. сб. — 1983. — Т. 121, № 2. — С. 131–155.
11. Cole, J.D. Perturbation Methods in Applied Mathematics / J.D. Cole. — New York : Springer-Verlag, 1981. — 558 p.
12. Архитектура многомерных тепловых структур / С.П. Курдюмов, Е.С. Куркина, А.Б. Потапов, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 274, № 5. — С. 1071–1074.
13. Васильева, А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. М. : Наука, 1973. — 272 с.
14. Васильева, А.Б. О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка / А.Б. Васильева, М.А. Давыдова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 6. — С. 938–947.
15. Неведов, Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущённых задач в частных производных / Н.Н. Неведов // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 718–722.
16. Inkmann, F. Existence and multiplicity theorems for semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions / F. Inkmann // Indiana Univ. Math. J. — 1982. — V. 31, № 2. — P. 213–221.
17. Wang, J. Monotone method for diffusion equations with nonlinear diffusion coefficients / J. Wang // Nonlinear Analysis. — 1998. — V. 34. — P. 113–142.
18. Lukyanenko, D.V. Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation / D.V. Lukyanenko, M.A. Shishlenin, V.T. Volkov // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2019. — V. 27, № 5. — P. 745–758.
19. Применение асимптотического анализа для решения обратной задачи определения коэффициента линейного роста в уравнении типа Бюргерса / Д.В. Лукьяненко, В.Т. Волков, Н.Н. Неведов, А.Г. Ягола // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия. — 2019. — № 2. — С. 38–41.
20. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems / A.N. Tikhonov, A.V. Goncharsky, V.V. Stepanov, A.G. Yagola. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1995. — 253 p.
21. Давыдова, М.А. О новом подходе к задаче восстановления вертикального коэффициента турбулентной диффузии в пограничном слое атмосферы / М.А. Давыдова, Н.Ф. Еланский, С.А. Захарова // Докл. РАН. — 2020. — Т. 490, № 2. — С. 51–56.
22. Zakharova, S.A. Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere / S.A. Zakharova, M.A. Davydova, D.V. Lukyanenko // Inverse Probl. Sci. Eng. — 2021. — V. 29, № 3. — P. 365–377.
23. Давыдова, М.А. Существование и устойчивость решений с пограничными слоями в многомерных сингулярно возмущённых задачах реакция–диффузия–адвекция / М.А. Давыдова // Мат. заметки. — 2015. — Т. 98, № 6. — С. 853–864.
24. Nefedov, N.N. On the existence and asymptotic stability of periodic contrast structures in quasilinear reaction–advection–diffusion equations / N.N. Nefedov, E.I. Nikulin, L. Recke // Russ. J. Math. Phys. — 2019. — V. 26, № 1. — P. 55–69.
25. Курбатов, Ю.Л. Металлургические печи : учеб. пособие / Ю.Л. Курбатов, А.Б. Бирюков, Ю.Е. Рубан. М. ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. — 384 с.
26. Карбид кремния (Карборунд, SiC) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://si-c.ru/informat/infosic.html>. — Дата доступа: 20.11.2023.
27. Литовский, Е.Я. Термофизические свойства огнеупоров / Е.Я. Литовский, Н.А. Пучкевич. — М. : Металлургия, 1982. — 152 с.
28. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. — М. : Наука, 1978. — 512 с.
29. `scipy.integrate.solve_ivp` [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html. — Дата доступа: 21.11.2023.

30. Optimization (scipy.optimize) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/optimize.html#nelder-mead-simplex-algorithm-method-nelder-mead>. — Дата доступа: 21.11.2023.

ASYMPTOTICALLY STABLE SOLUTIONS WITH BOUNDARY AND INTERNAL LAYERS IN DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE SINGULARLY PERTURBED HEAT EQUATION WITH A NONLINEAR THERMAL DIFFUSION

M. A. Davydova¹, G. D. Rublev²

¹*Lomonosov Moscow State University, Russia*

²*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of RAS, Moscow, Russia*

e-mail: ¹*m.davydova@physics.msu.ru*, ²*rublev.gd15@physics.msu.ru*

This paper proposes a new approach to the study of direct and inverse problems for a singularly perturbed heat equation with nonlinear temperature-dependent diffusion, based on the further development and use of asymptotic analysis methods in the nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems. The essence of the approach is presented using the example of a class of one-dimensional stationary problems with nonlinear boundary conditions, for which the case of applicability of asymptotic analysis is highlighted. Sufficient conditions for the existence of classical solutions of the boundary layer type and the type of contrast structures are formulated, asymptotic approximations of an arbitrary order of accuracy of such solutions are constructed, algorithms for constructing formal asymptotics are substantiated, and the Lyapunov asymptotic stability of stationary solutions with boundary and internal layers as solutions to the corresponding parabolic problems is investigated. A class of nonlinear problems that take into account lateral heat exchange with the environment according to Newton's law is considered. A theorem on the existence and uniqueness of a classical solution with boundary layers in problems of this type is proven. As applications of the study, methods for solving specific direct and inverse problems of nonlinear heat transfer related to increasing the operating efficiency of rectilinear heating elements in the smelting furnaces — heat exchangers are presented: the calculation of thermal fields in the heating elements and the method for restoring the coefficients of thermal diffusion and heat transfer from modeling data.

Keywords: heat equation with a nonlinear thermal diffusion, nonlinear heat conduction problem, nonlinear heat transfer problem, singularly perturbed problem, solution with boundary and internal transition layers, thermal structure, asymptotic method, coefficient inverse heat transfer problem.

REFERENCES

- Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., and Samarsky, A.A., *Protsessy v otkrytykh dissipativnykh sistemakh* (Processes in open dissipative systems), Moscow: Znanie, 1988.
- Maslov, V.P., Danilov, V.G., and Volosov, K.L., *Matematicheskoye modelirovaniye protsessov teplo- i massop-erenosa. Evolyutsiya dissipativnykh struktur* (Mathematical modeling of heat and mass transfer processes. Evolution of dissipative structures), Moscow: Nauka, 1987.
- Samarsky, A.A. and Vabishchevich, P.N., *Vychislitel'naya teploperedacha* (Computational Thermotransfer). Moscow: Editorial URSS, 2003.
- Kartashov, E.M. and Kudinov, V.A., *Analiticheskiye metody teorii teploprovodnosti i yeye prilozheniy* (Analytical methods of the theory of thermotransfer and its applications), Moscow: Lenand, 2018.
- Davydova, M.A. and Zakharova, S.A., Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient, *J. Comput. Appl. Math.*, 2022, vol. 400, art. 113731.
- Davydova, M.A., Elansky, N.F., Zakharova, S.A., and Postlyakov, O.V., Application of a numerical-asymptotic approach to the problem of restoring the parameters of a local stationary source of anthropogenic pollution, *Doklady Mathematics*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 26–31.
- Formalev, V.F., Kolesnik, S.A., Kuznetsova, E.L., and Rabinskii, L.N., Heat and mass transfer in thermal protection composite materials upon high temperature loading, *High Temp.*, 2016, vol. 54, no. 3, pp. 390–396.

8. Kolmogorov, A.N., Petrovsky, I.G., and Piskunov, N.S., The research of the equation of diffusion coupled with the increase of matter, and its application to a biological problem, *Bulletin of Moscow State University. Ser. A. Mathematics and Mechanics*, 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–26.
9. Crank, J., *The Mathematics of Diffusion*, London: Oxford Univ. Press, 1956.
10. Galaktionov, V.A. and Samarskii, A.A. Methods of constructing approximate self-similar solutions of nonlinear heat equations. IV, *Math. USSR-Sb.*, 1984, vol. 49, no. 1, pp. 125–149.
11. Cole, J.D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, New York: Springer-Verlag, 1981.
12. Kurdyumov, S.P., Kurkina, E.S., Potapov, A.B., and Samarskiy, A.A., The architecture of the multidimensional thermal structures, *Dokl. AN USSR*, 1984, vol. 274, no. 5, pp. 1071–1075.
13. Vasilyeva, A.B. and Butuzov, V.F., *Asimptoticheskiye razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy* (Asymptotic expansions of solutions to singularly perturbed equations), Moscow: Nauka, 1973.
14. Vasil'eva, A.B. and Davydova, M.A., On a contrast steplike structure for a class of second-order nonlinear singularly perturbed equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 6, pp. 900–910.
15. Nefedov, N.N., The method of differential inequalities for some singularly perturbed partial differential equations, *Different. Equations*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 668–671.
16. Inkman, F., Existence and multiplicity theorems for semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, *Indiana Univ. Math. J.*, 1982, vol. 31, no. 2, pp. 213–221.
17. Wang, J., Monotone method for diffusion equations with nonlinear diffusion coefficients, *Nonlinear Analysis*, 1998, vol. 34, pp. 113–142.
18. Lukyanenko, D.V., Shishlenin, M.A., and Volkov, V.T., Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2019, vol. 27, no. 5, pp. 745–758.
19. Lukyanenko, D.V., Volkov, V.T., Nefedov, N.N., and Yagola, A.G. Application of asymptotic analysis for solving the inverse problem of determining the coefficient of linear amplification in burgers' equation, *Moscow University Physics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 2, pp. 131–136.
20. Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V., and Yagola, A.G., *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
21. Davydova, M.A., Elanskii, N.F., and Zakharova, S.A., A new approach to the problem of reconstructing the vertical turbulent diffusion coefficient in the atmospheric boundary layer, *Doklady Earth Sci.*, 2020, vol. 490, no. 2, pp. 92–96.
22. Zakharova, S.A., Davydova, M.A., and Lukyanenko, D.V., Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2021, vol. 29, no. 3, pp. 365–377.
23. Davydova, M.A., Existence and stability of solutions with boundary layers in multidimensional singularly perturbed reaction–diffusion–advection problem, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, pp. 909–919.
24. Nefedov, N.N., Nikulin, E.I., and Recke, L., On the existence and asymptotic stability of periodic contrast structures in quasilinear reaction–advection–diffusion equations, *Russ. J. Math. Phys.*, 2019, vol. 26, no. 1, pp. 55–69.
25. Kurbatov, Yu.L., Biryukov, A.B., and Ruban, Yu.E., *Metallurgicheskiye pechi* (Metallurgical furnaces), Moscow; Vologda: Infra-Engineering, 2022.
26. [Electronic resource] Silicon carbide (Carborundum, SiC). URL: <https://si-c.ru/informat/infosc.html> (date of the application: 20.11.2023).
27. Litovsky, E.Ya. and Puchkelevich, N.A., *Termofizicheskiye svoystva ogneporov* (Thermophysical properties of refractories), Moscow: Metallurgia, 1982.
28. Kalitkin, N.N., *Chislennyye metody* (Numerical methods), Moscow: Nauka, 1978.
29. [Electronic resource] URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html (date of the application: 21.11.2023).
30. [Electronic resource] URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/optimize.html#nelder-mead-simplex-algorithm-method-nelder-mead> (date of the application: 21.11.2023).

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.4

ФОРМУЛА КРИСТОФФЕЛЯ–ДАРБУ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Е. Круглов

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

e-mail: viktorkruglov935@gmail.com

Поступила в редакцию 02.02.2024 г., после доработки 18.03.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

С помощью рекуррентных соотношений между любыми тремя последовательными полиномиальными собственными функциями линейных дифференциальных уравнений получена формула Кристоффеля–Дарбу для системы полиномиальных собственных функций этих уравнений.

Ключевые слова: полиномиальные собственные функции, формула Кристоффеля–Дарбу.

DOI: 10.31857/S0374064124040025, EDN: PEDXQP

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье [1] для каждого из дифференциальных уравнений

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - n(A_2 + (n-1)A_1)y = 0, \quad (1)$$

$$(B_1x + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - nA_2y = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad (2)$$

$$(A_1x^2 + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - n(A_2 + (n-1)A_1)y = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad (3)$$

где $n=0, 1, \dots$, построена система $y_0(x) \equiv 1, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$ полиномиальных собственных функций (ПСФ). При этом имеют место следующие рекуррентные соотношения для любых трёх последовательных ПСФ:

— с единичным старшим коэффициентом уравнения (1):

$$y_n(x) = (\alpha^{(n)} + x)y_{n-1}(x) + \beta^{(n)}y_{n-2}(x), \quad n=1, 2, \dots, \quad y_{-1}(x) \equiv 0, \quad (4)$$

$$\alpha^{(n)} = \frac{n(B_2 + (n-1)B_1)}{A_2 + (2n-2)A_1} - \frac{(n-1)(B_2 + (n-2)B_1)}{A_2 + (2n-4)A_1},$$

$$\begin{aligned} \beta^{(n)} = & \left[\frac{(n-1)(B_2 + (n-2)B_1)}{A_2 + (2n-4)A_1} \right]^2 - \frac{(n-1)(B_2 + (n-2)B_1)}{2(A_2 + (2n-4)A_1)} \left[\frac{n(B_2 + (n-1)B_1)}{A_2 + (2n-3)A_1} + \right. \\ & \left. + \frac{(n-2)(B_2 + (n-3)B_1)}{A_2 + (2n-5)A_1} \right] + \frac{(n-1)(A_2 + (n-3)A_1)}{(A_2 + (2n-5)A_1)(A_2 + (2n-3)A_1)} C_1; \end{aligned} \quad (5)$$

— со старшим коэффициентом, отличным от единицы, уравнения (2):

$$y_n(x) = (A_2x + B_2 + 2(n-1)B_1)y_{n-1}(x) - (n-1)[B_1B_2 - C_1A_2 + (n-2)B_1^2]y_{n-2}(x), \quad n=1, 2, \dots; \quad (6)$$

— со старшим коэффициентом, отличным от единицы, уравнения (3):

$$y_n(x) = (\alpha_1^{(n)}x + \alpha_2^{(n)})y_{n-1}(x) + \beta_1^{(n)}y_{n-2}(x), \quad n=1, 2, \dots, \quad (7)$$

где

$$\alpha_1^{(n)} = \frac{(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 + (2n-2)A_1)}{A_2 + (n-2)A_1}, \quad \alpha_2^{(n)} = \frac{B_2(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 - 2A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)},$$

$$\beta_1^{(n)} = \frac{(n-1)(A_2 + (2n-2)A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)} [A_1B_2^2 + C_1(A_2 + (2n-4)A_1)^2].$$

Также в [1] показано, что построение функций (4), (6), (7) равносильно выполнению соответствующих равенств при $n=1, 2, \dots$:

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'_{n-1} + (n-1) \left[-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (n-2)A_1B_1}{A_2 + (2n-4)A_1} \right] y_{n-1} -$$

$$- \beta^{(n)}(A_2 + (2n-3)A_1)y_{n-2} = 0; \quad (8)$$

$$(B_1x + C_1)y'_{n-1} - (n-1)B_1y_{n-1} + (n-1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (n-2)B_1^2)y_{n-2} = 0; \quad (9)$$

$$(A_1x^2 + C_1)y'_{n-1} - (n-1) \left(A_1x - \frac{B_2A_1}{A_2 + (2n-4)A_1} \right) y_{n-1} -$$

$$- (n-1) \left(\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2n-4)A_1} + (A_2 + (2n-4)A_1)C_1 \right) y_{n-2} = 0. \quad (10)$$

Формулы (8)–(10) названы в [1] *формулами дифференцирования ПСФ*.

2. ПРОВЕРКА ФОРМУЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПСФ

Каждое из равенств (8)–(10) требует проверки, так как только удостоверившись в выполнении каждого из них для любого натурального значения n можно утверждать о справедливости соответствующих формул (4), (6), (7).

Теорема 1. *Равенства (8)–(10) справедливы для любого натурального значения n .*

Доказательство. Используя метод математической индукции, подробно проведём проверку равенства (8); равенства (9) и (10) проверяются аналогично.

Пусть $n=2$ (для $n=1$ при $y_0(x) \equiv 1$, $y_{-1}(x) \equiv 0$ равенство (8) тривиально) левая часть равенства (8) имеет следующий вид:

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'_1 + \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2}{A_2} \right) y_1 - \beta^{(2)}(A_2 + A_1)y_0. \quad (11)$$

Учитывая, что

$$y_1(x) = x + \frac{B_2}{A_2}, \quad y_0(x) \equiv 1, \quad \beta^{(2)} = \left(\frac{B_2}{A_2} \right)^2 - \frac{B_2(B_2 + B_1)}{A_2(A_2 + A_1)} + \frac{C_1}{A_2 + A_1},$$

получаем, что выражение (11) равно нулю. Следовательно, функция $y_2(x) = (\alpha^{(2)} + x)y_1(x) + \beta^{(2)}y_0(x)$ — ПСФ уравнения (1) при $n=2$.

Пусть равенство (8) справедливо для $n = k$, где $k > 2$, $k \in \mathbb{N}$. Докажем его для $n = k + 1$, т.е. покажем, что будет иметь место равенство

$$I_{k+1} = (A_1x^2 + B_1x + C_1)y'_k + k \left[-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1}{A_2 + (2k-2)A_1} \right] y_k - \beta^{(k+1)}(A_2 + (2k-1)A_1)y_{k-1} = 0. \quad (12)$$

Так как ПСФ (4) при $n = k$ является решением уравнения (1), то используем функцию $y_k(x)$ для доказательства равенства (12). Подставим её в выражение для I_{k+1} , затем в полученном выражении, использовав равенство (8) при $n = k$ и $n = k - 1$, удалим y'_{k-1} и y'_{k-2} , а вместо $y_{k-3}(x)$ подставим выражение

$$\beta^{(k-1)}y_{k-3}(x) = y_{k-1} - (\alpha^{(k-1)} + x)y_{k-2}(x).$$

Окончательно в выражении для I_{k+1} сохранятся только ПСФ $y_{k-1}(x)$ и $y_{k-2}(x)$, т.е.

$$I_{k+1} = Q_1y_{k-1}(x) + Q_2y_{k-2}(x),$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1x^2 + B_1x + C_1 + (\alpha_1^{(k)} + x) \left[k \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1}{A_2 + (2k-2)A_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (k-1) \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-2)A_1B_1}{A_2 + (2k-4)A_1} \right) \right] - \beta^{(k+1)}(A_2 + (2k-1)A_1) + \beta^{(k)}(A_2 + (2k-5)A_1); \\ Q_2 &= \beta^{(k)} \left[(\alpha^{(k)} + x)(A_2 + (2k-3)A_1) + k \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1}{A_2 + (2k-2)A_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (k-2) \left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (k-3)A_1B_1}{A_2 + (2k-6)A_1} \right) - (\alpha^{(k-1)} + x)(A_2 + (2k-5)A_1) \right]. \end{aligned}$$

Покажем, что $Q_1 \equiv Q_2 \equiv 0$.

В Q_1 в выражении $(\alpha^{(k)} + x)[\dots]$ соберём слагаемые, содержащие x^2 и x . В результате будет выделен двучлен $-A_1x^2 - B_1x$; параметр C_1 содержится только в $\beta^{(k+1)}$ и $\beta^{(k)}$, т.е. при C_1 имеем

$$\frac{(k-1)(A_2 + (k-3)A_1)(A_2 + (2k-5)A_1)}{(A_2 + (2k-5)A_1)(A_2 + (2k-3)A_1)} - \frac{k(A_2 + (k-2)A_1)(A_2 + (2k-1)A_1)}{(A_2 + (2k-1)A_1)(A_2 + (2k-3)A_1)} = -1,$$

следовательно, трёхчлен $A_1x^2 + B_1x + C_1$ в Q_1 удалён.

Далее, учитывая структуру $\alpha^{(k)}$, выделим сначала в Q_1 следующие группы S_1 и S_2 слагаемых:

$$\begin{aligned} S_1 &= \beta^{(k)}(A_2 + (2k-5)A_1) + \frac{(k-1)^2(B_2 + (k-2)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-2)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-4)A_1)^2} = \\ &= \frac{k(k-1)(B_2 + (k-2)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-2)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-4)A_1)(A_2 + (2k-3)A_1)}, \\ S_2 &= -\beta^{(k+1)}(A_2 + (2k-1)A_1) + \frac{k^2(B_2 + (k-1)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)^2} = \\ &= \frac{k(k-1)(B_2 + (k-1)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-3)A_1)}, \end{aligned}$$

а затем, присоединяя к S_1 и S_2 оставшиеся от $\alpha^{(k)}$ слагаемые, получаем

$$Q_1 = S_1 - \frac{k(k-1)(B_2 + (k-2)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)} + \\ + S_2 - \frac{k(k-1)(B_2 + (k-1)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-2)A_1B_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)}.$$

После приведения к общему знаменателю получим дробь, числитель которой равен нулю, т.е. $Q_1 \equiv 0$.

В выражении для Q_2 коэффициент при x , как легко заметить, равен нулю. Далее

$$\alpha^{(k)}(A_2 + (2k-3)A_1) - \alpha^{(k-1)}(A_2 + (2k-5)A_1) = \\ = 2B_1 - \frac{kA_1(B_2 + (k-1)B_1)}{A_2 + (2k-2)A_1} + \frac{(k-2)A_1(B_2 + (k-3)B_1)}{A_2 + (2k-6)A_1},$$

и так как

$$\frac{(k-2)A_1(B_2 + (k-3)B_1)}{A_2 + (2k-6)A_1} - \frac{(k-2)(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-3)A_1B_1)}{A_2 + (2k-6)A_1} = (k-2)B_1, \\ \frac{k(B_2A_1 - B_1A_2 - (k-1)A_1B_1)}{A_2 + (2k-2)A_1} - \frac{kA_1(B_2 + (k-1)B_1)}{A_2 + (2k-2)A_1} = -kB_1,$$

то сумма всех дробей, записанных в квадратных скобках выражения для Q_2 , равна нулю.

Итак, доказано, что $I_{k+1} = 0$ для любого натурального k .

Равенства (9) и (10) для $n=2$ очевидны (в обоих случаях $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x) = A_2x + B_2$). Далее, пусть каждое из равенств (9) и (10) справедливо для $n=k$, $k > 2$, $k \in \mathbb{N}$. Необходимо доказать для равенств (9) и (10), соответственно, что

$$I_{k+1}^{(1)} = (B_1x + C_1)y'_k - kB_1y_k + k(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-1)B_1^2)y_{k-1} = 0, \\ I_{k+1}^{(2)} = (A_1x^2 + C_1)y'_k - k\left(A_1x - \frac{B_2A_1}{A_2 + (2k-2)A_1}\right)y_k - \\ - k\left(\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2k-2)A_1} + (A_2 + (2k-2)A_1)C_1\right)y_{k-1} = 0.$$

Используя те же рассуждения, что и при преобразовании выражения для I_{k+1} , получаем

$$I_{k+1}^{(1)} = Q_1^{(1)}y_{k-1} + Q_2^{(1)}y_{k-2}, \quad I_{k+1}^{(2)} = Q_1^{(2)}y_{k-1} + Q_2^{(2)}y_{k-2},$$

где

$$Q_1^{(1)} = A_2(B_1x + C_1) - B_1k(A_2x + B_2 + 2(k-1)B_1) + k(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-1)B_1^2) + \\ + B_1(k-1)(A_2x + B_2 + 2(k-1)B_1) - (k-1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2), \\ Q_2^{(1)} = k(k-1)B_1(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2) - (k-1)(A_2x + B_2 + 2(k-1)B_1) \times \\ \times (B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2) - (k-1)(k-2)B_1(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2) + \\ + (k-1)(A_2x + B_2 + 2(k-2)B_1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (k-2)B_1^2).$$

Элементарные преобразования приводят к тождествам $Q_1^{(1)} \equiv Q_2^{(1)} \equiv 0$. Итак, $I_{k+1}^{(1)} = 0$.

Далее,

$$Q_1^{(2)} = \alpha_1^{(k)}(A_1x^2 + C_1) + (\alpha_1^{(k)}x + \alpha_2^{(k)}) \left[\frac{A_1B_2(A_2 - 2A_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)} - A_1x \right] - \\ - k \left[\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2k-2)A_1} + (A_2 + (2k-2)A_1)C_1 \right] + \beta_1^{(k)} \frac{A_2 + (k-3)A_1}{A_2 + (2k-4)A_1}.$$

Если учесть, что

$$(k-1) \left[\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2k-4)A_1} + (A_2 + (2k-4)A_1)C_1 \right] = \beta_1^{(k)} \frac{A_2 + (k-2)A_1}{A_2 + (2k-2)A_1},$$

то

$$Q_2^{(2)} = \beta_1^{(k)} \left[\frac{2A_1B_2(A_2 - 2A_1)}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)} - 2A_1x + (\alpha_1^{(k)}x + \alpha_2^{(k)}) \frac{A_2 + (k-2)A_1}{A_2 + (2k-2)A_1} - \right. \\ \left. - (\alpha_1^{(k-1)}x + \alpha_2^{(k-1)}) \frac{A_2 + (k-3)A_1}{A_2 + (2k-4)A_1} \right].$$

Легко проверить, что в $Q_1^{(2)}$ коэффициенты при x^2 , x и C_1 равны нулю, а сумма оставшихся слагаемых равна

$$\frac{A_1B_2^2}{(A_2 + (2k-2)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)(A_2 + (k-2)A_1)} [(A_2 - 2A_1)^2(A_2 + (2k-3)A_1) + \\ + (k-1)(A_2 + (k-3)A_1)(A_2 + (2k-2)A_1)^2 - k(A_2 + (k-3)A_1)(A_2 + (2k-4)A_1)^2].$$

После преобразований получаем, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Итак, $Q_1^{(2)} \equiv 0$.

Учитывая выражения для $\alpha_i^{(k)}$ и $\alpha_i^{(k-1)}$, $i = 1, 2$, легко получить, что $Q_2^{(2)} \equiv 0$. Таким образом, $I_{k+1}^{(2)} \equiv 0$. Теорема доказана.

3. ФОРМУЛА КРИСТОФФЕЛЯ–ДАРБУ ДЛЯ ПСФ

Известны формулы Кристоффеля–Дарбу для ортогональных полиномов [2, § 6.4] и для ортонормированных полиномов [3, теорема 1.5].

Объединим рекуррентные формулы для ПСФ дифференциальных уравнений (1)–(3) следующим образом:

$$y_{n+1}(x) = (\alpha_1^{(n+1)}x + \alpha_2^{(n+1)})y_n(x) + \beta^{(n+1)}y_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Теорема 2. Для системы ПСФ (13) $y_0(x) = 1$, $y_1(x)$, $\dots$, $y_{n+1}(x)$ имеет место формула Кристоффеля–Дарбу

$$\frac{y_{n+1}(x)y_n(t) - y_{n+1}(t)y_n(x)}{x - t} = \\ = \alpha_1^{(n+1)}y_n(x)y_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \beta^{(n+1)} \dots \beta^{(k+2)} \alpha_1^{(k+1)} y_k(x)y_k(t). \quad (14)$$

Доказательство. В равенстве (13) заменим переменную x на переменную t : $y_{n+1}(t) = (\alpha_1^{(n+1)}t + \alpha_2^{(n+1)})y_n(t) + \beta^{(n+1)}y_{n-1}(t)$, затем умножим полученное равенство на $y_n(x)$, а равенство (13) — на $y_n(t)$ и вычтем их:

$$y_{n+1}(x)y_n(t) - y_{n+1}(t)y_n(x) = \alpha_1^{(n+1)}(x-t)y_n(x)y_n(t) + \beta^{(n+1)}(y_{n-1}(x)y_n(t) - y_{n-1}(t)y_n(x)). \quad (15)$$

Обозначив

$$R_{n+1}(x, t) = y_{n+1}(x)y_n(t) - y_{n+1}(t)y_n(x),$$

соотношение (15) можно записать в рекуррентном виде

$$R_{n+1}(x, t) = \alpha_1^{(n+1)}(x-t)y_n(x)y_n(t) - \beta^{(n+1)}R_n(x, t), \quad n = 0, 1, \dots$$

Используя это равенство, имеем

$$R_n(x, t) = \alpha_1^{(n)}(x-t)y_{n-1}(x)y_{n-1}(t) - \beta^{(n)}R_{n-1}(x, t),$$

значит,

$$R_{n+1}(x, t) = \alpha_1^{(n+1)}(x-t)y_n(x)y_n(t) - \beta^{(n+1)}\alpha_1^{(n)}(x-t)y_{n-1}(x)y_{n-1}(t) + \beta^{(n+1)}\beta^{(n)}R_{n-1}(x, t).$$

Продолжая этот процесс для $n := n-1$, $n := n-2$, ..., $n=0$ и учитывая, что

$$R_1(x, t) = \alpha_1^{(1)}(x-t)y_0(x)y_0(t), \quad \beta^{(1)} = 0,$$

получаем

$$R_{n+1}(x, t) = (x-t) \left[\alpha_1^{(n+1)}y_n(x)y_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \beta^{(n+1)} \dots \beta^{(k+2)} \alpha_1^{(k+1)} y_k(x)y_k(t) \right].$$

Теорема доказана.

Запишем теперь формулу Кристоффеля–Дарбу для ПСФ каждого из дифференциальных уравнений (1)–(3).

1. Для дифференциального уравнения (1) с ПСФ, имеющими единичный старший коэффициент $\alpha_1^{(n)} \equiv 1$. По формуле (5)

$$\begin{aligned} \beta^{(n)} &= \frac{(n-1)(A_2 + (n-3)A_1)(B_2 + (n-2)B_1)}{(A_2 + (2n-5)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)^2(A_2 + (2n-3)A_1)} \times \\ &\times [(B_2A_1 - B_1A_2 - (n-2)A_1B_1) + C_1(A_2 + (2n-4)A_1)^2]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{(n-1)(A_2 + (n-3)A_1)}{(A_2 + (2n-5)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)^2(A_2 + (2n-3)A_1)}, \\ D_n^{(1)} &= (B_2 + (n-2)B_1)(B_2A_1 - B_1A_2 - (n-2)A_1B_1 + C_1(A_2 + (2n-4)A_1)^2). \end{aligned}$$

Тогда легко вычислить

$$T_2T_3 \dots T_k = \frac{(k-1)!}{L_0L_1 \dots L_{k-3}L_{k-2}^2 \dots L_{2k-4}^2L_{2k-3}}, \quad k = \overline{2, n+1}, \quad L_m = A_2 + mA_1.$$

Правую часть формулы (14) можно записать следующим образом:

$$n!T_2T_3\ldots T_{n+1}\left[\frac{y_n(x)y_n(t)}{n!T_2\ldots T_{n+1}}-\frac{D_{n+1}^{(1)}y_{n-1}(x)y_{n-1}(t)}{(n-1)!T_2\ldots T_n}+\ldots\right. \\ \left.\ldots+(-1)^{n-k}\frac{D_{n+1}^{(1)}\ldots D_{k+2}^{(1)}}{k!T_2\ldots T_{k+1}}y_k(x)y_k(t)+\ldots+(-1)^nD_{n+1}^{(1)}\ldots D_2^{(1)}y_0(x)y_0(t)\right],$$

и формула Кристоффеля–Дарбу для ПСФ с единичным старшим коэффициентом примет вид

$$\frac{y_{n+1}(x)y_n(t)-y_{n+1}(t)y_n(x)}{n!T_2\ldots T_{n+1}(x-t)}=\frac{y_n(x)y_n(t)}{n!T_2\ldots T_{n+1}}-\frac{D_{n+1}^{(1)}y_{n-1}(x)y_{n-1}(t)}{(n-1)!T_2\ldots T_n}+\ldots \\ \ldots+(-1)^{n-k}\frac{D_{n+1}^{(1)}\ldots D_{k+2}^{(1)}}{k!T_2\ldots T_{k+1}}y_k(x)y_k(t)+\ldots+(-1)^nD_{n+1}^{(1)}\ldots D_2^{(1)}y_0(x)y_0(t).$$

2. Для дифференциального уравнения (2)

$$\alpha_1^{(n)}=A_2, \quad \beta^{(n)}=-(n-1)(B_1B_2-C_1A_2+(n-2)B_1^2), \quad D_n^{(2)}=(B_1B_2-C_1A_2+(n-2)B_1^2), \\ \beta^{(n+1)}\ldots\beta^{(k+2)}\alpha_1^{(k+1)}=(-1)^{n-k}n(n-1)\ldots(k+1)A_2D_{n+1}^{(2)}\ldots D_{k+2}^{(2)},$$

а формула Кристоффеля–Дарбу записывается как

$$\frac{y_{n+1}(x)y_n(t)-y_{n+1}(t)y_n(x)}{A_2n!(x-t)}=\frac{y_n(x)y_n(t)}{n!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{D_{n+1}^{(2)}\ldots D_{k+2}^{(2)}}{k!}y_k(x)y_k(t).$$

3. Для дифференциального уравнения (3)

$$\alpha_1^{(n)}=\frac{(A_2+(2n-3)A_1)(A_2+(2n-2)A_1)}{(A_2+(n-2)A_1)}, \\ \beta_1^{(n)}=\frac{(n-1)(A_2+(2n-2)A_1)}{(A_2+(n-2)A_1)(A_2+(2n-4)A_1)}[A_1B_2^2+C_1(A_2+(2n-4)A_1)^2]=S_nD_n^{(3)},$$

где через $D_n^{(3)}$ обозначено выражение в квадратных скобках.

Тогда

$$\beta_1^{(n+1)}\ldots\beta_1^{(k+2)}\alpha_1^{(k+1)}=S_{n+1}\ldots S_{k+2}\alpha_1^{(k+1)}D_{n+1}^{(3)}\ldots D_{k+2}^{(3)}= \\ =\frac{n(n-1)\ldots(k+1)(A_2+2nA_1)}{(A_2+(n-1)A_1)\ldots(A_2+(k-1)A_1)}D_{n+1}^{(3)}\ldots D_{k+2}^{(3)}.$$

Если учесть, что

$$\alpha_1^{(n+1)}=\frac{(A_2+(2n-1)A_1)(A_2+2nA_1)}{(A_2+(n-1)A_1)},$$

то формула Кристоффеля–Дарбу для ПСФ дифференциального уравнения (3) будет следующей:

$$\frac{(y_{n+1}(x)y_n(t)-y_{n+1}(t)y_n(x))(A_2+(n-1)A_1)}{n!(A_2+2nA_1)(x-t)}= \\ =\frac{(A_2+(2n-1)A_1)}{n!}y_n(x)y_n(t)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{(A_2+(2k-1)A_1)D_{n+1}^{(3)}\ldots D_{k+2}^{(3)}y_k(x)y_k(t)}{k!(A_2+(n-1)A_1)\ldots(A_2+(k-1)A_1)}.$$

4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПСФ

1. Очевидно следующее свойство ПСФ: любой полином $Q_n(x)$ степени n однозначно представим в виде

$$Q_n(x) = \alpha_0 y_0(x) + \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x),$$

где $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — некоторая система ПСФ.

2. Функция $\rho(x)$, приводящая уравнение (2) к самосопряжённому виду, удовлетворяет уравнению

$$(B_1 x + C_1) \rho'(x) = (A_2 x + B_2 - B_1) \rho(x), \quad \rho(x) = e^{A_2 x / B_1} (B_1 x + C_1)^{(B_2 B_1 - A_2 C_1) / B_1^2 - 1}.$$

Эта функция становится весовой на интервале $(-C_1/B_1, +\infty)$, если $B_2 B_1 - A_2 C_1 > 0$ и $A_2/B_1 < 0$, так как все условия, налагаемые на весовую функцию [2, с. 37], а именно: на данном интервале $\rho(x) > 0$,

$$(B_1 x + C_1) \rho(x) \Big|_{x=-C_1/B_1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (B_1 x + C_1) \rho(x) x^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

выполнены, и полиномы $y_n(x)$ образуют ортогональную систему функций относительно этой весовой функции [1].

Если $(B_2 B_1 - A_2 C_1)/B_1^2 \leq 0$, то $\rho(x)$ — не весовая функция, так как нарушается первое условие из (16).

Более того, если $(B_2 B_1 - A_2 C_1)/B_1^2 < -1$, то из отрицательности дискриминанта $B_1^2 + B_1 B_2 - A_2 C_1$ квадратного трёхчлена $y_2(x) = A_2^2 x^2 + 2(B_2 + B_1) A_2 x + B_2(B_2 + B_1) + C_1 A_2$ следует, что ПСФ $y_2(x)$ не имеет вещественных корней на интервале $(-C_1/B_1, +\infty)$ [1], но это недопустимо для ПСФ $y_2(x)$ в случае, если $\rho(x)$ — весовая функция.

Пусть $B_1 = 0$, $C_1 \neq 0$. Функция $\rho(x)$, приводящая уравнение (2) к самосопряжённому виду, удовлетворяет уравнению

$$C_1 \rho'(x) = (A_2 x + B_2) \rho(x), \quad \rho(x) = \exp\{(A_2 x + B_2)^2 / (2C_1 A_2)\},$$

и $\rho(x) > 0$ для $x \in (-\infty, +\infty)$. Если $A_2 C_1 < 0$, то $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x) x^k = 0$, т.е. $\rho(x)$ — весовая функция для ПСФ $y_n(x)$ при $B_1 = 0$.

В частности, $y_2(x) = (A_2 x + B_2)^2 + A_2 C_1$. При условии $A_2 C_1 \geq 0$ ПСФ $y_2(x)$ либо не имеет вещественных корней, либо имеет два равных, что невозможно для любой ПСФ из ортогональной системы, поэтому при $A_2 C_1 \geq 0$ функция $\rho(x)$ не весовая.

Таким образом, если функция $\rho(x)$, приводящая дифференциальное уравнение к самосопряжённому виду, не является весовой, то по крайней мере у одной из множества ПСФ уравнения не может быть простых вещественных нулей на интервале существования $\rho(x)$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Круглов, В.Е. Построение полиномиальных собственных функций линейного дифференциального уравнения второго порядка / В.Е. Круглов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 9. — С. 1172–1180.
2. Никифоров, А.Ф. Специальные функции математической физики : учеб. пособие для вузов / А.Ф. Никифоров, В.Е. Уваров. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1984. — 344 с.
3. Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. — М. : Наука, 1976. — 327 с.

**CHRISTOFFEL–DARBOUX FORMULA FOR POLYNOMIAL EIGENFUNCTIONS
OF SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS****V. E. Kruglov***Mechnikov Odesa National University
e-mail: viktorkruglov935@gmail.com*

Using recurrence relations between any three consecutive polynomial eigenfunctions of second-order linear differential equations, the Christoffel–Darboux formulae for the system of polynomial eigenfunctions of these equations are derived.

Keywords: polynomial eigenfunctions, Christoffel–Darboux formula.

REFERENCES

1. Kruglov, V.E., Construction of polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 9, pp. 1166–1174.
2. Nikiforov, A.F. and Uvarov, V.E., *Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki* (Special Functions of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1984.
3. Suetin, P.K., *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* (Classical Orthogonal Polynomials), Moscow: Nauka, 1976.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕЛИНЕАРИЗУЕМЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

В. Ю. Мартынова

Пензенский государственный университет

e-mail: lynxbox@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2023 г., после доработки 31.10.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Рассматривается нелинейная задача на собственные значения для системы трёх уравнений с краевыми условиями первого рода, описывающая распространение электромагнитных волн в плоском нелинейном волноводе. Такая задача является двухпараметрической с одним спектральным параметром и вторым параметром, возникающим из-за дополнительного условия, связывающего постоянные интегрирования, которые появляются при нахождении первых интегралов системы. Доказывается существование нелинеаризуемых решений задачи.

Ключевые слова: двухпараметрическая задача на собственные значения, нелинеаризуемое решение, интегральное характеристическое уравнение, уравнения Максвелла, нелинейная диэлектрическая проницаемость.

DOI: 10.31857/S0374064124040035, EDN: PCSZEQ

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается двухпараметрическая задача нового типа. Особенность таких задач заключается в том, что искомыми в них являются два параметра, но лишь один из них спектральный, а второй ищется с учётом нетривиальности решения задачи. Двухпараметрические задачи этого типа описывают распространение электромагнитных волн в нелинейных волноводах. Указанный второй параметр возникает из постановки дополнительного условия, которое в данной задаче является локальным краевым условием и задаётся на одной из границ волновода. Впервые такие задачи были предложены в работе [1], где исследуются неполяризованные азимутально-симметричные гибридные электромагнитные волны в круглом цилиндрическом волноводе. Далее появился интерес к исследованию распространения подобных волн в плоских волноводных структурах. Результаты, полученные для неполяризованных симметричных гибридных электромагнитных волн, распространяющихся в нелинейном слое, представлены в статьях [2, 3]. Стоит отметить, что упомянутые неполяризованные азимутально-симметричные и симметричные гибридные электромагнитные волны могут быть представлены в виде суммы двух поляризованных ТЕ и ТМ волн [4–6], но не являются связанными ТЕ-ТМ волнами, как, например, в [7]. В работах [1–3] в качестве метода изучения использовался классический метод возмущения, позволяющий доказать существование решений нелинейной задачи в окрестности решения соответствующей линейной задачи.

Следующим шагом стало изучение волн другого типа, электромагнитных монохроматических ТЕ-ТЕ волн, которые можно рассматривать как частный случай связанных ТЕ-ТЕ волн [8]. Задача о распространении монохроматических связанных ТЕ-ТЕ волн также относится к двухпараметрическим задачам указанного выше типа. Заметим, что неполяризо-

ванные азимутально-симметричные и симметричные гибридные, а также электромагнитные монохроматические ТЕ-ТЕ волны могут существовать лишь в нелинейной среде, а в линейной распадаются на две волны (в случае неполяризованных гибридных волн на ТЕ и ТМ волны, а в случае монохроматических связанных ТЕ-ТЕ волн на две ТЕ-волны).

Для исследования электромагнитных монохроматических связанных ТЕ-ТЕ волн в работах [9, 10] был использован метод возмущения с модификацией, где в качестве невозмущённых использовались не линейные задачи, а более простые, но нелинейные задачи. Такой подход был предложен и развит в статье [11]. Его преимуществом является то, что он позволяет доказать существование нелинейных решений, которые не имеют аналогов в линейном случае.

В настоящей работе исследуется задача, которая является невозмущённой для задачи о неполяризованных симметричных гибридных электромагнитных волнах, распространяющихся в плоском нелинейном волноводе. Физическое обоснование такой задачи будет дано в п. 4. Доказательство существования решений рассматриваемой задачи позволит в дальнейшем установить разрешимость задачи о неполяризованных симметричных гибридных электромагнитных волнах. При этом разрешимость исследуемой в работе задачи будет доказана, подобно тому как это сделано в [12], с использованием метода интегрального характеристического уравнения, который предложен и развит в работах [13–15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем использовать следующие обозначения: $I = (0, h)$, $\bar{I} = [0, h]$, $h > 0$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Рассмотрим систему

$$u_1'' - \gamma^2 u_1 = -a u_1 - \alpha u_1^3, \quad \gamma^2 u_2 - \gamma u_3' = a u_2 + \alpha(u_2^2 + u_3^2)u_2, \quad -\gamma u_2' + u_3'' = -a u_3 - \alpha(u_2^2 + u_3^2)u_3 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1'|_{x=0} = A_1, \quad (2)$$

$$u_3|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = A_2, \quad (3)$$

$$u_1|_{x=h} = 0, \quad u_3|_{x=h} = 0, \quad (4)$$

где $x \in \bar{I}$, $a, \gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$, A_1 и A_2 — положительные постоянные, которые определяются из дополнительного условия, введённого ниже.

Используя результаты, полученные в работе [16], первый интеграл первого уравнения системы (1) запишем в виде

$$u_1'^2 + (a - \gamma^2)u_1^2 + 0.5\alpha u_1^4 = C_1^2, \quad (5)$$

где C_1^2 — постоянная интегрирования. Удобно выбрать именно C_1^2 , а не C_1 , поскольку при учёте условий (2) и (3) получим, что $C_1^2 = u_1'^2(0)$.

На основе результатов статьи [17] первый интеграл для второго и третьего уравнений системы (1) запишем как

$$(a + \alpha(u_2^2 + u_3^2))^2 u_2^2 + \gamma^2 a(u_2^2 + u_3^2) - 2\gamma^2(a + \alpha(u_2^2 + u_3^2))u_2^2 + 0.5\gamma^2\alpha(u_2^2 + u_3^2)^2 = C_2^2, \quad (6)$$

где C_2^2 — постоянная интегрирования.

Считаем, что постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ связаны между собой соотношением

$$C_1^2 + C_2^2 = C^2, \quad (7)$$

где $C > 0$ — известная постоянная.

Вычислив (5) в точке $x=0$, получим

$$A_1^2 = C_1^2,$$

где $A_1 = u_1'(0)$. Учитывая положительность данных постоянных, имеем $A_1 = C_1$.

Вычисление (6) в точке $x=0$ даёт

$$(a - \gamma^2 + \alpha A_2^2)^2 A_2^2 + \gamma^2 (a - \gamma^2) A_2^2 + 0.5 \alpha \gamma^2 A_2^4 = C_2^2, \quad (8)$$

где $A_2 = u_2(0)$. В работе [17] доказано, что величина $A_2^2 > 0$ однозначно определяется из уравнения (8) при любом фиксированном значении $C_2^2 > 0$.

Таким образом, значения функций u_1' и u_2 в нуле, а именно положительные постоянные $A_1 = A_1(C_1)$ и $A_2 = A_2(C_2)$, однозначно определяются постоянными интегрирования C_1 и C_2 .

Теперь можем сформулировать задачу $\mathcal{P}$.

Определение. Задача $\mathcal{P}$ состоит в определении таких троек $(\gamma, C_1, C_2) = (\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$, для которых существуют нетривиальные функции $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям (2)–(4), где $A_1 = \bar{C}_1$, A_2 — единственное положительное решение уравнения (8) при некотором $C_2 = \bar{C}_2$, а постоянные $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ связаны соотношением (7), кроме того, u_1 , u_2 , u_3 дважды непрерывно дифференцируемы по $x \in \bar{I}$.

Замечание 1. Для полного решения задачи $\mathcal{P}$ необходимо найти три параметра: γ , C_1 , C_2 . Однако, учитывая связь между постоянными (7), можно говорить о том, что задача $\mathcal{P}$ является двухпараметрической. Первый искомый параметр — постоянная γ — спектральный, второй искомый параметр — одна из постоянных C_1 , C_2 . Для определённости вторым параметром будем считать постоянную C_1 , параметр C_2 тогда определяется по формуле

$$C_2(C_1) = \sqrt{C^2 - C_1^2} > 0. \quad (9)$$

Замечание 2. Несмотря на то что функции u_1 , u_2 , u_3 связаны условием (7), первое уравнение в (1) можно изучать отдельно от второго и третьего уравнений (1), и поэтому задача $\mathcal{P}$ разбивается на две: задача $\mathcal{P}_1$ для функции u_1 и параметров γ , C_1 ; задача $\mathcal{P}_2$ для функций u_2 , u_3 и параметров γ , $C_2 = C_2(C_1)$. Подчеркнём, что параметр γ входит как в задачу $\mathcal{P}_1$, так и в задачу $\mathcal{P}_2$, а параметр C_2 в задаче $\mathcal{P}_2$ определяется по формуле (9) через параметр C_1 , относящийся к задаче $\mathcal{P}_1$.

Для исследования задачи $\mathcal{P}$ будет модифицирован метод интегрального характеристического уравнения [16]. Для того чтобы записать систему интегральных характеристических уравнений для задачи $\mathcal{P}$ в п. 2 получим интегральное характеристическое уравнение (ИХУ) для задачи $\mathcal{P}_1$ и докажем ряд свойств данной задачи, в п. 3 найдём ИХУ для задачи $\mathcal{P}_2$ и докажем часть похожих свойств данной задачи, в п. 4, используя полученные результаты, исследуем основную задачу $\mathcal{P}$. В п. 5 будет представлено обоснование рассматриваемой задачи с физической точки зрения.

2. ЗАДАЧА $\mathcal{P}_1$

Чтобы воспользоваться методом интегрального характеристического уравнения [16], введём следующие обозначения:

$$\tau_1 = u_1^2, \quad \eta_1 = \frac{u_1'}{u_1}, \quad (10)$$

где $\tau_1 \equiv \tau_1(x; \gamma, C_1)$, $\eta_1 \equiv \eta_1(x; \gamma, C_1)$.

Теперь первое уравнение системы (1) можно представить в виде

$$\tau_1' = 2\tau_1\eta_1, \quad \eta_1' = -(\eta_1^2 + a - \gamma^2 + \alpha\tau_1), \quad (11)$$

а первый интеграл (5) будет следующим:

$$0.5\alpha\tau_1^2 + (\eta_1^2 + a - \gamma^2)\tau_1 = C_1^2. \quad (12)$$

По определению $\tau_1 \geq 0$, тогда из (12) можно выразить τ_1 как

$$\tau_1 = \frac{-(\eta_1^2 + a - \gamma^2) + \sqrt{(\eta_1^2 + a - \gamma^2)^2 + 2\alpha C_1^2}}{\alpha}.$$

Используя последнее выражение, из второго уравнения системы (11) получаем

$$\eta_1' = -\sqrt{(\eta_1^2 + a - \gamma^2)^2 + 2\alpha C_1^2}. \quad (13)$$

Следовательно, $\eta_1' < 0$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_1 \in \mathbb{R}_+$. Тогда можно говорить о том, что функция $\eta_1(x)$ монотонно убывает при $x \in I$. Из определения η_1 (вторая формула в (10)) видно, что для непрерывности $\eta_1(x)$ необходимо, чтобы функция u_1 не обращалась в нуль. Если u_1 имеет $n_1 \geq 0$ нулей $x_{1,i} \in I$, $i = \overline{1, n_1}$, то $\eta_1(x)$ имеет n_1 точек разрыва $x_{1,i}$, $i = \overline{1, n_1}$. В случае когда функция u_1 не имеет нулей при $x \in I$, значение $n_1 = 0$.

Из классических результатов о (локальном) существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения следует, что если решение u_1 задачи Коши для первого уравнения системы (1) с начальными условиями (2) в какой-то точке обращается в нуль вместе со своей производной u_1' [18, с. 73], то $u_1(x) \equiv 0$. Отсюда можно заключить, что $u_1'(x_{1,i}) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n_1}$, при этом все точки разрыва являются точками разрыва второго рода.

Из условий (2), (3) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \tau_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \eta_1(x) = +\infty. \quad (14)$$

Учитывая монотонное убывание функции $\eta_1(x)$, получаем в точках разрыва условия

$$\lim_{x \rightarrow x_{1,i} \pm 0} \tau_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_{1,i} \pm 0} \eta_1(x) = \pm\infty, \quad i = \overline{1, n_1}. \quad (15)$$

Применив граничное условие (4), имеем

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \tau_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow h-0} \eta_1(x) = -\infty. \quad (16)$$

Подчеркнём, что равенства (16) выполняются только на решениях задачи $\mathcal{P}_1$.

Пусть $I_{1,i} = (x_{1,i}, x_{1,i+1})$, где $i = \overline{0, n_1}$, $x_{1,0} = 0$, $x_{1,n_1+1} = h$; если $n_1 = 0$, то $I_{1,0} = I$. Таким образом, на каждом интервале $I_{1,i}$ функции $\tau_1(x)$, $\eta_1(x)$ можно определить как решения уравнения (12) с подходящими условиями, выбранными из (14)–(16).

Для дальнейшего описания интегральной характеристической функции удобно использовать обозначение

$$T_1(\gamma, C_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \gamma, C_1)}, \quad (17)$$

где $w_1 \equiv w_1(\eta_1; \gamma, C_1)$ — правая часть уравнения (13), взятая с противоположным знаком, т.е.

$$w_1(\eta_1; \gamma, C_1) \equiv \sqrt{(\eta_1^2 + a - \gamma^2)^2 + 2\alpha C_1^2}.$$

Имеет место следующее

Утверждение 1. Задача Коши для уравнения

$$u_1'' - \gamma^2 u_1 = -a u_1 - \alpha u_1^3 \quad (18)$$

с начальными условиями (2) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, её (классическое) решение $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$ непрерывно зависит от точки $(x, \gamma, C_1) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и справедливо соотношение

$$n_1 T_1(\gamma, C_1) + \int_{\eta_1(h)}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \gamma, C_1)} = h, \quad (19)$$

где $n_1 \geq 0$ — число нулей функции $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$, лежащих в I .

Доказательство. Учтём, что $w_1(\eta_1; \gamma, C_1) > 0$. Тогда, интегрируя уравнение (13) при условиях (14), (15) на каждом интервале $I_{1,i}$, $i = \overline{1, n_1}$, получаем систему (выводится аналогично как в работе [16])

$$\begin{aligned} 0 < x_{1,1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{1,1}(s; \gamma, C_1)}, \quad 0 < x_{1,i} - x_{1,i-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{1,i}(s; \gamma, C_1)}, \quad i = \overline{2, n_1}; \\ 0 < h - x_{n_1} &= \int_{-\infty}^{\eta_1(h)} \frac{ds}{w_{1,n_1+1}(s; \gamma, C_1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Левые части в (20) конечны, поэтому и правые части в (20) конечны, а это означает сходимость всех несобственных интегралов в (20). Последнее влечет существование $\eta_1 \equiv \eta_1(x)$ на каждом интервале $I_{1,i}$, $i = \overline{1, n_1}$.

Из соотношений (12) следует, что при фиксированных γ , C_1 переменные u_1 , u_1' ограничены.

Учитывая существование функции $\eta_1 \equiv \eta_1(x)$ и ограниченность функций u_1 , u_1' , приходим к выводу, что функции u_1 , u_1' определены для всех $x \in \bar{I}$. Другими словами, доказано, что решение $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$ задачи Коши (18), (2) существует и определено глобально при $x \in \bar{I}$. Единственность этого решения и его непрерывность (и дифференцируемость) по $x \in \bar{I}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_1 \in \mathbb{R}_+$ являются результатом гладкости уравнения (18) относительно u_1 , γ , C_1 [19, с. 22; 20, с. 19].

Просуммировав уравнения в (20), получим

$$x_{1,1} + x_{1,2} - x_{1,1} + x_{1,3} - x_{1,2} + \dots + x_{1,n_1} - x_{1,n_1-1} + h - x_{1,n_1} = n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \gamma, C_1)} + \int_{\eta_1(h)}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \gamma, C_1)}.$$

Формула (19) легко выводится из найденных соотношений. Утверждение доказано.

Важно заметить, что в утверждении 1 значение $\eta_1(h)$ не обязательно равно $-\infty$.

Используя второе условие (16) для соотношения (19), получаем ИХУ, для которого справедлива

Теорема 1. Пара $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1)$ является решением задачи $\mathcal{P}_1$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $\bar{n}_1 \geq 0$ такие, что $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$ удовлетворяют уравнению

$$\Phi_1(\gamma, C_1; n_1) \equiv (n_1 + 1)T_1(\gamma, C_1) = h \quad (21)$$

при $n_1 = \bar{n}_1$. В этом случае собственная функция $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, соответствующая решению $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, имеет $\bar{n}_1$ простых нулей $x_{1,i} = iT_1(\gamma, \bar{C}_1) \in I$, $i = \overline{1, \bar{n}_1}$.

Доказательство. Выше было показано (см. второе уравнение (16)), что

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \eta_1(x) = -\infty.$$

Учитывая найденный предел, ИХУ (21) получается из формулы (19).

Из вычислений, проведённых при доказательстве утверждения 1, следует, что любое решение задачи $\mathcal{P}_1$ удовлетворяет (21) при некотором $n_1 = \bar{n}_1$. Тот факт, что любое решение $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$ уравнения (21) является решением $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1)$ задачи $\mathcal{P}_1$, доказывается аналогично тому, как это сделано в [15].

Формула для нулей $x_{1,i}$ собственной функции u_1 получается из формулы (20). Теорема доказана.

Для установления разрешимости основной задачи $\mathcal{P}$ необходимы результаты о свойствах функции T_1 , которые изложены ниже. Отметим, что чёрточки над символами ниже могут быть опущены.

Утверждение 2. Для любого фиксированного $C_1 \in \mathbb{R}_+$ справедливы свойства

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}_+} T_1(\gamma, C_1) = \delta_1, \quad (22)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} T_1(\gamma, C_1) = 0, \quad (23)$$

где $\delta_1 = \delta_1(C_1)$ является положительной величиной.

Доказательство. Начнём с обоснования формулы (22). Рассуждения выше показывают положительность w_1 . Тогда по определению T_1 , которое представлено формулой (17), подынтегральные выражения в T_1 также положительны. Следовательно, $T_1 > 0$ и можно найти его максимальное значение, которое обозначим через δ_1 . При этом заметим, что δ_1 непрерывно зависит от $C_1 \in (0, C)$.

Докажем формулу (23). Для этого сначала выясним поведение T_1 при $\gamma \rightarrow +\infty$; считаем, что $\gamma^2 > a + \sqrt{2\alpha}C_1$.

Далее нам необходимо неравенство

$$\frac{1}{|a_1| + a_2} \leq \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{|a_1| + a_2}, \quad a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \in \mathbb{R}_+. \quad (24)$$

Используя (24) и формулу (17), получаем следующую оценку для T_1 :

$$2\bar{T}_1(\gamma, C_1) \leq T_1(\gamma, C_1) \leq 2\sqrt{2}\bar{T}_1(\gamma, C_1), \quad (25)$$

где

$$\bar{T}_1(\gamma, C_1) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + a - \gamma^2| + \sqrt{2\alpha}C_1}. \quad (26)$$

Введём обозначение для точки $s_* = \sqrt{\gamma^2 - a}$. Тогда интеграл $\bar{T}_1(\gamma, C_1)$, определяемый формулой (26), можно записать в виде

$$\bar{T}_1(\gamma, C_1) = \int_0^{s_*} \frac{ds}{\gamma^2 - a + \sqrt{2\alpha}C_1 - s^2} + \int_{s_*}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\gamma^2 - a - \sqrt{2\alpha}C_1)} = I_1 + I_2$$

и справедливо соотношение

$$2(I_1 + I_2) \leq T_1(\gamma, C_1) \leq 2\sqrt{2}(I_1 + I_2) \quad (27)$$

при условии $\gamma^2 > a + \sqrt{2\alpha}C_2$.

Далее вычислим интегралы I_1 и I_2 :

$$I_1 = \int_0^{s_*} \frac{ds}{\gamma^2 - a + \sqrt{2\alpha C_1} - s^2} = \frac{2 \ln \left(\sqrt{\gamma^2 - a + \sqrt{2\alpha C_1}} + \sqrt{\gamma^2 - a} \right) - \ln(\sqrt{2\alpha C_1})}{2\sqrt{\gamma^2 - a + \sqrt{2\alpha C_1}}}, \quad (28)$$

$$I_2 = \int_{s_*}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\gamma^2 - a - \sqrt{2\alpha C_1})} = \frac{2 \ln \left(\sqrt{\gamma^2 - a - \sqrt{2\alpha C_1}} + \sqrt{\gamma^2 - a} \right) - \ln(\sqrt{2\alpha C_1})}{2\sqrt{\gamma^2 - a - \sqrt{2\alpha C_1}}}. \quad (29)$$

Учитывая (28) и (29), приходим к оценкам

$$I_1 = O\left(\frac{\ln \gamma}{\gamma}\right) \quad \text{и} \quad I_2 = O\left(\frac{\ln \gamma}{\gamma}\right) \quad (30)$$

для достаточно больших положительных γ . Ясно, что $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} I_1 = 0$ и $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} I_2 = 0$.

Оценки для интегралов I_1 и I_2 (30) и неравенства (27) доказывают справедливость формулы (23) при $\gamma \rightarrow +\infty$. Утверждение доказано.

Используя утверждение 2, можно получить

Утверждение 3. Для любого $C_1 \in \mathbb{R}_+$ существует целое число $n_1^0 \geq 0$ такое, что уравнение (21) имеет хотя бы одно положительное решение $\gamma = \bar{\gamma}_{n_1}$ для каждого $n_1 = n_1^0, n_1^0 + 1, \dots$, где $\bar{\gamma}_{n_1}$ зависит от C_1 и n_1 . Кроме того,

$$\lim_{n_1 \rightarrow +\infty} \bar{\gamma}_{n_1} = +\infty.$$

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно использовать свойства, описанные в утверждении 2. Действительно, всегда найдётся такое целое число n_1^0 , что для заданного положительного значения h справедливо неравенство $(n_1 + 1)\delta_1 > h$ при $n_1 = n_1^0, n_1^0 + 1, \dots$ (см. формулу (22)). В свою очередь, формула (23) приводит к тому, что $(n_1 + 1)T_1(\gamma, C_1) \rightarrow +0$ при $\gamma \rightarrow +\infty$ для любых $n_1 = n_1^0, n_1^0 + 1, \dots$. Утверждение доказано.

На рис. 1 при $j = 1$ представлена геометрическая интерпретация рассуждений, описанных при доказательстве утверждения 3.

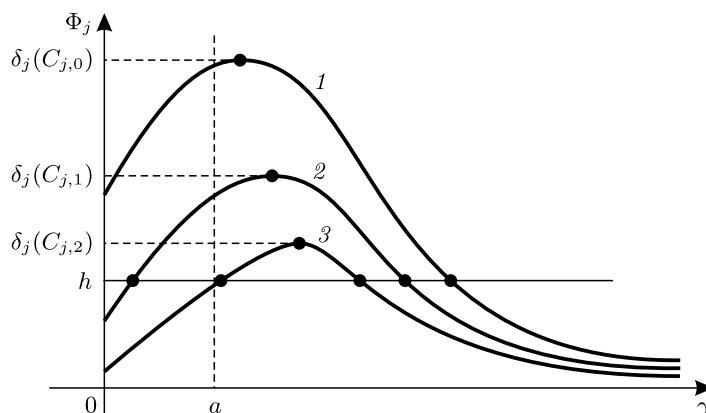


Рис. 1. Графики зависимости Φ_j от γ для различных значений C_j : 1 — $C_j = C_{j,0}$, 2 — $C_j = C_{j,1}$, 3 — $C_j = C_{j,2}$, $0 < C_{j,0} < C_{j,1} < C_{j,2} < C$. Значение $n_j, j = 1, 2$, фиксировано.

Установим ещё некоторые свойства интеграла $T_1(\gamma, C_1)$.

Утверждение 4. Пусть $\delta_1(C_1) = \max_{\gamma \in \mathbb{R}_+} T_1(\gamma, C_1)$, где $C_1 \in \mathbb{R}_+$. Справедливо следующее свойство:

$$\lim_{C_1 \rightarrow +0} \delta_1(C_1) = +\infty. \quad (31)$$

Доказательство. Начнём доказательство с того, что зафиксируем значение $\gamma = \sqrt{a}$. При этом справедливо условие $T_1(\sqrt{a}, C_1) \leq \delta_1(C_1)$. Учитывая (25) и вычисляя T_1 и $\bar{T}_1$ при $\gamma = \sqrt{a}$, получаем

$$2\bar{T}_1(\sqrt{a}, C_1) \leq T_1(\sqrt{a}, C_1) \leq \delta_1(C_1), \quad (32)$$

где

$$\bar{T}_1(\sqrt{a}, C_1) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{2a}C_1} = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}\sqrt{C_1}}. \quad (33)$$

Из (33) следует, что $\lim_{C_1 \rightarrow +0} \bar{T}_1(\sqrt{a}, C_1) = +\infty$. Из формул (32) и (33) вытекает требуемое свойство (31). Утверждение доказано.

Продолжим изучение задачи $\mathcal{P}_1$. Рассмотрим функцию $\gamma \equiv \gamma(C_1; n_1)$. Важно установить поведение решения $\gamma \equiv \gamma(C_1; n_1)$ уравнения $\bar{\Phi}_1(\gamma, C_1; n_1) = h$ при $C_1 \rightarrow +0$.

Утверждение 5. Пусть $\gamma \equiv \gamma(C_1; n_1)$ — решение уравнения $\bar{\Phi}_1(\gamma, C_1; n_1) = h$. Существует целое число $n'_1 \geq 0$ такое, что справедлива формула

$$\lim_{C_1 \rightarrow +0} \gamma(C_1; n_1) = +\infty \quad (34)$$

для каждого $n_1 = n'_1, n'_1 + 1, \dots$

Доказательство. Воспользуемся результатами, полученными при доказательстве утверждения 2, в частности, оценками (25) и (27) интеграла $T_1(\gamma, C_1)$, где интегралы I_1 и I_2 , содержащиеся в оценке (27), были вычислены явно в виде (28) и (29). Результаты расчётов показывают, что значения I_1 и I_2 увеличиваются при уменьшении $C_1 > 0$, следовательно, снижение значения C_1 влечёт рост значения γ . Важно отметить, что C_1 и γ при этом остаются положительными. Проведённые рассуждения доказывают свойство (34). Утверждение доказано.

3. ЗАДАЧА $\mathcal{P}_2$

Введём новые переменные

$$\tau_2 = u_2^2 + u_3^2, \quad \eta_2 = (a + \alpha\tau_2) \frac{u_2}{u_3}, \quad (35)$$

где $\tau_2 \equiv \tau_2(x; \gamma, C_2)$, $\eta_2 \equiv \eta_2(x; \gamma, C_2)$.

Используя переменные (35), перепишем второе и третье уравнения системы (1) в виде

$$\tau'_2 = 2 \frac{(a + \alpha\tau_2)^2(2\gamma^2 - a - \alpha\tau_2)\tau_2\eta_2}{\gamma(a + \alpha\tau_2)((a + \alpha\tau_2)^2 + \eta_2^2) + 2\alpha\tau_2\eta_2^2}, \quad \eta'_2 = \frac{\gamma(a + \alpha\tau_2)^2 + \gamma^{-1}(a - \gamma^2 + \alpha\tau_2)\eta_2^2}{a + \alpha\tau_2}, \quad (36)$$

а первый интеграл (6) как

$$\eta_2^2 = \frac{(a + \alpha\tau_2)^2(0.5\alpha\gamma^2\tau_2^2 + a\gamma^2\tau_2 - C_2^2)}{(a + \alpha\tau_2)(2\gamma^2 - (a + \alpha\tau_2))\tau_2 - (0.5\alpha\gamma^2\tau_2^2 + a\gamma^2\tau_2 - C_2^2)}. \quad (37)$$

Строгая положительность функции η'_2 при $0 < \gamma^2 \leq a$ очевидна. Чтобы доказать её при всех $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_2 \in \mathbb{R}_+$, необходимо показать, что η'_2 не обращается в нуль в какой-либо точке. Предположим противное, тогда из второго уравнения в (36) получим

$$\eta_2^2 = -\gamma^2 \frac{(a + \alpha\tau_2)^2}{a - \gamma^2 + \alpha\tau_2}.$$

Подставив это выражение в (37) и преобразовав, найдём $C_2^2 = -0.5\alpha\gamma^2\tau_2^2$. Учитывая, что $\alpha > 0$, получаем противоречие, следовательно, $\eta'_2 > 0$ при любых $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_2 \in \mathbb{R}_+$.

Строгая положительность функции η'_2 влечёт монотонное возрастание $\eta_2(x)$ при $x \in I$, при этом точки разрыва функции $\eta_2(x)$ совпадают с нулями функции $u_3(x)$ по определению η_2 , данному во второй формуле (35), и с учётом непрерывности решений u_2 и u_3 при $x \in I$. В то же время все точки разрыва являются точками разрыва второго рода. Если u_3 имеет $n_2 \geq 0$ нулей $x_{2,i} \in I$, $i = \overline{1, n_2}$, то $\eta_2(x)$ имеет n_2 точек разрыва $x_{2,i}$, $i = \overline{1, n_2}$. В случае когда функция u_3 не имеет нулей при $x \in I$, значение $n_2 = 0$.

Из условий (2), (3) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \tau_2(x) = A_2^2, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \eta_2(x) = -\infty. \quad (38)$$

Учитывая монотонное возрастание функции $\eta_2(x)$, получаем следующие условия в точках разрыва:

$$\lim_{x \rightarrow x_{2,i} \pm 0} \eta_2(x) = \mp \infty, \quad i = \overline{1, n_1}. \quad (39)$$

Применив граничное условие (4), имеем

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \eta_2(x) = +\infty. \quad (40)$$

Отметим, как и в случае задачи $\mathcal{P}_1$, что равенство (40) выполняется только на решениях задачи $\mathcal{P}_2$.

Пусть $I_{2,i} = (x_{2,i}, x_{2,i+1})$, где $i = \overline{0, n_2}$, $x_{2,0} = 0$, $x_{2,n_2+1} = h$; если $n_2 = 0$, то $I_{2,0} = I$.

Таким образом, на каждом интервале $I_{2,i}$ функции $\tau_2(x)$, $\eta_2(x)$ можно определить как решения уравнения (37) с подходящими условиями, выбранными из (38)–(40).

Аналогично тому как это сделано для задачи $\mathcal{P}_1$, будем использовать обозначение

$$T_2(\gamma, C_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_2(s; \gamma, C_2)},$$

где $w_2 \equiv w_2(\tau_2, \eta_2; \gamma, C_2)$ — правая часть второго уравнения в (36), т.е.

$$w_2(\tau_2, \eta_2; \gamma, C_2) = \frac{\gamma(a + \alpha\tau_2)^2 + \gamma^{-1}(a - \gamma^2 + \alpha\tau_2)\eta_2^2}{a + \alpha\tau_2}, \quad (41)$$

где η_2 и τ_2 связаны выражением (37).

Имеет место следующее

Утверждение 6. *Задача Коши для системы*

$$\gamma^2 u_2 - \gamma u'_3 = a u_2 + \alpha(u_2^2 + u_3^2) u_2, \quad -\gamma u'_2 + u''_3 = -a u_3 - \alpha(u_2^2 + u_3^2) u_3 \quad (42)$$

с начальными условиями (3) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, её (классическое) решение $u_2 \equiv u_2(x; \gamma, C_2)$, $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$ непрерывно зависит от точки $(x, \gamma, C_2) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и справедливо соотношение

$$n_2 T_2(\gamma, C_2) + \int_{-\infty}^{\eta_2(h)} \frac{ds}{w_2(s; \gamma, C_2)} = h, \quad (43)$$

где $n_2 \geq 0$ — число нулей функции $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$, лежащих в I .

Доказательство. Примем во внимание, что $w_2(\eta_2; \gamma, C_2) > 0$. Тогда, интегрируя второе уравнение в (36) при условиях (38), (39) на каждом интервале $I_{2,i}$, $i = \overline{1, n_2}$, получаем систему (выводится аналогично как в работе [17])

$$\begin{aligned} 0 < x_{2,1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{2,1}(s; \gamma, C_2)}, \quad 0 < x_{2,i} - x_{2,i-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{2,i}(s; \gamma, C_2)}, \quad i = \overline{2, n_2}; \\ 0 < h - x_{n_2} &= \int_{\eta_2(h)}^{+\infty} \frac{ds}{w_{2,n_2+1}(s; \gamma, C_2)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Дальнейшие рассуждения подобны приведённым при доказательстве утверждения 1. Левые части в (44) конечны, поэтому и правые части в (44) конечны, что означает сходимость всех несобственных интегралов в (44). Последнее влечёт за собой существование $\eta_2 \equiv \eta_2(x)$ на каждом интервале $I_{2,i}$, $i = \overline{1, n_2}$.

Из соотношения (37) следует, что при фиксированных γ , C_2 переменные u_2 , u_3 ограничены.

Учитывая существование функции $\eta_2 \equiv \eta_2(x)$ и ограниченность функций u_2 , u_3 , приходим к выводу, что функции u_2 , u_3 определены для всех $x \in \bar{I}$. Другими словами, доказано, что решение $u_2 \equiv u_2(x; \gamma, C_2)$, $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$ задачи Коши (42), (3) существует и определено глобально при $x \in \bar{I}$. Единственность этого решения и его непрерывность (и дифференцируемость) по $x \in \bar{I}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и $C_2 \in \mathbb{R}_+$ являются результатом гладкости уравнений в (1) относительно u_2 , u_3 , γ , C_2 [19, с. 22; 20, с. 19].

Просуммировав уравнения в (44), имеем

$$x_{2,1} + x_{2,2} - x_{2,1} + x_{2,3} - x_{2,2} + \dots + x_{2,n_2} - x_{2,n_2-1} + h - x_{2,n_2} = n_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_2(s; \gamma, C_2)} + \int_{-\infty}^{\eta_2(h)} \frac{ds}{w_2(s; \gamma, C_2)}.$$

Формула (43) легко получается из последнего соотношения. Утверждение доказано.

Важно отметить, что в утверждении 6 значение $\eta_2(h)$ не обязательно равно $+\infty$.

Используя условие (40) для соотношения (43), получаем ИХУ, для которого справедлива

Теорема 2. Пара $(\bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ является решением задачи $\mathcal{P}_2$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $\bar{n}_2 \geq 0$ такие, что $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_2 = \bar{C}_2$ удовлетворяют уравнению

$$\Phi_2(\gamma, C_2; n_2) \equiv (n_2 + 1)T_2(\gamma, C_2) = h \quad (45)$$

при $n_2 = \bar{n}_2$. В этом случае собственная функция $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, соответствующая решению $(\bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, имеет $\bar{n}_2$ простых нулей $x_{2,i} = iT_2(\gamma, \bar{C}_2) \in I$, $i = \overline{1, \bar{n}_2}$.

Доказательство. Рассуждения ниже подобны приведённым при доказательстве теоремы 1. Выше было показано (см. (40)), что

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \eta_2(x) = +\infty.$$

Учитывая найденный предел, ИХУ (45) получается из формулы (43).

Из вычислений, проведённых при доказательстве утверждения 6, следует, что любое решение задачи $\mathcal{P}_2$ удовлетворяет (45) при некотором $n_2 = \bar{n}_2$.

Тот факт, что любое решение $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_2 = \bar{C}_2$ уравнений (21) является решением $(\bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ задачи $\mathcal{P}_2$, доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [17].

Формулы для нулей $x_{2,i}$ собственной функции u_3 получаются из формулы (44). Теорема доказана.

Для установления разрешимости основной задачи $\mathcal{P}$ необходимы результаты о свойствах функции T_2 , подобные указанным в утверждениях 2 и 3 для функции T_1 .

Утверждение 7. Для любого фиксированного $C_2 \in \mathbb{R}_+$ справедливы свойства

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}_+} T_2(\gamma, C_2) = \delta_2, \quad (46)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} T_2(\gamma, C_2) = 0, \quad (47)$$

где $\delta_2 = \delta_2(C_2)$ является положительной величиной.

Доказательство. Начнём с обоснования формулы (46). Поскольку $w_2 > 0$, то и подинтегральное выражение в T_2 также положительно. Следовательно, $T_2 > 0$ и можно найти его максимальное значение, которое обозначим через δ_2 . При этом заметим, что δ_2 непрерывно зависит от $C_2 \in (0, C)$.

Докажем формулу (47), применяя подход, отличающийся от использованного при доказательстве формулы (23) в утверждении 2.

Из формулы (37) очевидна чётность функции $\tau_2(\eta_2; \gamma, C_2)$ относительно η_2 , следовательно, $T_2(\gamma, C_2) = 2 \int_0^{+\infty} ds/w_2(s; \gamma, C_2)$, где $T_2(\gamma, C_2)$ определена для всех $\gamma, C_2 > 0$. Кроме того, $T_2(\gamma, C_2)$ непрерывно зависит от $\gamma, C_2 > 0$, поскольку функция w_2^{-1} непрерывна по $\gamma, C_2 > 0$, где $w_2 \equiv w_2(\tau_2, s; \gamma, C_2)$ и $\tau_2 \equiv \tau_2(s; \gamma, C_2)$ определены формулами (41) и (37) соответственно.

Далее в формулах (41), (37) удобно ввести следующую замену: $\bar{\tau}_2 = \gamma^{-2}(a + \alpha\tau_2)$, $\bar{s} = \gamma^{-2}s$. Тогда

$$w_2(\bar{s}; \gamma, C_2) = \gamma^3 \frac{\bar{\tau}_2^2 + (\bar{\tau}_2 - 1)\bar{s}^2}{\bar{\tau}_2}, \quad (48)$$

где $\bar{\tau}_2 \equiv \bar{\tau}_2(\bar{s})$, и

$$\bar{s}^2 = \frac{\bar{\tau}_2^2 (\bar{\tau}_2^2 - (\bar{C}_2 + \bar{a}^2))}{2\bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - (\bar{\tau}_2^2 - (\bar{C}_2 + \bar{a}^2))}; \quad (49)$$

здесь $\bar{C}_2 = 2\alpha C_2 \gamma^{-6}$, $\bar{a} = a\gamma^{-2}$.

Подставив $\bar{s}^2$ из (49) в (48), получим

$$w_2(\bar{s}; \gamma, C_2) = \gamma^3 \bar{\tau}_2 \frac{(2 - \bar{\tau}_2)(2\bar{\tau}_2(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - \bar{\tau}_2^2 + \bar{C}_2 + \bar{a}^2)}{2\bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - (\bar{\tau}_2^2 - \bar{C}_2 - \bar{a}^2)}.$$

Пусть $Q = \bar{\tau}_2^2 - (\bar{C}_2 + \bar{a}^2)$, $q = \bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(\bar{\tau}_2 - \bar{a})$, тогда

$$d\bar{s} = \frac{1}{2\bar{s}} \left(\frac{\bar{\tau}_2^2 Q}{2q - Q} \right)' d\bar{\tau}_2,$$

где $(\cdot)' = d/d\bar{\tau}_2$. Учитывая введённые обозначения и то, что

$$\left(\frac{\bar{\tau}_2^2 Q}{2q - Q} \right)' = 2\bar{\tau}_2 \frac{(Q + \bar{\tau}_2^2)(2q - Q) - \bar{\tau}_2 Q(q' - \bar{\tau}_2)}{(2q - Q)^2},$$

интеграл T_2 можно записать в виде

$$T_2(\gamma, C_2) = \frac{2}{\gamma} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{(Q + \bar{\tau}_2^2)(2q - Q) - \bar{\tau}_2 Q(q' - \bar{\tau}_2)}{\bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(2\bar{\tau}_2(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - Q) \sqrt{Q} \sqrt{2q - Q}} d\bar{\tau}_2,$$

где $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_-$ — (единственное) положительное решение уравнения $Q = 0$, равное $\sqrt{\bar{C}_2 + \bar{a}^2}$, а $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_+$ — максимальное положительное решение уравнения $2q - Q = 0$. Выбор максимального

решения во втором случае обусловлен тем, что подкоренные выражения в $T_2(\gamma, C_2)$ должны оставаться положительными.

Далее необходимо найти асимптотики $\bar{\tau}_-$ и $\bar{\tau}_+$ при больших значениях γ .

Для вычисления $\bar{\tau}_+$ сначала перейдём к пределу при $\gamma \rightarrow \infty$ в $2q - Q$. Получим уравнение

$$\bar{\tau}_2^2(3 - 2\bar{\tau}_2) = 0,$$

максимальное решение которого $\bar{\tau}_2 = 3/2$ можно рассматривать как первое приближение к $\bar{\tau}_+$. Таким образом,

$$\bar{\tau}_- = a\gamma^{-2} + O(\gamma^{-4}) \quad \text{и} \quad \bar{\tau}_+ = 3/2 + O(\gamma^{-2}).$$

Перепишем полученный интеграл в следующем виде:

$$T_2(\gamma, C_2) = \frac{2}{\gamma} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2)}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} d\bar{\tau}_2,$$

где

$$g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2) = \frac{(Q + \bar{\tau}_2^2)(2q - Q) - \bar{\tau}_2 Q(q' - \bar{\tau}_2)}{\bar{\tau}_2(2 - \bar{\tau}_2)(2\bar{\tau}_2(\bar{\tau}_2 - \bar{a}) - Q)\sqrt{2q - Q}}.$$

Заметим, что

$$g_0(\bar{\tau}_2) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2) = \frac{3 - \bar{\tau}_2}{(2 - \bar{\tau}_2)\sqrt{3 - 2\bar{\tau}_2}} \quad \text{и} \quad g_0(\bar{\tau}_-) = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\gamma^{-2}).$$

Далее получим

$$T_2(\gamma, C_2) = \frac{2}{\gamma} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2) - g_0(\bar{\tau}_-)}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} d\bar{\tau}_2 + \frac{2}{\gamma} g_0(\bar{\tau}_-) \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{d\bar{\tau}_2}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} = \frac{2}{\gamma} I_3 + \frac{2}{\gamma} g_0(\bar{\tau}_-) I_4. \quad (50)$$

Сначала оценим интеграл I_3 :

$$I_3 = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{g(\bar{\tau}_2; \gamma) - g_0(\bar{\tau}_-)}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} d\bar{\tau}_2 + O(\gamma^{-r}),$$

где $r > 0$. Первое слагаемое в последней формуле даёт

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{\bar{\tau}_-}^{\bar{\tau}_+} \frac{g(\bar{\tau}_2; \gamma, C_2) - g_0(\bar{\tau}_-)}{\sqrt{\bar{\tau}_2^2 - \bar{\tau}_-^2}} d\bar{\tau}_2 &= \int_0^{3/2} \frac{g_0(\bar{\tau}_2) - g_0(0)}{\bar{\tau}_2} d\bar{\tau}_2 = \\ &= \int_0^{3/2} \frac{1}{\bar{\tau}_2} \left(\frac{3 - \bar{\tau}_2}{(2 - \bar{\tau}_2)\sqrt{3 - 2\bar{\tau}_2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) d\bar{\tau}_2 = \sqrt{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Интеграл I_4 вычисляется точно в виде

$$I_4 = \ln(\bar{\tau}_+ + \sqrt{\bar{\tau}_+^2 - \bar{\tau}_-^2}) - \ln \bar{\tau}_- = 2 \ln \gamma + \ln 3 - \ln a + O(\gamma^{-2}).$$

Учитывая полученные результаты для интегралов I_3 , I_4 и формулу (50), имеем

$$T_2(\gamma, C_2) = 2\sqrt{3} \frac{\ln \gamma}{\gamma} + O(\gamma^{-1}). \quad (51)$$

Из формулы (51) следует, что (47) справедливо при $\gamma \rightarrow +\infty$. Утверждение доказано.

Используя утверждение 7, аналогично тому как это было сделано для утверждения 3, можно получить

Утверждение 8. Для любого $C_2 \in \mathbb{R}_+$ существует целое число $n_2^0 \geq 0$ такое, что уравнение (45) имеет хотя бы одно положительное решение $\gamma = \bar{\gamma}_{n_2}$ для каждого $n_2 = n_2^0, n_2^0 + 1, \dots$, где $\bar{\gamma}_{n_2}$ зависит от C_2 и n_2 . Кроме того,

$$\lim_{n_2 \rightarrow +\infty} \bar{\gamma}_{n_2} = +\infty.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно использовать свойства, описанные в утверждении 7. Действительно, всегда найдётся такое целое число n_2^0 , что для заданного положительного значения h будет справедливо неравенство $(n_2 + 1)\delta_2 > h$ при $n_2 = n_2^0, n_2^0 + 1, \dots$ (см. формулу (46)). В свою очередь, формула (47) приводит к тому, что $(n_2 + 1)T_2(\gamma, C_2) \rightarrow +0$ при $\gamma \rightarrow +\infty$ для любых $n_2 = n_2^0, n_2^0 + 1, \dots$. Утверждение доказано.

При $j = 2$ на рис. 1 представлена геометрическая интерпретация описанных при доказательстве утверждения 8 рассуждений, аналогичная случаю $j = 1$.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ $\mathcal{P}$

В пп. 2, 3 задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ были исследованы независимо друг от друга, но, вообще говоря, они связаны условием (7). Вернёмся теперь к задаче $\mathcal{P}$.

Имеет место следующее

Утверждение 9. Задача Коши (1)–(3) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, её (классическое) решение $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$, $u_2 \equiv u_2(x; \gamma, C_2)$, $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$ непрерывно зависит от точки $(x, \gamma, C_j) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $j = 1, 2$, и справедливы соотношения (19), (43), где $n_1 \geq 0$ — число нулей функции $u_1 \equiv u_1(x; \gamma, C_1)$, лежащих в I , $n_2 \geq 0$ — число нулей функции $u_3 \equiv u_3(x; \gamma, C_2)$, лежащих в I .

Для доказательства утверждения 9 достаточно объединить рассуждения, данные при доказательстве утверждений 1 и 6.

Объединив полученные ранее ИХУ (21) и (45) в систему с учётом условия (7), сформулируем следующий результат.

Теорема 3. Тройка $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ является решением задачи $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $\bar{n}_1 \geq 0$, $\bar{n}_2 \geq 0$ такие, что $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$ и $C_2 = \bar{C}_2(\bar{C}_1)$ (где $\bar{C}_2$ зависит от $\bar{C}_1$, см. (9)) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\Phi_1(\gamma, C_1; n_1) \equiv (n_1 + 1)T_1(\gamma, C_1) = h, \quad \Phi_2(\gamma, C_2; n_2) \equiv (n_2 + 1)T_2(\gamma, C_2) = h \quad (52)$$

при $n_1 = \bar{n}_1$, $n_2 = \bar{n}_2$. В этом случае собственные функции $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, соответствующие решению $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$, имеют $\bar{n}_j$ простых нулей

$$x_{j,i} = iT_j(\gamma, \bar{C}_j) \in I, \quad i = \overline{1, \bar{n}_j}, \quad j = 1, 2.$$

Справедливость теоремы 3 следует из теорем 1 и 2 с учётом условия (7).

Теперь можно доказать основной результат данной работы о разрешимости задачи $\mathcal{P}$.

Теорема 4 (о разрешимости задачи $\mathcal{P}$). Для любого заданного конечного целого числа $n > 0$ существует не менее n решений $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ задачи $\mathcal{P}$, где $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ определяется формулой (9).

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ — решение первого уравнения системы (52) при $n_1 = \bar{n}_1$, а $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ — минимальное и максимальное значения $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ при $C_1 \in (0, C)$. В утверждении 5 было представлено свойство функции $\gamma \equiv \gamma(C_1; n_1)$ (34), из которого следует, что $\gamma_{\max} = +\infty$. Заметим, что функция $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ не обязательно непрерывна относительно C_1 для всех $C_1 \in (0, C)$ и, кроме того, может не существовать для некоторых интервалов $(C'_1, C''_1) \subset (0, C)$. Все это можно установить из рис. 1.

Выше было показано, что $\gamma_{\max} = +\infty$, следовательно, $\gamma'_{\min}$ можно выбрать из следующих соображений. Пусть $(0, C_*)$ — максимальный интервал, на котором функция $\gamma(C_1; \bar{n}_1)$ непрерывна относительно $C_1 \in (0, C_*)$, где $C_* \leq C$, тогда считаем, что $\gamma'_{\min}$ — минимальное значение $\gamma(C_1; \bar{n}_1)$ при $C_1 \in (0, C_*)$. Важно отметить, что существование C_* всегда возможно. Пусть также (C^*, C) — максимальный интервал, для которого функция $\gamma(C_1; \bar{n}_1)$ непрерывна относительно $C_1 \in (C^*, C)$, где $C_* \leq C^*$, тогда считаем, что $\gamma'_{\max}$ — максимальное значение $\gamma(C_1; \bar{n}_1)$ при $C_1 \in (C^*, C)$ (рис. 2). Интервал $\Lambda^- = (\gamma_{\min}, \gamma'_{\max})$ всегда остаётся ограниченным, интервал $\Lambda^+ = (\gamma'_{\min}, \gamma_{\max})$ можно сделать сколь угодно большим.

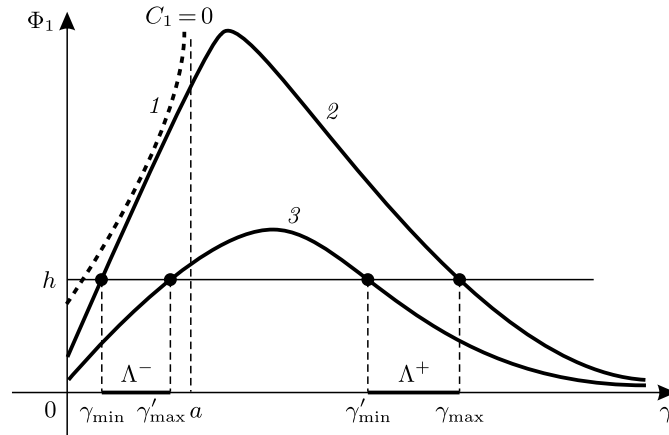


Рис. 2. Графики зависимости Φ_1 от γ для различных значений C_1 : 1 — $C_1 = 0$; 2 — C_1 вблизи 0; 3 — $C_1 = C$. Значение n_1 фиксировано.

Далее необходимо показать, что существуют $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ и $C_2 = C_2(C_1)$, удовлетворяющие (7), такие, что выполняется второе уравнение в системе (52) при некотором $n_2 = \bar{n}_2$.

Подставив $\gamma = \gamma(C_1; \bar{n}_1)$ и $C_2 = C_2(C_1)$, где C_2 определяется по формуле (9) и $C_1 \in (0, C_*)$, в $T_2 = T_2(\gamma(C_1; \bar{n}_1), C_2(C_1))$, оценим его минимальное и максимальные значения.

Итак, пусть

$$T_{\min} = \min_{C_2(C_1)} T_2(\gamma(C_1; \bar{n}_1), C_2(C_1)) \text{ и } T_{\max} = \max_{C_2(C_1)} T_2(\gamma(C_1; \bar{n}_1), C_2(C_1)) \quad (53)$$

при $C_1 \in (0, C_*)$; в данном случае $\gamma(C_1; \bar{n}_1) \in (\gamma'_{\min}, \gamma_{\max})$.

Прежде всего заметим, что всегда $T_{\min} < h$. Для доказательства данного факта используем свойство (47) из утверждения 7, из которого следует, что при достаточно больших $\gamma = \gamma(C_1, n_1)$ можно получить достаточно малые значения $T_{\min}$. В утверждении 5 было представлено свойство (34) функции $\gamma(C_1, n_1)$, показывающее стремление $\gamma = \gamma(C_1, n_1)$ к $+\infty$ при достаточно малых C_1 . Однако в этом случае C_1 не стремится к нулю. Тогда получаем, что при достаточно больших γ функция T_1 будет меньше h .

Далее необходимо отдельно рассмотреть два возможных случая. Во-первых, возможно, что $T_{\min} < h < T_{\max}$. Тогда из непрерывной зависимости γ и C_2 от C_1 и непрерывной зависимости T_2 от γ и C_2 вытекает, что существует $\bar{C}_1 \in (0, C_*)$ такое, что для $\bar{\gamma} = \gamma(\bar{C}_1; \bar{n}_2)$ и $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ верно, что $T_2(\bar{\gamma}, \bar{C}_1) = h$. Следовательно, существует решение $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ системы (21) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = 0$. Во-вторых, возможно, что $T_{\max} < h$. Тогда найдётся целое число $\bar{n}_2$ такое, что

$$(\bar{n}_2 + 1)T_{\min} < h < (\bar{n}_2 + 1)T_{\max}.$$

Существование значения $\bar{C}_1 \in (0, C_*)$ такого, что для $\bar{\gamma} = \gamma(\bar{C}_1; \bar{n}_1)$ и $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ справедливо равенство $(\bar{n}_2 + 1)T_2(\bar{\gamma}, \bar{C}_2) = h$, следует из аналогичных первому случаю рассуждений. Таким образом, получаем решение $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ системы (21) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = \bar{n}_2$.

На рис. 3 видно, что Φ_2 изменяется от $h_{\min}$ до $h_{\max}$ при изменении C_2 от $C_2 = C_2|_{C_1=C}$ до $C_2 = C_2|_{C_1=0}$, где $h_{\max} = (\bar{n}_2 + 1)T_{\max}$ и $h_{\min} = (\bar{n}_2 + 1)T_{\min}$ (см. формулы (53)). В этом случае значение γ относительно C_1 меняется с $\gamma'_{\min}$ на $\gamma_{\max}$. Теорема доказана.

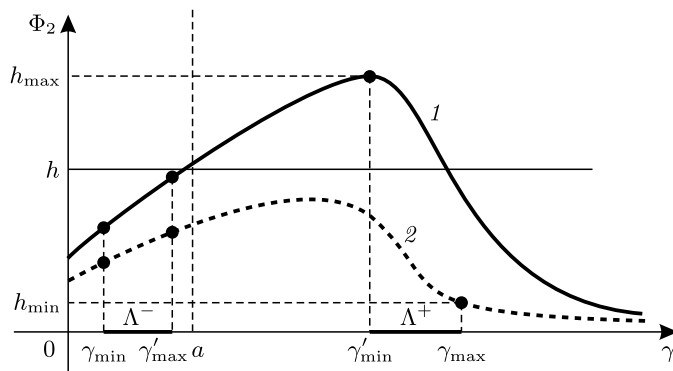


Рис. 3. Графики зависимости Φ_2 от γ для фиксированного n_2 : 1 — минимально возможное значение $C_2 = C_2|_{C_1=C_*}$; 2 — максимально возможное значение $C_2 = C_2|_{C_1=0}$.

В классической (линейной) теории Штурма–Лиувилля широко используется понятие характеристической функции [21, с. 35]. В случае задачи $\mathcal{P}$ характеристическая функция может быть введена аналогичным образом.

Имеем следующее

Утверждение 10. Любая тройка $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$ при $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}_+$, $\bar{C}_1, \bar{C}_2 \in (0, C)$ является решением задачи $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда тройка $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$, $C_2 = \bar{C}_2$ удовлетворяет системе

$$u_1(h; \gamma, C_1) = 0, \quad u_3(h; \gamma, C_2) = 0, \quad (54)$$

где $u_1(x; \gamma, C_1)$, $u_3(x; \gamma, C_2)$ являются решениями задачи Коши (1)–(3), а $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ определяется по формуле (9).

Доказательство. Пусть $u_1 = u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_2 = u_2(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, $u_3 = u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ — решение задачи Коши (1)–(3), где $C_2 = \bar{C}_2$ определяется из формулы (9) при $C_1 = \bar{C}_1$. Если тройка $\gamma = \bar{\gamma}$, $C_1 = \bar{C}_1$, $C_2 = \bar{C}_2(\bar{C}_1)$ удовлетворяет (54), то тройка $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2(\bar{C}_1))$ является решением задачи $\mathcal{P}$ и $u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_2(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$, $u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ — собственные функции.

Пусть тройка $\gamma = \bar{\gamma}^* \in \mathbb{R}_+$, $C_1 = \bar{C}_1^* \in (0, C)$, $C_2 = \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*)$ — решение (54). Рассмотрим задачу Коши (1)–(3), где $\gamma = \bar{\gamma}^*$, $C_1 = \bar{C}_1^*$; $C_2 = \bar{C}_2^*$ определяется из (9) при $C_1 = \bar{C}_1^*$. Согласно утверждению 1 нетривиальное решение $u_1 = u_1(x; \bar{\gamma}^*, \bar{C}_1^*)$, $u_2 = u_2(x; \bar{\gamma}^*, \bar{C}_2^*)$, $u_3 = u_3(x; \bar{\gamma}^*, \bar{C}_2^*)$ задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от точки $(x, \gamma, C_1) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \times (0, C)$. Если (54) выполняется для $\gamma = \bar{\gamma}^*$, $C_1 = \bar{C}_1^*$, $C_2 = \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*)$, то тройка $(\bar{\gamma}^*, \bar{C}_1^*, \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*))$ является решением задачи $\mathcal{P}$. Предположим, что для этого решения задачи Коши система (54) не выполняется при $\gamma = \bar{\gamma}^*$, $C_1 = \bar{C}_1^*$, $C_2 = \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*)$. Следовательно, существует неединственное решение задачи Коши (1)–(3), где $\gamma = \bar{\gamma}^*$, $C_1 = \bar{C}_1^*$, $C_2 = \bar{C}_2^*(\bar{C}_1^*)$; для одного из них (54) выполняется, а для другого нет. Этот вывод противоречит утверждению 1, поэтому предположение о существовании решения задачи Коши (1)–(3), для которого (54) не выполняется, неверно. Утверждение доказано.

Из теоремы 3 и утверждения 10 вытекает

Следствие 1. Любое решение $\gamma = \bar{\gamma} \in \mathbb{R}_+$, $C_j = \bar{C}_j \in (0, C)$, $j = 1, 2$, системы ИХУ (52), где $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ определяется из (9), является решением (54) и наоборот.

Объединяя утверждения 2, 4, 5, 7, теорему 4 и следствие 1, получаем

Следствие 2. Для любого целого числа $n > 0$ задача $\mathcal{P}$ имеет не менее n решений $(\bar{\gamma}, \bar{C}_1, \bar{C}_2)$, удовлетворяющих условиям

$$u_1(h; \bar{\gamma} - \delta, \bar{C}_1) u_1(h; \bar{\gamma} + \delta, \bar{C}_1) < 0, \quad u_3(h; \bar{\gamma} - \delta, \bar{C}_2) u_3(h; \bar{\gamma} + \delta, \bar{C}_2) < 0,$$

где $u_1(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_1)$, $u_3(x; \bar{\gamma}, \bar{C}_2)$ являются решениями задачи Коши (1)–(3), $\bar{C}_2 = C_2(\bar{C}_1)$ определяется из (9) и $\delta > 0$ — достаточно малая постоянная такая, что интервал $(\bar{\gamma} - \delta, \bar{\gamma} + \delta)$ не содержит какого-либо другого решения $\bar{\gamma}$.

5. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЗАДАЧИ $\mathcal{P}$

Задача $\mathcal{P}$ описывает распространение электромагнитной волны в плоском экранированном диэлектрическом нелинейном волноводе

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 < x < h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Введём электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, которое представляет собой неполяризованную симметричную гибридную ТЕ-ТМ волну, распространяющуюся в волноводе Σ , где $\omega > 0$ — круговая частота, и

$$\mathbf{E} = (E_x(x) \ E_y(x) \ E_z(x))^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_x(x) \ H_y(x) \ H_z(x))^T e^{i\gamma z},$$

γ — вещественная постоянная распространения волн, τ — знак транспонирования.

Диэлектрическая проницаемость внутри волновода Σ описывается диагональным тензором (который соответствует тензорной нелинейности Керра [4])

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon + \beta_1 |E_x^2| + \beta_2 |E_y^2| + \beta_1 |E_z^2| & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon + \beta_2 |E_x^2| + \beta_1 |E_y^2| + \beta_2 |E_z^2| & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon + \beta_1 |E_x^2| + \beta_2 |E_y^2| + \beta_1 |E_z^2| \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 1$, $\beta_1, \beta_2 > 0$ — вещественные постоянные. Стоит отметить, что нелинейность Керра в скалярном случае широко используется в нелинейной оптике [22, 23] и встречается в других областях нелинейной математической физики [24, 25]. Выбор тензорной нелинейности (и, в частности, расположения коэффициентов нелинейности β_1, β_2) связан с особенностью рассматриваемой задачи. Неполяризованная симметричная гибридная ТЕ-ТМ волна может распространяться в рассматриваемой структуре только когда оба коэффициента нелинейности не равны нулю. В линейном случае ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) симметричная гибридная ТЕ-ТМ волна распадается на две поляризованные электромагнитные волны ТЕ и ТМ типов. Особый интерес вызывает случай, относящийся к задаче $\mathcal{P}$, когда $\beta_1 > 0$, $\beta_2 = 0$, поскольку при таких коэффициентах нелинейности электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$ представляет собой сумму поляризованных ТЕ и ТМ волн $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, распространяющихся в волноводе Σ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (0 \ E_y(x) \ 0)^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{E}_2 = (E_x(x) \ 0 \ E_z(x))^T e^{i\gamma z}, \\ \mathbf{H}_1 &= (H_x(x) \ 0 \ H_z(x))^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H}_2 = (0 \ H_y(x) \ 0)^T e^{i\gamma z}, \end{aligned} \quad (55)$$

а волноводная структура Σ все ещё заполнена нелинейной средой керровского типа, тензор нелинейности имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon + \beta_1(|E_x^2| + |E_z^2|) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon + \beta_1|E_y^2| & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon + \beta_1(|E_x^2| + |E_z^2|) \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H},$$

где $\hat{\varepsilon}$ описывается формулой (56), $\varepsilon_0 > 0$ — диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mu_0 > 0$ — магнитная проницаемость вакуума. Заметим, что наличие у плоского диэлектрического волновода Σ идеально проводящих экранов на его границах ($x = 0$, $x = h$) приводит к тому, что касательные компоненты электромагнитного поля $E_y(x)$, $E_z(x)$ обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = h$.

Подставив (55) в уравнения Максвелла (56), получим

$$\begin{aligned} \gamma^2 iE_x - \gamma E'_z &= k_0^2(\varepsilon + \beta_1(|E_x^2| + |E_z^2|))iE_x, & \gamma^2 E_y - E''_y &= k_0^2(\varepsilon + \beta_1|E_y^2|)E_y, \\ \gamma iE'_x - E''_z &= k_0^2(\varepsilon + \beta_1(|E_x^2| + |E_z^2|))E_z, \end{aligned} \quad (57)$$

где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$,

$$H_x = -\gamma(\omega\mu_0)^{-1}E_y, \quad H_y = (i\omega\mu_0)^{-1}(i\gamma E_x - E'_z), \quad H_z = (i\omega\mu_0)^{-1}E'_y.$$

Кроме того, имеем следующие граничные условия:

$$E_y|_{x=0} = 0, \quad E_z|_{x=0} = 0, \quad E'_y|_{x=0} = A_1, \quad E_x|_{x=0} = -iA_2, \quad E_y|_{x=h} = 0, \quad E_z|_{x=h} = 0,$$

где постоянные $A_1, A_2 > 0$ выбраны специальным образом.

Обозначив $u_1 = E_y$, $u_2 = iE_x$, $u_3 = E_z$, $a = k_0^2\varepsilon$, $\alpha = k_0^2\beta_1$, из (57) получим систему (1). Сформулированная физическая задача о распространении волн эквивалентна задаче $\mathcal{P}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказано существование решений задачи $\mathcal{P}$, отвечающей распространению электромагнитных поляризованных ТЕ и ТМ волн в плоском закрытом нелинейном волноводе, связанных дополнительным условием. Для доказательства использовался подход, аналогичный тому, что применялся при доказательстве разрешимости задачи, отвечающей распространению электромагнитных поляризованных ТЕ волн в плоском закрытом нелинейном волноводе [12]. Стоит отметить, что в данной работе задача $\mathcal{P}_1$, соответствующая распространению ТЕ волны, и задача $\mathcal{P}_2$, соответствующая распространению ТМ волны, не взаимозаменяемы при доказательстве разрешимости задачи $\mathcal{P}$, как это было в [12], где обе задачи соответствуют распространению ТЕ волн. В дальнейшем интерес может представлять доказательство свойств задачи $\mathcal{P}_2$, которые аналогичны свойствам задачи $\mathcal{P}_1$, описанным в утверждениях 4 и 5.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-71-00020).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smirnov, Y. On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular dielectric waveguide filled with nonlinear isotropic homogeneous medium / Y. Smirnov, E. Smolkin // *Wave Motion*. — 2018. — V. 77. — P. 77–90.
2. Kurseeva, V.Yu. Electromagnetic non-polarized symmetric hybrid wave propagation in a plane waveguide with nonlinear anisotropic permittivity / V.Yu. Kurseeva // *Lobachevskii J. of Math.* — 2018. — V. 39, № 8. — P. 1075–1089.
3. Smirnov, Y. The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguide / Y. Smirnov, E. Smolkin, V. Kurseeva // *Applicable Analysis*. — 2019. — V. 98, № 3. — P. 483–498.
4. Third-order nonlinear electromagnetic TE and TM guided waves / A.D. Boardman, P. Egan, F. Lederer [et al.] // *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena* / Eds. H.-E. Ponath and G.I. Stegeman. — Amsterdam ; London ; New York ; Tokyo : Elsevier, 1991. — P. 73–287.
5. Schürmann, H.W. On the theory of TE-polarized waves guided by a nonlinear three-layer structure / H.W. Schürmann // *Zeitschrift für Physik B*. — 1995. — Bd. 97, № 4. — S. 515–522.
6. Nonlinear TM-polarized waves in non-Kerr media / U. Langbein, F. Lederer, D. Mihalache, D. Mazilu // *Physica B+C*. — 1987. — V. 145, № 3. — P. 377–385.
7. Smirnov, Y.G. Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity / Y.G. Smirnov, D.V. Valovik // *J. Math. Phys.* — 2012. — V. 53. — Art. 123530.
8. Smirnov, Y.G. Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation / Y.G. Smirnov, D.V. Valovik // *J. Math. Phys.* — 2013. — V. 54. — Art. 083502.
9. Мартынова, В.Ю. Распространение гибридных ТЕ-ТЕ-волн в плоском закрытом волноводе, заполненном нелинейной средой / В.Ю. Мартынова // *Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки*. — 2021. — Т. 60, № 4. — С. 27–45.
10. Martynova, V. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics / V. Martynova, D. Valovik // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2023. — V. 46, № 12. — Art. 13205–13225.
11. Valovik, D.V. Perturbation method in the theory of propagation of two-frequency electromagnetic waves in a nonlinear waveguide I: TE-TE waves / D.V. Valovik // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2021. — V. 61, № 1. — P. 103–117.
12. Валовик, Д.В. Об одной неклассической задаче на собственные значения, имеющей нелинеаризуемые решения / Д.В. Валовик, В.Ю. Мартынова // *Дифференц. уравнения*. — 2023. — Т. 59, № 3. — С. 303–313.
13. Valovik, D.V. Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem / D.V. Valovik // *Nonlin. Anal. Real World Appl.* — 2014. — V. 20, № 12. — P. 52–58.
14. Smirnov, Yu.G. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity / Yu.G. Smirnov, D.V. Valovik // *Phys. Rev. A*. — 2015. — V. 91, № 1. — Art. 013840.
15. Валовик, Д.В. Исследование одной нелинейной задачи на собственные значения методом интегрального характеристического уравнения / Д.В. Валовик // *Дифференц. уравнения*. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 175–189.
16. Kurseeva, V.Yu. Asymptotical analysis of a nonlinear Sturm–Liouville problem: linearisable and non-linearisable solutions / V.Yu. Kurseeva, M.A. Moskaleva, D.V. Valovik // *Asymptot. Anal.* — 2020. — V. 119, № 1–2. — P. 39–59.
17. Валовик, Д.В. О существовании бесконечного числа собственных значений в одной нелинейной задаче теории волноводов / Д.В. Валовик, С.В. Тихов // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. — 2018. — Т. 58, № 10. — С. 1658–1667.
18. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский ; под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник ; 7-е изд., испр. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 296 с.

19. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. — М. : Физматгиз, 1961. — 331 с.
20. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман ; пер. с англ. И.Х. Сабитова и Ю.В. Егорова ; под ред. В.М. Алексеева. — М. : Мир, 1970. — 720 с.
21. Марченко, В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 330 с.
22. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. — М. : Наука, 1982. — 621 с.
23. Boyd, R.W. Nonlinear Optics / R.W. Boyd. — New York ; London : Academic Press, 2003. — 578 p.
24. Fibich, G. The Nonlinear Schrödinger Equation / G. Fibich. — Cham ; Heidelberg ; New York ; Dordrecht ; London : Springer, 2015. — 862 p.
25. Cazenave, T. Semilinear Schrödinger Equations / T. Cazenave. — New York ; Providence : American Math. Society, 2003. — 323 p.

ON THE EXISTENCE OF NONLINEARIZABLE SOLUTIONS IN A NONCLASSICAL TWO-PARAMETER NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM

V. Yu. Martynova

Penza State University, Russia
e-mail: *lynxbax@mail.ru*

A nonlinear eigenvalue problem for a system of three equations with boundary conditions of the first kind, describing the propagation of electromagnetic waves in a plane nonlinear waveguide, is considered. This problem is two-parameter problem with one spectral parameter and a second parameter arising from an additional condition. This condition connects the constants of integration that arise when finding the first integrals of the system. The existence of nonlinearizable solutions to the problem is proven.

Keywords: two-parameter eigenvalue problem, nonlinearizable solution, integral characteristic equation, Maxwell's equations, nonlinear permittivity.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-71-00020).

REFERENCES

1. Smirnov, Y. and Smolkin, E. On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular dielectric waveguide filled with nonlinear isotropic homogeneous medium, *Wave Motion*, 2018, vol. 77, pp. 77–90.
2. Kurseeva, V.Yu., Electromagnetic non-polarized symmetric hybrid wave propagation in a plane waveguide with nonlinear anisotropic permittivity, *Lobachevskii J. of Math.*, 2018, vol. 39, no. 8, pp. 1075–1089.
3. Smirnov, Y., Smolkin, E., and Kurseeva, V., The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguide, *Applicable Analysis*, 2019, vol. 98, no. 3, pp. 483–498.
4. Boardman, A.D., Egan, P., Lederer, F., Langbein, U., and Mihalache, D., Third-order nonlinear electromagnetic TE and TM guided waves, in: *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, Eds. H.-E. Ponath and G.I. Stegeman, Amsterdam; London; New York; Tokyo: Elsevier, 1991, pp. 73–287.
5. Schürmann, H.W., On the theory of TE-polarized waves guided by a nonlinear three-layer structure, *Zeitschrift für Physik B*, 1995, bd. 97, no. 4, s. 515–522.
6. Langbein, U., Lederer, F., Mihalache, D., and Mazilu, D., Nonlinear TM-polarized waves in non-Kerr media, *Physica B+C*, 1987, vol. 145, no. 3, pp. 377–385.
7. Smirnov, Y.G. and Valovik, D.V., Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity, *J. Math. Phys.*, 2012, vol. 53, art. 123530.

8. Smirnov, Y.G. and Valovik, D.V., Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation // *J. Math. Phys.*, 2013, vol. 54, art. 083502.
9. Martynova, V.Yu., Hybrid TE-TE-wave propagation in closed plane waveguide filled with nonlinear medium, *Izv. vuzov. Povolzhskiy region. Fiz.-mat. nauki* (Univ. proceedings. Volga region. Phys. and Math. Sci.), 2021, vol. 60, no. 4, pp. 27–45.
10. Martynova, V. and Valovik, D. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023, vol. 46, no. 12, art. 13205–13225.
11. Valovik, D.V., Perturbation method in the theory of propagation of two-frequency electromagnetic waves in a nonlinear waveguide I: TE-TE waves, *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 1, pp. 103–117.
12. Valovik, D.V. and Martynova, V.Yu. On a nonclassical eigenvalue problem with nonlinearizable solutions, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 301–311.
13. Valovik, D.V., Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem, *Nonlin. Anal. Real World Appl.*, 2014, vol. 20, no. 12, pp. 52–58.
14. Smirnov, Yu.G. and Valovik, D.V., Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity, *Phys. Rev. A*, 2015, vol. 91, no. 1, art. 013840.
15. Valovik, D.V., Study of a nonlinear eigenvalue problem by the integral characteristic equation method, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 171–184.
16. Kurseeva, V.Yu., Moskaleva, M.A., and Valovik, D.V., Asymptotical analysis of a nonlinear Sturm–Liouville problem: linearisable and non-linearisable solutions, *Asymptot. Anal.*, 2020, vol. 119, no. 1–2, pp. 39–59.
17. Valovik, D.V. and Tikhov, S.V., On the existence of an infinite number of eigenvalues in one nonlinear problem of waveguide theory, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 10, pp. 1600–1609.
18. Petrovskii, I.G., *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations), Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta (MSU Press), 1984.
19. Pontryagin, L.S., *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya* (Ordinary Differential Equations), Moscow: Fizmatgiz, 1961.
20. Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1964.
21. Marchenko, V.A. *Operatory Shturma–Liuvillya i ikh prilozheniya* (Sturm–Liouville Operators and Applications), Kiev: Naukova Dumka, 1977.
22. Landau, L.D. and Livshits, E.M., *Elektrodinamika sploshnykh sred* (Electrodynamics of Continuous Media), Moscow: Nauka, 1982.
23. Boyd, R.W., *Nonlinear Optics*, New York–London: Academic Press, 2003.
24. Fibich, G., *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Cham–Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2015.
25. Cazenave, T., *Semilinear Schrödinger Equations*, New York; Providence: American Math. Society, 2003.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.923+517.925.44

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ
ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА
ШРЁДИНГЕРА НА ВСЕЙ ОСИВ. А. Садовничий¹, Я. Т. Султанаев², Н. Ф. Валеев³¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова²Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы, г. Уфа²Московский центр фундаментальной и прикладной математики³Институт математики с вычислительным центром

Уфимского федерального исследовательского центра РАН

e-mail: ¹info@rector.msu.ru, ²sultanaevyt@gmail.com, ³valeevnf@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.03.2024 г., после доработки 06.03.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Исследуется оптимизационная обратная спектральная задача с неполными спектральными данными для одномерного оператора Шрёдингера на всей оси: для заданного потенциала q_0 найти ближайшую к нему функцию $\hat{q}$ такую, чтобы первые m собственных значений оператора Шрёдингера с потенциалом $\hat{q}$ совпали с заданными значениями $\lambda_k^* \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, система нелинейных уравнений Шрёдингера, оператор Шрёдингера.

DOI: 10.31857/S0374064124040043, EDN: РСJНУ1

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряжённый оператор Шрёдингера

$$\mathcal{L}[q]\psi := -\psi''(x) + q(x)\psi(x),$$

в котором потенциал $q(x)$ удовлетворяет условиям

$$q(x) = q_0(x) + h(x), \quad h \in L^2(\mathbb{R}), \quad q_0 \in C^{loc}(\mathbb{R}), \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} q_0(x) = +\infty. \quad (1)$$

Пространство потенциалов, удовлетворяющих условиям (1), будем для краткости обозначать через W .

Известно, что спектр $\sigma(\mathcal{L}[q])$ оператора Шрёдингера при условиях (1) ограничен снизу и состоит из невырожденных собственных значений, зависящих от потенциала $q(x)$:

$$\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \dots < \lambda_k(q) < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k(q) = +\infty.$$

При этом $\lambda_k(q)$ можно определять из принципа минимакса Куранта–Фишера по формуле

$$\lambda_k(q) = \sup_{\phi_1, \dots, \phi_{k-1}} \inf_{\psi \neq 0} \left\{ \frac{(\mathcal{L}[q]\psi, \psi)}{(\psi, \psi)} : (\psi, \phi_j) = 0, \quad j = \overline{1, k-1} \right\}, \quad (2)$$

здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Задача восстановления потенциала $q(x)$ по спектральным данным $S := \{\lambda_k(q)\}_{k=1}^{+\infty}$ является классической задачей, и, начиная со знаменитых работ В. Амбарцумяна, Г. Борга, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, В.А. Марченко и др., ей уделялось большое внимание (см., например, обзорную часть в монографии [1]).

Рассматриваемая в статье задача является обратной спектральной задачей для дифференциального оператора с неполными спектральными данными, в которой используются лишь конечное число собственных значений. Отметим, что такого рода задачи естественным образом возникают в прикладных исследованиях (см., например, [2]).

Очевидно, что задача восстановления потенциала в операторе $\mathcal{L}[q]$ только по заданному конечному числу собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, будет иметь бесконечное множество решений $q(x)$. В этом случае для корректной постановки задачи, исходя из её содержательного смысла, можно наложить дополнительные условия на форму собственных функций, краевые условия и т.д.

В данной работе предполагаем, что кроме конечного числа собственных значений заранее известна некоторая информация о потенциале q , а именно, будем искать потенциал q , наиболее близкий по “форме” к функции $q_0(x)$.

Обсуждаемую задачу удобно сформулировать в геометрических терминах. В связи с этим *изоспектральным многообразием оператора $\mathcal{L}[q]$ для спектральных данных*

$$\sigma = \{(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m : \lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^*\}$$

будем называть множество (многообразие) потенциалов $q \in W$, на которых первые m собственных значений оператора $\mathcal{L}[q]$ принимают заданные значения λ_k^* , $k = \overline{1, m}$, т.е.

$$ISM(\mathcal{L}[q], W; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*) := \{q \in W \mid \lambda_k(q) = \lambda_k^*, \quad k = \overline{1, m}\}.$$

Теперь сформулируем *оптимизационную обратную спектральную задачу* (ООСЗ) как поиск минимального расстояния от заданного $q_0 \in W$ до изоспектрального многообразия.

Задача $\mathcal{P}^0$. Пусть заданы операторы $\mathcal{L}[q]$, $q_0 \in W$ и изоспектральное многообразие $ISM := ISM(\mathcal{L}[q], W; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$. Требуется найти вещественный потенциал $\hat{q} \in ISM$ такой, что

$$\inf_{q \in ISM} \|q - q_0\| = \|\hat{q} - q_0\|.$$

Одним из интересных свойств ООСЗ является её связь с нелинейными дифференциальными операторами (см. [3, 4]). В частности, задача $\mathcal{P}^0$, как будет показано ниже, связана с системой нелинейных уравнений Шрёдингера

$$-\psi_1'' + \left(q_0(x) + \sum_{k=1}^m \sigma_k \psi_k^2\right) \psi_1 = \lambda_1^* \psi_1, \quad \dots, \quad -\psi_m'' + \left(q_0(x) + \sum_{k=1}^m \sigma_k \psi_k^2\right) \psi_m = \lambda_m^* \psi_m, \quad (3)$$

где $\sigma_k \in \{-1, 0, 1\}$, $k = \overline{1, m}$.

Задача вида $\mathcal{P}^0$ для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке была исследована в статье [4], в частности, выведена система (3). В работах [5, 6] исследованы экстремальные свойства собственных значений оператора Штурма–Лиувилля на отрезке и получены уравнения вида (3), названные там “критическими уравнениями”. При этом вывод последних в этих работах существенно опирается на результаты статьи [7] о характере зависимости собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля от потенциала $q(x)$. Здесь же мы предлагаем несколько иную схему вывода системы уравнений (3), которую можно применить не только для оператора Шрёдингера на всей вещественной прямой (см. также

[8, 9]), но и распространить на ООСЗ для широких классов операторов эллиптического типа.

Основной целью данной работы является доказательство утверждения о существовании решений ООСЗ $\mathcal{P}^0$, а также описание связи между задачей $\mathcal{P}^0$ и системой нелинейных уравнений Шрёдингера (3).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ООСЗ

Сформулируем и докажем основное утверждение о существовании решений ООСЗ.

Теорема 1. Пусть даны потенциал $q_0 \in W$ и числа $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ такие, что изоспектральное многообразие $ISM(\mathcal{L}[q], W; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ не пусто. Тогда существует решение $\hat{q} \in W$ оптимизационной обратной спектральной задачи $\mathcal{P}^0$.

Доказательство. Рассмотрим минимизационную задачу

$$\hat{P} = \min_{q \in ISM} \{ \|q_0 - q\|_{L^2}^2 : \lambda_k^* = \lambda_k(q), \quad k = \overline{1, m} \}. \quad (4)$$

Поскольку многообразие ISM не пусто, то найдётся хотя бы одна функция $q(x)$ такая, что $q(x) - q_0(x) \in L^2$ и $\lambda_k^* = \lambda_k(q)$, $k = \overline{1, m}$. Обозначим через $\{q_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset ISM$ минимизирующую последовательность задачи (4), т.е. $\|q_0 - q_j\|_{L^2}^2 \rightarrow \hat{P}$ при $j \rightarrow +\infty$ и $\lambda_k^* = \lambda_k(q_j)$ для всех $k = \overline{1, m}$.

Из ограниченности множества $\{\|q_0 - q_j\|_{L^2}^2\}_{j=1}^{+\infty}$ следует, что последовательность $\{q_j - q_0\}_{j=1}^{+\infty}$ ограничена в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Тогда в силу теоремы Банаха–Алаоглу существует функция $\hat{h} \in L^2(\mathbb{R})$ такая, что $\|q_0 - q_j\|_{L^2}^2 \rightarrow \hat{P}$ и $q_j - q_0 \rightharpoonup \hat{h}$ слабо в $L^2(\mathbb{R})$ при $j \rightarrow +\infty$.

Обозначим через $\phi_k[q_j](x)$ k -ю собственную функцию оператора $\mathcal{L}[q_j]$ и запишем для неё интегральное уравнение

$$\phi_k[q_j](x) = \lambda_k^* \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, \xi) \phi_k[q_j](\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, \xi) (q_j(\xi) - q_0(\xi)) \phi_k[q_j](\xi) d\xi. \quad (5)$$

Оператор $(\mathcal{L}[q_0])^{-1}$ компактный, а функция Грина $G_0(x, \xi)$ этого оператора ограничена: $\max_{x, \xi \in \mathbb{R}} \|G_0(x, \xi)\| \leq C < +\infty$. Следовательно, справедлива оценка

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\phi_k[q_j](x)| \leq \lambda_k^* \|(\mathcal{L}[q_0])^{-1}\| \|\phi_k[q_j]\| + \max_{x, \xi \in \mathbb{R}} |G_0(x, \xi)| \|q_j(\xi) - q_0(\xi)\| \|\phi_k[q_j]\|. \quad (6)$$

Теперь из (6) и тождества

$$\int_{\mathbb{R}} (|\phi'_k(q_j)|^2 + q_j \phi_k^2(q_j)) dx = \int_{\mathbb{R}} (|\phi'_k(q_j)|^2 + q_0 \phi_k^2(q_j) + (q_j - q_0) \phi_k^2(q_j)) dx = \lambda_k \int_{\mathbb{R}} \phi_k^2(q_j) dx$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (|\phi'_k(q_j)|^2 + q_0 \phi_k^2(q_j)) dx &\leq \int_{\mathbb{R}} (\lambda_k \phi_k^2(q_j) + |q_j - q_0| \phi_k^2(q_j)) dx \leq \\ &\leq \lambda_k \|\phi_k(q_j)\|^2 + \max_{x \in \mathbb{R}} |\phi_k(q_j)| \int_{\mathbb{R}} |q_j - q_0| |\phi_k(q_j)| dx \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\phi_k(q_j)| \|q_j - q_0\|_{L^2} \|\phi_k(q_j)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\phi_k(q_j)$ для всех $k = \overline{1, m}$ и $j \in \mathbb{N}$ равномерно ограничены в $W_2^1(\mathbb{R})$ и существует подпоследовательность, обозначаемая далее $\phi_k(q_j)$, такая, что $\phi_k(q_j) \rightarrow \hat{\phi}_k$ при $j \rightarrow +\infty$ сильно в $C(\mathbb{R})$.

Представим интегральное уравнение (5) для собственных функций $\phi_k(q_j)$ в виде

$$\begin{aligned}\phi_k[q_j](x) = & \lambda_k^* \int_{\mathbb{R}} G_0(x, \xi) \phi_k[q_j](\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}} G_0(x, \xi) (q_j(\xi) - q_0(\xi)) (\phi_k[q_j](\xi) - \hat{\phi}_k(\xi)) d\xi + \\ & + \int_{\mathbb{R}} G_0(x, \xi) (q_j(\xi) - q_0(\xi)) \hat{\phi}_k(\xi) d\xi.\end{aligned}\quad (7)$$

Учитывая, что $q_j - q_0 \rightarrow \hat{h}$ слабо в L^2 и $\phi_k(q_j) \rightarrow \hat{\phi}_k$ сильно в $C(\mathbb{R})$ сходятся при $j \rightarrow +\infty$, перейдём в (7) к пределу при $j \rightarrow +\infty$ и получим интегральное уравнение для $\hat{\phi}_k(x)$:

$$\hat{\phi}_k(x) = \lambda_k^* \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, \xi) \hat{\phi}_k(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, \xi) \hat{h}(\xi) \hat{\phi}_k(\xi) d\xi, \quad (8)$$

которое, что очевидно, эквивалентно уравнению

$$\mathcal{L}[\hat{q}] \phi_k[\hat{q}] = \lambda_k^* \phi_k[\hat{q}], \quad \phi_k[\hat{q}] \in L^2(\mathbb{R}).$$

Из сильной сходимости подпоследовательности $\phi_k[q_j] \rightarrow \hat{\phi}_k[\hat{q}]$ в $C(\mathbb{R})$ и принципа минимакса (2) для $\lambda_k(q_j)$ вытекает, что

$$\lambda_1(\hat{q}) < \lambda_2(\hat{q}) < \dots < \lambda_m(\hat{q}).$$

Следовательно, $\hat{q}$ является решением минимизационной задачи $\hat{P}$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть даны $q_0 \in W$ и $\lambda_1^* \in \mathbb{R}$ такие, что $\lambda_1^* < \lambda_1(q_0)$. Тогда оптимизационная обратная спектральная задача $\mathcal{P}^0$ имеет единственное решение $\hat{q} \in W$.

Доказательство. Введём множество $M(\lambda) := \{q \in W : \lambda \leq \lambda_1(q)\}$. Заметим, что в силу соотношения

$$\lambda_1(q) = \inf_{\psi \neq 0} \left\{ \frac{(L[Q]\psi, \psi)}{(\psi, \psi)} \right\}$$

множество $M(\lambda)$ является выпуклым. Рассмотрим следующую задачу о минимизации функционала расстояния:

$$\check{P} = \min \{ \rho(q) := \|q_0 - q\|_{L^2}^2 : q \in M(\lambda^*) \}.$$

Из теоремы 1 следует существование решения этой задачи. Выпуклость множества $M(\lambda_1^*)$ и строгая выпуклость функционала расстояния $\rho(q)$ обеспечивают единственность $\hat{q}$ и

$$\hat{q} \in \partial M(\lambda_1^*) = ISM(\mathcal{L}[q], W; \lambda_1^*).$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ООСЗ

Установим связь между ООСЗ $\mathcal{P}^0$ и системой нелинейных уравнений Шрёдингера (3).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\hat{q} \in W$ — решение ООСЗ $\mathcal{P}^0$. Тогда найдутся константы $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \{-1, 0, 1\}$ такие, что система уравнений (3) имеет слабое решение $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m) \in W_2^1(\mathbb{R})$ и решение $\hat{q} \in W$ ООСЗ $\mathcal{P}^0$ представимо в виде

$$\hat{q}(x) = q_0(x) - \sum_{k=1}^m \sigma_k \hat{u}_k^2(x). \quad (9)$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение (подробное доказательство см. в [4]).

Лемма. Пусть $q \in W$ и $\phi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, $m \geq 1$, — собственные функции оператора $\mathcal{L}[q]$. Тогда система функций $\{\phi_i^2(x)\}_{i=1}^m$ линейно независима в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что собственные функции $\phi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, дважды непрерывно дифференцируемы на вещественной прямой.

Пусть утверждение верно для $m-1$, покажем его справедливость для m . Предположим, что

$$\text{п. в.} \quad \sum_{j=1}^m \alpha_i \phi_i^2(x) = 0 \quad (10)$$

для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ таких, что $\sum_{i=1}^m |\alpha_i| \neq 0$. Последовательно продифференцировав равенство (10), получим

$$\sum_{j=1}^m \alpha_i \phi_i(x) \phi_i'(x) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i \phi_i'' + \sum_{i=1}^m \alpha_i (\phi_i')^2 = 0. \quad (11)$$

Теперь из соотношений $\mathcal{L}[q]\phi_i \equiv -\phi_i'' + q\phi_i = \lambda_i \phi_i$, $i = \overline{1, m}$, и (10) следует, что

$$\text{п. в.} \quad \sum_{j=1}^m \alpha_i ((\phi_i'(x))^2 - \lambda_i \phi_i^2(x)) = 0. \quad (12)$$

Очевидно, что

$$((\phi_i')^2)' = 2(q - \lambda_i) \phi_i \phi_i', \quad i = \overline{1, m},$$

тогда из (12) имеем равенство

$$\sum_{j=1}^m \alpha_i (2(q - \lambda_i) \phi_i \phi_i' - 2\lambda_i \phi_i \phi_i') = 0,$$

из которого, учитывая (11), получаем $\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \phi_i(x) \phi_i'(x) = 0$. Вследствие $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, находим $\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \phi_i^2(x) = 0$. Но тогда из (10) вытекает, что $\sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i \phi_i^2(x) = 0$ для некоторого ненулевого набора констант $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\hat{q}$ — решение ООСЗ $\mathcal{P}^0$. Введём в рассмотрение $(m+1)$ -параметрическое семейство функций

$$\delta(x, t, \vec{p}) = \delta_0(x)t + p_1 \phi_1^2[\hat{q}](x) + \dots + p_m \phi_m^2[\hat{q}](x), \quad (13)$$

где $\delta_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $\phi_j^2[\hat{q}](x)$, $j = \overline{1, m}$, — собственные функции оператора $\mathcal{L}[q]$. Тогда семейство операторов $\mathcal{L}(t, \vec{p}) := \mathcal{L}[\hat{q}(x) + \delta(x, t, \vec{p})]$ в окрестности точки $t=0$, $\vec{p}=0$ является аналитическим семейством операторов переменных $t, \vec{p}$. Следовательно, собственные функции $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^m$ и собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ оператора $\mathcal{L}(t, \vec{p})$ будут аналитическими функциями переменных $t, p_1, \dots, p_m$ в некоторой окрестности точки $t=0$, $\vec{p}=0$. Теперь потребуем, чтобы

$$\hat{q}(x) + \delta(x, t, \vec{p}) \in ISM(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*).$$

Это условие равносильно системе уравнений для аналитических в некоторой окрестности точки $t=0$, $\vec{p}=0$ функций

$$\lambda_k(t, \vec{p}) := \lambda_k[\hat{q}(x) + \delta(x, t, \vec{p})] = \lambda_k^*, \quad k = \overline{1, m}. \quad (14)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \lambda_k(t, \vec{p})}{\partial p_j} = (\phi_j^2, \phi_k^2)_{L^2}.$$

В силу сформулированной леммы система функций $\{\phi_k^2\}_{k=1}^m$ линейно независима и якобиан

$$J = \left(\frac{\partial \lambda_k(t, \vec{p})}{\partial p_j} \right)_{k,j=1}^m = \left(\phi_j^2, \phi_k^2 \right)_{k,j=1}^m$$

системы (14) невырожден. Следовательно, эта система однозначно разрешима относительно переменных $p_1, \dots, p_m$ в некоторой окрестности точки $t=0$, $p_1 = \dots = p_m = 0$. Более того, для любой функции $\delta_0(x)$ в (14) функции $p_k = p_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, будут аналитическими по t в некоторой окрестности точки $t=0$, причём

$$\lambda_k(t, p_1(t), \dots, p_m(t)) \equiv \lambda_k^*, \quad k = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Теперь в (14) потребуем, чтобы

$$(\delta_0, \phi_k^2)_{L^2} = 0 \quad \text{для всех } k = \overline{1, m}. \quad (16)$$

Раскладывая левые части уравнений (15) по степеням t в окрестности $t=0$, получаем

$$\left. \frac{dp_k(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{для всех } k = \overline{1, m}.$$

Таким образом, для любого $\delta_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющего условиям (16), существует функция $\delta(x, t)$ такая, что

$$\hat{q}(x) + \delta(x, t) \in ISM(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*), \quad \delta(x, t) = \delta_0(x)t + O(t^2). \quad (17)$$

Поскольку в точке $\hat{q}(x) \in ISM(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ достигается минимум функционала

$$\hat{P} = \min_{q \in L^2} \{ \|q_0 - q\|^2 : \lambda_k^* = \lambda_k(q), \quad k = \overline{1, m} \},$$

то для любой функции вида $\delta(x, t) = \delta_0(x)t + O(t^2)$, $\delta_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условиям (16) и (17), справедливо неравенство

$$\|\hat{q} + \delta(x, t) - q_0\|_{L^2}^2 - \|\hat{q} - q_0\|_{L^2}^2 = 2(\hat{q} - q_0, \delta(x, t))_{L^2} + (\delta(x, t), \delta(x, t))_{L^2} \geq 0.$$

Поскольку $\delta(x, t) = \delta_0(x)t + O(t^2)$, то, очевидно, $(\hat{q} - q_0, \delta(x, t))_{L^2} = 0$ для любых $\delta_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям (16). Отсюда вытекает, что $\hat{q} - q_0$ принадлежит линейной оболочке $L(\phi_1^2, \dots, \phi_m^2)$, т.е.

$$\hat{q}(x) = q_0(x) - \sum_{k=1}^m \alpha_k \hat{\phi}_k^2(x).$$

Положив $\hat{u}_k(x) = \hat{\phi}_k(x)/\sqrt{|\alpha_k|}$, завершим доказательство существования решений системы (3) и требуемого представления оптимального потенциала $\hat{q}(x)$.

4. ПРИМЕР

Пусть заданы потенциал $q_0(x) = ax^2$ ($a > 0$) и спектральные данные $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^*$. Тогда изоспектральное многообразие $ISM(\mathcal{L}[q], W; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ не пусто и все условия теорем 1 и 2 выполнены. Следовательно, существует оптимальный потенциал $\hat{q} \in ISM$, определяемый формулой вида (9), а собственные функции $\psi_k[\hat{q}](x)$, $k = \overline{1, m}$, являются решениями системы связанных нелинейных квантовых гармонических осцилляторов

$$-\psi_1'' + \left(ax^2 + \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k^2 \right) \psi_1 = \lambda_1^* \psi_1, \quad \dots, \quad -\psi_m'' + \left(ax^2 + \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k^2 \right) \psi_m = \lambda_m^* \psi_m.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование Я.Т. Султанаева выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00580).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юрко, В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения / В.А. Юрко. — Саратов : Изд-во Саратов. пед. ин-та, 2001. — 499 p.
2. Chu, M. Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications / M. Chu, G.H. Golub. — Oxford : Oxford University Press, 2005. — 387 p.
3. Pyasov, Y.Sh. On nonlinear boundary value problem corresponding to N -dimensional inverse spectral problem / Y.Sh. Pyasov, N.F. Valeev // J. Differ. Equat. — 2019. — V. 266, № 8. — P. 4533–4543.
4. Pyasov, Ya. Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues / Ya. Pyasov, N. Valeev // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2021. — V. 426, № 5. — Art. 132985.
5. Tian, Y. On the polynomial integrability of the critical systems for optimal eigenvalue gaps / Y. Tian, Q. Wei, and M. Zhang // J. Math. Phys. — 2023. — V. 64. — Art. 092701.
6. Zhao, M. Optimal inverse problems of potentials for two given eigenvalues of Sturm–Liouville problems / M. Zhao, J. Qi // Proc. of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. Published online. — 2024. — 24 p.
7. Wei, Q. Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L_1 balls / Q. Wei, G. Meng, M. Zhang // J. Differ. Equat. — 2009. — V. 247, № 2. — P. 364–400.
8. Садовничий, В.А. Оптимизационная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля в пространстве вектор-функций / В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 513. — С. 93–98.
9. Садовничий, В.А. Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма–Лиувилля / В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1707–1711.

OPTIMIZATION INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL SCHRÖDINGER OPERATOR ON THE ENTIRE AXIS

V. A. Sadovnichii¹, Ya. T. Sultanaev², N. F. Valeev³

¹*Lomonosov Moscow State University, Russia*

²*Akmulla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia*

²*Moscow Center for Applied and Fundamental Mathematics, Russia*

³*Institute of Mathematics with Computing Centre —*

Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Russia

e-mail: ¹info@rector.msu.ru, ²sultanaevyt@gmail.com, ³valeevnf@yandex.ru

We investigate the statement of the optimization inverse spectral problem with incomplete spectral data for the one-dimensional Schrödinger operator on the entire axis: for a given potential q_0 , find the closest function $\hat{q}$ such that the first m eigenvalues of the Schrödinger operator with potential $\hat{q}$ coincided with the given values $\lambda_k^* \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$.

Keywords: inverse spectral problem, nonlinear Schrödinger equation, Schrödinger operator.

FUNDING

Ya.T. Sultanaev's research was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00580)

REFERENCES

1. Yurko, V.A., *Inverse Spectral Problems and their Applications*, Saratov: PI Press, 2001.
2. Chu, M. and Golub, G.H., *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, Oxford: Oxford University Press, 2005.
3. Ilyasov, Y.Sh. and Valeev, N.F., On nonlinear boundary value problem corresponding to N -dimensional inverse spectral problem, *J. Differ. Equat.*, 2019, vol. 266, no. 8, pp. 4533–4543.
4. Ilyasov, Ya. and Valeev, N., Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2021, vol. 426, no. 5, Art. 132985.
5. Tian, Y., Wei, Q., and Zhang, M., On the polynomial integrability of the critical systems for optimal eigenvalue gaps, *J. Math. Phys.*, 2023, vol. 64, Art. 092701.
6. Zhao, M. and Qi, J., Optimal inverse problems of potentials for two given eigenvalues of Sturm–Liouville problems, *Proc. of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, Published online, 2024, pp. 1–24.
7. Wei, Q., Meng, G., and Zhang, M., Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L_1 balls, *J. Differ. Equat.*, 2009, vol. 247, no. 2, pp. 364–400.
8. Sadovnichii, V.A., Sultanaev, Y.T., and Valeev, N.F., Optimization spectral problem for the Sturm–Liouville operator in a vector function space, *Dokl. Math.*, 2023, vol. 108, pp. 406–410.
9. Sadovnichii, V.A., Sultanaev, Y.T., and Valeev, N.F. Optimization inverse spectral problem for a vector Sturm–Liouville operator, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, pp. 1694–1699.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.7

О РЕАЛИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ СУЩЕСТВЕННЫХ
СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ
ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМА. Х. Сташ¹, Н. А. Лобода²*Адыгейский государственный университет, г. Майкоп**e-mail: ¹aidamir.stash@gmail.com, ²n-loboda@yandex.ru**Поступила в редакцию 29.11.2023 г., после доработки 21.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.*

Для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, построена двумерная линейная однородная дифференциальная система (периодическая, если все элементы заданного множества попарно соизмеримы), у которой спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с этим множеством, причём все значения указанных показателей существенны.

Ключевые слова: линейная система дифференциальных уравнений, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, частота Сергеева.

DOI: 10.31857/S0374064124040053, EDN: PCGUSW

ВВЕДЕНИЕ

Для заданного числа $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с задаваемой ею системой). Множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ и положим

$$\mathcal{S}^n = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

Все асимптотические характеристики колеблемости, введённые И.Н. Сергеевым в работах [1–4], для решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка равны нулю, а на множестве решений двумерных систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, все верхние (как и все нижние) характеристики колеблемости равны между собой и их спектры (т.е. множества значений на ненулевых решениях) состоят из одного числа (см. [2]).

В статьях [2, 5, 6] полностью описаны спектры всех показателей колеблемости автономных систем; в [7, 8] было установлено, что спектры показателей колеблемости нулей любой автономной системы содержат одно типичное значение.

В работе [9] доказано существование двумерной линейной системы с периодическими коэффициентами, спектры всех показателей колеблемости которой содержат любое наперёд заданное конечное число существенных значений. Кроме того, доказано существование линейной двумерной дифференциальной системы со счётным множеством существенных значений всех показателей колеблемости.

Е.М. Шишлянниковым установлено [10], что для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой спектры показателей блуждаемости являются существенными и совпадают с этим множеством. Если все эти числа попарно соизмеримы, то систему можно выбрать периодической. В настоящей работе эти свойства перенесены и на все показатели колеблемости.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой проколотовой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–4]. Для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и вектор-функции $x \in \mathcal{S}^n$ обозначим: $\nu^-(x, m, t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(x, m, t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(x, m, t)$ — число *нулей* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(x, m, t)$ — число *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^*(x, m, t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчёта этого количества каждый некротный корень считается ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз, независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [2–4]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}^n$, при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно, зададим формулами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right). \end{aligned}$$

К определению 3 при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ добавим ещё обозначения

$$\nu^\alpha(x, m, s, t) \equiv \nu^\alpha(x, m, t) - \nu^\alpha(x, m, s), \quad x \in \mathcal{S}^n, \quad m \in \mathbb{R}_*^n, \quad 0 \leq s < t.$$

Определение 4 [4]. Для функции $x \in \mathcal{S}^n$ условимся о следующем:

1) если значение некоторого верхнего (с обозначением $\hat{}$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого нижнего (с обозначением $\check{}$) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без знаков $\hat{}$ и $\check{}$;

2) если значение некоторого слабого (с обозначением $\circ$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого сильного (с обозначением $\bullet$) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без знаков $\circ$ и $\bullet$.

Определение 5 [7, 8]. Множество всех значений показателя $\varkappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовём *спектром* этого показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$, причём значение $a \in \varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ назовём *существенным*, если подмножество

$$\{x(0): x \in \mathcal{S}_*(A), \varkappa(x) = a\} \subset \mathbb{R}^2$$

имеет положительную меру и заполняет некоторое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра*, т.е. счётного объединения нигде не плотных подмножеств. Через $\text{ess } \kappa(\mathcal{S}_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя κ для системы A и назовём его *существенным спектром* системы A .

Возможность реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерной дифференциальной системы гарантирует следующая

Теорема. *Для любого конечного множества S неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$ (периодическая, если элементы множества S попарно соизмеримы), что справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \nu^-(x) &= \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A), \\ \kappa(\mathcal{S}_*(A)) &= \text{ess } \kappa(\mathcal{S}_*(A)) = S, \quad \kappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*. \end{aligned} \quad (1)$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

Приведём свойства специальных вектор-функций, необходимые для доказательства основного результата.

Для произвольной вектор-функции $z \in C^1(E, \mathbb{R}_*^2)$ (E — либо отрезок $[0, T]$, либо полуось $\mathbb{R}_+$) однозначно определим функцию $\phi_z: E \rightarrow \mathbb{R}$ соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos \phi_z(t) \quad \sin \phi_z(t))^T = z(t), \quad t \in E, \quad \phi_z \in C^1(E).$$

Для любых $T > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2]$ обозначим через $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$ и $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0, \delta)$ множества, состоящие из вектор-функций $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\phi(0) = \varphi_0$, где $\phi = \phi_u$;
- 2) функция ϕ нестрого монотонна на отрезках $[0, T/4]$ и $[T/4, T/2]$;
- 3) при каждом $t \in (0, T/2]$ верно равенство $\phi(T/2 + t) = \phi(T/2 - t)$;
- 4) для $u \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$ при каждом $t \in (0, T/2]$ выполнено включение $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi - \delta]$;
- 5) для $u \in \mathcal{A}_1(T, \varphi_0, \delta)$ функция ϕ нестрого возрастает на отрезке $[0, T/2]$ и $\pi \leq \phi(T/2) - \varphi_0 \leq 3\pi/2$.

Для любой функции $z \in \mathcal{S}^2$ и для любых чисел $i \in \mathbb{N}$ и $T > 0$ определим функцию $u^i \equiv u_z^{T,i} \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$ с помощью равенства

$$u_z^{T,i}(t) \equiv z((i-1)T + t), \quad t \in [0, T].$$

Вычисление значений показателей колеблемости для некоторых функций из множества $\mathcal{S}^2$ упрощает следующая

Лемма 1. *Если для чисел $a \in [0, 1]$, $T > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2]$, последовательности $l_i \in \{0, 1\}$, $i \in \mathbb{N}$, и решения $z \in \mathcal{S}^2$ имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i &= a, \\ u^i &\in \mathcal{A}_{l_i}(T, \varphi_0, \delta), \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

то справедливы равенства

$$\check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \check{\nu}_\circ^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = 2a\pi/T, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}. \quad (3)$$

Доказательство. Из определений множеств $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$, $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0, \delta)$ и условия (2) следует существование для наперёд выбранного решения $z \in \mathcal{S}^2$ вектора $m_z \in \mathbb{R}_*^2$ такого, что при любых $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, $i \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \nu^\alpha(z, m, (i-1)T, iT) = \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) = \begin{cases} 2, & l_i = 1, \\ 0, & l_i = 0, \end{cases}$$

откуда для нижних слабых показателей колеблемости будем иметь

$$\begin{aligned} \check{\nu}_\circ^\alpha(z) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m, t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{pT} \nu^\alpha(z, m, pT) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m, (i-1)T, iT) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p 2l_i = \frac{2\pi}{T} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i = \frac{2\pi}{T} a. \end{aligned}$$

С учётом установленных равенств и определений показателей колеблемости получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T} a = \check{\nu}_\circ^\alpha(z) &\leq \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) \leq \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m, t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m_z, t) = \\ &= \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \nu^\alpha(z, m_z, pT) = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) = \frac{2\pi}{T} a, \end{aligned}$$

все нестрогие неравенства в них превращаются в равенства, а значит, справедливость равенств (3) установлена. Лемма доказана.

Для вектор-функций из определённых выше классов справедлива

Лемма 2 [10]. Для любых чисел $T > 0$ и $1 < c^- < c^+$ существуют вектор-функции $u, v \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$, число $\epsilon > 0$ и функция $d: \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+] \rightarrow (0, \pi/2]$, для которых верны следующие утверждения:

(i) выполняются равенства

$$u(0) = u(T) = (1 \ 0)^T, \quad v(0) = v(T) = (0 \ 1)^T, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(T) = \dot{v}(0) = \dot{v}(T) = (0 \ 0)^T;$$

(ii) при всех $t \in [0, T]$ справедлива оценка $\det(u(t), v(t)) \geq \epsilon$;

(iii) имеет место включение $u \in \mathcal{A}_0(T, 0, \pi/2)$ и для любого $c \in \mathbb{R}$ верно одно из включений

$$cu + v \in \begin{cases} \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d(c)), & c \in \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+], \\ \mathcal{A}_1(T, \varphi_c, d(c)), & c \in [c^-, c^+], \end{cases} \quad \varphi_c \equiv \pi/2 - \operatorname{arctg} c.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

1. Пусть при некотором $l \in \mathbb{N}$ задано множество $S = \{0, a_1, \dots, a_l\}$ и $a_l = \max S$. Для каждого $k \in \{1, \dots, l\}$ определим последовательность из целых чисел $(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$ с помощью равенств

$$a'_k \equiv \frac{a_k}{a_l}, \quad \lambda_k(j) \equiv [ja'_k] - [(j-1)a'_k],$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Из представления $\lambda_k(j) = a'_k - \{ja'_k\} + \{(j-1)a'_k\}$ (здесь $\{\cdot\}$ – дробная часть числа) и неравенства $a'_k \leq 1$ следует, что $\lambda_k(j) < 2$, поэтому верны включения

$$\lambda_k(j) \in \{0, 1\}, \quad k \in \{1, \dots, l\}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

2. Разобьём множество натуральных чисел на блоки: числа k -го блока – числа $(k-1)l+1, \dots, kl$; считаем, что число $(k-1)l+i$, $1 \leq i \leq l$, k -го блока имеет в нём номер i . Другими словами, если $r \in \mathbb{N}$, то $j_r = [r/l] + 1$ – номер блока, которому принадлежит r , а $r - (j_r - 1)l$ – номер числа r в этом блоке.

Для каждого $k \in \{1, \dots, l\}$ по последовательности $(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$ построим подмножество $\Lambda_k \subset \mathbb{N}$, определив его характеристическую функцию как

$$\chi_{\Lambda_k}(i) = \begin{cases} \lambda_k(j_i), & k_i = k, \\ 0, & k_i \neq k. \end{cases} \quad (5)$$

Из соотношений (4) следует, что формула (5) корректно задаёт подмножество Λ_k . Заметим, что элементы Λ_k встречаются только на местах, имеющих номер k внутри блоков, поэтому верны соотношения

$$\Lambda_k \cap \Lambda_h = \emptyset, \quad k, h \in \{1, \dots, l\}, \quad k \neq h.$$

Определим подмножество $\Lambda_0 \subset \mathbb{N}$ как $\Lambda_0 \equiv \mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^l \Lambda_k$, тогда имеет место разложение

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{h=0}^l \Lambda_h. \quad (6)$$

3. Зафиксируем значения $1 < c_1^- < c_1^+ < \dots < c_l^- < c_l^+$ и для каждого $k \in \{1, \dots, l\}$ по набору из чисел $T \equiv 2\pi/(la_l)$, c_k^- и c_k^+ построим функции u_k , v_k , d_k и значение ϵ_k в соответствии с леммой 2.

Для любого $i \in \mathbb{N}$ выберем число $h \in \{0, \dots, l\}$ такое, что $i \in \Lambda_h$, и положим $\kappa(i) \equiv h$, определив тем самым функцию $\kappa: \mathbb{N} \rightarrow \{0, \dots, l\}$. Из соотношения (6) вытекает, что функция κ корректно определена.

Теперь построим решения z_1 и z_2 , положив для каждого i

$$u_{z_1}^{T,i} \equiv u_{\kappa(i)}, \quad u_{z_2}^{T,i} \equiv v_{\kappa(i)}, \quad (7)$$

где $u_0(t) \equiv (1 \ 0)^T$, $v_0(t) \equiv (0 \ 1)^T$ при $t \in [0, T]$.

Из утверждения (i) леммы 2 следует, что функции z_1 и z_2 непрерывно дифференцируемы, а поскольку они построены из конечного числа непрерывных элементов, то при некотором $b > 0$ и для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $|z_1(t)|, |z_2(t)|, |\dot{z}_1(t)|, |\dot{z}_2(t)| \leq b$. Из утверждения (ii) леммы 2 и равенства $\det(u_0, v_0) = 1$ следует при всех $t \in \mathbb{R}_+$ оценка снизу $\det(z_1(t), z_2(t)) \geq \epsilon$, где $\epsilon \equiv \min\{1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_l\}$. Следовательно, матрица $Z = (z_1(t), z_2(t)) = (z_{ij})$ является фундаментальной для ограниченной системы $A = \dot{Z}Z^{-1} = (\dot{z}_{ij})(Z_{jk})/\det Z \in \mathcal{M}^2$, где Z_{jk} – алгебраическое дополнение элемента z_{jk} .

4. Если элементы множества S попарно соизмеримы, то для каждого $k \in \{1, \dots, l\}$ число a'_k рационально, а значит, при некоторых $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ верно равенство $a'_k = p_k/q_k$. Поэтому для любого $j \in \mathbb{N}$ соотношения

$$\lambda_k(j + q_k) \equiv [(j + q_k)a'_k] - [(j + q_k - 1)a'_k] = [p_k + ja'_k] - [p_k + (j - 1)a'_k] = \lambda_k(j)$$

начинают выполняться только с $j = q_k$, до этого значения j имеем $\lambda_k(j) = 0$. Такое свойство функции будем называть *периодичностью в положительном направлении*, начиная с некоторого числа, т.е. последовательность $(\lambda_k(j))_{j=1}^{+\infty}$ имеет период q_k в положительном направлении, начиная с $j = q_k$.

Из определения (5) получаем, что функция κ имеет период $Q \equiv l \prod_{k=1}^l q_k$ в положительном направлении, а значит, в силу определения (7) функции z_1 и z_2 имеют период QT в положительном направлении.

5. Для любой функции $z \in \mathcal{Z} \equiv \{cz_1 + z_2: c \in \mathbb{R}\} \cup \{z_1\}$, опираясь на формулы (7) и утверждение (iii) леммы 2, для любого $i \in \mathbb{N}$ определим тип функции $u^i \equiv u_z^{T,i}$ в каждом из следующих трех случаев.

I. Пусть $c \in C_k \equiv [c_k^-, c_k^+]$ при некотором $k \in \{1, \dots, l\}$. Если $z = cz_1 + z_2$, то при $\varphi_0 = \varphi_c$ и $\delta = \min_{j \in \{1, \dots, l\} \setminus \{k\}} d_j(c)$ получим $u^i \in \mathcal{A}_{l_i}(T, \varphi_c, \delta)$, $l_i \equiv \chi_{\Lambda_k}(i)$. Обозначив для любого $p \geq nl + 1$

$$n_p \equiv j_p - 1, \quad \Delta_p \equiv \sum_{i=nl+1}^p l_i \leq 1,$$

будем иметь равенства

$$\sum_{i=1}^p l_i = \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=(j-1)l+1}^{jl} l_i + \Delta_p = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_k(j) + \Delta_p = \sum_{j=1}^{n_p} ([ja'_k] - [(j-1)a'_k]) + \Delta_p = [n_p a'_k] + \Delta_p,$$

с учётом которых найдём значение

$$a = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i = \frac{1}{l} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{n_p l}{p} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{[n_p a'_k]}{n_p} = \frac{a'_k}{l}.$$

Отсюда на основании леммы 1 получим

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(z) = \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(z) = \frac{2\pi}{lTa_l} a_k = a_k, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

II. Пусть теперь $c \in C_0 \equiv \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^l C_k$. Тогда если $z = cz_1 + z_2$, то имеет место равенство $u^i = cu_{\kappa(i)} + v_{\kappa(i)}$ и определены значения $d_1(c), \dots, d_l(c)$, поэтому при $\delta = \min\{d_1(c), \dots, d_l(c)\}$ верны соотношения

$$u^i \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d_{\kappa(i)}(c)) \subset \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, \delta), \quad i \in \mathbb{N}.$$

III. Если $z = z_1$, то из равенства $u^i = u_{\kappa(i)}$ получим включение $u^i \in \mathcal{A}_0(T, 0, \pi/2)$.

В случаях II и III функция z удовлетворяет условиям леммы 1 при $l_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$, и $a = 0$, поэтому

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(z) = \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(z) = \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(z) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Для остальных решений построенной системы $A \in \mathcal{M}^2$ полученные выше значения показателей колеблемости из множества S повторяются, поскольку для любого решения $\bar{z} \in \mathcal{S}_*(A) \setminus \mathcal{Z}$ существует такая функция $z \in \mathcal{Z}$, что при некотором $r \neq 0$ выполнено равенство $\bar{z} = rz$.

6. При любом фиксированном $k \in \{0, 1, \dots, l\}$ для значения $a_k \in S$ ($a_0 \equiv 0$) и при всех $\varkappa = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}, \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}$, $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеет место включение

$$\{z(0): z \in \mathcal{S}_*(A), \varkappa(z) = a_k\} \supset \{q(cz_1(0) + z_2(0)): c \in C_k, q > 0\} \equiv \Omega(a_k).$$

Векторы $z_1(0)$ и $z_2(0)$ линейно независимы, поэтому множество $\{cz_1(0) + z_2(0): c \in C_k\}$ представляет собой отрезок, не проходящий через нуль, а значит, множество $\Omega(a_k)$ является внутренней областью некоторого ненулевого угла, следовательно, имеет положительную меру и содержит некоторое открытое подмножество. Таким образом, равенство (1) выполнено.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе продемонстрирована возможность реализации конечных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерной линейной однородной ограниченной дифференциальной системы. Остаётся открытым вопрос о возможности реализации счётных существенных спектров какого-либо показателя колеблемости двумерной линейной однородной системы.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294.
2. Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138.
4. Сергеев, И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. — 2015. — Вып. 2 (46). — С. 171–183.
5. Бурлаков, Д.С. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д.С. Бурлаков, С.В. Цой // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 75–93.
6. Сташ, А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем / А.Х. Сташ // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2019. — Т. 29, вып. 4. — С. 558–568.
7. Сергеев, И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1661–1662.
8. Сергеев, И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1567–1568.
9. Сташ, А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы / А.Х. Сташ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 2. — С. 157–171.
10. Шишлянников, Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости / Е.М. Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2017. — № 5. — С. 14–21.

ON THE REALIZATION OF FINITE ESSENTIAL SPECTRA OF OSCILLATION EXPONENTS OF TWO-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

A. Kh. Stash¹, N. A. Loboda²

Adyghe State University, Maykop, Russia

e-mail: ¹aidamir.stash@gmail.com, ²n-loboda@yandex.ru

For any finite set of non-negative numbers containing zero, a two-dimensional linear homogeneous differential system is constructed (periodic if all elements of a given set are pairwise commensurate), in which the spectra of the oscillation exponents of signs, zeros, roots and hyper roots coincide with this set, and all the values of these indicators are essential.

Keywords: linear system of differential equation, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Sergeev's frequency.

REFERENCES

1. Sergeev, I.N., Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793.
2. Sergeev, I.N., Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162.
3. Sergeev, I.N., The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132.
4. Sergeev, I.N., The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, iss. 2 (46), pp. 171–183.
5. Burlakov, D.S. and Tsoii, S.V., Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167.
6. Stash, A.Kh., Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, iss. 4, pp. 558–568.
7. Sergeev, I.N., Metrically typical and essential values of exponents of linear systems, *Differ. Uravn.*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1661–1662.
8. Sergeev, I.N., Topologically typical and essential values of exponents of linear systems, *Differ. Uravn.*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1567–1568.
9. Stash, A.Kh., On essential values of oscillation exponents for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system, *Proc. of the Steklov Institute of Math.*, 2023, vol. 321, no. 1, pp. 216–229.
10. Shishlyannikov, E.M., Two dimensional differential systems with arbitrary finite spectra of wandering exponent, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2017, vol. 72, no. 5, pp. 192–198.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЛЕНАМИ

В. Г. Романов

*Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск**e-mail: romanov@math.nsc.ru**Поступила в редакцию 01.02.2024 г., после доработки 01.02.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.*

Для гиперболического уравнения второго порядка, содержащего два нелинейных члена, изучается обратная задача, заключающаяся в определении коэффициентов при нелинейностях. Рассматривается задача Коши с источником, сосредоточенным в точке $\mathbf{y}$. Эта точка является параметром задачи и пробегает последовательно некоторую сферическую поверхность S . Предполагается, что искомые коэффициенты отличны от нуля только в области, лежащей внутри S . Задаётся след решения задачи Коши на S для всевозможных значений $\mathbf{y}$ и для моментов времени, близких к приходу волны от источника в точки поверхности S , что позволяет свести рассматриваемую обратную задачу к двум последовательно решаемым задачам интегральной геометрии, для которых находятся оценки устойчивости решений.

Ключевые слова: обратная задача, нелинейное уравнение, интегральная геометрия, единственность, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0374064124040061, EDN: PBXEKR

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + \sigma(\mathbf{x})(u_t)^m + q(\mathbf{x})u^2 = \delta(x - y)H(t)r(t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (1)$$

в котором $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ — гладкие финитные функции; число $m > 1$; $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 0$ для $t < 0$ и $H(t) = 1$ для $t \geq 0$; $r(t)$ — функция такая, что $r(t) = at$ ($a > 0$) для $t \in [0, \epsilon]$, где ϵ — некоторое положительное число; δ — дельта-функция Дирака; Δ — оператор Лапласа. При $t > \epsilon$ функция $r(t)$ может быть задана произвольно. Под термином *гладкая функция* здесь и в дальнейшем понимается функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Пусть $B(R_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < R_0\}$ — шар с границей $S(R_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = R_0\}$. Предполагаем, что носитель коэффициентов $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ содержится в $B(R_0)$.

Далее считаем, что $\mathbf{y} \in S(R)$, $S(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = R\}$, $R > R_0$, и $\mathbf{y}$ — переменный параметр задачи. В связи с этим решение задачи (1) обозначим $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$.

Прямая задача. При заданных функциях $\sigma(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{x})$ найти функцию $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, являющуюся решением задачи (1).

Ниже мы будем рассматривать задачу, обратную к сформулированной выше. Она заключается в определении функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ в области $B(R_0)$. Для этого используется некоторая информация о решениях прямой задачи.

Определим $S(R, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in S(R) : \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) > 2(R^2 - R_0^2)\}$ — часть сферы $S(R)$, лежащая внутри конуса с вершиной в точке $\mathbf{y} \in S(R)$, образующие которого касаются сферы $S(R_0)$.

Обратная задача. Требуется найти функции $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ в области $B(R_0)$ по следующей информации о решениях прямой задачи:

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \quad \text{для любых } \mathbf{y} \in S(R) \text{ и } \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}), \quad t \in (|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \eta, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \eta),$$

где $\eta > 0$ — произвольное малое число.

Обратные задачи для квазилинейных волновых уравнений интенсивно изучаются в последнее время. В работах [1–12] исследованы задачи, в которых волновой оператор рассматривается на лоренцевом многообразии, а само уравнение является квазилинейным. При этом изучены задачи об определении либо лоренцевой метрики, либо коэффициентов при нелинейностях. В статьях [13, 14] изучены обратные задачи об определении коэффициента при младшем нелинейном члене волнового уравнения. В [15] рассмотрена задача об определении некоторой функции $f(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, входящей в волновое уравнение. Основой исследования этих задач являлось разложение решения прямой задачи в окрестности фронта волны.

В настоящей работе изучается поставленная выше обратная задача об определении коэффициентов $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$. Насколько известно автору, ранее она никем не рассматривалась. Как и в статьях [13–15], выписывается разложение решения прямой задачи в окрестности волнового фронта бегущей волны и на его основе исследуется обратная задача. Решение задачи об определении обеих функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ сводится к задачам интегральной геометрии на семействе прямых линий. Эти задачи состоят в определении функции через интегралы от неё с заданной весовой функцией вдоль всевозможных прямых линий, пересекающих область $B(R_0)$. Весовые функции в задачах определения $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ различны. Ниже найдены оценки устойчивости решений возникающих задач. Все результаты, полученные в статье, являются новыми и могут быть использованы для диагностики сред с нелинейным поглощением.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим асимптотическое разложение решения прямой задачи в окрестности характеристического конуса $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ по степеням $t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Так как точечный источник в уравнении отделён от носителя функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ на расстояние $R - R_0$, то решение задачи (1) в окрестности источника и для моментов времени $t \leq \varepsilon$, $\varepsilon = \min(R - R_0, \epsilon)$, имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{a}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0, \quad t \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Для неоднородной среды имеет место следующее утверждение о структуре решения задачи (1) в окрестности характеристического конуса.

Теорема 1. Пусть $\sigma(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{x})$ — гладкие функции и выполнено условие

$$\sigma(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (3)$$

Тогда в окрестности характеристического конуса $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ решение задачи (1) представимо в виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) & \left[\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}{2!} + \right. \\ & \left. + \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^3}{3!} + \dots + \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^k}{k!} + \dots \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $j \in \mathbb{N}$, — гладкие функции, причём, согласно формуле (2), для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0$

$$\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a}{4\pi}, \quad \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (5)$$

а для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R - R_0$ они вычисляются по формулам

$$\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a}{4\pi} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi) ds \right)^{-1/(m-1)}, \quad (6)$$

$$\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \Delta_\xi \left(\frac{\alpha_1(\xi, \mathbf{y})}{|\xi - \mathbf{y}|} \right) ds, \quad (7)$$

$$\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \left\{ m(m-1) \sigma(\xi) [s^{1-m} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) + \right. \\ \left. + s^{2-m} \alpha_1^{m-2}(\xi, \mathbf{y}) \alpha_2^2(\xi, \mathbf{y})] + 2q(\xi) s^{-2} \alpha_1^2(\xi, \mathbf{y}) - \Delta_\xi \alpha_2(\xi, \mathbf{y}) \right\} ds, \quad (8)$$

$$\alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \left[\Delta_\xi \alpha_{k-1}(\xi, \mathbf{y}) - 2\sigma(\xi) P_k(\alpha_1(\xi, \mathbf{y}), \dots, \alpha_{k-1}(\xi, \mathbf{y}), s) - \right. \\ \left. - 2q(\xi) Q_k(\alpha_1(\xi, \mathbf{y}), \dots, \alpha_{k-1}(\xi, \mathbf{y}), s) \right] ds. \quad (9)$$

В этих формулах функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0$, а для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > R - R_0$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp \left\{ \int_{R-R_0}^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left[s^{-2} + \frac{m}{2} s^{1-m} \sigma(\xi) \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) \right] ds \right\}. \quad (10)$$

Здесь $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — отрезок прямой линии, соединяющий точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, $\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $s \in [R - R_0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|]$, $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Доказательство. Вычислив главную часть дифференциального оператора на функции $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, определённой равенством (4), найдём, что при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ имеет место равенство

$$u_{tt} - \Delta u = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left\{ 2\nabla \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \right. \\ + \left[2\nabla (\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \Delta_{\mathbf{x}} \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \right] \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{1!} + \\ + \left[2\nabla (\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \Delta_{\mathbf{x}} \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}{2!} + \dots \\ \left. \dots + \left[2\nabla (\alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \Delta_{\mathbf{x}} (\alpha_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \right] \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right\}. \quad (11)$$

Кроме того,

$$(u_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}))^m = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^m + m \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{1!} + \right. \\ + \left[m \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + m(m-1) \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-2} \alpha_2^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}{2!} + \dots \\ \left. \dots + \left[m \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{k-1}}{(k-1)!} \right] + \dots \right\}, \quad (12)$$

где $P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ — некоторые полиномы по $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ и $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Для функции $u^2(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ справедливо представление

$$u^2(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left\{ 2 \left(\frac{\alpha_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^2 \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}{2!} + \dots \right. \\ \left. \dots + Q_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^k}{k!} + \dots \right\}, \quad (13)$$

в котором $Q_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ также являются полиномами по тем же переменным.

Учитывая равенства (11)–(13) и уравнение (1), находим соотношения для вычисления коэффициентов α_k , $k \in \mathbb{N}$, разложения (4) в виде

$$2\nabla \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \sigma(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^m = 0, \quad (14)$$

$$2\nabla(\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \\ + m\sigma(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{x}} \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = 0, \quad (15)$$

$$2\nabla(\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + m\sigma(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \\ + m(m-1)\sigma(\mathbf{x}) \left[\left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-2} \alpha_2^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] + \\ + 2q(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^2 - \Delta_{\mathbf{x}} \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (16)$$

$$2(\alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + m\sigma(\mathbf{x}) \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{m-1} \alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \\ + \sigma(\mathbf{x}) P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + q(\mathbf{x}) Q_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \Delta_{\mathbf{x}} \alpha_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (17)$$

Проинтегрируем систему (14)–(17). Умножим равенство (14) на $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ и учтём, что

$$\Delta_{\mathbf{x}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \frac{2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (18)$$

Тогда уравнение для $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будет следующим:

$$2\nabla \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) + \sigma(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^m = 0. \quad (19)$$

Вдоль отрезка $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\xi \in \mathbb{R}^3: \xi = \mathbf{y} + s\nu\}$ уравнение (19) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Действительно, оно имеет вид

$$2 \frac{d}{ds} \alpha_1(\mathbf{y} + s\nu) + \sigma(\mathbf{y} + s\nu) s^{1-m} \alpha_1^m(\mathbf{y} + s\nu) = 0, \quad s \in (0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|]. \quad (20)$$

Заметим, что появление сингулярности s^{1-m} при $s=0$ в этом уравнении не играет никакой роли, так как функция $\sigma(\xi)$ равна нулю для $s \in [0, R - R_0]$. Согласно формуле (2)

$$\alpha_1(\mathbf{y} + s\nu, \mathbf{y}) = \frac{a}{4\pi} =: \alpha_1^0, \quad s \in [0, R - R_0].$$

Интегрируя уравнение (20) с учётом этого условия, приходим к соотношению

$$\alpha_1^{1-m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\alpha_1^0)^{1-m} = \frac{m-1}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi) ds, \quad (21)$$

в котором ξ — переменная точка интегрирования, определяемая равенством $\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Из (21) получаем формулу (6) для вычисления функции $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая является гладкой ввиду условия (3) и финитности $\sigma(\mathbf{x})$ в $B(R_0)$.

Рассмотрим уравнение (15). В силу формулы (2) функция $\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ для $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0$. Учитывая равенство (18), запишем уравнение для $\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вдоль $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в виде

$$2 \frac{d\alpha_2}{ds} + \alpha_2 \left[\frac{2}{s^2} + ms^{1-m} \sigma(\xi) \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) \right] - \Delta_\xi \left(\frac{\alpha_1(\xi, \mathbf{y})}{|\xi - \mathbf{y}|} \right) = 0, \quad s > R - R_0, \quad (22)$$

в котором $\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. С помощью функции $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определённой формулой (10), уравнение (22) можно записать как

$$2 \frac{d}{ds} (\alpha_2(\xi, \mathbf{y}) \Phi(\xi, \mathbf{y})) = \Phi(\xi, \mathbf{y}) \Delta_\xi \left(\frac{\alpha_1(\xi, \mathbf{y})}{|\xi - \mathbf{y}|} \right). \quad (23)$$

Интегрируя это равенство по промежутку $[R - R_0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|]$, получаем

$$\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \Delta_\xi \left(\frac{\alpha_1(\xi, \mathbf{y})}{|\xi - \mathbf{y}|} \right) ds, \quad (24)$$

где в силу первого равенства в (5) учтено, что

$$\Delta_{\mathbf{x}} \left(\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = 0, \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R - R_0.$$

Формула (24) совпадает с формулой (7). Очевидно, что здесь функция $\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является гладкой.

Проинтегрируем уравнение (16). С учётом формулы (18) запишем его в виде

$$\begin{aligned} & 2 \frac{d\alpha_3}{ds} + \alpha_3 \left[\frac{2}{s^2} + ms^{1-m} \sigma(\xi) \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) \right] + \\ & + m(m-1) \sigma(\xi) [s^{1-m} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) + s^{2-m} \alpha_1^{m-2}(\xi, \mathbf{y}) \alpha_2^2(\xi, \mathbf{y})] + \\ & + 2q(\xi) s^{-2} \alpha_1^2(\xi, \mathbf{y}) - \Delta_\xi \alpha_2(\xi, \mathbf{y}) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Умножив равенство (25) на $\Phi(\xi, \mathbf{y})$, представим его в виде, аналогичном (23):

$$\begin{aligned} & 2 \frac{d}{ds} (\alpha_3(\xi, \mathbf{y}) \Phi(\xi, \mathbf{y})) + \Phi(\xi, \mathbf{y}) \left\{ m(m-1) \sigma(\xi) [s^{1-m} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) + \right. \\ & \left. + s^{2-m} \alpha_1^{m-2}(\xi, \mathbf{y}) \alpha_2^2(\xi, \mathbf{y})] + 2q(\xi) s^{-2} \alpha_1^2(\xi, \mathbf{y}) - \Delta_\xi \alpha_2(\xi, \mathbf{y}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Интегрируя уравнение (26) и учитывая, что $\alpha_3(\xi, \mathbf{y}) = 0$ для $|\xi - \mathbf{y}| \leq R - R_0$, получаем формулу (8).

Интегрирование уравнения (17) выполняется по аналогичной схеме: уравнение умножается на $\Phi(\xi, \mathbf{y})$ и затем интегрируется по переменной s на отрезке $[0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|]$, в результате чего получается формула (9).

3. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ К ДВУМ ЗАДАЧАМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Из теоремы 1 следует, что

$$\frac{\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = u_t|_{t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0},$$

поэтому функция $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может быть вычислена по данным обратной задачи на том же множестве, на котором заданы эти данные, а именно,

$$\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| F_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|_{t=|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0}, \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}).$$

Воспользуемся формулой (6), чтобы получить уравнение для функции $\sigma(\mathbf{x})$ в виде

$$\int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rho_1(\xi, \mathbf{y}) \sigma(\xi) ds = v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}), \quad (27)$$

где весовая функция и правая часть определяются как

$$\rho_1(\xi, \mathbf{y}) = |\xi - \mathbf{y}|^{1-m}, \quad \xi \in B(R_0), \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad (28)$$

$$v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2(4\pi)^{m-1}}{(m-1)a^{m-1}} \left[\left(\frac{a}{4\pi\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right)^{m-1} - 1 \right].$$

Заметим, что

$$\rho_1(\xi, \mathbf{y}) \geq (R - R_0)^{1-m}, \quad \xi \in B(R_0), \quad \mathbf{y} \in S(R),$$

так как интегрирование в формуле (28) фактически проводится только по той части отрезка $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая лежит в области $B(R_0)$, где $\sigma(\mathbf{x})$ отлична от нуля. Таким образом, задача о нахождении коэффициента $\sigma(\mathbf{x})$ сводится к решению интегрального уравнения (28). Возникающая задача носит название *задачи интегральной геометрии*. Ниже будет показано, что для неё имеет место теорема единственности, а при некотором дополнительном условии на геометрию области наблюдения и оценка устойчивости решения этой задачи.

Предположим теперь, что решение уравнения (28) найдено. Тогда функции $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ могут быть вычислены по формулам (6), (7) для любых значений $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Это позволяет построить уравнение для отыскания коэффициента $q(\mathbf{x})$. Действительно, из представления (4) следует, что

$$\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial^3 u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial t^3} \Big|_{t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0},$$

поэтому функция $\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может быть вычислена по данным обратной задачи для всех $\mathbf{y} \in S(R)$, $\mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y})$. Тогда из формулы (8) находим уравнение

$$\int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rho_2(\xi, \mathbf{y}) q(\xi) ds = v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}), \quad (29)$$

в котором весовая функция $\rho_2(\xi, \mathbf{y})$ определена равенством

$$\rho_2(\xi, \mathbf{y}) = |\xi - \mathbf{y}|^{-2} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \alpha_1^2(\xi, \mathbf{y}), \quad \xi \in B(R_0), \quad \mathbf{y} \in S(R), \quad (30)$$

а правая часть вычисляется по формуле

$$v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \\ - \frac{1}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Phi(\xi, \mathbf{y}) \left\{ m(m-1) \sigma(\xi) [s^{1-m} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) + s^{2-m} \alpha_1^{m-2}(\xi, \mathbf{y}) \alpha_2^2(\xi, \mathbf{y})] - \Delta_\xi \alpha_2(\xi, \mathbf{y}) \right\} ds.$$

Следовательно, для определения коэффициента $q(\mathbf{x})$ опять возникает задача интегральной геометрии, но с другой весовой функцией. В обоих случаях для искомой функции известны интегралы от неё по всевозможным прямым, пересекающим область $B(R_0)$. В техническом отношении удобно рассматривать интегралы по всевозможным прямым, исходящим из точки $\mathbf{y}$. Используя предположение о финитности искомым функций, продолжим правые части уравнений (27) и (29), определив их нулём для всех $\mathbf{x} \in S(R) \setminus S(R, \mathbf{y})$, т.е. положим

$$\widehat{v}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} v_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{x} \in S(R, \mathbf{y}), \\ 0, & \mathbf{x} \in S(R) \setminus S(R, \mathbf{y}), \end{cases} \quad k = 1, 2,$$

и будем в дальнейшем рассматривать уравнения (27) и (29) для всех $\mathbf{x} \in S(R) \times S(R)$. Более того, каждая из рассматриваемых задач сводится к серии соответствующих двумерных задач в плоскостях $\Sigma(z) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = z\}$, $z \in (-R_0, R_0)$. Для этого достаточно в уравнениях (27) и (29) положить $\mathbf{y} \in \Sigma(z) \cap S(R)$, $\mathbf{x} \in \Sigma(z) \cap S(R)$. Возникающие проблемы являются несколько более общими, чем хорошо известная проблема томографии. Исследования различных вариантов подобных проблем были выполнены в 70-х годах прошлого века. Ниже мы воспользуемся некоторыми результатами этих исследований для вывода утверждений, связанных с задачами для уравнений (27) и (29).

4. АНАЛИЗ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим двумерную задачу об отыскании функции $\sigma(\mathbf{x})$ в плоскости $\Sigma(z)$ для уравнения (27). Заметим, что семейство отрезков $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ прямых линий, лежащих в двумерной области $\Sigma(z) \cap B(R_0)$, и весовая функция $\rho_1(\xi, \mathbf{y})$ инвариантны относительно вращений в плоскости $\Sigma(z)$ относительно точки $(0, 0, z)$. Такая задача для семейства кривых, инвариантного относительно вращений вокруг центра круга, была исследована в работе [16, с. 35–40]. Свойство инвариантности уравнения относительно вращений позволяет свести задачу к серии одномерных интегральных уравнений типа Абеля для коэффициентов Фурье функции $\sigma(\mathbf{x})$ по угловой переменной. Отсюда следуют метод построения этой функции и теорема единственности.

Теорема 2. *Задача о нахождении функции $\sigma(\mathbf{x})$ из уравнения (27) может иметь не более одного решения.*

В принципе, используя тот же метод, можно получить и оценку устойчивости решения для уравнения (27), но она качественно проигрывает оценке, которая следует из результатов статей [17, 18]. Ниже мы воспользуемся теоремой об оценке устойчивости для трёхмерного пространства из работы [18], так как в ней даны точные значения константы в этой оценке. Сформулируем в качестве леммы утверждение, которое вытекает из упомянутой теоремы и адаптировано к описанным выше задачам.

Пусть $f(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — гладкие функции и носитель $f(\mathbf{x})$ содержится в шаре $B(R_0)$. Требуется найти $f(\mathbf{x})$ в $B(R_0)$ по заданным интегралам

$$\int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rho(\xi, \mathbf{y}) f(\xi) ds = v(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S(R) \times S(R).$$

Обозначим

$$\nu = \nu(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

$$s^*(\mathbf{x}, \nu) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = (\mathbf{x} \cdot \nu) + \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi).$$

Для функции $g(\nu(\theta, \varphi))$ обозначим

$$\nabla_{\theta, \varphi} g = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right), \quad |\nabla_{\theta, \varphi} g|^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Лемма. Пусть весовая функция $\rho(\xi, \mathbf{y})$ удовлетворяет условиям

$$\rho(\xi, \mathbf{y}) \geq \rho_0 > 0, \quad (\xi, \mathbf{y}) \in B(R_0) \times S(R), \quad (31)$$

$$|\nabla_{\theta, \varphi} \ln \rho[\xi, \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)]| / 2 \leq \kappa < 1, \quad (\xi, \mathbf{y}) \in B(R_0) \times S(R), \quad (32)$$

с некоторыми положительными числами ρ_0 и κ . Тогда справедлива оценка

$$\int_{B(R_0)} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{4\pi\rho_0^2(1-\kappa)} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S(R)} |\nabla_{\theta, \varphi} v(\mathbf{x}, \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi))|^2 dS \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (33)$$

в которой $\mathbb{S}^2$ — единичная сфера, dS — элемент площади поверхности $S(R)$.

Воспользуемся этой леммой для получения оценок устойчивости решений уравнений (27) и (29).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и неравенство

$$\frac{m-1}{2(R-R_0)} = \kappa_1 < 1. \quad (34)$$

Тогда для решения задачи (27) имеет место оценка

$$\int_{B(R_0)} \sigma^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{(R-R_0)^{2(m-1)}}{4\pi(1-\kappa_1)} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S(R)} |\nabla_{\theta, \varphi} \widehat{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi))|^2 dS \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (35)$$

Доказательство. Согласно формуле (28) весовая функция в этом случае равна $\rho_1(\xi, \mathbf{y}) = |\xi - \mathbf{y}|^{1-m}$. Так как $\xi \in B(R_0)$, а $\mathbf{y} \in S(R)$, то

$$\rho_1(\xi, \mathbf{y}) \geq \frac{1}{(R-R_0)^{m-1}} =: \rho_{10}. \quad (36)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ \rho_1(\xi, \mathbf{y}) |_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \}| &= \frac{m-1}{2} |\nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ |\xi - \mathbf{y}| |_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \}| = \\ &= \frac{m-1}{2} |\nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ (|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |\xi - \mathbf{x}|) |_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \}| = \\ &= \frac{m-1}{2} |\nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - |\xi - \mathbf{x}| \}| = \frac{m-1}{2(s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - |\xi - \mathbf{x}|)} |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))|. \end{aligned}$$

Вычисляя $|\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))|$, находим

$$|\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))| = \frac{[(\mathbf{x} \cdot \nu_\theta)^2 + (\mathbf{x} \cdot \nu_\varphi)^2 / \sin^2 \theta]^{1/2}}{[(\mathbf{x} \cdot \nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2]^{1/2}} \leq 1.$$

В итоге

$$\frac{1}{2} \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \{ \rho_1(\xi, \mathbf{y}) \}_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right| \leq \frac{m-1}{2(R-R_0)} =: \kappa_1. \quad (37)$$

Из формул (36), (37) и условия (34) следует, что неравенства (31) и (32) леммы выполнены при $\rho_0 = \rho_{10}$ и $\kappa = \kappa_1$, поэтому из неравенства (33) вытекает оценка (35).

Замечание 1. При фиксированных $m > 1$ и R_0 неравенство (34) представляет собой условие на выбор числа R , т.е. сферы, в точках которой прикладываются источники возмущений и проводятся измерения решений задачи (1).

Для задачи, связанной с решением уравнения (29), имеет место следующая

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_0, \quad |\nabla \sigma(\mathbf{x})| \leq \sigma_1, \quad \mathbf{x} \in B(R_0), \\ \rho_{20} = \frac{a^2}{(4\pi)^2} \left(1 + (m-1) \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{R_0 \sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} \right)^{-2/(m-1)}, \\ \kappa_2 = \kappa_{21} + \kappa_{22} + \kappa_{23} < 1, \end{aligned} \quad (38)$$

где числа κ_{2j} , $j = 1, 2, 3$, определены ниже формулами (40)–(42). Тогда для решения уравнения (29) справедлива оценка устойчивости, аналогичная оценке (35):

$$\int_{B(R_0)} q^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{4\pi \rho_{20}^2 (1 - \kappa_2)} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S(R)} |\nabla_{\theta, \varphi} \widehat{v}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x} - s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi))|^2 dS \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (39)$$

Доказательство. Используем формулы (6), (10) и (30) для оценки весовой функции $\rho_2(\xi, \mathbf{y})$. Из формул (6), (10) и неотрицательности $\sigma(\mathbf{x})$ следует, что

$$\frac{a}{4\pi} \left(1 + (m-1) \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{R_0 \sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} \right)^{-1/(m-1)} \leq \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{a}{4\pi}, \quad \Phi(\xi, \mathbf{y}) \geq 1.$$

Тогда

$$\rho_2(\xi, \mathbf{y}) \geq \frac{a^2}{(4\pi)^2} \left(1 + (m-1) \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{R_0 \sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} \right)^{-2/(m-1)} = \rho_{20}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \rho_2(\xi, \mathbf{y}) \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} &= \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \left\{ |\xi - \mathbf{y}| \right\}_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right| + \\ &+ \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \left\{ \alpha_1(\xi, \mathbf{y}) \right\}_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right| + \frac{1}{2} \left| \nabla_{\theta, \varphi} \int_{R-R_0}^{s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - |\xi - \mathbf{x}|} \left[s^{-2} + \frac{m}{2} s^{1-m} \sigma(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi)) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\alpha_1)^{m-1}(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi), \mathbf{y}) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} ds \right| = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Заметим, что подобное первому из них уже было оценено выше при доказательстве теоремы 3. Имеем

$$I_1 = \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \left\{ |\xi - \mathbf{y}| \right\}_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right| \leq \frac{1}{R-R_0} =: \kappa_{21}. \quad (40)$$

Для оценки второго слагаемого используем формулу (6):

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \nabla_{\theta, \varphi} \ln \left\{ \alpha_1(\xi, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right\} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \int_{L(\xi, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi) ds \right)^{-(m+1)/(m-1)} \times \\ &\quad \times \left| \nabla_{\theta, \varphi} \left\{ \int_{R-R_0}^{|\xi-\mathbf{y}|} s^{1-m} \sigma(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi)) ds \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right|. \end{aligned}$$

Заметим, что $\sigma(\mathbf{x}) \geq 0$, и заменим функцию $\sigma(\mathbf{x})$ нулём в первом сомножителе. Тогда, вычислив $\nabla_{\theta, \varphi}$, получим неравенство

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \left[|\xi - \mathbf{y}|^{1-m} \sigma(\xi) \left| \nabla_{\theta, \varphi} \left\{ |\xi - \mathbf{y}| \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} \right\} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s^{1-m} |\nabla \sigma(\xi)| \left\{ 2(s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - s)^2 + |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))|^2 \right\}^{1/2} ds \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \left[\frac{\sigma_0}{(R-R_0)^m} + \frac{2R_0\sigma_1}{(R-R_0)^{m-1}} (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{(m-1)} \frac{1}{(R-R_0)^m} \left[\sigma_0 + 2R_0\sigma_1(R-R_0)(2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} \right] =: \kappa_{22}. \end{aligned} \quad (41)$$

Оценим I_3 :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \left| \nabla_{\theta, \varphi} \int_{R-R_0}^{s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - |\xi - \mathbf{x}|} \left[s^{-2} + \frac{m}{2} s^{1-m} \sigma(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi)) \alpha_1^{m-1}(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi), \mathbf{y}) \right] \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(R-R_0)^2} + \frac{m}{4} \left[|\xi - \mathbf{y}|^{1-m} \sigma(\xi) \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))| + \right. \\ &\quad \left. + \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s^{1-m} |\nabla \sigma(\xi)| \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) \left(2(s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi)) - s)^2 + |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\mathbf{x}, \nu(\theta, \varphi))|^2 \right)^{1/2} ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{R-R_0}^{|\xi-\mathbf{y}|} s^{1-m} \sigma(\xi) \left\{ |\nabla_{\xi} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| (2(s^*(\theta, \varphi) - s)^2 + |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\theta, \varphi)|^2)^{1/2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\nabla_{\mathbf{y}} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| \right\} \Big|_{\xi=\mathbf{x}+(s-s^*(\theta, \varphi))\nu(\theta, \varphi)} ds \right]. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$|\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\theta, \varphi)| \leq 1, \quad (2(s^*(\theta, \varphi) - s)^2 + |\nabla_{\theta, \varphi} s^*(\theta, \varphi)|^2)^{1/2} \leq (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2},$$

приходим к промежуточной оценке

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{(R-R_0)^2} + \frac{m}{4} \left[\left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{\sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} + \left(\frac{a}{4\pi} \right)^{m-1} \frac{2R_0\sigma_1}{(R-R_0)^{m-1}} (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_0}{(R-R_0)^{m-1}} \int_{R-R_0}^{|\xi-\mathbf{y}|} \left\{ |\nabla_{\xi} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} + |\nabla_{\mathbf{y}} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| \right\} \Big|_{\xi=\mathbf{y}+s\nu(\theta, \varphi)} ds \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y}) = \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \int_{R-R_0}^{|\xi-\mathbf{y}|} s^{1-m} \sigma(\mathbf{y} + s\nu(\theta, \varphi)) ds\right)^{-1},$$

то

$$\begin{aligned} |\nabla_{\xi} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| &= \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{2(m-1)} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \int_{L(\xi, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi') ds\right)^{-2} \times \\ &\quad \times |\xi - \mathbf{y}|^{1-m} \sigma(\xi) |\nabla_{\xi} |\xi - \mathbf{y}|| \leq \frac{(m-1)\sigma_0}{2(R-R_0)^{m-1}} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{2(m-1)}, \\ |\nabla_{\mathbf{y}} \alpha_1^{m-1}(\xi, \mathbf{y})| &= \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{2(m-1)} \left(1 + \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \int_{L(\xi, \mathbf{y})} s^{1-m} \sigma(\xi') ds\right)^{-2} \times \\ &\quad \times \left\{ |\xi - \mathbf{y}|^{1-m} \sigma(\xi) |\nabla_{\mathbf{y}} |\xi - \mathbf{y}|| + \int_{L(\xi, \mathbf{y})} s^{1-m} |\nabla \sigma(\xi')| ds \right\} \leq \frac{m-1}{2(R-R_0)^{m-1}} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{2(m-1)} (\sigma_0 + 2R_0\sigma_1). \end{aligned}$$

С учётом последних оценок имеем

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{(R-R_0)^2} + \frac{m}{4} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{m-1} \frac{1}{(R-R_0)^{m-1}} \left[\sigma_0 + 2R_0\sigma_1 (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1)\sigma_0}{2(R-R_0)^{m-1}} \left(\frac{a}{4\pi}\right)^{(m-1)} \left\{ \sigma_0 (2(R+R_0)^2 + 1)^{1/2} + \sigma_0 + 2R_0\sigma_1 \right\} \right] =: \kappa_{23}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из полученных выше оценок и условия (38) следует, что для задачи (29) выполняются условия леммы с $\rho_0 = \rho_{20}$ и $\kappa = \kappa_2$. Отсюда вытекает оценка (39).

Замечание 2. Условие (38) теоремы 4 выглядит довольно сложным. Однако оно всегда может быть выполнено при проведении эксперимента с целью получить данные обратной задачи. Действительно, формула (40) показывает, что число κ_{21} можно сделать малым за счёт выбора достаточно большого R . Из формул (41), (42) следует, что числа κ_{22} и κ_{23} малы, если R велико, а число a достаточно мал. Выбор чисел R и a , т.е. условий эксперимента, определяется экспериментатором, поэтому условие (38) представляется достаточно естественным.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurylev, Y. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations / Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann // Invent. Math. — 2018. — V. 212. — P. 781–857.
2. Lassas, M. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds / M. Lassas, G. Uhlmann, Y. Wang // Commun. Math. Phys. — 2018. — V. 360. — P. 555–609.

3. Lassas, M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations / M. Lassas // Proc. Int. Congress Math. — 2018. — V. 3. — P. 3739–3760.
4. Hintz, P. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets / P. Hintz, G. Uhlmann // Int. Math. Res. Notices. — 2019. — V. 22. — P. 6949–6987.
5. Hintz, P. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds / P. Hintz, G. Uhlmann, J. Zhai // Int. Math. Res. Notices. — 2022. — V. 17. — P. 3181–3211.
6. Uniqueness, reconstruction and stability for an inverse problem of a semi-linear wave equation / M. Lassas, T. Liimatainen, L. Potenciano-Machado, T. Tyni // J. Differ. Equat. — 2022. — V. 337. — P. 395–435.
7. Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity / X. Chen, M. Lassas, L. Oksanen, G.P. Paternain // J. Eur. Math. Soc. — 2022. — V. 24, № 7. — P. 2191–2232.
8. Wang, Y. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations / Y. Wang, T. Zhou // Commun. Partial Differ. Equat. — 2019. — V. 44, № 11. — P. 1140–1158.
9. Barreto, A.S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions / A.S. Barreto // Inverse Probl. Imaging. — 2020. — V. 14, № 6. — P. 1057–1105.
10. Uhlmann, G. On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation / G. Uhlmann, J. Zhai // J. Math. Pures Appl. — 2021. — V. 153. — P. 114–136.
11. Barreto, A.S. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime / A.S. Barreto, P. Stefanov // Commun. Math. Phys. — 2022. — V. 392. — P. 25–53.
12. Wang, Y. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations / Y. Wang, T. Zhou // Commun. Partial Differ. Equat. — 2019. — V. 44, № 11. — P. 1140–1158.
13. Романов, В.Г. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения / В.Г. Романов, Т.В. Бугуева // Сибирский журн. индустр. математики. — 2022. — Т. 25, № 3. — С. 154–169.
14. Романов, В.Г. Обратная задача для полулинейного волнового уравнения / В.Г. Романов // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 504, № 1. — С. 36–41.
15. Романов, В.Г. Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением / В.Г. Романов // Сибирский мат. журн. — 2023. — Т. 64, № 3. — С. 635–652.
16. Романов, В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа / В.Г. Романов. — Новосибирск : Наука, 1972. — 164 с.
17. Мухометов, Р.Г. Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия / Р.Г. Мухометов // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 232, № 1. — С. 32–35.
18. Романов, В.Г. Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики / В.Г. Романов // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 241, № 2. — С. 290–293.

AN INVERSE PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH TWO NONLINEAR TERMS

V. G. Romanov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
e-mail: romanov@math.nsc.ru

An inverse problem for a hyperbolic equation of the second order containing two nonlinear terms is studied. It consists in recovering coefficients under nonlinearities. The Cauchy problem with a point source located at point $\mathbf{y}$ is considered. This point is a parameter of the problem and runs an spherical surface S successively. It is supposed that unknown coefficients are differed from zero in domain be situated inside of S only. The trace of a solution of the Cauchy problem is given on S for all values of $\mathbf{y}$ and for all times closed to moments of arriving of the wave from $\mathbf{y}$ to points of S . It is proved that this information allows to reduce the inverse problem to two problems of the integral geometry solving successively. For latter problems stability estimates are stated.

Keywords: inverse problem, nonlinear equation, integral geometry, uniqueness, stability.

FUNDING

This work was carried out within the framework of the state assignment for Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, project no. FWNF-2022-0009.

REFERENCES

1. Kurylev, Y., Lassas, M., and Uhlmann, G., Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations, *Invent. Math.*, 2018, vol. 212, pp. 781–857.
2. Lassas, M., Uhlmann, G., and Wang, Y., Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds, *Commun. Math. Phys.*, 2018, vol. 360, pp. 555–609.
3. Lassas, M., Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations, *Proc. Int. Congress Math.*, 2018, vol. 3, pp. 3739–3760.
4. Hintz, P. and Uhlmann, G., Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets, *Int. Math. Res. Notices*, 2019, vol. 22, pp. 6949–6987.
5. Hintz, P., Uhlmann, G., and Zhai, J., An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds, *Int. Math. Res. Notices*, 2022, vol. 17, pp. 3181–3211.
6. Lassas, M., Liimatainen, T., Potenciano-Machado, L., and Tyni, T., Uniqueness, reconstruction and stability for an inverse problem of a semi-linear wave equation, *J. Differ. Equat.*, 2022, vol. 337, pp. 395–435.
7. Chen, X., Lassas, M., Oksanen, L., and Paternain, G.P., Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity, *J. Eur. Math. Soc.*, 2022, vol. 24, no. 7, pp. 2191–2232.
8. Wang, Y. and Zhou, T., Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations, *Commun. Partial Differ. Equat.*, 2019, vol. 44, no. 11, pp. 1140–1158.
9. Barreto, A.S., Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions, *Inverse Probl. Imaging*, 2020, vol. 14, no. 6, pp. 1057–1105.
10. Uhlmann, G. and Zhai, J., On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation, *J. Math. Pures Appl.*, 2021, vol. 153, pp. 114–136.
11. Barreto, A.S. and Stefanov, P., Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime, *Commun. Math. Phys.*, 2022, vol. 392, pp. 25–53.
12. Wang, Y. and Zhou, T., Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations, *Commun. Partial Differ. Equat.*, 2019, vol. 44, no. 11, pp. 1140–1158.
13. Romanov, V.G. and Buguyeva, T.V., The problem of determining the coefficient of the nonlinear term in a quasilinear wave equation, *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, vol. 16, no. 3, pp. 550–562.
14. Romanov, V.G., An inverse problem for a semilinear wave equation, *Dokl. Math.*, 2022, vol. 105, no. 3, pp. 166–170.
15. Romanov, V.G., An inverse problem for the wave equation with nonlinear damping, *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 3, pp. 670–685.
16. Romanov, V.G., *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Berlin: Springer Verlag, 1974.
17. Muhometov, R.G., The reconstruction problem of a two-dimensional Riemannian metric and integral geometry, *Sov. Math. Dokl.*, 1977, vol. 18, no. 1, pp. 27–31.
18. Romanov, V.G., Integral geometry on the geodesics of an isotropic Riemannian metric, *Sov. Math. Dokl.*, 1978, vol. 19, no. 4, pp. 847–851.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.74

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЁРТКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. Н. Асхабов

Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова, г. Грозный

Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный

Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный

e-mail: askhabov@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.04.2023 г., после доработки 21.07.2023 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Получены двусторонние априорные оценки решения однородного вольтерровского интегро-дифференциального уравнения третьего порядка со степенной нелинейностью и разностным ядром. Показано, что нижняя априорная оценка, играющая роль весовой функции при построении метрики в конусе пространства непрерывных функций, неулучшаема. С помощью этих оценок методом весовых метрик (аналог метода А. Белицкого) доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения в классе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций начальной задачи для указанного интегро-дифференциального уравнения. Показано, что решение можно найти методом последовательных приближений, получена оценка скорости их сходимости к точному решению. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, нелинейность, свёртка, метод весовых метрик.

DOI: 10.31857/S0374064124040075, EDN: PAYTDQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения типа свёртки первого и второго порядков широко применяются в задачах теории инфильтрации и ударных волн [1], в моделях популяционной генетики и др. (см., например, [2, 3]). В работах [4, 5] были изучены такие уравнения в различных конусах пространства непрерывно-дифференцируемых функций. В данной статье рассматриваются вопросы, касающиеся существования, единственности, свойств и способа нахождения решений начальной задачи, для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свёртки третьего порядка

$$u^\alpha(x) = \int_0^x K(x-t)u'''(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = \lim_{x \rightarrow +0} u'(x) = \lim_{x \rightarrow +0} u''(x) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что ядро $K(x)$ удовлетворяет условию

$$K \in C^5[0, \infty), \quad K^{(5)}(x) \text{ не убывает на } [0, \infty),$$

$$K(0) = K'(0) = K''(0) = K'''(0) = K^{(4)}(0) = 0 \quad \text{и} \quad K^{(5)}(0) = p > 0. \quad (3)$$

Показано, что начальная задача (1), (2) при некоторых дополнительных условиях эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u^\alpha(x) = \int_0^x K'''(x-t)u(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0. \quad (4)$$

Поскольку с теоретической и прикладной точек зрения интерес представляют неотрицательные непрерывные нетривиальные решения, то решение интегрального уравнения (4) разыскивается в конусе пространства непрерывных функций $C[0, \infty)$:

$$Q_0 = \{u(x): u \in C[0, \infty), u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Исследование основано на методе весовых метрик [1] — аналоге метода А. Белицкого (см., например, [6, гл. 3, п. 3.1.3]), позволяющем доказать глобальные теоремы о существовании, единственности и способе нахождения нетривиальных решений уравнений (1) и (4). Изучение интегро-дифференциального уравнения третьего порядка (1), по сравнению с уравнениями первого и второго порядков (ср. [4, 5]), вызвало дополнительные трудности, связанные, в частности, с получением точной нижней априорной оценки $F(x)$ решения $u(x)$ (лемма 2), оценки третьей производной ядра $K(x)$ (лемма 4) и с определением условий эквивалентности задачи (1), (2) и интегрального уравнения (4). Заметим, что получение точной оценки $F(x)$, играющей роль весовой функции при построении метрики, потребовало не только решения некоторого нелинейного дифференциального неравенства третьего порядка, не содержащего явно независимой переменной, дающего предварительную оценку решения $u(x)$, но и применения рекуррентной процедуры уточнения этой оценки.

Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты и показывающие, в частности, что найденные условия эквивалентности начальной задачи (1), (2) и интегрального уравнения (4) необходимы в определённом смысле (см. пример 4).

2. СВОЙСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Выясним сначала, какими свойствами обладают решения уравнения (4), если они существуют.

Лемма 1. Пусть $\alpha > 1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если функция $u(x) \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (4), то она не убывает на промежутке $[0, \infty)$ и трижды непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$.

Доказательство. Докажем сначала, что любое решение $u(x)$ из конуса Q_0 уравнения (4) не убывает на $[0, \infty)$. Так как $K^{(5)}(x) \geq K^{(5)}(0) > 0$, то $K^{(4)}(x)$ не убывает на $[0, \infty)$. Значит, $K^{(4)}(x) \geq K^{(4)}(0) = 0$ и, следовательно, $K'''(x)$ также не убывает на $[0, \infty)$. Поэтому для любых $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ таких, что $x_1 < x_2$, из тождества (4) с учётом, что $u(x) \geq 0$ и неотрицательная функция $K'''(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, имеем

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int_0^{x_1} [K'''(x_2-t) - K'''(x_1-t)]u(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} K'''(x_2-t)u(t) dt \geq 0,$$

откуда получаем $u(x_1) \leq u(x_2)$, т.е. $u(x)$ не убывает на луче $[0, \infty)$.

Докажем теперь, что $u \in C^3(0, \infty)$. Из тождества (4) с учётом $K'''(0) = 0$ имеем

$$\alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x) = \int_0^x K^{(4)}(x-t)u(t) dt, \quad (5)$$

откуда находим

$$u'(x) = \frac{1}{\alpha} u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(4)}(x-t)u(t) dt. \quad (6)$$

Значит, функция $u''(x)$ существует и непрерывна на $(0, \infty)$ как производная произведения двух непрерывно дифференцируемых функций, поэтому возможно дифференцирование обеих частей тождества (5):

$$\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}(x)u'^2(x) + \alpha u^{\alpha-1}(x)u''(x) = \int_0^x K^{(5)}(x-t)u(t) dt, \quad (7)$$

отсюда

$$u''(x) = \frac{1}{\alpha} u^{1-\alpha}(x) \int_0^x K^{(5)}(x-t)u(t) dt - (\alpha-1)u^{-1}(x)u'^2(x). \quad (8)$$

Следовательно, $u'''(x)$ существует и непрерывна на $(0, \infty)$, поскольку непрерывно дифференцируема правая часть тождества (8). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\alpha > 1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если функция $u(x) \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (4), то она удовлетворяет неравенствам $F(x) \leq u(x) \leq G(x)$ для любого $x \in [0, \infty)$, где

$$F(x) \equiv Cx^{3/(\alpha-1)}, \quad G(x) \equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} K''(x) \right)^{1/(\alpha-1)}, \quad (9)$$

$$C = \left(\frac{p(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Доказательство. Дифференцируя трижды тождество (4) и учитывая, что $K^{(5)}(x)$ не убывает и, значит, $K^{(6)}(x) \geq 0$ почти всюду на $[0, \infty)$, получаем

$$(u^\alpha(x))''' = pu(x) + \int_0^x K^{(6)}(x-t)u(t) dt \geq pu(x). \quad (10)$$

Положим $u^\alpha(x) = v(x)$. Тогда соотношение (10) примет вид

$$v''' \geq pv^{1/\alpha}. \quad (11)$$

Для решения нелинейного дифференциального неравенства (11), не содержащего явно независимую переменную x , выполним замену $v'_x = R(v)$. Тогда $v'' = RR'_v$, $v''' = R^2R'' + RR'^2$ и из (11) будем иметь

$$R^2R'' + RR'^2 \geq pv^{1/\alpha}. \quad (12)$$

Так как в силу тождества (5) $R = v'_x = \alpha u^{\alpha-1}u' \geq 0$, то $RR'^2 \leq 2RR'^2$. Поэтому из (12) следует, что

$$(R^2R')'_v \geq pv^{1/\alpha}. \quad (13)$$

Заметим, что $v(0) = u^\alpha(0) = 0$. Так как в силу тождеств (5) и (7)

$$v'(x) = \int_0^x K^{(4)}(x-t)u(t) dt \quad \text{и} \quad v''(x) = \int_0^x K^{(5)}(x-t)u(t) dt,$$

то $v'(0)=0$ и $(RR'_v)(0)=v''(0)=0$. И в результате интегрирования (13) в пределах от 0 до x получим

$$R^2 R'_v \geq \frac{p\alpha}{\alpha+1} v^{1/\alpha+1}, \quad \frac{1}{3} R^3 \geq \frac{p\alpha^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)} v^{1/\alpha+2}.$$

Из последнего неравенства с помощью обратной замены $R=v'_x$ имеем

$$v'_x \geq \left[\frac{3p\alpha^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)} \right]^{1/3} v^{1/(3\alpha)+2/3}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{3\alpha}{\alpha-1} v^{(\alpha-1)/(3\alpha)}(x) \geq \left(\frac{3p\alpha^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)} \right)^{1/3} x.$$

Так как $v=u^\alpha$, то из последнего неравенства запишем

$$u(x) \geq C_0 x^{3/(\alpha-1)}, \quad C_0 = \left(\frac{p(\alpha-1)^3}{9\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} \right)^{1/(\alpha-1)}. \quad (14)$$

Используя оценку (14) с учётом, что

$$K'''(x) = \int_0^x K^{(5)}(t)(x-t) dt \geq K^{(5)}(0) \frac{x^2}{2} = \frac{p}{2} x^2 \quad (15)$$

и

$$\int_0^x (x-t)^2 t^{3/(\alpha-1)} dt = \frac{2(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} x^{3\alpha/(\alpha-1)} = \frac{2}{p} \frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} C_0^{\alpha-1} x^{3\alpha/(\alpha-1)}, \quad (16)$$

из (4) получаем

$$u^\alpha(x) \geq \frac{p}{2} C_0 \int_0^x (x-t)^2 t^{3/(\alpha-1)} dt = \frac{p}{2} C_0 \frac{2}{p} \frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} C_0^{\alpha-1} x^{3\alpha/(\alpha-1)} = \frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} C_0^\alpha x^{3\alpha/(\alpha-1)}$$

или

$$u(x) \geq C_0 \left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} \right)^{1/\alpha} x^{3/(\alpha-1)}. \quad (17)$$

Аналогично, используя оценку (17) и равенство (16), из (4) находим

$$u^\alpha(x) \geq \left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} \right)^{1/\alpha} \frac{p}{2} C_0 \int_0^x (x-t)^2 t^{3/(\alpha-1)} dt = \left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} \right)^{1/\alpha} C_0^\alpha \frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} x^{3\alpha/(\alpha-1)}$$

или

$$u(x) \geq C_0 \left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} \right)^{1/\alpha+1/\alpha^2} x^{3/(\alpha-1)}.$$

Продолжив неограниченно этот процесс, окончательно получим

$$u(x) \geq C_0 \left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} \right)^{1/\alpha+1/\alpha^2+\dots+1/\alpha^n+\dots} x^{3/(\alpha-1)} = C_0 \left(\frac{3(\alpha+1)}{\alpha+2} \right)^{1/(\alpha-1)} x^{3/(\alpha-1)} \equiv F(x).$$

Докажем теперь оценку $u(x) \leq G(x)$. Так как $K'''(x)$ не убывает (см. доказательство леммы 1) на множестве $[0, \infty)$, то в силу интегрального неравенства Чебышёва (см., например, [4]) из тождества (4) получаем

$$u^\alpha(x) \leq \int_0^x K'''(t)u(t) dt,$$

откуда

$$u(x) \leq \left(\int_0^x K'''(t)u(t) dt \right)^{1/\alpha}, \quad x \in [0, \infty), \quad (18)$$

или, что то же самое,

$$u(t) \leq \left(\int_0^t K'''(s)u(s) ds \right)^{1/\alpha}, \quad t \in [0, \infty),$$

а с учётом того что $K'''(x) > 0$ при всех $x > 0$, имеем

$$K'''(t)u(t) \left(\int_0^t K'''(s)u(s) ds \right)^{-1/\alpha} \leq K'''(t), \quad t \in (0, \infty).$$

Проинтегрировав последнее неравенство в пределах от 0 до x , получим

$$\left(\int_0^x K'''(s)u(s) ds \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x K'''(t) dt = \frac{\alpha-1}{\alpha} K''(x)$$

или

$$\left(\int_0^x K'''(t)u(t) dt \right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} K''(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv G(x).$$

Тогда в силу неравенства (18) $u(x) \leq G(x)$. Лемма доказана.

Пример 1. Функция

$$u^*(x) = \left(\frac{40(\alpha-1)^3}{\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} \right)^{1/(\alpha-1)} x^{3/(\alpha-1)}$$

является решением уравнения (4) при $K(x) = x^5$, т.е. интегрального уравнения

$$u^\alpha(x) = 60 \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt, \quad \alpha > 1.$$

При $\alpha=2$ функция $u^*(x) = x^3$ является и решением задачи (1), (2) с $K(x) = x^5$ в уравнении (1).

Заметим, что $u^*(x) \equiv F(x)$ при $K(x) = x^5$, что свидетельствует о точности нижней априорной оценки, полученной в лемме 2. Что касается априорной оценки сверху, то в данном случае

$$G(x) = \left(\frac{20(\alpha-1)}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} x^{3/(\alpha-1)}.$$

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Из леммы 2 вытекает, что решение уравнения (4) естественно искать в классе

$$P = \{u(x): u \in C[0, \infty) \text{ и } F(x) \leq u(x) \leq G(x)\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в (9).

Лемма 3. Пусть $\alpha > 1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Тогда оператор

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x K'''(x-t)u(t) dt \right)^{1/\alpha}$$

переводит класс P в себя.

Доказательство. Пусть $u \in P$. Очевидно, что $(Tu)(x) \in C[0, \infty)$. Докажем, что $(Tu)(x) \leq G(x)$. Так как $u(x) \leq G(x)$ и $K'''(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, то, применив интегральное неравенство Чебышёва, получим

$$\begin{aligned} [(Tu)(x)]^\alpha &= \int_0^x K'''(x-t)u(t) dt \leq \int_0^x K'''(x-t)G(t) dt = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x K'''(x-t)[K''(t)]^{1/(\alpha-1)} dt \leq \\ &\leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x K'''(t)[K''(t)]^{1/(\alpha-1)} dt = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} [K''(x)]^{\alpha/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha} \equiv [G(x)]^\alpha, \end{aligned}$$

т.е. $(Tu)(x) \leq G(x)$.

Осталось доказать, что $(Tu)(x) \geq F(x)$. Так как $u(x) \geq F(x) \equiv Cx^{3/(\alpha-1)}$, то, применив трижды формулу интегрирования по частям, с учётом условия (3) будем иметь

$$\begin{aligned} [(Tu)(x)]^\alpha &\geq C \int_0^x K'''(x-t)t^{3/(\alpha-1)} dt = C \frac{\alpha-1}{\alpha+2} \int_0^x K'''(x-t) dt^{(\alpha+2)/(\alpha-1)} = \\ &= C \frac{\alpha-1}{\alpha+2} \int_0^x K^{(4)}(x-t)t^{(\alpha+2)/(\alpha-1)} dt = C \frac{\alpha-1}{\alpha+2} \frac{\alpha-1}{2\alpha+1} \int_0^x K^{(4)}(x-t) dt^{(2\alpha+1)/(\alpha-1)} = \\ &= C \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(2\alpha+1)} \int_0^x K^{(5)}(x-t)t^{(2\alpha+1)/(\alpha-1)} dt \geq C \frac{p(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(2\alpha+1)} \int_0^x t^{(2\alpha+1)/(\alpha-1)} dt = \\ &= C \frac{p(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} x^{3\alpha/(\alpha-1)} = C^\alpha x^{3\alpha/(\alpha-1)} \equiv [F(x)]^\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, $(Tu)(x) \geq F(x)$. Лемма доказана.

Далее к уравнению (4) применим метод весовых метрик. Введём в связи с этим класс

$$P_b = \{u(x): u(x) \in C[0, b] \text{ и } F(x) \leq u(x) \leq G(x)\},$$

где $F(x)$ и $G(x)$ определены в (9), а $b > 0$ — любое фиксированное число.

Определим в этом классе метрику ρ , положив

$$\rho(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{3/(\alpha-1)} e^{\beta x}}, \quad (19)$$

где $\beta > 0$ — любое (пока) число.

Точно так же как и в лемме 4 [4] доказывается полнота метрического пространства P_b .

Выберем достаточно малое число $c \in (0, b)$ таким, чтобы выполнялось условие

$$K^{(5)}(c) < \alpha p, \quad p > 0. \quad (20)$$

Ясно, что такое число c существует, так как функция $K^{(5)}(x)$ непрерывна на множестве $[0, \infty)$, $K^{(5)}(0) = p$ и $\alpha > 1$.

Положим

$$\beta = \frac{1}{p} \sup_{c \leq x \leq b} \frac{K^{(5)}(x) - p}{x},$$

где $c > 0$ определено в условии (20).

Лемма 4. Пусть выполнено условие (3). Тогда для любого $x \in [0, b]$ справедливо неравенство

$$K'''(x) e^{-\beta x} \leq \frac{1}{2} K^{(5)}(c) x^2. \quad (21)$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$K^{(5)}(x) e^{-\beta x} \leq K^{(5)}(c). \quad (22)$$

Если $x \in [0, c]$, то неравенство (22) очевидно. Пусть $x \in [c, b]$. Тогда

$$K^{(5)}(x) = p + px \frac{1}{p} \frac{K^{(5)}(x) - p}{x} \leq p + px\beta = p(1 + \beta x) \leq K^{(5)}(c) e^{\beta x},$$

что равносильно выполнению неравенства (22) и при $x \in [c, b]$.

В силу равенства из (15)

$$K'''(x) = \int_0^x K^{(5)}(t)(x-t) dt \leq K^{(5)}(x) \int_0^x (x-t) dt = \frac{1}{2} K^{(5)}(x) x^2,$$

а с учётом неравенства (22) окончательно получим

$$K'''(x) e^{-\beta x} \leq \frac{1}{2} K^{(5)}(x) e^{-\beta x} x^2 \leq \frac{1}{2} K^{(5)}(c) x^2.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 1$ и выполнено условие (3). Тогда интегральное уравнение (4) имеет в конусе Q_0 (и в пространстве P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение можно найти в P_b при любом $b < \infty$ методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, причём справедлива оценка скорости их сходимости

$$\rho(u_n, u^*) \leq \frac{q^\alpha}{1-q} \rho(Tu_0, u_0), \quad (23)$$

где $q = K^{(5)}(c)/(\alpha p)$, $u_0 \in P_b$ — начальное приближение.

Доказательство. Запишем уравнение (4) в операторном виде $u = Tu$. Покажем сначала, что уравнение (4) имеет единственное решение в P_b при любом $b > 0$ и что это решение можно найти методом последовательных приближений с оценкой скорости их сходимости (23). Из леммы 3 следует, что оператор T действует из P_b в P_b , поэтому достаточно доказать, что он является сжимающим. Пусть $u, v \in P_b$ — произвольные функции. Очевидно, что

$$|u(x) - v(x)| = x^{3/(\alpha-1)} e^{\beta x} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{3/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \leq x^{3/(\alpha-1)} e^{\beta x} \rho(u, v).$$

Поэтому, используя неравенство (21), имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x K'''(x-t)[u(t) - v(t)] dt \right| &\leq \rho(u, v) \int_0^x K'''(x-t) e^{-\beta(x-t)} e^{\beta x} t^{3/(\alpha-1)} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} K^{(5)}(c) e^{\beta x} \rho(u, v) \int_0^x (x-t)^2 t^{3/(\alpha-1)} dt = \frac{1}{2} K^{(5)}(c) e^{\beta x} \rho(u, v) \frac{2(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} x^{3\alpha/(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 2 [4], применим теорему Лагранжа и получим

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &\leq \frac{1}{\alpha} \left| \int_0^x K'''(x-t)[u(t) - v(t)] dt \right| [F(x)]^{1-\alpha} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} K^{(5)}(c) e^{\beta x} \rho(u, v) \frac{(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} x^{3\alpha/(\alpha-1)} \left(\frac{p(\alpha-1)^3}{3\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} x^3 \right)^{-1} = \\ &= \frac{K^{(5)}(c) e^{\beta x} \rho(u, v)}{\alpha p} x^{3/(\alpha-1)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\rho(Tu, Tv) \leq \frac{K^{(5)}(c)}{\alpha p} \rho(u, v). \quad (24)$$

Из неравенства (24) в силу условия (20) вытекает, что оператор T является сжимающим в полном метрическом пространстве P_b . Следовательно, уравнение (4) имеет единственное решение $u^* \in P_b$ и справедлива оценка (23).

То, что $u^*(x)$ является единственным решением уравнения (4) и во всём классе Q_0 , доказывается так же как и в теореме 3 [4].

Решение задачи (1), (2) будем искать в классе

$$Q_0^3 = \{u(x): u \in C[0, \infty) \cap C^3(0, \infty), u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Лемма 5. Пусть $\alpha > 1$ и ядро $K(x)$ удовлетворяет условию (3). Если $u \in Q_0^3$ является решением начальной задачи (1), (2), то $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4). Обратно, если $u \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (4) и выполнены условия

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-3(2\alpha-1)/(\alpha-1)} \left(\int_0^x K^{(4)}(x-t) [K''(t)]^{1/(\alpha-1)} dt \right)^2 = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-3} \int_0^x K^{(5)}(x-t) [K''(t)]^{1/(\alpha-1)} dt = 0, \quad (26)$$

то $u \in Q_0^3$ и является решением начальной задачи (1), (2).

Доказательство. Докажем сначала первую часть леммы. Пусть $u \in Q_0^3$ — решение начальной задачи (1), (2). Тогда очевидно, что $u \in Q_0$, и в силу формулы интегрирования по частям из тождества (1) с учётом условий (2) и (3) имеем

$$\begin{aligned} u^\alpha(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x K(x-t) du''(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x u''(t) K'(x-t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x K'(x-t) du'(t) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x u'(t) K''(x-t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^x K'''(x-t) u(t) dt = \int_0^x K'''(x-t) u(t) dt, \end{aligned}$$

т.е. $u(x)$ является решением интегрального уравнения (4).

Докажем теперь вторую часть леммы. Пусть $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (4). Тогда по лемме 1 $u \in C^3(0, \infty)$ и, значит, $u \in Q_0^3$.

Покажем, что $u(x)$ удовлетворяет начальным условиям (2). Воспользуемся тождеством (5). Поскольку правая часть тождества (5) неотрицательна, то его левая часть также неотри-

цательна, а значит, $u'(x) \geq 0$ при любом $x > 0$. Поэтому из (5) с учётом тождества (4) и леммы 2 получим

$$\begin{aligned} 0 \leq u'(x) &= \alpha^{-1} \int_0^x K^{(4)}(x-t) u(t) dt u^{1-\alpha}(x) \leq \alpha^{-1} \int_0^x K^{(4)}(x-t) G(t) dt F^{1-\alpha}(x) = \\ &= \alpha^{-1} C^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} x^{-3} \int_0^x K^{(4)}(x-t) [K''(t)]^{1/(\alpha-1)} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +0 \end{aligned}$$

(в силу условия (26)), так как $K^4(x) \leq x K^{(5)}(x)$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +0} u'(x) = 0. \quad (27)$$

Далее, из тождества (7) находим

$$0 \leq (\alpha-1) \frac{u'^2(x)}{u(x)} + u''(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x K^{(5)}(x-t) u(t) dt u^{1-\alpha}(x). \quad (28)$$

В силу леммы 2 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^x K^{(5)}(x-t) u(t) dt u^{1-\alpha}(x) &\leq \int_0^x K^{(5)}(x-t) G(t) dt F^{1-\alpha}(x) = \\ &= C^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} x^{-3} \int_0^x K^{(5)}(x-t) [K''(t)]^{1/(\alpha-1)} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +0 \end{aligned}$$

(с учётом условия (26)). Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_0^x K^{(5)}(x-t) u(t) dt u^{1-\alpha}(x) = 0. \quad (29)$$

Аналогично из равенства (6), используя тождество (4) и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{u'^2(x)}{u(x)} &= \frac{1}{\alpha^2} u^{2-2\alpha}(x) \left(\int_0^x K^{(4)}(x-t) u(t) dt \right)^2 u^{-1}(x) = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left(\int_0^x K^{(4)}(x-t) u(t) dt \right)^2 [u(x)]^{1-2\alpha} \leq \frac{1}{\alpha^2} \left(\int_0^x K^{(4)}(x-t) G(t) dt \right)^2 [F(x)]^{1-2\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{2/(\alpha-1)} C^{1-2\alpha} x^{-3(2\alpha-1)/(\alpha-1)} \left(\int_0^x K^{(4)}(x-t) [K''(t)]^{1/(\alpha-1)} dt \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +0 \end{aligned}$$

(в силу условия (25)). Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{u'^2(x)}{u(x)} = 0. \quad (30)$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow +0$ в неравенстве (28), с учётом (29) и (30) будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow +0} u''(x) = 0. \quad (31)$$

Таким образом, в силу равенств (27) и (31) любое решение уравнения (4) в классе Q_0 удовлетворяет начальным условиям (2). Осталось доказать, что оно является решением интегро-дифференциального уравнения (1).

Используя формулу интегрирования по частям, из тождества (4) с учётом условия (3), равенств (27) и (31) получаем

$$\begin{aligned} u^\alpha(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x K'''(x-t) u(t) dt = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x u(t) dK''(x-t) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x K''(x-t) u'(t) dt = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x u'(t) dK'(x-t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x K'(x-t) u''(t) dt = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x u''(t) dK(x-t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x K(x-t) u'''(t) dt = \int_0^x K(x-t) u'''(t) dt, \end{aligned}$$

т.е. $u(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1). Лемма доказана.

Из леммы 5 и теоремы 1 непосредственно вытекает основной результат данной работы.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (3), (25) и (26). Тогда начальная задача (1), (2) в конусе Q_0^3 (и в пространстве P_b при любом $b > 0$) имеет единственное решение $u^*(x)$. Это решение удовлетворяет неравенствам $F(x) \leq u^*(x) \leq G(x)$ и его можно найти методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, которые сходятся к нему по метрике (19) при любом $b < \infty$, причём справедлива оценка скорости их сходимости (23).

Приведём несколько примеров, показывающих, в частности, что чем выше порядок интегро-дифференциального уравнения вида (1), тем больше ограничений не только на ядро $K(x)$, но и на показатель α .

Пример 2. Начальная задача

$$u^\alpha(x) = \int_0^x (x-t) u'(t) dt, \quad 1 < \alpha < \infty, \quad u(0) = 0$$

имеет в классе Q_0^1 (см. [4]) единственное решение

$$u(x) = C_1 x^{1/(\alpha-1)}, \quad C_1 = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Пример 3. Начальная задача

$$u^\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^3 u''(t) dt, \quad 1 < \alpha < 3, \quad u(0) = u'(+0) = 0$$

имеет в классе Q_0^2 (см. [5]) единственное решение

$$u(x) = C_2 x^{2/(\alpha-1)}, \quad C_2 = \left(\frac{3(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha+1)} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Ограничение $1 < \alpha < 3$ необходимо для выполнения начального условия $u'(+0) = 0$, поскольку $u'(x) = 2C_2(\alpha-1)^{-1} x^{(3-\alpha)/(\alpha-1)}$, а также для выполнения условия (14) из статьи [5] при $K(x) = x^3$.

Пример 4. Начальная задача

$$u^\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^5 u'''(t) dt, \quad 1 < \alpha < 2.5, \quad u(0) = u'(+0) = u''(+0) = 0$$

имеет в классе Q_0^3 единственное решение

$$u(x) = C_3 x^{3/(\alpha-1)}, \quad C_3 = \left(\frac{40(\alpha-1)^3}{\alpha(\alpha+2)(2\alpha+1)} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Ограничение $1 < \alpha < 2.5$ необходимо как для выполнения условия $u''(+0) = 0$, поскольку $u''(x) = 3C_3(4-\alpha)(\alpha-1)^{-2}x^{(5-2\alpha)/(\alpha-1)}$, так и (что важно) для выполнения условий (25) и (26) при $K(x) = x^5$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FECS-2020-0001).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Okrasinski, W. Nonlinear Volterra equations and physical applications / W. Okrasinski // Extracta Math. — 1989. — V. 4, № 2. — P. 51–74.
2. Askhabov S.N. Nonlinear convolution type equations / S.N. Askhabov, M.A. Betilgiriev // Semin. Anal., Oper. Equat. Numer. Anal. 1989/90. — Berlin : Karl-Weierstrass-Institut für Mathematik, 1990. — P. 1–30.
3. Brunner, H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications / H. Brunner. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2017. — 402 p.
4. Асхабов, С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части / С.Н. Асхабов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 786–795.
5. Askhabov, S.N. On a second-order integro-differential equation with difference kernels and power nonlinearity / S.N. Askhabov // Bulletin of the Karaganda University. Math. Series. — 2022. — № 2 (106). — P. 38–48.
6. Эдвардс, Р. Функциональный анализ: теория и приложения / Р. Эдвардс ; пер. с англ. Г.Х. Бермана, И.Б. Раскиной ; под ред. В.Я. Лина. — М. : Мир, 1969. — 1071 с.

INITIAL PROBLEM FOR A THIRD ORDER NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE

S. N. Askhabov

*Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia
Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia
e-mail: askhabov@yandex.ru*

The article obtains two-sided a priori estimates for the solution of a homogeneous third-order Volterra integro-differential equation with power-law nonlinearity and a difference kernel. It is shown that the lower a priori estimate, which plays the role of a weight function when constructing a metric in the cone of the space of continuous functions, is unimprovable. Using these estimates, using the method of weight metrics (analogous to A. Bielecki's method), a global theorem on the existence, uniqueness and method of finding a nontrivial solution to the initial problem for the specified integro-differential equation in the class of non-negative continuous functions on the positive half-axis is proved. It is

shown that the solution can be found by the method of successive approximations and an estimate of the rate of their convergence to the exact solution is obtained. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: integro-differential equation, nonlinearity, convolution, weight metrics method.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FECS-2020-0001).

REFERENCES

1. Okrasinski, W., Nonlinear Volterra equations and physical applications, *Extracta Math.*, 1989, vol. 4, no. 2, pp. 51–74.
2. Askhabov, S.N. and Betilgiriev, M.A., Nonlinear convolution type equations, *Semin. Anal., Oper. Equat. Numer. Anal.*, 1989/90, Berlin: Karl–Weierstrass–Institut für Mathematik, 1990, pp. 1–30.
3. Brunner, H., *Volterra Integral Equations: an Introduction to the Theory and Applications*, Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
4. Askhabov, S.N., Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 775–784.
5. Askhabov, S.N., On a second-order integro-differential equation with difference kernels and power nonlinearity, *Bulletin of the Karaganda University. Math. Series*, 2022, no. 2 (106), pp. 38–48.
6. Edwards, R.E., *Functional Analysis: Theory and Applications*, New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1965.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Д. В. Георгиевский¹, Н. А. Раутиан²^{1,2}Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова^{1,2}Московский центр фундаментальной и прикладной математикиe-mail: ¹georgiev@mech.math.msu.su, ²nadezhda.rautian@math.msu.ru

Поступила в редакцию 24.01.2024 г., после доработки 24.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Рассматриваются вопросы корректной разрешимости и экспоненциальной устойчивости решений абстрактных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами интегральных операторов общего вида из пространства функций, интегрируемых на положительной полуоси. Исследуемые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. Предлагаемый подход к изучению указанных интегро-дифференциальных уравнений связан с применением теории полугрупп и может быть использован для исследования других интегро-дифференциальных уравнений, содержащих интегральные слагаемые вида вольтерровой свёртки.

Ключевые слова: вольтеррово интегро-дифференциальное уравнение, линейное дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, полугруппа операторов, вязкоупругость.

DOI: 10.31857/S0374064124040083, EDN: OZNRQI

ВВЕДЕНИЕ

Большую роль в теории определяющих соотношений линейной вязкоупругости играют связи напряжений и деформаций в виде интегральных операторов с ядрами, являющимися материальными функциями, которые можно найти из установочных экспериментов [1–3]. Если материальные функции зависят только от одной временной переменной, то вязкоупругие среды называют *нестареющими*. Использование данных определяющих соотношений в постулатах механики сплошной среды приводит, в частности, к уравнениям движения, представляющим собой вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Будем называть их далее *абстрактными интегро-дифференциальными уравнениями*.

Ниже на примере абстрактного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в линейной теории вязкоупругости, будет представлен общий подход исследования, который можно применить ко многим другим линейным моделям, содержащим вольтерровы интегральные операторы. Указанное абстрактное интегро-дифференциальное уравнение (одномерное уравнение движения вязкоупругой среды) может быть реализовано как интегро-дифференциальное уравнение в частных производных:

$$u_{tt}(x, t) = \rho^{-1} [\mu \Delta u(x, t) + (\mu + \lambda) \cdot \text{grad}(\text{div } u(x, t))] - \\ - \int_l^t K(t - \tau) \rho^{-1} \mu [\Delta u(x, \tau) + \text{grad}(\text{div } u(x, \tau))] d\tau - \int_l^t Q(t - \tau) \rho^{-1} \lambda \text{grad}(\text{div } u(x, \tau)) d\tau + f(x, t),$$

где $t > 0$; $u = \vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей; l — заданный параметр ($-\infty \leq l \leq 0$), $\rho > 0$ — постоянная плотность; λ, μ — положительные параметры, аналоги коэффициентов Ламе в теории упругости (см. [1, 2]).

Предполагается, что на границе области Ω выполнены условия Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$. Ядра интегральных операторов $K(t), Q(t)$ — положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды.

К вольтерровым интегро-дифференциальными уравнениями относится также интегро-дифференциальное уравнение Гуртина–Пипкина (см. [4–7]), которое описывает процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью. Кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси, см. [8]).

Линейные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с частными производными представляют достаточно широкий класс интегро-дифференциальных уравнений, поэтому более естественно рассматривать интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегро-дифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения с частными производными.

Исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях, посвящена обширная литература (см., например, работы [4–15] и библиографию в них).

Для получения результатов данной статьи использован подход, связанный с изучением однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений, который является продолжением и развитием исследований, результаты которых опубликованы в работах [6, 11, 12], посвящённых спектральному анализу оператор-функций — символов вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство; A — самосопряжённый положительный оператор: $A^* = A \geq \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H и имеющий ограниченный обратный. Пусть B — симметрический оператор: $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$ ($D(A) \subseteq D(B)$), неотрицательный: $(Bx, x) \geq 0$ для любых $x, y \in D(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$, для любого $x \in D(A)$; I — тождественный оператор в пространстве H .

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (A + B)u(t) - \sum_{k=1}^N \int_l^t R_k(t-s)(a_k A + b_k B)u(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u'(+0) = \varphi_1, \quad u(t) = \varphi(t), \quad t \in [l, 0], \quad -\infty \leq l \leq 0, \quad (2)$$

где $a_k > 0$, $b_k \geq 0$, $k = \overline{1, N}$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = \varphi_1$. Допустим, что функции $R_k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k(t) — положительные невозрастающие функции, \quad R_k(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad k = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Пусть

$$M_k(t) = \int_t^{+\infty} R_k(s) ds, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$\sum_{k=1}^N a_k M_k(0) < 1, \quad \sum_{k=1}^N b_k M_k(0) < 1. \quad (5)$$

Определение 1. Назовём вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением* задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2).

2. ЗАДАЧА КОШИ И ПОЛУГРУППА ОПЕРАТОРОВ В РАСШИРЕННОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Положим

$$\begin{aligned} A_0 &:= \left(1 - \sum_{k=1}^N a_k M_k(0)\right) A + \left(1 - \sum_{k=1}^N b_k M_k(0)\right) B, \\ A_k &:= a_k A + b_k B, \\ Q_1 &:= A^{1/2} A_0^{-1/2}, \quad Q_2 := B^{1/2} A_0^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Замечание 1. Из известного результата (см. [16, с. 361]) вытекает, что операторы A_0, A_k являются самосопряжёнными и положительными для всех $k = \overline{1, N}$.

Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [17, с. 177–179]) следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы Q_1, Q_2 допускают ограниченное замыкание в H , A_0^{-1} — ограниченный оператор.

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора A_0^β , $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β , введя на $D(A_0^\beta)$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^β .

Через Ω_k обозначим весовое пространство $L_{r_k}^2(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в H , снабжённое нормой

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} r_k(s) \|u(s)\|_H^2 ds \right)^{1/2}, \quad r_k(\tau) := R_k^{-1}(\tau): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad k = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [18, с. 33]): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t+\tau)$, $t > 0$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \partial\xi(\tau)/\partial\tau$ в пространстве Ω_k с областью определения $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k: \partial\xi(\tau)/\partial\tau \in \Omega_k\}$ является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [18, с. 66]).

Введём операторы $\mathbb{B}_k: H \rightarrow \Omega_k$ ($k = 1, 2$), действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = R_k(\tau) Q_k v, \quad k = \overline{1, N}, \quad \tau > 0.$$

Тогда сопряжённые операторы $\mathbb{B}_k^*: \Omega_k \rightarrow H$ ($k = 1, 2$) имеют вид

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(t, \tau) d\tau, \quad k = \overline{1, N}.$$

Действительно, для любых $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} &= \langle R_k(\tau) Q_k v, \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} = \\ &= \int_0^{+\infty} r_k(\tau) \langle R_k(\tau) Q_k v, \xi(\tau) \rangle_H d\tau = \left\langle v, Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi(\tau) d\tau \right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) \rangle_H. \end{aligned}$$

Введём гильбертово пространство

$$\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^N \Omega_k \right),$$

снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \|\xi_k\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau > 0,$$

которое будем называть *расширенным гильбертовым пространством*.

Введём также линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$\begin{aligned} D(\mathbb{A}) &= \left\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau)) \in \mathbb{H} : \right. \\ &\quad \left. v \in H_{1/2}, \quad \xi_0 + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(\tau) d\tau \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad k = \overline{1, N} \right\} = \\ &= \left\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \quad \xi_0 + \sum_{k=1}^N \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad k = \overline{1, N} \right\}, \end{aligned}$$

действующий следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau)) &= \\ &= \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(\tau) d\tau \right], \quad A_0^{1/2} v, \quad R_k(\tau) Q_k A_0^{1/2} v + \mathbb{T}_k \xi_k(\tau) \right) = \\ &= \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^N \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], \quad A_0^{1/2} v, \quad \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau) \right)^T, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде произведения операторных матриц:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & \dots & -\mathbb{B}_N^* \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & \mathbb{T}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{B}_N & 0 & 0 & \dots & \mathbb{T}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Определение 2. Линейный оператор $\mathcal{A}$ с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется *диссипативным*, если $\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, x) \leq 0$ при $x \in D(\mathcal{A})$, и *максимально диссипативным*, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

В работе [13] показано, что при выполнении условий (5) оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ максимально диссипативен и, следовательно, является генератором сжимающей C_0 -полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

Введём $(2+N)$ -компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)) \in \mathbb{H},$$

$$Z_0 = (v_0, \xi_{00}, \xi_{01}(\tau), \dots, \xi_{0N}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$:

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t), \quad (7)$$

$$Z(0) = Z_0. \quad (8)$$

Определение 3. Вектор $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)) \in D(\mathbb{A})$ называется *классическим решением* задачи (7), (8), если $v(t), \xi_0(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, $\xi_k(t, \tau) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$ для любого $\tau > 0$, $k = \overline{1, N}$, $Z(t) \in C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (7) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (8).

3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Предположим, что ядра интегральных операторов $R_k(\tau)$, $k = \overline{1, N}$, удовлетворяют условиям

$$R'_k(\tau) + \gamma R_k(\tau) \leq 0 \quad (9)$$

для некоторого $\gamma > 0$ и почти всех $\tau > 0$. Условие (9) хорошо известно и использовалось разными авторами для доказательства экспоненциальной устойчивости полугрупп, связанных с различными уравнениями с памятью (см., например, монографию [3], а также цитированную в ней литературу).

Приведём результат об экспоненциальной устойчивости полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$, $t \geq 0$, в пространстве $\mathbb{H}$.

Теорема 1 [15, теорема 1.1]. Пусть $S(t)Z_0$ — решение задачи (7), (8) при $t > 0$ и пусть функции $R_k(\tau)$ ($k = \overline{1, N}$) удовлетворяют условиям (3), (5) и условию (9) для некоторого $\gamma > 0$ и почти всех $\tau > 0$. Тогда существуют такие постоянные $\theta > 1$ и $\omega > 0$, что для любого $Z_0 \in D(\mathbb{A})$ справедливо неравенство

$$\|S(t)Z_0\|_{\mathbb{H}} \leq \theta \|Z_0\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t}. \quad (10)$$

4. ТЕОРЕМЫ О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$:

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \quad (11)$$

$$Z(0) = Z_0, \quad (12)$$

здесь $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)) \in D(\mathbb{A})$;

$$Z_0 := (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \xi_{01}(\tau), \dots, \xi_{0N}(\tau)) \in D(\mathbb{A}), \quad (13)$$

функции $\xi_{0k}(\tau)$ определены формулами

$$\xi_{0k}(\tau) := \int_l^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds, \quad \tau > 0, \quad k = \overline{1, N};$$

$$F(t) := (f_1(t), 0, 0, \dots, 0), \quad f_1(t) := f(t) - \sum_{k=1}^N M_k(t-l) A_k \varphi(l),$$

l — заданное число ($-\infty \leq l \leq 0$); $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $\varphi(t) \in C([l, 0], H)$ — заданные вектор-функции; $\varphi_0 \in H$, $\varphi_1 \in H$ — заданные векторы; функции $M_k(\cdot)$ ($k = \overline{1, N}$) определяются формулами (4).

Теорема 2 (о корректной разрешимости (общий случай)). Пусть l — заданное число ($-\infty \leq l \leq 0$), выполнены условия (3), (5), $\varphi(t) \in H_1$, $\varphi'(t) \in H_1$ при $t \in [l, 0]$, $\varphi(t) \in C([l, 0], H_1)$, $\varphi'(t) \in C([l, 0], H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = \varphi_1$, условие $\lim_{t \rightarrow l} A_k \varphi(t) = 0$ ($k = \overline{1, N}$) выполнено при $-\infty \leq l < 0$ и, кроме того, выполнен любой из следующих двух наборов условий:

1) $f_1(t) \in H_{1/2}$, $A_0^{1/2} f_1(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1, N}$, и условие $\varphi_0 \in H_{3/2}$ выполнено, если $l = 0$;

2) $f_1(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1, N}$.

Тогда задача (11), (12) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)),$$

где $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными l , $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0 , φ_1 , и справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2} u(t)\|_H^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \\ &\leq d \left[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2} \varphi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \int_l^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_{\Omega_k}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^t \left\| f(s) - \sum_{k=1}^N M_k(s-l) A_k \varphi(l) \right\|_H ds \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (14)$$

если, кроме того, выполнено условие (9), то справедлива оценка

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2} u(t)\|_H^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \\ &\leq d \left[e^{-2\omega t} \left(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2} \varphi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \int_l^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_{\Omega_k}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left\| f(s) - \sum_{k=1}^N M_k(s-l) A_k \varphi(l) \right\|_H ds \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функций f , φ и векторов φ_0 , φ_1 .

Сформулируем также важные частные случаи теоремы 2.

Теорема 3 (о корректной разрешимости (случай $l = 0$)). Пусть выполнены условия (3), (5), данные задачи (11), (12) удовлетворяют условиям

$$F(t) := (f_1(t), 0, 0, \dots, 0), \quad f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^N M_k(t) A_k \varphi_0,$$

где $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$ — заданные векторы, вектор $Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, 0, \dots, 0) \in D(\mathbb{A})$, и выполнен любой из следующих наборов условий:

1) $f(t) \in H_{1/2}$ и $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $\varphi_0 \in H_{3/2}$, $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1, N}$;

2) $f_1(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1, N}$.

Тогда задача (11), (12) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)),$$

где $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными $l=0$, $f(t)$, φ_0 , φ_1 , и справедлива следующая оценка:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \\ \leq d \left[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \left(\int_0^t \left\| f(s) - \sum_{k=1}^N M_k(s) A_k \varphi_0 \right\|_H ds \right)^2 \right];$$

если, кроме того, выполнено условие (9), то справедлива оценка

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \\ \leq d \left[e^{-2\omega t} \left(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 \right) + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left\| f(s) - \sum_{k=1}^N M_k(s) A_k \varphi_0 \right\|_H ds \right)^2 \right]$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0 , φ_1 .

Теорема 4 (о корректной разрешимости (случай $-\infty \leq l < 0$)). Пусть l — заданное число ($-\infty \leq l < 0$), выполнены условия (3), (5), $F(t) := (f(t), 0, 0, \dots, 0)$, где $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ — заданная вектор-функция, $\varphi(t) \in H_1$, $\varphi'(t) \in H_1$ при $t \in [l, 0]$, $\varphi(t) \in C([l, 0], H_1)$, $\varphi'(t) \in C([l, 0], H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = \varphi_1$, $\lim_{t \rightarrow l} A_k \varphi(t) = 0$, $k = \overline{1, N}$, и выполнен любой из следующих наборов условий:

- 1) $f(t) \in H_{1/2}$, $A_0^{1/2}f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1, N}$;
- 2) $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1, N}$.

Тогда задача (11), (12) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)),$$

где $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными l , $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0 , φ_1 , и справедлива следующая оценка:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \\ \leq d \left[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \int_l^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_{\Omega_k}^2 + \left(\int_0^t \|f(s)\|_H ds \right)^2 \right];$$

если, кроме того, выполнено условие (9), то справедлива оценка

$$E(t) := \frac{1}{2} \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \\ \leq d \left[e^{-2\omega t} \left(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \int_l^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_{\Omega_k}^2 \right) + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \|f(s)\|_H ds \right)^2 \right]$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функций f , φ и векторов φ_0 , φ_1 .

Предложение 1 (достаточные условия выполнения условия (13) при $l = -\infty$). Пусть выполнены следующие условия:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{R_k(\tau)} d\tau < \infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left(\int_{\tau}^{+\infty} (R'_k(\xi))^2 d\xi \right) d\tau < \infty, \quad k = \overline{1, N}, \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^0 \left\| A_k \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|^2 ds < \infty, \quad k = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Тогда выполнено условие (13).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Сформулируем теоремы из монографии [17], необходимые для доказательства теоремы 2. Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(\mathcal{A})$.

Определение 4 [17, с. 38–39, 58]. Задача Коши

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathcal{A}Z(t), \quad Z(0) = Z_0 \quad (18)$$

называется (равномерно) корректной, если

- 1) для любого $Z_0 \in D(\mathcal{A})$ существует единственное решение этой задачи;
- 2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: из того, что $Z_n(0) \rightarrow 0$ ($Z_n(0) \in D(\mathcal{A})$), вытекает, что $Z_n(t) \rightarrow 0$ при каждом $t \in [0, T]$ (равномерно по t) на любом конечном интервале $[0, T]$.

Замечание 2. Если задача Коши (18) порождает сжимающую полугруппу в пространстве $\mathbb{H}$, то эта задача равномерно корректна.

Теорема 5 [17, теорема 1.1]. Если задача Коши (18) корректна, то её решение даётся формулой $Z(t) = S(t)Z_0$ ($Z_0 \in D(\mathcal{A})$), где $S(t)$ — сильно непрерывная при $t > 0$ полугруппа операторов.

Теорема 6 [17, теорема 6.5]. Если задача Коши (18) равномерно корректна, то формула

$$Z(t) = S(t)Z_0 + \int_0^t S(t-p)F(p)dp \quad (19)$$

даёт решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad Z(0) = Z_0, \quad (20)$$

где $Z_0 \in D(\mathcal{A})$ и вектор-функция $F(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) значения функции $F(t) \in D(\mathcal{A})$ и функция $\mathcal{A}F(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{H})$;
- 2) функция $F(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H})$.

5.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Из условий теоремы 2 следует выполнение условий теоремы 6 для задачи (7), (8). Таким образом, задача (7), (8), согласно теореме 6, является равномерно корректной и для её классического решения с учётом формулы (19) справедлива оценка

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leq d \left(\|Z_0\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \|F(s)\|_{\mathbb{H}} ds \right) \quad (21)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции F и векторов φ_0, φ_1 .

Если ядра интегральных операторов $R_k(\tau)$, $k = \overline{1, N}$, удовлетворяют дополнительно ещё и условиям (9), то для классического решения задачи (7), (8) с учётом формулы (19) и оценки (10) справедлива оценка

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leq d \left(e^{-\omega t} \|Z_0\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \|F(s)\|_{\mathbb{H}} ds \right) \quad (22)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции F и векторов φ_0 , φ_1 .

Оценки (21) и (22) следуют из формулы (19), применённой к задаче (11), (12), в обозначениях теоремы 6, так как $Z(t) = S(t)Z_0$, где полугруппа $S(t) = e^{tA}$ является сжимающей.

Покажем, что если выполнены условия теоремы 2, то $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2}u(t)$, где $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2).

При выполнении условий теоремы 2 задача Коши (11), (12), записанная по координатам, имеет вид следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2} \left[\xi_0(t) + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(t, \tau) d\tau \right] &= f_1(t), \quad \frac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t), \\ \frac{d\xi_k(t, \tau)}{dt} &= R_k(\tau)Q_k A_0^{1/2}v(t) + \frac{\partial \xi_k(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $t, \tau > 0$, $f_1(t) = f(t) - (M_1(t-l)A + M_2(t-l)B)\varphi(l)$, $-\infty \leq l \leq 0$, функции $M_k(t)$ ($k = \overline{1, N}$) определяются формулами (4),

$$\begin{aligned} v(0) &= \varphi_1, \quad \xi_0(0) = A_0^{1/2}\varphi_0, \\ \xi_k(t, \tau)|_{t=0} &= \int_l^0 R_k(\tau-s)Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds, \quad \tau > 0, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим последние N уравнений системы (23). Применим к этим уравнениям метод вариации произвольных постоянных. По определению оператора $\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \partial \xi(\tau) / \partial \tau$, где $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \partial \xi / \partial \tau \in \Omega_k\}$, $k = \overline{1, N}$, соответствующие однородные уравнения имеют вид

$$\frac{d\xi_k(t, \tau)}{dt} = \mathbb{T}_k \xi_k(t, \tau), \quad k = \overline{1, N}.$$

Следовательно, общие решения однородных уравнений могут быть записаны в виде $\xi_k^O(t, \tau) = e^{t\mathbb{T}_k} C_k(\tau)$, $k = \overline{1, N}$, где $C_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k)$ — произвольные векторы.

Применяя формулу (19) для решения последних N неоднородных уравнений системы (23) при заданных начальных условиях $\xi_k(0, \tau)$, $k = \overline{1, N}$, определяемых формулами (24), и полагая $v(t) = \varphi'(t)$, $\varphi(0) = \varphi_0$ при $t \in (l, 0]$, имеем

$$\begin{aligned} \xi_k(t, \tau) &= e^{t\mathbb{T}_k} \xi_k(0, \tau) + \int_0^t e^{(t-s)\mathbb{T}_k} R_k(\tau)Q_k A_0^{1/2}v(s) ds = \\ &= \xi_k(0, \tau+t) + \int_0^t R_k(\tau+t-s)Q_k A_0^{1/2}v(s) ds = \\ &= \int_l^0 R_k(\tau+t-s)Q_k A_0^{1/2}v(s) ds + \int_0^t R_k(\tau+t-s)Q_k A_0^{1/2}v(s) ds, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующие представления решений последних $N+1$ уравнений системы (23) с начальными условиями $\xi_k(0, \tau)$, $k = \overline{1, N}$, $\xi_0(0)$, определяемыми формулами (24), положив $v(t) = \varphi'(t)$, $\varphi(0) = \varphi_0$ при $t \in (l, 0]$:

$$\xi_k(t, \tau) = \int_l^t R_k(\tau - s) Q_k A_0^{1/2} v(s) ds, \quad k = \overline{1, N}, \quad \xi_0(t) = \int_l^t A_0^{1/2} v(s) ds + A_0^{1/2} \varphi(l).$$

Из первого уравнения системы (23) находим

$$\xi_0(t) + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(t, \tau) d\tau \in D(A_0^{1/2}).$$

Подставив найденные выражения для $\xi_0(t)$ и $\xi_k(t, \tau)$ в первое уравнение системы (23), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_l^t A_0^{1/2} v(s) ds + A_0^{1/2} \varphi(l) + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int_0^{+\infty} \int_l^t R_k(\tau + t - s) Q_k A_0^{1/2} v(s) ds d\tau = \\ & = \int_l^t \left[A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^N \left(\int_l^{+\infty} R_k(\tau + t - s) d\tau \right) Q_k^* Q_k A_0^{1/2} \right] v(s) ds + A_0^{1/2} \varphi(l) \in D(A_0^{1/2}). \end{aligned}$$

По условиям теоремы 2 вектор-функция $A_0 \varphi(t)$ ограничена при $t \rightarrow l$ при фиксированном значении параметра l ($-\infty \leq l \leq 0$), следовательно, $\varphi(l) \in H_1$, откуда получаем

$$\int_l^t \left[A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^N \left(\int_l^{+\infty} R_k(\tau + t - s) d\tau \right) Q_k^* Q_k A_0^{1/2} \right] v(s) ds \in D(A_0^{1/2}).$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned} & -A_0^{1/2} \int_l^t \left[A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^N \left(\int_0^{+\infty} R_k(\tau + t - s) d\tau \right) Q_k^* Q_k A_0^{1/2} \right] v(s) ds = \\ & = -A_0 \int_l^t A_0^{-1/2} \left[I + \sum_{k=1}^N \left(\int_0^{+\infty} R_k(\tau + t - s) d\tau \right) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2} v(s) ds, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) следует, что

$$\int_l^t A_0^{-1/2} \left[I + \sum_{k=1}^N \left(\int_0^{+\infty} R_k(\tau + t - s) d\tau \right) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2} v(s) ds \in D(A_0). \quad (26)$$

Введём обозначение

$$R(t) := A_0^{-1/2} \left[\sum_{k=1}^N \left(\int_0^{+\infty} R_k(\tau + t) d\tau \right) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2}, \quad t > 0.$$

Тогда вектор-функцию (26) можно переписать в виде

$$\int_0^t v(s) ds + \int_0^t R(t-s) v(s) ds =: y(t) \in D(A_0). \quad (27)$$

После интегрирования по частям в (27) получаем следующее интегральное уравнение:

$$(I + R(0)) \int_l^t v(s) ds + \int_l^t R'(t-s) \left(\int_l^s v(s) ds \right) ds = y(t), \quad y(t) \in C(\mathbb{R}_+, H_1), \quad (28)$$

где

$$R'(t) = -A_0^{-1/2} \left[\sum_{k=1}^N R_k(t) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2} = \sum_{k=1}^N R_k(t) A_0^{-1} A_k,$$

$$R(0) = A_0^{-1/2} \left[\sum_{k=1}^N M_k(0) Q_k^* Q_k \right] A_0^{1/2} = \sum_{k=1}^N M_k(0) A_0^{-1} A_k,$$

которое можно записать как

$$(I + R(0)) \int_0^t v(s) ds + \int_0^t R'(t-s) \left(\int_0^s v(p) dp \right) ds = y(t) - \Phi(t), \quad (29)$$

где

$$\Phi(t) := (I + R(0))(\varphi(0) - \varphi(l)) + \int_l^0 R'(t-s)(\varphi(s) - \varphi(l)) ds + \int_0^t R'(t-s)(\varphi(0) - \varphi(l)) ds,$$

$\Phi(t) \in D(A_0)$, так как заданная вектор-функция $A_0 \varphi(t) \in C([l, 0], H)$ по условию теоремы 2.

Введём вектор-функцию $w(t) := \int_0^t v(s) ds$, тогда уравнение (29) можно переписать в виде интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$(I + R(0))w(t) + \int_0^t R'(t-s)w(s) ds = y(t) - \Phi(t). \quad (30)$$

Покажем, что $R'(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(H_1))$. Действительно, для любого $z \in H_1$

$$\begin{aligned} \|R'(t)z\|_{H_1} &= \left\| \left[\sum_{k=1}^N R_k(t) A_k \right] A_0^{-1} (A_0 z) \right\|_H \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^N R_k(t) A_k A_0^{-1} \right\|_H \|z\|_{H_1} \leq \left[\left(\sum_{k=1}^N \|R_k(t)\|_H \|A_k A_0^{-1}\|_H \right) \right] \|z\|_{H_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $R'(t) \in \mathcal{B}(H_1)$ и $R'(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(H_1))$. Далее, из (30) получаем

$$w(t) = (I + R(0))^{-1} \left(y(t) - \Phi(t) - \int_0^t R'(t-s)w(s) ds \right) =: Lw(t),$$

где оператор $L: C(\mathbb{R}_+, H_1) \rightarrow C(\mathbb{R}_+, H_1)$. Покажем, что $\|L\|_{C(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(H_1))} < +\infty$.

Предложение 2. Для любых $w_1(t), w_2(t) \in H_1$ и для любого $T > 0$ при $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} \|Lw_1(t) - Lw_2(t)\|_{H_1} \leq \kappa \sup_{t \in [0, T]} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H_1},$$

где $\kappa = \sum_{k=1}^N (M_k(0) A_k) (A + B)^{-1} < +\infty$, функции $M_k(t)$ ($k = \overline{1, N}$) определяются формулами (4).

Доказательство. Действительно, для любых $w_1(t), w_2(t) \in H_1$ при $t > 0$ имеем

$$\|Lw_1(t) - Lw_2(t)\|_{H_1} = \left\| (I + R(0))^{-1} \int_0^t R'(t-s)(w_1(s) - w_2(s)) ds \right\|_{H_1}. \quad (31)$$

Далее для любого $z \in H_1$ получаем

$$\|(I + R(0))^{-1}z\|_{H_1} = \|A_0(I + R(0))^{-1}A_0^{-1}(A_0z)\|_H = \|(A_0(I + R(0))A_0^{-1})^{-1}(A_0z)\|_H.$$

Нетрудно проверить, используя определение оператора A_0 , что $A_0(I + R(0))A_0^{-1} = (A + B)A_0^{-1}$. Тогда

$$\|(A_0(I + R(0))A_0^{-1})^{-1}(A_0z)\|_H = \|A_0(A + B)^{-1}(A_0z)\|_H. \quad (32)$$

Подставляя в формулу (32) $z = \int_0^t R'(t-s)w(s) ds$, учитывая представление (31), для любого $T > 0$ будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|Lw_1(t) - Lw_2(t)\|_{H_1} &= \sup_{t \in [0, T]} \left\| A_0(A + B)^{-1}A_0 \int_0^t R'(t-s)(w_1(s) - w_2(s)) ds \right\|_H \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H_1} \left\| A_0(A + B)^{-1}A_0 \int_0^t R'(t-s)A_0^{-1} ds \right\|_H. \end{aligned} \quad (33)$$

Далее можно установить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \left\| A_0(A + B)^{-1}A_0 \int_0^t R'(t-s)A_0^{-1} ds \right\|_H &= \\ = \sup_{t \in [0, T]} \|A_0(A + B)^{-1}A_0(R(t) - R(0))A_0^{-1}\|_H &\leq \|A_0(A + B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}\|_H. \end{aligned} \quad (34)$$

Нетрудно проверить, используя определение оператора A_0 , что

$$\|A_0(A + B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}\|_H = \left\| \sum_{k=1}^N (M_k(0)A_k)(A + B)^{-1} \right\|_H < +\infty, \quad (35)$$

где операторы A_k определяются формулами (6). Действительно, справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} A_0(A + B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1} &= A_0(A + B)^{-1}A_0 \sum_{k=1}^N M_k(0)A_0^{-1}A_kA_0^{-1} = \\ &= A_0(A + B)^{-1} \sum_{k=1}^N M_k(0)A_kA_0^{-1} = A_0(A + B)^{-1}(A + B - A_0)A_0^{-1} = \\ &= A_0(A + B)^{-1}((A + B)A_0^{-1} - I) = I - A_0(A + B)^{-1} = \\ &= I - \left(A + B - \sum_{k=1}^N (M_k(0)A_k) \right) (A + B)^{-1} = \sum_{k=1}^N (M_k(0)A_k)(A + B)^{-1}. \end{aligned}$$

Из установленных оценок (33)–(35) получаем

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|Lw_1(t) - Lw_2(t)\|_{H_1} &\leq \|(M_1(0)A + M_2(0)B)(A + B)^{-1}\|_H \sup_{t \in [0, T]} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H_1} = \\ &= \kappa \sup_{t \in [0, T]} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H_1}, \end{aligned}$$

где $\kappa = \left\| \sum_{k=1}^N (M_k(0)A_k)(A + B)^{-1} \right\|_H < +\infty$, что завершает доказательство предложения 2.

Отсюда следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|L^n w_1(t) - L^n w_2(t)\|_{H_1} \leq \frac{\kappa^n T^n}{n!} \sup_{t \in [0, T]} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H_1}. \quad (36)$$

В неравенстве (36) значение n можно выбрать настолько большим, что $\kappa^n T^n / n! < 1$. Следовательно, $\|L^n\|_{C([0, T]; \mathcal{B}(H_1))} < 1$, т.е. отображение $L^n: C([0, T], H_1) \rightarrow C([0, T], H_1)$ является сжимающим и уравнение (30) имеет единственное решение $w(t) \in C([0, T], H_1)$. В силу произвольности выбора $T > 0$ отсюда получаем, что решение $w(t) \in C([0, +\infty), H_1)$. Таким образом,

$$\int_l^t v(s) ds = \int_l^0 v(s) ds + \int_0^t v(s) ds = \int_l^0 \varphi'(s) ds + w(t) = \varphi(0) - \varphi(l) + w(t) \in C([0, +\infty), H_1).$$

Рассмотрим первое уравнение системы (23) с учётом $\int_l^t v(s) ds \in C([0, +\infty), H_1)$. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} & -A_0^{1/2} \left[\xi_0(t) + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(t, \tau) d\tau \right] + f(t) - \sum_{k=1}^N M_k(t-l) A_k \varphi(l) = \\ & = -A_0^{1/2} \left[\int_l^t A_0^{1/2} v(s) ds + A_0^{1/2} \varphi_0 + \sum_{k=1}^N Q_k^* \int_0^{+\infty} \int_l^t R_k(\tau+t-s) Q_k A_0^{1/2} v(s) ds d\tau \right] + \\ & \quad + f(t) - \sum_{k=1}^N M_k(t-l) A_k \varphi(l) = \\ & = - \left[\int_l^t A_0 \frac{d}{ds} u(s) ds + A_0 \varphi_0 + \sum_{k=1}^N \int_0^{+\infty} \int_l^t R_k(\tau+t-s) A_k \frac{d}{ds} u(s) ds d\tau \right] + f(t) - \sum_{k=1}^N M_k(t-l) A_k \varphi(l) = \\ & = - \left[A_0 u(t) + \sum_{k=1}^N \int_l^t \left(\int_0^{+\infty} R_k(\tau+t-s) d\tau \right) A_k \frac{d}{ds} u(s) ds \right] + f(t) - \sum_{k=1}^N A_k \varphi(l) \int_{t-l}^{+\infty} R_k(s) ds = \\ & = -A_0 u(t) - \sum_{k=1}^N \left[\left(A_k u(s) \int_{t-s}^{+\infty} R_k(p) dp \right) \Big|_l^t - \int_l^t R_k(t-s) A_k u(s) ds \right] + f(t) - \sum_{k=1}^N A_k \varphi(l) \int_{t-l}^{+\infty} R_k(s) ds = \\ & = -A_0 u(t) + \sum_{k=1}^N \left[-A_k u(t) \int_0^{+\infty} R_k(p) dp + A_k u(l) \int_{t-l}^{+\infty} R_k(p) dp + \int_l^t R_k(t-s) A_k u(s) ds \right] + \\ & \quad + f(t) - \sum_{k=1}^N A_k \varphi(l) \int_{t-l}^{+\infty} R_k(s) ds = \\ & = \left(-1 + \sum_{k=1}^N \left(a_k \int_0^{+\infty} R_k(s) ds \right) \right) A u(t) + \left(-1 + \sum_{k=1}^N \left(b_k \int_0^{+\infty} R_k(s) ds \right) \right) B u(t) + \\ & \quad + \sum_{k=1}^N \left[-(a_k A + b_k B) u(t) \int_0^{+\infty} R_k(p) dp + \int_l^t R_k(t-s) (a_k A + b_k B) u(s) ds \right] + f(t) = \\ & = -(A + B) u(t) + \sum_{k=1}^N \int_l^t R_k(t-s) (a_k A + b_k B) u(s) ds + f(t). \end{aligned}$$

Таким образом, полученное уравнение совпадает с уравнением (1) при выполнении условий $u(+0) = \varphi_0$, $u'(+0) = \varphi_1$, $u(t) = \varphi(t)$, $t \in [l, 0]$, $-\infty \leq l \leq 0$, где $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = \varphi_1$. Следовательно, $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2). Более того, выполнение условий теоремы 2 обеспечивает выполнение условий теоремы 6 и тогда оценки (14), (15) следуют из оценок (21), (22), соответственно.

Замечание 3. Условие $A_0^{1/2} A_k \varphi_0 \in H$ эквивалентно условию $\varphi_0 \in H_{3/2}$.

Теорема 2 доказана.

Доказательства теорем 3, 4 проводятся аналогично доказательству теоремы 2.

5.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1

Условие (13) равносильно выполнению следующих условий:

$$A_0^{1/2} \varphi_0 + \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} Q_k^* \left(\int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right) d\tau \in D(A_0^{1/2}),$$

$$\int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \in \Omega_k, \quad \int_{-\infty}^0 R'_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \in \Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

По условию теоремы 4 $\varphi_0 \in H_1$ и $\varphi'(t) \in C((-\infty, 0], H_1)$. Отсюда, используя неравенство Гёльдера, получаем оценки

$$\begin{aligned} & \left\| A_0^{1/2} \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} Q_k^* \left(\int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right) d\tau \right\|_H \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) \left\| A_0^{1/2} Q_k^* Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H ds \right) d\tau \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 (R_k(\tau-s))^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^0 \left\| A_k \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \right)^{1/2} d\tau \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^N \left[\int_0^{\infty} \left(\int_{\tau}^{\infty} (R_k(\xi))^2 d\xi \right)^{1/2} d\tau \left(\int_{-\infty}^0 \left\| A_k \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \right)^{1/2} \right] \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^N \left[\left(\int_0^{\infty} \sqrt{R_k(\tau)} d\tau \right) \left(\int_0^{\infty} R_k(\xi) d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^0 \left\| A_k \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \right)^{1/2} \right] \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^N \left[\left(\int_0^{\infty} \sqrt{R_k(\tau)} d\tau \right) \sqrt{M_k(0)} \left(\int_{-\infty}^0 \left\| A_k \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

поскольку $A_0^{1/2} Q_k^* Q_k A_0^{1/2} = A_k$ и $M_k(0)$ определяется формулой (4). Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_{\Omega_k}^2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left\| \int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_H^2 d\tau \leq \\ & \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left(\int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) \left\| A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H ds \right)^2 d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left(\int_{-\infty}^0 (R_k(\tau-s))^2 ds \right) d\tau \int_{-\infty}^0 \left\| A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left(\int_{\tau}^{+\infty} (R_k(\xi))^2 d\xi \right) d\tau \int_{-\infty}^0 \left\| A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \sqrt{R_k(\tau)} \left(\int_{\tau}^{+\infty} \sqrt{R_k(\xi)} d\xi \right) d\tau \int_{-\infty}^0 \left\| A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \leq \left(\int_0^{+\infty} \sqrt{R_k(\tau)} d\tau \right)^2 \int_{-\infty}^0 \left\| A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds,
\end{aligned}$$

так как $Q_k A_0^{1/2} = A_k^{1/2}$;

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{-\infty}^0 R'_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_{\Omega_k}^2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left\| \int_{-\infty}^0 R'_k(\tau-s) A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_H^2 d\tau \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left(\int_{-\infty}^0 R'_k(\tau-s) \left\| A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H ds \right)^2 d\tau \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left(\int_{-\infty}^0 (R'_k(\tau-s))^2 ds \right) d\tau \int_{-\infty}^0 \left\| A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{R_k(\tau)} \left(\int_{\tau}^{+\infty} (R'_k(\xi))^2 d\xi \right) d\tau \int_{-\infty}^0 \left\| A_k^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds.
\end{aligned}$$

Таким образом, условия (16), (17) являются достаточными для выполнения условия (13). Предложение 1 доказано.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект 23-Ш05-17) (теоремы 2, 3) и при частичной финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 (теорема 4, предложение 1).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин, А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. — М. : Наука, 1970. — 280 с.
2. Christensen, R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction / R.M. Christensen — New York ; London : Academic Press, 1971. — 245 p.
3. Георгиевский, Д.В. Модели теории вязкоупругости / Д.В. Георгиевский. — М. : Ленанд, 2023. — 144 с.
4. Amendola, G. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications / G. Amendola, M. Fabrizio, J.M. Golden. — New York ; Dordrecht ; Heidelberg ; London : Springer, 2012. — 576 p.
5. Gurtin, M.E., General theory of heat conduction with finite wave speed / M.E. Gurtin, A.C. Pipkin // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — V. 31. — P. 113–126.

6. Власов, В.В. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М. : МАКС Пресс, 2016. — 488 с.
7. Ivanov, S. Heat equations with memory: lack of controllability to the rest / S. Ivanov, L. Pandolfi // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — V. 355, № 1. — P. 1–11.
8. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.
9. Паленсия, Э.С. Неоднородные среды и теория колебаний / Э.С. Паленсия ; пер. В.В. Жиков ; ред. О.А. Олейник. — М. : Мир, 1984. — 472 с.
10. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. — М. : Наука, 1977. — 384 с.
11. Власов, В.В. О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стильеса / В.В. Власов, Н.А. Раутиан // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 4. — С. 536–551.
12. Vlasov, V.V. Investigation of integro-differential equations by methods of spectral theory / V.V. Vlasov, N.A. Rautian // J. Math. Sci. — 2024. — V. 278, № 1. — P. 55–81.
13. Раутиан, Н.А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / Н.А. Раутиан // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 9. — С. 1226–1244.
14. Раутиан, Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стильеса / Н.А. Раутиан // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1255–1272.
15. Раутиан, Н.А. Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / Н.А. Раутиан // Уфимский мат. журн. — 2021. — Т. 13, № 4. — С. 65–81.
16. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като ; пер. с англ. Г.А. Воропаевой и др. ; под ред. В.П. Маслова. — М. : Мир, 1972. — 740 с.
17. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.
18. Engel, K.J. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K.J. Engel, R. Nagel. — New York : Springer-Verlag, 2000. — 589 p.

CORRECT SOLVABILITY OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ARISING IN VISCOELASTICITY THEORY

D. V. Georgievskii¹, N. A. Rautian²

^{1,2}*Lomonosov Moscow State University, Russia*

^{1,2}*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Russia*

e-mail: ¹*georgiev@mech.math.msu.su*, ²*nadezhda.rautian@math.msu.ru*

We discuss the issues of correct solvability and exponential stability of solutions of abstract integro-differential equations with kernels of integral operators of general type from the space of functions integrable on the positive semiaxis. The abstract integro-differential equations are studied in this paper are operator models of viscoelasticity theory problems. The proposed approach to the study of these integro-differential equations is related to the application of the semigroups theory and can also be used to study other integro-differential equations containing integral terms of Volterra convolution type.

Keywords: Volterra integro-differential equation, linear differential equation, Hilbert space, operator semigroup, viscoelasticity.

FUNDING

This work was carried out with support of MSU Program of Development (project no. 23-SCH05-17) (Theorems 2, 3), and with the partial financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284 (Theorem 4, Statement 1).

REFERENCES

1. Il'yushin, A.A. and Pobedrya, B.E., *Osnovy matematicheskoi teorii termov'yazkoupругosti* (Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity), Moscow: Nauka, 1970.
2. Christensen, R.M., *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*, New York–London: Academic Press, 1971.
3. Georgievskii, D.V., *Modeli teorii v'yazkoupругosti* (Models of viscoelasticity theory), Moscow: Lenand, 2023.
4. Amendola, G., Fabrizio, M., and Golden, J.M., *Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications*, New York–Dordrecht–Heidelberg–London: Springer, 2012.
5. Gurtin, M.E. and Pipkin, A.C., General theory of heat conduction with finite wave speed, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1968, vol. 31, pp. 113–126.
6. Vlasov, V.V. and Rautian, N.A., *Spektral'nyi analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Spectral Analysis of Functional Differential Equations), Moscow: MAKSS Press, 2016.
7. Ivanov, S. and Pandolfi, L., Heat equations with memory: lack of controllability to the rest, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, vol. 355, pp. 1–11.
8. Lykov, A.V. *Teoriya teploprovodnosti* (Thermal Conduction Theory), Moscow: Vysshaya shkola, 1967.
9. Sanchez-Palencia, E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1980.
10. Rabotnov, Yu.N., *Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel* (Elements of Hereditary Mechanics of Solids), Moscow: Nauka, 1977.
11. Vlasov, V.V. and Rautian, N.A., On Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 517–532.
12. Vlasov, V.V. and Rautian N.A., Investigation of integro-differential equations by methods of spectral theory, *J. Math. Sci.*, 2024, vol. 278, no 1. pp. 55–81.
13. Rautian, N.A., Semigroups generated by Volterra integro-differential equations, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 9, pp. 1193–1211.
14. Rautian, N.A., On the properties of semigroups generated by Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 9, pp. 1231–1248.
15. Rautian N.A., Exponential stability of semigroups generated by Volterra integro-differential equations, *Ufa Math. J.*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 65–81.
16. Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Berlin: Springer, 1966.
17. Krein, S.G., *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Boston: Birkhauser, 1982.
18. Engel, K.J. and Nagel, R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, New York: Springer-Verlag, 2000.

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПРИ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯХ

А. В. Ильин¹, А. С. Фурсов²

^{1,2}Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай

^{1,2}Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

¹Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, г. Москва

²Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, г. Москва

e-mail: ¹iline@cs.msu.ru, ²fursov@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 02.03.2024 г., после доработки 02.03.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Построен цифровой регулятор, стабилизирующий непрерывную переключаемую линейную систему с соизмеримыми запаздываниями в управлении при медленных переключениях. Стабилизация последовательно включает в себя построение переключаемой непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором; переход к её дискретной модели, представимой в виде переключаемой системы с режимами различных порядков; одновременную стабилизацию подсистем полученной дискретной модели и расчёт времени задержки, обеспечивающего устойчивость исходной переключаемой системы, замкнутой найденным регулятором.

Ключевые слова: стабилизация, цифровой регулятор, переключаемая система, запаздывание.

DOI: 10.31857/S0374064124040093, EDN: OXECBS

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена проблеме стабилизации переключаемых линейных систем с запаздываниями в управлении в случае, когда переключающие сигналы, определяющие активный режим системы в каждый момент времени, являются, во-первых, не наблюдаемыми, т.е. не доступными для измерения, и, во-вторых, имеют ограничение снизу на время между соседними переключениями. Фактически данная статья является непосредственным продолжением работ [1, 2], также посвящённых этой тематике.

В статье [1] исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. При этом предполагалось, что запаздывание одинаковое для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу. В результате для её решения был предложен алгоритм, включающий два основных шага: переход от исходной непрерывной системы к её точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Одним из важных предположений, при котором решалась указанная задача, являлось условие синхронности моментов переключений стабилизируемой системы с моментами времени работы дискретного регулятора.

В работе [2] приведённая задача стабилизации обобщена на случай, когда режимы переключаемой системы имеют различные запаздывания в управлении. Тогда методика, изложен-

ная в [1], приводит к задаче стабилизации переключаемой дискретной системы с режимами различных динамических порядков, для решения которой в [2] было предложено использовать метод расширения динамического порядка, позволяющий перейти к переключаемой системе с режимами единого порядка и далее, на основе метода функций Ляпунова, свести задачу поиска стабилизирующего регулятора к задаче разрешимости системы линейных матричных неравенств. Дискретный регулятор, полученный в результате применения указанной методики, обеспечивает стабилизацию исходной системы при произвольных переключениях рассматриваемого типа.

Ниже рассматривается та же задача стабилизации переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями в управлении, что и в работе [2], с той лишь разницей, что переключающие сигналы теперь имеют ограничения на величину промежутков (времени задержки) между двумя соседними переключениями, т.е. фактически рассматривается переключаемая система с медленными переключениями. Как и в работе [2], с помощью метода точной дискретизации данная система приводится к переключаемой дискретной системе с режимами различных динамических порядков, но затем для поиска стабилизирующего регулятора используется иной подход, основанный на методе одновременной стабилизации конечного семейства динамических порядков с последующей оценкой времени задержки для переключающих сигналов, обеспечивающего устойчивость соответствующей замкнутой системы.

Итак, рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t - \theta_\sigma), \quad y(t) = c_\sigma x(t), \quad \sigma \in S_{\mu, \gamma}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал); $S_{\mu, \gamma}$ — множество переключающих сигналов σ , точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, γ — некоторое положительное число, а $l = 0, 1, 2, \dots$, при этом время между любыми двумя соседними переключениями не меньше $\tau = \mu\gamma$ ($\mu \in \mathbb{N}$); $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ — измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ — композиция отображения $A: I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ ; $b_\sigma = b \circ \sigma$, $c_\sigma = c \circ \sigma$ и $\theta_\sigma = \theta \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $b: I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$, $c: I \rightarrow \{c_1, \dots, c_m\}$ и $\theta: I \rightarrow \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$. Здесь $\theta_i > 0$ — величины постоянных запаздываний, причём θ_i/γ и θ_i/θ_j — рациональные числа для любых $i, j \in I$ и $\theta_i < \mu\gamma$ для всех $i \in I$. Далее считаем, что переключающий сигнал $\sigma(t)$ не доступен для измерения в процессе функционирования системы (1).

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим (c_i, A_i, b_i) переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t - \theta_i), \quad y(t) = c_i x(t), \quad i \in I.$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$), начальном условии $x(0) = x_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_{\mu, \gamma}$ является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + b_{\sigma(t)} u(t - \theta_{\sigma(t)}), \quad x(0) = x_0.$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ

Построение цифрового алгоритма управления для переключаемой линейной системы (1) предполагает построение соответствующей непрерывно-дискретной системы, включающей цифровой регулятор. Такая система описывается с помощью дифференциально-разностных уравнений. Приведём эти уравнения в явном виде.

Цифровой регулятор для непрерывной системы представляется в виде последовательного соединения трёх звеньев: идеального квантователя (модель аналого-цифрового преобразователя), преобразующего аналоговый сигнал $y(t)$ в дискретную (решётчатую) функцию $y[lT] = y(lT)$ ($T > 0$, $l = 0, 1, \dots$); дискретного регулятора (алгоритм работы для цифрового вычислительного устройства)

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], & v \in \mathbb{R}^r, \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], & v[0] = v_0, \end{cases} \quad (2)$$

и формирующего элемента (модель цифро-аналогового преобразователя)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor t/T \rfloor} u[jT]S(t-jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь T — период квантования по времени t (считаем, что $T < \gamma$); $[\cdot]$ — целая часть действительного числа; $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $q \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{1 \times r}$, $h \in \mathbb{R}$ (r — порядок регулятора); $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определённые на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{+\infty}$; формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [3, с. 25].

Замыкая систему (1) регулятором (2), (3), получаем замкнутую непрерывно-дискретную (дифференциально-разностную) систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t - \theta_\sigma), & x(0) &= x_0, \\ v[(l+1)T] &= Qv[lT] + qc_\sigma x(lT), & v[0] &= v_0, \end{aligned} \quad \sigma(t) \in S_{\mu, \gamma}, \quad (4)$$

где управляющая функция u описывается следующим образом:

$$u(t - \theta_\sigma) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\lfloor (t - \theta_\sigma)/T \rfloor} (Hv[lT] + hc_\sigma x(lT))S(t - \theta_\sigma - mT), & \text{если } t \geq \theta_\sigma, \\ 0, & \text{если } 0 \leq t < \theta_\sigma. \end{cases}$$

Система (4) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы ($l = \lfloor t/T \rfloor$), т.е.

$$lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots$$

По аналогии с уравнением состояния системы (1) решением уравнения состояния системы (4) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$), начальных условиях $x(0) = x_0$, $v[0] = v_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_{\mu, \gamma}$ будем считать решение линейной нестационарной дифференциально-разностной системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}u(t - \theta_{\sigma(t)}), \quad v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_{\sigma(t)}x(lT), \quad lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots$$

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (4) будем называть *равномерно устойчивой*, а регулятор (2), (3) *стабилизирующим*, если для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_{\mu, \gamma}$ для соответствующего решения выполнено условие

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ v[lT] \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad l = \lfloor t/T \rfloor.$$

Здесь под нормой вектора понимается евклидова норма.

Теперь приведём точную постановку задачи стабилизации.

Задача стабилизации. Для переключаемой линейной системы (1) с заданными $\gamma > 0$ и $\mu \in \mathbb{N}$ построить цифровой регулятор вида (2), (3), обеспечивающий равномерную устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы (4).

Задачу построения цифрового стабилизатора для непрерывно-дискретной системы (4) сведём к задаче построения дискретного стабилизатора для соответствующей дискретной модели. При этом необходимо обеспечить выполнение условий согласованности, гарантирующих эквивалентность свойства устойчивости замкнутой непрерывно-дискретной системы (4) и её дискретной модели, замкнутой тем же регулятором.

2. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Для решения сформулированной задачи стабилизации перейдём от непрерывно-дискретной системы (4) к её дискретной модели. Для этого воспользуемся методом точной дискретизации [3, с. 81; 4, с. 40], в соответствии с которым вначале строится дискретная модель для исходной системы (1), а затем она замыкается дискретным регулятором (2).

Выберем константы $l_0 \in \mathbb{N}$ и $T > 0$ так, чтобы, во-первых, выполнялось равенство $\gamma = l_0 T$, во-вторых, нашлись бы константы $l_i \in \mathbb{N}$ ($i \in I$), для которых $\theta_i = l_i T$ (это всегда можно сделать в силу соизмеримости запаздываний).

Отметим, что если $\sigma(t) \in S_{\mu, \gamma}$, то на решения системы (4) влияют значения переключающего сигнала только в моменты $t = lT$ ($l = 0, 1, \dots$). Поэтому в качестве переключающих сигналов для дискретной модели переключаемой системы (4) будем в дальнейшем рассматривать соответствующие решётчатые функции $\sigma[lT]$ ($T > 0$, $l = 0, 1, \dots$), а множество таких функций обозначать как $[S]_{\mu, \gamma}$. Обозначим через $x[lT]$ решётчатую вектор-функцию для вектора состояния $x(t)$ системы (1).

Итак, пусть в момент времени $t = lT$ вектор состояния системы (1) равен $x[lT]$ и $\sigma[lT] = i$. Тогда, используя формулу Коши для решений линейной стационарной неоднородной системы, имеем

$$x[(l+1)T] = e^{A_i T} x[lT] + \int_{lT}^{(l+1)T} e^{A_i((l+1)T-\xi)} b_i u(\xi - \theta_i) d\xi.$$

Поскольку на входе непрерывной системы (1) действует фиксатор нулевого порядка, то $u(t - \theta_i) \equiv u[(l - l_i)T]$ для всех $t \in [lT, (l+1)T]$. Следовательно,

$$x[(l+1)T] = e^{A_i T} x[lT] + b_i u[(l - l_i)T] \int_{lT}^{(l+1)T} e^{A_i((l+1)T-\xi)} d\xi.$$

Выполнив под интегралом замену переменной $\mu = \xi - lT$, получим

$$x[(l+1)T] = e^{A_i T} x[lT] + b_i u[(l - l_i)T] \int_0^T e^{A_i(T-\mu)} d\mu.$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= e^{A_i T}, \quad \hat{b}_i = b_i \int_0^T e^{A_i(T-\mu)} d\mu, \\ x_{n+1}[lT] &= u[(l-1)T], \quad x_{n+2}[lT] = u[(l-2)T], \quad \dots, \quad x_{n+l_i}[lT] = u[(l-l_i)T]. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_{n+1}[(l+1)T] &= u[lT], \quad x_{n+2}[(l+1)T] = x_{n+1}[lT], \\ x_{n+3}[(l+1)T] &= x_{n+2}[lT], \quad \dots, \quad x_{n+l_i}[(l+1)T] = x_{n+l_i-1}[lT]. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя введённые обозначения и учитывая, что $\sigma \in S_{\mu, \gamma}$, получаем дискретную модель i -го режима системы (1) в следующем виде:

$$x^{(i)}[(l+1)T] = \bar{A}_i x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i u[lT], \quad y[lT] = \bar{c}_i x^{(i)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{\mu, \gamma}, \quad (7)$$

где

$$x^{(i)}[lT] = (x_1[lT] \quad \dots \quad x_n[lT] \quad x_{n+1}[lT] \quad \dots \quad x_{n+l_i}[lT])^T$$

— расширенный вектор состояния дискретной модели i -го режима системы (1),

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} \hat{A}_i & O_{n \times (l_i-1)} & \hat{b}_i \\ O_{1 \times n} & O_{1 \times (l_i-1)} & 0 \\ O_{(l_i-1) \times n} & E_{(l_i-1) \times (l_i-1)} & O_{(l_i-1) \times 1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_i = \begin{pmatrix} O_{n \times 1} \\ 1 \\ O_{(l_i-1) \times 1} \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_i = (c_i \quad O_{1 \times l_i}) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+l_i)}$$

— блочные матрица и векторы, O и E — нулевая и единичная матрицы соответствующих размерностей.

Таким образом, получаем дискретную модель системы (1) в виде переключаемой дискретной системы вида

$$x^{(\sigma)}[(l+1)T] = \bar{A}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + \bar{b}_\sigma u[lT], \quad y[lT] = \bar{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{\mu, \gamma}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Теперь заметим, что режимы (7) построенной переключаемой дискретной системы (8) уже не содержат запаздываний, однако имеют различные динамические порядки, поскольку $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n+l_i}$ для каждого $i \in I$. В связи с этим, для того чтобы определить решение уравнения состояния полученной переключаемой системы, необходимо решить вопрос о согласовании начальных условий для уравнений состояния различных режимов при переключениях между ними.

Итак, пусть в момент времени $\tilde{l}T$ режим j переключаемой системы (8) сменяется режимом i , причём $\theta_j \neq \theta_i$. Тогда, учитывая (5) и (6), зададим начальное значение для вектора состояния $x^{(i)}$ i -го режима в момент $\tilde{l}T$ следующим образом:

$$x^{(i)}[\tilde{l}T] = (x_1[\tilde{l}T] \quad \dots \quad x_n[\tilde{l}T] \quad u[(\tilde{l}-1)T] \quad \dots \quad u[(\tilde{l}-l_i)T])^T, \quad (9)$$

где $x_1[\tilde{l}T], \dots, x_n[\tilde{l}T]$ — значения первых n компонент вектора состояния $x^{(j)}$ j -го режима в момент времени $\tilde{l}T$.

Решением уравнения состояния переключаемой системы (8) при заданном управлении u , переключающем сигнале $\sigma \in [S]_{\mu, \gamma}$ и начальном условии $x^{(\sigma[0])}[0] \in \mathbb{R}^{n+l_\sigma}$ будем называть дискретную вектор-функцию $\tilde{x}[lT] \in \mathbb{R}^{n+p}$ ($p = \max_i \{l_i\}$), совпадающую на каждом промежутке активности i -го режима ($i \in I$) с вектор-функцией $\tilde{x}^{(i)}[lT] \in \mathbb{R}^{n+p}$. При этом вектор-функция

$$\tilde{x}^{(i)}[lT] = (x_1[lT] \quad \dots \quad x_n[lT] \quad x_{n+1}[lT] \quad x_{n+l_i}[lT] \quad \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{p-l_i})^T \in \mathbb{R}^{n+p}$$

порождается решением уравнения состояния i -го режима (7) на соответствующем промежутке активности $[\tilde{l}T, \hat{l}T]$ этого режима с начальными условиями (9). Учитывая указанные выше определения, в дальнейшем, если в момент времени $\tilde{l}T$ режим j переключаемой системы (8) сменяется режимом i , под $\tilde{x}[\tilde{l}T_-]$ будем понимать значение $\tilde{x}^{(j)}[lT]$, а под $\tilde{x}[\tilde{l}T]$ — значение $\tilde{x}^{(i)}[lT]$.

При введённом выше согласовании начальных условий в моменты переключений системы (8) выполняется свойство точной дискретизации [3, с. 81]

$$x(t)|_{t=lT} = \bar{x}[lT] = (x_1[lT] \quad \dots \quad x_n[lT])^T, \quad l = 0, 1, \dots,$$

где $x(t)$ — решение уравнения состояния непрерывной системы (1) при фиксированном управлении u и заданных $\sigma \in S_{\mu,\gamma}$, $x(0) \in \mathbb{R}^n$, а $\bar{x}[lT]$ — вектор, образованный первыми n компонентами вектора $\tilde{x}[lT]$ решения соответствующей дискретной системы (8) при согласованных начальных условиях

$$x^{\sigma[0]}[0] = \begin{pmatrix} x_1^{(\sigma[0])}[0] \\ \dots \\ x_n^{(\sigma[0])}[0] \\ x_{n+1}^{(\sigma[0])}[0] \\ \dots \\ x_{n+l_{\sigma(0)}}^{(\sigma[0])}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \dots \\ x_n(0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Замыкая систему (8) регулятором (2), получаем дискретную модель замкнутой непрерывно-дискретной системы (4):

$$\begin{aligned} x^{(\sigma)}[(l+1)T] &= (\bar{A}_\sigma + \bar{b}_\sigma h \bar{c}_\sigma) x^{(\sigma)}[lT] + \bar{b}_\sigma H v[lT], \\ v[(l+1)T] &= q \bar{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + Q v[lT], \end{aligned} \quad \sigma \in [S]_{\mu,\gamma}. \quad (11)$$

Решением системы (11) считаем вектор $\hat{x}[lT] = (\tilde{x}[lT] \quad v[lT])^T$. Замкнутую дискретную переключаемую систему (11) будем называть *равномерно устойчивой*, если при любых начальных условиях $x^{\sigma[0]}[0]$ вида (10), $v[0]$ и $\sigma \in [S]_{\mu,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено

$$\|\hat{x}[lT]\| \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty.$$

На основании результатов работы [1] сформулируем теорему о согласованности свойства устойчивости систем (4) и (11).

Теорема 1. Пусть переключаемая дискретная система (11) равномерно устойчива, тогда непрерывно-дискретная система (4) также равномерно устойчива.

Таким образом, поставленная в п. 1 задача стабилизации, в соответствии с теоремой 1, может быть сведена к задаче стабилизации по выходу дискретной системы (8) дискретным регулятором (2).

3. ОДНОВРЕМЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И РАСЧЁТ ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ

Как известно, регулятор, стабилизирующий переключаемую систему, должен стабилизировать каждый режим этой системы в отдельности. Поскольку рассматриваемая задача стабилизации переключаемой системы (1) предполагает неизмеряемость переключающего сигнала $\sigma(t)$, то, учитывая рассуждения п. 2, синтез соответствующего цифрового регулятора фактически можно свести к задаче об одновременной стабилизации конечного семейства дискретных объектов

$$x^{(i)}[(l+1)T] = \bar{A}_i x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i u[lT], \quad y[lT] = \bar{c}_i x^{(i)}[lT], \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

единым регулятором вида (2).

Для решения задачи об одновременной стабилизации конечного семейства дискретных объектов (12) перейдём к их описанию через передаточные функции

$$\bar{W}_i(z) = \bar{c}_i(zI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{b}_i = \frac{\bar{\beta}_i(z)}{\bar{\alpha}_i(z)} = \frac{b_{n_i+l_i-1,i} z^{n_i+l_i-1} + \dots + b_{1,i} z + b_{0,i}}{z^{n_i+l_i} + a_{n_i+l_i-1,i} z^{n_i+l_i-1} + \dots + a_{1,i} z + a_{0,i}}. \quad (13)$$

Теперь для построения единого регулятора, стабилизирующего объекты семейства (13), можно воспользоваться методами одновременной стабилизации, изложенными в монографии [5, с. 115]. Эти методы позволяют построить единый дискретный регулятор (в случае его существования) в виде передаточной функции

$$R^*(z) = \frac{p^*(z)}{g^*(z)} = \frac{p_r z^r + p_{r-1} z^{r-1} + \dots + p_1 z + p_0}{z^r + g_{r-1} z^{r-1} + \dots + g_1 z + g_0}. \quad (14)$$

Далее, в соответствии с методами теории реализации [6, с. 127], переходим от описания регулятора в виде передаточной функции (14) к описанию в пространстве состояний вида (2).

Построенный дискретный регулятор стабилизирует каждый режим переключаемой системы (7), т.е. обеспечивает для всех $i = \overline{1, m}$ асимптотическую устойчивость замкнутых систем

$$\begin{aligned} x^{(i)}[(l+1)T] &= (\bar{A}_i + \bar{b}_i h \bar{c}_i) x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i H v[lT], \\ v[(l+1)T] &= q \bar{c}_i x^{(i)}[lT] + Q v[lT]. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь необходимо определить значение времени задержки $\tau = \mu\gamma$, при котором найденный регулятор обеспечивает $[S]_{\mu, \gamma}$ -устойчивость переключаемой дискретной системы (11). Для удобства дальнейших рассуждений перепишем систему (15) в виде

$$\bar{x}^{(i)}[(l+1)T] = \tilde{A}_i \bar{x}^{(i)}[lT], \quad i = \overline{1, m}, \quad \bar{x}^{(i)} = (x^{(i)} \quad v)^T. \quad (16)$$

Используем процедуру, аналогичную предложенной в работе [7] для непрерывного случая. Для каждой дискретной устойчивой системы (16) ($i = \overline{1, m}$) рассмотрим дискретное матричное уравнение Ляпунова

$$\tilde{A}_i P_i \tilde{A}_i^T - P_i = -R_i \quad (17)$$

с некоторой положительно определённой матрицей R_i . Известно [8, с. 59], что если матрицы $\tilde{A}_i$ шуровские (все собственные значения лежат внутри единичного круга), то уравнения (17) для каждого $i = \overline{1, m}$ имеют положительно определённые решения P_i , при этом функции $V_i = \tilde{x}^T P_i \tilde{x}$ являются дискретными функциями Ляпунова для систем (16). Тогда, в соответствии с [8, с. 60], для решений этих систем верны следующие оценки:

$$\|\bar{x}^{(i)}[lT]\| \leq C_i \|\bar{x}^{(i)}[mT]\| \rho_i^{l-m}, \quad (18)$$

где

$$C_i = \sqrt{M_i/m_i}, \quad \rho_i = \sqrt{1 - r_i/M_i},$$

m_i и M_i — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы P_i , а r_i — минимальное собственное значение матрицы R_i (из [8, с. 62] следует, что $r_i < M_i$); через $\bar{x}^{(i)}$ обозначены векторы состояния соответствующих систем (16).

Обозначим $C_* = \max\{C_1, \dots, C_m\}$ ($C_* \geq 1$), $\rho_0 = \max\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ ($0 < \rho_0 < 1$). Теперь можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть регулятор (2) является единым стабилизатором для семейства дискретных объектов (12), R_i ($i = \overline{1, m}$) — некоторые положительно определённые матрицы порядка n , а P_i ($i = \overline{1, m}$) — соответствующие положительно определённые решения матричных уравнений Ляпунова (17). Пусть для матриц R_i и P_i вычислены значения C_* и ρ_0 .

Тогда регулятор (2) является стабилизирующим для дискретной переключаемой линейной системы (8), для которой

$$\mu > \frac{p - \log_{\rho_0} C_0^2}{l_0}, \quad (19)$$

где $C_0 = C_*^2(1 + (p - k) \max_{\bar{c}_i} \{\|H\| + \|h\bar{c}_i\|\})$, $p = \max_i \{l_i\}$, $k = \min_i \{l_i\}$.

Доказательство. Пусть для замкнутой системы (11) выполнено условие (19). Зафиксируем произвольный переключающий сигнал $\sigma_*[lT] \in [S]_{\mu, \gamma}$ и соответствующее произвольное начальное условие $x^{\sigma_*[0]}(0)$. Пусть $\{m_j T\}$, $j \in \mathbb{N}$, — последовательность моментов переключений, задаваемых сигналом $\sigma_*[lT]$ (считаем, что $m_0 = 0$).

Рассмотрим два произвольных последовательных момента переключений $m_j T$ и $m_{j+1} T$. Оценим теперь норму $\|\hat{x}[m_{j+1} T]\|$ через норму $\|\hat{x}[m_j T]\|$ в предположении, что значения $\sigma_*[m_j T]$ и $\sigma_*[m_{j+1} T]$ неизвестны.

Учитывая определение решения системы (11), имеем

$$\|\hat{x}[m_{j+1} T]\| \leq \|\hat{x}[m_{j+1} T_-]\| + |u[(m_{j+1} - (k+1))T]| + \dots + |u[(m_{j+1} - p)T]|. \quad (20)$$

Поскольку $u[lT] = Hv[lT] + hc_\sigma x^{(\sigma)}[lT]$, то

$$\begin{aligned} |u[(m_{j+1} - (k+1))T]| &\leq \max_{\bar{c}_i} \{\|H\| + \|h\bar{c}_i\|\} \|\hat{x}[(m_{j+1} - (k+1))T]\|, \quad \dots \\ \dots, \quad |u[(m_{j+1} - p)T]| &\leq \max_{\bar{c}_i} \{\|H\| + \|h\bar{c}_i\|\} \|\hat{x}[(m_{j+1} - p)T]\|. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу (18) справедливы неравенства

$$\|\hat{x}[m_{j+1} T_-]\| \leq C_* \rho_0^p \|\hat{x}[(m_{j+1} - p)T]\| \leq C_* \|\hat{x}[(m_{j+1} - p)T]\| \quad (22)$$

и

$$\|\hat{x}[(m_{j+1} - s)T]\| \leq C_* \rho_0^{p-s} \|\hat{x}[(m_{j+1} - p)T]\| \quad (23)$$

при $s \in [k+1, p-1]$. Из (20)–(23) получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{x}[m_{j+1} T]\| &\leq \|\hat{x}[m_{j+1} T_-]\| + (p - k) C_* \max_{\bar{c}_i} \{\|H\| + \|h\bar{c}_i\|\} \|\hat{x}[(m_{j+1} - p)T]\| \leq \\ &\leq C_* (1 + (p - k) \max_{\bar{c}_i} \{\|H\| + \|h\bar{c}_i\|\}) \|\hat{x}[(m_{j+1} - p)T]\|. \end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$m_{j+1} - m_j \geq \mu l_0 > p, \quad (24)$$

то

$$\|\hat{x}[m_{j+1} T]\| \leq C_* (1 + (p - k) \max_{\bar{c}_i} \{\|H\| + \|h\bar{c}_i\|\}) C_* \|\hat{x}[m_j T]\| \rho_0^{m_{j+1} - m_j - p}.$$

Обозначив

$$m_{j+1}^* = m_{j+1} - m_j - p,$$

получим неравенство

$$\|\hat{x}[m_{j+1} T]\| \leq C_0 \|\hat{x}[m_j T]\| \rho_0^{m_{j+1}^*},$$

откуда следует, что для любого $j \in \mathbb{N}$ верна цепочка неравенств

$$\|\hat{x}[m_j T]\| \leq C_0 \|\hat{x}[m_{j-1} T]\| \rho_0^{m_j^*} \leq C_0^2 \|\hat{x}[m_{j-2} T]\| \rho_0^{m_{j-1}^* + m_j^*} \leq C_0^j \|\hat{x}[m_0 T]\| \rho_0^{m_1^* + m_2^* + \dots + m_j^*}. \quad (25)$$

Так как $m_1^* + m_2^* + \dots + m_j^* = m_j - jp$ и $m_0 = 0$, то из (25) имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{x}[m_j T]\| &\leq C_0^j \|\hat{x}[0]\| \rho_0^{m_j - jp} = \left(\frac{C_0}{\rho_0^p}\right)^j \|\hat{x}[0]\| \rho_0^{m_j} = \left(\frac{C_0}{\rho_0^p}\right)^j \rho_0^{j\mu l_0} \|\hat{x}[0]\| \rho_0^{m_j - j\mu l_0} = \\ &= (C_0 \rho_0^{\mu l_0 - p})^j \|\hat{x}[0]\| \rho_0^{m_j - j\mu l_0}. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее, в силу (24) справедливы неравенства

$$m_j > m_{j-1} + \mu l_0 > m_{j-2} + 2\mu l_0 > \dots > m_0 + j\mu l_0 = j\mu l_0,$$

поэтому

$$\rho_0^{m_j - j\mu l_0} < 1. \quad (27)$$

Поскольку из условия теоремы следует, что

$$\mu > \frac{p - \log_{\rho_0} C_0^2}{l_0} > \frac{p - \log_{\rho_0} C_0}{l_0},$$

то

$$\mu l_0 - p + \log_{\rho_0} C_0 > 0,$$

а значит,

$$\log_{\rho_0} (C_0 \rho_0^{\mu l_0 - p}) > 0$$

и

$$C_0 \rho_0^{\mu l_0 - p} < 1. \quad (28)$$

Тогда из (26)–(28) получаем

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\hat{x}[m_j T]\| = 0. \quad (29)$$

Теперь для каждого промежутка $[m_{j+1}T, m_{j+2}T)$, $j \in \mathbb{N}$, рассмотрим величину

$$h_{j+1} = \max_{lT \in [m_{j+1}T, m_{j+2}T)} \{\|\hat{x}[lT]\|\}.$$

Из (18) следует, что

$$h_{j+1} \leq C_* \|\hat{x}[m_{j+1}T]\| \rho^\eta$$

для некоторого $\eta \geq 0$. Отсюда и из (24) имеем

$$h_{j+1} \leq C_* \|\hat{x}[m_{j+1}T]\| \leq C_0 \|\hat{x}[m_{j+1}T]\| \leq C_0^2 \|\hat{x}[m_j T]\| \rho_0^{m_{j+1}^*} \leq C_0^2 \|\hat{x}[m_j T]\| \rho_0^{\mu l_0 - p}. \quad (30)$$

Так как из условия теоремы вытекает, что

$$\mu l_0 - p + \log_{\rho_0} C_0^2 > 0,$$

то

$$C_0^2 \rho_0^{\mu l_0 - p} < 1.$$

Тогда из (30) получаем

$$h_{j+1} \leq \|\hat{x}[m_j T]\|,$$

откуда, учитывая (29), находим

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} h_{j+1} = 0.$$

Таким образом, для рассматриваемого решения $\hat{x}[lT]$ справедливо равенство

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \|\hat{x}[lT]\| = 0.$$

Следовательно, замкнутая система (11) равномерно устойчива. Теорема доказана.

4. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО РЕГУЛЯТОРА

На основании теоремы 2 можно предложить следующую процедуру построения стабилизирующего регулятора для системы (8).

1. Используя известные методы [5, с. 115] поиска одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства дискретных систем (13) на основе интервального анализа [9, с. 81], построим в пространстве $\mathbb{R}^{2r+1}$ коэффициентов регулятора (14) множество $\mathcal{P}$, представляющее собой объединение конечного набора параллелотопов, каждая точка которого соответствует одновременно стабилизирующему регулятору.

2. На множестве $\mathcal{P}$ в пространстве $\mathbb{R}^{2r+1}$ построим равномерную сетку и для каждого j -го узла сетки, соответствующего некоторому одновременно стабилизирующему регулятору, выпишем этот регулятор в пространстве состояний и соответствующую замкнутую систему вида (11).

3. Для каждого j -го узла сетки проверим выполнение неравенства (19) для соответствующей замкнутой системы (11). Если хотя бы для одного узла сетки проверка даёт положительный результат, то на этом работа алгоритма закончена, поскольку найденный регулятор в силу теоремы 2 будет обеспечивать устойчивость системы (11), а следовательно, в силу теоремы 1, и замкнутой системы (4).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурсов, А.С. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении / А.С. Фурсов, С.И. Миняев, В.С. Гусева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. —1132–1141.
2. Ильин, А.В. Цифровая стабилизация переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями / А.В. Ильин, А.С. Фурсов // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 514. — С. 82–88.
3. Поляков, К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие / К.Ю. Поляков. — СПб. : Изд-во СПбГМУ, 2012. — 154 с.
4. Chen, T. Optimal sample-data control systems / T. Chen, B. Francis. — Berlin : Springer-Verlag, 1994. — 386 p.
5. Фурсов, А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов / А.С. Фурсов. — М. : Аргмак-медиа, 2016. — 238 с.
6. Математические методы теории управления. Проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости / С.В. Емельянов, С.К. Коровин, А.В. Ильин [и др.] — М. : Физматлит, 2013. — 197 с.
7. Фурсов, А.С. К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем / А.С. Фурсов, Э.Ф. Хусаинов // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1522–1533.
8. Поляк, Б.Т. Математическая теория автоматического управления / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт. — М. : Ленанд, 2019. — 504 с.
9. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер ; пер. с англ. С.И. Кумков ; ред. Б.Т. Поляк. — 2-е изд., испр. — М. : Институт компьютерных исследований, 2007. — 468 с.

STABILIZATION OF THE SWITCHED SYSTEM WITH COMPARABLE DELAYS DURING SLOW SWITCHINGS

A. V. Il'in¹, A. S. Fursov²

^{1,2}*Department of Mathematics, School of Science,
Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, Zhejiang, China*

^{1,2}*Lomonosov Moscow State University, Russia*

¹*Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, Moscow, Russia*

²*Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia*
e-mail: ¹iline@cs.msu.ru, ²fursov@cs.msu.ru

An approach is proposed to constructing a digital controller that stabilizes a continuously switched linear system with commensurate delays in control during slow switchings. The approach to stabilization consistently includes the construction of a switchable continuous-discrete closed-loop system with a digital controller, the transition to its discrete model, represented in the form of a switched system with modes of different orders, simultaneous stabilization of the subsystems of the resulting discrete model and calculation of the delay time that ensures the stability of the original switched system, closed by the found regulator.

Keywords: stabilization, digital controller, switchable system, delay.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2019-1621.

REFERENCES

1. Fursov, A.S., Minyaev, S.I., and Guseva, V.S., Digital stabilizer design for a switched linear control delay system, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 8, pp. 1115–1124.
2. Ilin, A.V. and Fursov, A.S., Digital stabilization of a switched linear system with commensurate delays, *Dokl. Math.*, 2023, vol. 108, no. 3, pp. 493–498.
3. Polyakov, K.Yu., *Osnovy teorii tsifrovyykh sistem upravleniya* (Fundamentals of the Theory of Digital Control Systems), St. Petersburg: St.-Peterb. Gos. Morsk. Tech. Univ. Press, 2012.
4. Chen, T. and Francis, B., *Optimal sample-data control systems*, Berlin: Springer-Verlag, 1994.
5. Fursov, A.S., *Odnovremennaya stabilizatsiya: teoriya postroyeniya universal'nogo regulatora dlya semeystva dinamicheskikh ob"yektov* (Simultaneous Stabilization: Theory of Constructing a Universal Controller for a Family of Dynamic Objects), Moscow: Argamak-Media, 2016.
6. Emel'yanov, S.V., Korovin, S.K., Il'in, A.V., Fomichev, V.V., and Fursov, A.S., *Matematicheskiye metody teorii upravleniya. Problemy ustoychivosti, upravlyayemosti i nablyudayemosti* (Mathematical Methods of Control Theory: Problems of Stability, Controllability, and Observability), Moscow: Fizmatlit, 2013.
7. Fursov, A.S. and Khusainov, E.F., On the stabilization of switchable linear systems, *Differ. Equat.*, vol. 51, no. 11, pp. 1518–1528.
8. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., and Rapoport, L.B., *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* (Mathematical Theory of Automatic Control), Moscow: Lenand, 2019.
9. Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., and Walter, E., *Applied Interval Analysis*, New York: Springer-Verlag, 2001.

УДК 517.977

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ

В. А. Соболев

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

e-mail: hsablem@gmail.com

Поступила в редакцию 02.06.2023 г., после доработки 12.12.2023 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Рассматривается сингулярно возмущённая задача оптимального слежения с заданной эталонной траекторией в случае неполной информации о векторе состояния при наличии внешних возмущений. Для анализа возникающих при решении этой задачи дифференциальных уравнений применяется метод декомпозиции, в основе которого лежит техника интегральных многообразий быстрых и медленных движений.

Ключевые слова: оптимальное слежение, сингулярное возмущение, интегральное многообразие, декомпозиция.

DOI: 10.31857/S0374064124040105, EDN: OWPHWV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье исследуется линейно-квадратичная задача оптимального слежения для систем с сингулярными возмущениями. Изучению задач управления с сингулярными возмущениями посвящено значительное число публикаций (см., в частности, обзоры [1–3]), при этом в большинстве работ применяется метод пограничных функций А.Б. Васильевой. Наряду с методом пограничных функций для исследования таких задач успешно применяются метод декомпозиции и метод интегральных многообразий [4–6].

Напомним, что конечномерная задача слежения для линейных систем общего вида ставится следующим образом (см., например, [7]): рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$y = C(t)x, \quad (2)$$

где x — вектор состояния системы, вектор y определяет выход системы, u — вектор управляющих параметров, f — вектор внешних возмущений. Эталонное движение задаётся в явном виде $\xi = \xi(t)$, а функционал качества имеет вид

$$J = \int_0^{t_f} [(C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t)(C(t)x(t) - \xi(t)) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (3)$$

или

$$J = \int_0^{t_f} [(y(t) - \xi(t))^T Q(t)(y(t) - \xi(t)) + u^T(t)R(t)u(t)] dt. \quad (4)$$

Допускается зависимость от одного или нескольких параметров. Предполагается, что все матричные функции, входящие в (1)–(3), непрерывны при $t \in [0, t_f]$.

Известно [7], что решение рассматриваемой задачи даётся следующим выражением для оптимального управления:

$$u_{opt} = -R^{-1}B^T(Px + \chi).$$

Здесь P — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + PA + A^T P - PSP + M = 0, \quad P(t_f) = 0, \quad (5)$$

а χ — решение линейной дифференциальной системы

$$\dot{\chi} = -(A - SP)^T \chi + C^T Q \xi - Pf = 0, \quad \chi(t_f) = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим задачу слежения для управляемой системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1(t)x_1 + A_2(t)x_2 + B_1(t)u + f_1(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= A_3(t)x_1 + A_4(t)x_2 + B_2(t)u + f_2(t), \quad x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$y = C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2. \quad (8)$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^m$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, t_f]$, ε — положительный малый параметр, т.е. система (7) является сингулярно возмущённой. Эталонное движение задаётся в явном виде $\xi = \xi(t)$.

Функционал качества определяется по формуле

$$J = \int_0^{t_f} [(C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) - \xi(t))^T Q(t)(C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) - \xi(t)) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (9)$$

или (4).

Предполагается, что все матричные функции, входящие в (7)–(9), достаточное число раз непрерывно дифференцируемы при $t \in [0, t_f]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Введём также в рассмотрение матрицы A , B , C , S , M и вектор f :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \varepsilon^{-1}A_3 & \varepsilon^{-1}A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \ C_2), \\ S &= \begin{pmatrix} S_1 & \varepsilon^{-1}S_2 \\ \varepsilon^{-1}S_2^T & \varepsilon^{-2}S_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \varepsilon^{-1}f_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= B_1 R^{-1} B_1^T, \quad S_2 = B_1 R^{-1} B_2^T, \quad S_3 = B_2 R^{-1} B_2^T, \\ M_1 &= C_1^T Q C_1, \quad M_2 = C_1^T Q C_2, \quad M_3 = C_2^T Q C_2. \end{aligned}$$

Представим P и χ в следующем виде:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \varepsilon \chi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для матриц P_1 , P_2 , P_3 получается нелинейная система матричных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= -P_1 A_1 - A_1^T P_1 - P_2 A_3 - A_3^T P_2^T + P_1 S_1 P_1 + P_1 S_2 P_2^T + P_2 S_2^T P_1 + P_2 S_3 P_2^T - M_1 = F_1(P_1, P_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{P}_2 &= -P_1 A_2 - P_2 A_4 - \varepsilon A_1^T P_2 - A_3^T P_3 + P_1 S_2 P_3 + P_2 S_3 P_3 + \varepsilon(P_1 S_1 P_2 + P_2 S_2^T P_2) - M_2 = \\ &= F_2(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{P}_3 &= -P_3 A_4 - A_4^T P_3 + P_3 S_3 P_3 + \varepsilon(-P_2^T A_2 - A_2^T P_2 + \varepsilon P_2^T S_1 P_2 + P_2^T S_2 P_3 + P_3 S_2^T P_2) - M_3 = \\ &= F_3(P_2, P_3, t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (10)$$

с граничными условиями

$$P_1(t_f) = 0, \quad P_2(t_f) = 0, \quad P_3(t_f) = 0.$$

Векторы χ_1 и χ_2 удовлетворяют линейной дифференциальной системе

$$\dot{\chi}_1 = -(A_1 - S_1 P_1 - S_2 P_2^T)^T \chi_1 - (A_3 - S_2^T P_1 - S_3 P_2^T)^T \chi_2 + C_1^T Q \xi - P_1 f_1 - P_2 f_2, \quad (11)$$

$$\varepsilon \dot{\chi}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1 P_2 - S_2 P_3)^T \chi_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^T P_2 - S_3 P_3)^T \chi_2 + C_2^T Q \xi - \varepsilon P_2^T f_1 - P_3 f_2 \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\chi_1(t_f) = 0, \quad \chi_2(t_f) = 0.$$

Для анализа сингулярно возмущённой системы матричных дифференциальных уравнений (10) разработаны различные методы построения приближённых решений [1–3]. В данной работе построение приближённых решений систем (10)–(12) базируется на методе декомпозиции, в основе которого лежит техника интегральных многообразий быстрых и медленных движений [4, 5]. Метод декомпозиции позволяет редуцировать данную систему к одному матричному дифференциальному уравнению для блока, соответствующего блоку медленных переменных P_1 в уравнении Риккати. Аналогичным образом обстоит дело с линейной сингулярно возмущённой дифференциальной системой, для построения приближённых решений которой также можно применять метод декомпозиции. Отметим, что в статье [8] метод декомпозиции, называемый авторами методом Соболева, применялся для исследования нелинейной сингулярно возмущённой задачи слежения специального вида.

Суть метода декомпозиции состоит в следующем. При некоторых естественных предположениях о нормальной гиперболичности сингулярно возмущённая система

$$\dot{X} = F(X, Y, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{Y} = G(X, Y, t, \varepsilon)$$

заменяется

$$Y = Z + h(X, T, \varepsilon), \quad X = V + \varepsilon H(V, Z, t, \varepsilon) \quad (H(V, 0, t, \varepsilon) \equiv 0)$$

приводится к виду

$$\dot{V} = F(V, h(V, t, \varepsilon)), \quad \varepsilon \dot{Z} = W(V, Z, t, \varepsilon) \quad (W(V, 0, t, \varepsilon) \equiv 0),$$

где первое уравнение не зависит от быстрой переменной, а решениями второго уравнения являются пограничные функции. При этом h соответствует медленному интегральному многообразию исходной системы, а εH — быстрому многообразию некоторой вспомогательной системы; переменная V соответствует регулярной составляющей решения исходной системы, а переменная Z — погранслошной составляющей.

2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ФУНКЦИОНАЛА

Для оценки погрешности при построении приближённого (субоптимального) управления вместо точного (оптимального) управления функционал (3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_f} [(C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t)(C(t)x(t) - \xi(t)) + u^T(t)R(t)u(t)] dt = \\ &= \int_0^{t_f} [(u + R^{-1}B^T(t)P(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t))^T R(t)(u + R^{-1}B^T(t)P(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t))] dt + \\ &\quad + x^T(0)P(0)x(0) + 2x^T(0)\chi(0) + \kappa(0). \end{aligned}$$

Здесь u – любое возможное управление, P и χ являются решениями задач (5) и (6) соответственно, а κ является решением уравнения

$$\dot{\kappa} = \chi^T S \chi - \xi^T Q \xi - 2f^T \chi$$

с условием на конце рассматриваемого промежутка $\kappa(t_f) = 0$, т.е.

$$\kappa(0) = - \int_0^{t_f} [\chi^T S \chi - \xi^T Q \xi - 2f^T \chi] dt.$$

Для доказательства этого факта достаточно использовать непосредственно проверяемое равенство

$$\begin{aligned} & (C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t)(C(t)x(t) - \xi(t)) + u^T(t)R(t)u(t) = \\ & = (u + R^{-1}B^T(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t))^T R(t)(u + R^{-1}B^T(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t)) - \\ & - \frac{d}{dt}(x^T(t)P(t)x(t) + 2x^T(t)\chi(t) + \kappa(t)). \end{aligned}$$

Легко видеть, что минимальное значение J_{opt} определяется формулой

$$J_{opt} = x^T(0)P(0)x(0) + 2x^T(0)\chi(0) + \kappa(0)$$

при выборе

$$u = u_{opt} = -R^{-1}B^T(P_{opt}x_{opt} + \chi_{opt}),$$

где x_{opt} – решение системы (1), (2) при $u = u_{opt}$.

Пусть каким-либо способом построено субоптимальное управление

$$u_s = -R^{-1}B^T(P_s x_s + \chi_s)$$

с соответствующими приближёнными выражениями для вектора состояния x_s , коэффициента усиления P_s и векторов χ (χ_s) и κ (κ_s), где вместо нижнего индекса *subopt* используется индекс s . Введём следующие обозначения:

$$\Delta x = x_s - x_{opt}, \quad \Delta P = P_s - P_{opt}, \quad \Delta \chi = \chi_s - \chi_{opt}, \quad \Delta \kappa = \kappa_s - \kappa_{opt}, \quad \Delta J = J_s - J_{opt}.$$

При $x_s(0) = x_0$ возникающая при использовании субоптимального управления погрешность функционала качества ΔJ представима в виде

$$\begin{aligned} \Delta J = J_s - J_{opt} &= \int_0^{t_f} [(R^{-1}B^T(\Delta P x_s + P_{opt}\Delta x + \Delta \chi))^T R(R^{-1}B^T(\Delta P x_s + P_{opt}\Delta x + \Delta \chi))] dt + \\ &+ x_0^T P_s(0)x_0 + 2x_0^T \chi_s(0) + \kappa_s(0) - [x_0^T P_{opt}(0)x_0 + 2x_0^T \chi_{opt}(0) + \kappa_{opt}(0)]. \end{aligned}$$

Для краткости записи аргументы у функций под знаком интеграла опущены. После преобразования подынтегрального выражения с учётом введенных выше обозначений имеем

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_0^{t_f} (\Delta P x_s + P_{opt}\Delta x + \Delta \chi)^T S(\Delta P x_s + P_{opt}\Delta x + \Delta \chi) dt + \\ &+ x_0^T \Delta P(0)x_0 + 2x_0^T \Delta \chi(0) + \Delta \kappa(0). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя выражение для κ , получаем

$$\Delta\kappa(0) = - \int_0^{t_f} [\chi_{opt}^T S \Delta\chi + \Delta\chi S \chi_s - 2f^T \Delta\chi] dt.$$

Следует отметить, что полученная формула не связана с конкретным выбором приближений и может применяться для оценки погрешности при применении как асимптотических, так и численных методов приближённого анализа.

Если, например, рассмотреть случай регулярной зависимости матричных и векторных функций, входящих в (1)–(3), от малого параметра в предположении, что эти функции достаточное число раз дифференцируемы по своим аргументам, то можно применить эту формулу для оценки погрешности функционала при применении простейшего варианта метода малого параметра. При этом проявляется некоторое отличие от задач оптимального управления, связанное с зависимостью погрешности от $\Delta\chi$.

Для задачи (7)–(9) формула (13) с учётом выражений

$$\Delta Px_s = \begin{pmatrix} \Delta P_1 x_{1s} + \varepsilon \Delta P_2 x_{2s} \\ \varepsilon \Delta P_2 x_{1s} + \varepsilon \Delta P_3 x_{2s} \end{pmatrix}, \quad P_{opt} \Delta x = \begin{pmatrix} P_{1opt} \Delta x_1 + \varepsilon P_{2opt} \Delta x_2 \\ \varepsilon P_{2opt} \Delta x_1 + \varepsilon P_{3opt} \Delta x_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta\chi = \begin{pmatrix} \Delta\chi_1 \\ \varepsilon \Delta\chi_2 \end{pmatrix}$$

принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_0^{t_f} [\Delta_1^T (S_1 \Delta_1 + S_2 \Delta_2) + \Delta_2^T (S_2^T \Delta_1 + S_3 \Delta_2)] dt + x_{10}^T \Delta P_1(0) x_{10} + \\ & + \varepsilon (x_{20}^T \Delta P_2(0)^T x_{10} + x_{10}^T \Delta P_2(0) x_{20} + x_{20}^T \Delta P_3(0) x_{20}) + 2x_{10}^T \Delta\chi_1(0) + 2\varepsilon x_{20}^T \Delta\chi_2(0) + \\ & + 2 \int_0^{t_f} [\chi_1^T S_1 \Delta\chi_1 + \chi_1^T S_2 \Delta\chi_2 + \chi_2^T S_2^T \Delta\chi_1 + \chi_2^T S_3 \Delta\chi_2 - f_1^T \Delta\chi_1 - \varepsilon f_2^T \Delta\chi_2] dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta P_1 x_{1s} + \varepsilon \Delta P_2 x_{2s} + P_{1opt} \Delta x_1 + \varepsilon P_{2opt} \Delta x_2 + \Delta\chi_1, \\ \Delta_2 &= (\Delta P_2)^T x_{1s} + \Delta P_3 x_{2s} + \varepsilon P_{2opt} \Delta x_1 + \varepsilon P_{3opt} \Delta x_2 + \Delta\chi_2. \end{aligned}$$

3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Уравнения для блоков матричного дифференциального уравнения Риккати не зависят от χ , поэтому можно начать анализ с этих уравнений, следуя работам [4, 5, 9]. Такая система уравнений имеет медленное интегральное многообразие

$$P_2 = \Phi(P_1, t, \varepsilon) = \Phi_0(P_1, t) + \varepsilon \Phi_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \dots, \quad P_3 = \Psi(P_1, t, \varepsilon) = \Psi_0(t) + \varepsilon \Psi_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \dots$$

Движение по медленному интегральному многообразию описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 = \bar{F}_1(P_1, t, \varepsilon) = F_1(P_1, \Phi(P_1, t, \varepsilon), t, \varepsilon) = & -P_1(A_1 - S_2 \Phi_0^T) - (A_1^T - \Phi_0 S_2^T)P_1 - \Phi_0 A_3 - A_3^T \Phi_0^T + \\ & + P_1 S_1 P_1 - M_1 + \varepsilon(P_1 S_2 \Phi_1^T + \Phi_1 S_2^T P_1 - \Phi_1 A_3 - A_3^T \Phi_1^T + \Phi_1 S_2^T + \Phi_0 S_3 \Phi_1^T) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что при $\varepsilon=0$ это уравнение является матричным дифференциальным уравнением Риккати

$$\dot{P}_1 = -P_1 \tilde{A}_1 - \tilde{A}_1^T P_1 + P_1 S_1 P_1 - (M_1 - \tilde{M}_1 - \tilde{M}_1^T),$$

где $\tilde{A}_1 = A_1 - S_2 \Phi_0^T$, $\tilde{Q}_1 = M_1 + \Phi_0 A_3 + A_3^T \Phi_0^T$.

Для перехода в окрестность медленного интегрального многообразия $P_2 = \Phi(P_1, t, \varepsilon)$, $P_3 = \Psi(P_1, t, \varepsilon)$ следует ввести новые переменные Z_2 и Z_3 по формулам

$$P_2 = Z_2 + \Phi(P_1, t, \varepsilon), \quad P_3 = Z_3 + \Psi(P_1, t, \varepsilon).$$

В этом представлении матричные функции Z_2 и Z_3 играют роль правых пограничных функций, а $\Phi(P_1, t, \varepsilon)$ и $\Psi(P_1, t, \varepsilon)$ соответствуют регулярным членам асимптотики представления решений [1]. Если ограничиться рассмотрением регулярной составляющей решений до порядка $O(\varepsilon)$ и правых пограничных функций Z_2 , Z_3 до порядка $O(1)$ включительно, то Z_2 из уравнения для P_1 удалять не нужно. В противном случае можно использовать технику быстрых интегральных многообразий для удаления переменной Z_2 с требуемой степенью точности [4, 5, 10].

Положив $\varepsilon = 0$ в (10), получим следующие соотношения для определения матричных функций $\Phi_0(P_1, t)$ и $\Psi_0(P_1, t)$:

$$0 = -P_1 A_2 - \Phi_0 A_4 - A_3^T \Psi_0 + P_1 S_2 \Psi_0 + \Phi S_3 \Psi_0 - M_2, \quad 0 = \Psi_0^T S_3 \Psi_0 - \Psi_0 A_4 - A_4^T \Psi_0 - M_3.$$

Второе уравнение — это алгебраическое матричное уравнение Риккати, решение $\Psi_0 = \Psi_0(t)$ которого представляет собой положительно определённую матрицу, если тройка матриц $(\bar{M}_3, A_4, B_2)$ стабилизируема и полностью наблюдаема при всех $t \in [0, 1]$, где $\bar{M}_3^T \bar{M}_3 = M_3$ (см., например, [1, 6]). Напомним, что в этом случае матрица $D = A_4 - S_3 \Psi_0$ является гурвицевой при всех $t \in [0, t_f]$. Теперь можно подставить $\Psi_0 = \Psi_0(t)$ в первое уравнение и найти

$$\Phi_0 = -(P_1 A_2 + A_3^T \Psi_0 + M_2 - P_1 S_2 \Psi_0) D^{-1}.$$

Матричные функции Φ_1 и Ψ_1 определяются из уравнений инвариантности, которые в рассматриваемом случае с учётом равенства (15) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Phi(P_1, t, \varepsilon)) + \frac{\partial}{\partial P_1} (\Phi(P_1, t, \varepsilon)) \bar{F}_1 \right] &= F_2(P_1, \Phi(P_1, t, \varepsilon), \Psi(P_1, t, \varepsilon), t, \varepsilon), \\ \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Psi(P_1, t, \varepsilon)) + \frac{\partial}{\partial P_1} (\Psi(P_1, t, \varepsilon)) \bar{F}_1 \right] &= F_3(\Phi(P_1, t, \varepsilon), \Psi(P_1, t, \varepsilon), t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Следует напомнить, что функции F_2 , F_3 были введены в формулах (10). Приравнявая коэффициенты при первой степени малого параметра, получаем линейные относительно неизвестных матричных функций Φ_1 и Ψ_1 соотношения

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(P_1, \Phi_0, t, 0)(-A_2 + S_2 \Psi_0) D^{-1} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} &= \\ &= -\Phi_1 A_4 - A_1^T \Phi_0 - A_3^T \Psi_1 + P_1 S_1 \Phi_0 + P_1 S_2 \Psi_1 + \Phi_0 S_2^T \Phi_0 + \Phi_0 S_3 \Psi_1 + \Phi_1 S_3 \Psi_0, \\ \dot{\Psi}_0 &= -\Phi^T A_2 - A_2^T \Phi_0 - A_4^T \Psi_1 + \Phi_0^T S_2 \Psi_0 + \Psi_0 S_2^T \Phi_0 + \Psi_1 S_3 \Psi_0 + \Psi_0 S_3 \Psi_1. \end{aligned}$$

Из второго равенства находим Ψ_1 , подставляем найденное выражение в первое уравнение и получаем Φ_1 . При необходимости аналогичным образом из соответствующих линейных уравнений находятся Φ_2 , Ψ_2 и т.д.

4. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Вернёмся к рассмотрению системы дифференциальных уравнений для χ_1 и χ_2 . После анализа решений матричного дифференциального уравнения Риккати коэффициенты этой системы можно считать известными. Более того, как отмечалось выше, в рассматриваемых предположениях матрица D является гурвицевой, и для анализа системы (11), (12) можно

сначала применить известную методику блочной диагонализации (см., например, [4–6]) соответствующей однородной системы, принимая во внимание только регулярную составляющую решения матричного дифференциального уравнения Риккати, а матричные блоки Z_1 , Z_2 и Z_3 формально отнести к неоднородности.

Систему (11), (12) представим в следующем виде:

$$\dot{\chi}_1 = -(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T \chi_1 - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T \chi_2 + \varphi_1, \quad (16)$$

$$\varepsilon \dot{\chi}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1 V_2 - S_2 V_3)^T \chi_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T \chi_2 + \varphi_2. \quad (17)$$

Здесь V_1 , V_2 , V_3 — регулярные компоненты матричных блоков, которые соответствуют решению, принадлежащему интегральному многообразию медленных движений, т.е. V_1 удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (15), $V_2 = \Phi(P_1, t, \varepsilon)$, $V_3 = \Psi(P_1, t, \varepsilon)$, а функции φ_1 , φ_2 задаются равенствами

$$\varphi_1 = (\varepsilon Z_1 S_1 + Z_2 S_2) \chi_1 + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3) \chi_2 + C_1^T Q \xi_1 - (V_1 + \varepsilon Z_1) f_1 - (V_2 + Z_2) f_2,$$

$$\varphi_2 = (\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 S_2^T) \chi_1 + (\varepsilon Z_2^T S_2 + Z_3 S_3) \chi_2 + C_2^T Q \xi - (\varepsilon V_2^T + Z_2^T) f_1 - (V_3 + Z_3) f_2,$$

в которых учтено, что матричный блок P_1 представим в виде суммы V_1 и функции типа правого пограничного слоя εZ_1 . К соответствующей однородной системе

$$\dot{\chi}_1 = -(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T \chi_1 - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T \chi_2,$$

$$\varepsilon \dot{\chi}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1 V_2 - S_2 V_3)^T \chi_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T \chi_2$$

можно применить метод приведения к блочно-диагональной форме. С этой целью сначала вводится новая быстрая переменная $y_2 = \chi_2 - L \chi_1$. Используемая в этой формуле матричная функция $L = L(t, \varepsilon)$ удовлетворяет несимметричному матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{L} + \varepsilon L [-(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] = \\ = -(A_2 - \varepsilon S_1 V_2 - S_2 V_3)^T - (A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T L, \end{aligned}$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра

$$L = L_0(t) + \varepsilon L_1(t) + \dots,$$

где

$$L_0(t) = -[D^T(t)]^{-1} (A_2 - S_2 \Psi_0)^T,$$

$$\begin{aligned} L_1(t) = -[D^T(t)]^{-1} [\dot{L}_0 + L_0 (-(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 \Phi_0^T)^T L_0) - \\ - \Phi_0^T S_1 - \Psi_1 S_2^T - (S_2^T \Phi_0 + S_3 \Psi_1)^T L_0]. \end{aligned}$$

Для переменных χ_1 , y_2 получаем систему

$$\dot{\chi}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] \chi_1 - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T y_2,$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] y_2.$$

На следующем шаге вводится новая медленная переменная $y_1 = \chi_1 - \varepsilon H y_2$. При этом матричная функция $H = H(t, \varepsilon)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\varepsilon \dot{H} + H [(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] = -(A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра $H = H_0(t) + \varepsilon H_1(t) + \dots$, где $H_0(t) = -(A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T [D^T(t)]^{-1}$.

В результате получаются две независимые подсистемы:

$$\dot{y}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] y_1,$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] y_2.$$

Если применить преобразование $y_2 = \chi_2 - L\chi_1$, $y_1 = \chi_1 - \varepsilon H y_2$ к неоднородной системе (16), (17), то получится дифференциальная система вида

$$\dot{y}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] y_1 + \tilde{f}_1, \quad (18)$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] y_2 + \tilde{f}_2, \quad (19)$$

где $\tilde{f}_1 = (I + \varepsilon H L)\varphi_1 - H\varphi_2$, $\tilde{f}_2 = \varphi_2 - \varepsilon L\varphi_1$, а I — единичная матрица.

Правые части уравнений (18), (19) разнотипны, так как содержат регулярные функции и функции типа правого пограничного слоя, поэтому имеет смысл представить переменные y_1 , y_2 в виде сумм переменных v_1 , v_2 и z_1 , z_2 , т.е. $y_1 = v_1 + z_1$, $y_2 = v_2 + z_2$, где v_1 , v_2 соответствуют регулярным компонентам решений, а z_1 , z_2 представляют собой функции типа правого пограничного слоя. В уравнениях для v_1 , v_2 сохранены только регулярные функции из правых частей уравнений (18), (19), а в уравнениях для z_1 , z_2 — функции типа правого пограничного слоя. В результате получаем

$$\dot{v}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] v_1 + g_{11}, \quad (20)$$

$$\varepsilon \dot{v}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] v_2 + g_{12}, \quad (21)$$

$$\dot{z}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] z_1 + g_{21}, \quad (22)$$

$$\varepsilon \dot{z}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] z_2 + g_{22}. \quad (23)$$

Здесь

$$g_{11} = [H M_2^T - (I + \varepsilon H L) M_1] \xi_1 + [H M_3 - (I + \varepsilon H L) M_2] \xi_2,$$

$$g_{12} = (\varepsilon L M_1 - M_2^T) \xi_1 + (\varepsilon L M_2 - M_3) \xi_2,$$

$$g_{21} = [\varepsilon Z_1 S_1 + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3) L] (v_1 + z_1) + [\varepsilon^2 Z_1 S_1 H + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3) (I + \varepsilon L H)] (v_2 + z_2),$$

$$g_{22} = [\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 Z_2^T + \varepsilon Z_2^T S_2 + Z_3 Z_3] (v_1 + z_1) +$$

$$+ [\varepsilon (\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 S_2^T) H + (\varepsilon Z_2 S_2 + Z_3 S_3) (I + \varepsilon H L)] (v_2 + z_2).$$

Вектор v_1 может быть найден с любой степенью точности как решение независимого линейного дифференциального уравнения (20). Ещё проще ситуация с вектором v_2 , который может быть найден из независимого линейного дифференциального уравнения (21) только при помощи алгебраических операций. После того как найдены v_1 и v_2 , линейные уравнения (22), (23) можно рассматривать как независимые и находить векторы z_1 и z_2 с любой степенью точности.

Таким образом, применение техники интегральных многообразий позволило осуществить декомпозицию задачи построения оптимального управления (2), (3) на несколько независимых подзадач, каждая из которых может быть решена с любой степенью точности по отношению к степеням малого параметра.

5. ПОСТРОЕНИЕ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

При построении субоптимального управления ограничимся вычислением регулярной составляющей решений до порядка $O(\varepsilon)$ включительно и правых пограничных функций Z_2 , Z_3 (Z_1 имеет множителем малый параметр).

Из уравнений (20) и (21) переменные v_1 и v_2 могут быть найдены с любой степенью точности в виде асимптотических разложений без особых затруднений в силу линейности уравнений. В уравнении (20) достаточно учитывать члены нулевого и первого порядков по малому параметру. Тогда это уравнение принимает вид

$$\dot{v}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1 - S_2(\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1)^T)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3(\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1)^T)^T L] v_1 + g_{11}.$$

Из уравнения (21), которое запишем как

$$\varepsilon \dot{v}_2 = -[(D - \varepsilon S_2^T \Phi_0 - S_3 \varepsilon \Psi_0)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T V_1 - S_3 \Phi_0^T)^T] v_2 + g_{12},$$

можно найти v_2 в виде разложения $v_2 = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \dots$, подставив которое в это уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, последовательно найдём

$$\phi_0 = -D^{-1}(M_2^T \xi_1 + M_3 \xi_2),$$

$$\phi_1 = D^{-1}[L_0(M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2)] + D^{-1}[\dot{\phi}_0 + (S_2^T \Phi_0 + S_3 \Psi_0) - L_0((A_3 - S_2^T V_1 - S_3 \Phi_0^T)^T)] \phi_0.$$

Для вектора z_2 приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{z}_2 = -D z_2 + (Z_3 Z_2^T + Z_3 S_3) v_1 + Z_3 S_3 (v_2 + z_2),$$

так как в пределах выбранной степени точности вектором z_1 можно пренебречь.

Это означает, что и функции χ_1 , χ_2 могут быть найдены с любой степенью точности по формулам

$$\chi_1 = y_1 + \varepsilon H y_2, \quad \chi_2 = L y_1 + (I + \varepsilon L H) y_2.$$

Однако, учитывая введённые выше ограничения на точность вычислений, можно сделать вывод о том, что при вычислении переменной y_1 правыми пограничными функциями можно пренебречь, а для вычисления χ_1 , χ_2 можно использовать следующие формулы:

$$\chi_1 = y_1 + \varepsilon H_0 y_2, \quad \chi_2 = (L_0 + \varepsilon L_1) y_1 + (I + \varepsilon L_0 H_0) y_2.$$

Для главного члена y_2 имеем задачу

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -D(t) y_2 + Z_3 S_3 y_2,$$

где Z_3 является решением задачи

$$\varepsilon \dot{Z}_3 = -Z_3 D - D^T Z_3 + Z_3 S_3 Z_3, \quad Z_3(t_f) = -\Psi_0(t_f).$$

Заметим, что решение этого матричного уравнения сводится к построению фундаментальной матрицы для линейной однородной системы $\varepsilon \dot{w} = D^T w$ [5].

Формула для субоптимального управления может быть записана как

$$u_s = -R^{-1}[(B_1^T P_1 + B_2^T P_2^T) x_1 + (\varepsilon B_1^T P_2 + B_2^T P_3) x_2 + B_1^T \chi_1 + B_2^T \chi_2].$$

Здесь P_1 — решение матричного дифференциального уравнения (15) при $\varepsilon = 0$, $P_2 = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + Z_2$, где Z_2 является решением задачи

$$\varepsilon \dot{Z}_2 = Z_2 S_3 \Psi_0 + Z_2 S_3 Z_3 + P_1 S_2 Z_3 - A_3^T Z_3 - \Phi_0 S_3 Z_3, \quad Z_2(t_f) = -\Phi_0(t_f),$$

а при вычислении P_1 в последнем дифференциальном уравнении достаточно ограничиться приближением нулевого порядка.

6. ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ ЗА МЕСТОПОЛОЖЕНИЕМ ОБЪЕКТА

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\begin{aligned}\varepsilon \ddot{x}_1 - A_3(t)x_1 - A_4(t)\dot{x}_1 &= B_2(t)u + f_2(t), \\ y &= C_1(t)x_1,\end{aligned}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^n$, эталонное движение по-прежнему задаётся функцией $\xi = \xi(t)$, а функционал качества имеет вид

$$J = \int_0^{t_f} [(C_1(t)x_1(t) - \xi(t))^T Q(t)(C_1(t)x_1(t) - \xi(t)) + u^T(t)R(t)u(t)] dt. \quad (24)$$

Будем предполагать, что выполнено следующее

Условие. Все матричные и векторные функции, фигурирующие в постановке этой задачи, являются достаточно гладкими, а все собственные числа матрицы A_4 на рассматриваемом отрезке имеют отрицательные вещественные части.

Полагая $\dot{x}_1 = x_2$, приходим к задаче вида (7)–(9) при

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ \varepsilon^{-1}A_3 & \varepsilon^{-1}A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad 0), \\ S &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2}S_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}f_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае формула (14) имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_0^{t_f} \Delta_2^T S_3 \Delta_2 dt + x_{10}^T \Delta P_1(0)x_{10} + \varepsilon(x_{20}^T \Delta P_2(0)^T x_{10} + x_{10}^T \Delta P_2(0)x_{20} + x_{20}^T \Delta P_3(0)x_{20}) + \\ &\quad + 2x_{10}^T \Delta \chi_1(0) + 2\varepsilon x_{20}^T \Delta \chi_2(0) + \Delta \kappa(0),\end{aligned}$$

где

$$\Delta \kappa(0) = - \int_0^{t_f} [\chi_{2opt}^T S_3 \Delta \chi_2 + \Delta \chi_2 S_3 \chi_{2s} - 2\varepsilon f^T \Delta \chi_2] dt.$$

Нетрудно видеть, что пренебрежение в представлении переменных P_1 , P_2 , P_3 и χ_1 , χ_2 регулярными членами порядка $O(\varepsilon^2)$ и правыми пограничными функциями, содержащими в качестве множителя малый параметр, приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале качества.

Система уравнений для матриц P_1 , P_2 , P_3 принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{P}_1 &= -P_2 A_3 - A_3^T P_2^T + P_2 S_3 P_2^T - M_1 = F_1(P_1, P_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{P}_2 &= -P_1 - P_2 A_4 - A_3^T P_3 + P_2 S_3 P_3 = F_2(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{P}_3 &= -P_3 A_4 - A_4^T P_3 + P_3 S_3 P_3 - \varepsilon(P_2^T + P_2) = F_3(P_2, P_3, t, \varepsilon)\end{aligned} \quad (25)$$

с граничными условиями

$$P_1(t_f) = 0, \quad P_2(t_f) = 0, \quad P_3(t_f) = 0.$$

Полагая в последних двух уравнениях данной системы матричных дифференциальных уравнений малый параметр равным нулю, получаем уравнения

$$0 = -P_1 - P_2 A_4 - A_3^T P_3 + P_2 S_3 P_3, \quad 0 = -P_3 A_4 - A_4^T P_3 + P_3 S_3 P_3.$$

Отсюда следует, что медленное интегральное многообразие этой системы имеет вид

$$P_2 = -P_1 A_4^{-1} + \varepsilon \Phi_1(P_1, t) + \dots, \quad P_3 = \varepsilon \Psi_1(P_1, t) + \dots \quad (26)$$

Приравнявая в соответствующих уравнениях инвариантности члены, содержащие множителем первую степень малого параметра, получаем соотношения для определения матричных функций $\Phi_1(P_1, t)$ и $\Psi_1(P_1, t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} -F_1(P_1, -P_1 A_4^{-1}, t, 0) - P_1 \frac{d}{dt}(A_4^{-1}) &= -\Phi_1 A_4 - A_3^T \Psi_1 - P_1 A_4^{-1} S_3 \Psi_1, \\ 0 &= -\Psi_1 A_4 - A_4^T \Psi_1 + P_1 A_4^{-1} + (P_1 A_4^{-1})^T. \end{aligned} \quad (27)$$

Последнее равенство представляет собой однозначно разрешимое матричное уравнение Ляпунова. После подстановки найденного решения Ψ_1 в предыдущее уравнение матрица Φ_1 находится умножением на A_4^{-1} соответствующих слагаемых, т.е.

$$\Phi_1 = \left(F_1(P_1, -P_1 A_4^{-1}, t, 0) + P_1 \frac{d}{dt}(A_4^{-1}) - A_3^T \Psi_1 - P_1 A_4^{-1} S_3 \Psi_1 \right) A_4^{-1}. \quad (28)$$

При необходимости аналогичным образом определяются соответствующие матричные коэффициенты при более высоких степенях малого параметра.

Уравнение (15), описывающее движение на медленном интегральном многообразии, в рассматриваемом случае может быть представлено в следующем виде:

$$\dot{P}_1 = -\Phi_0 A_3 - A_3^T \Phi_0^T - M_1 + \varepsilon(-\Phi_1 A_3 - A_3^T \Phi_1^T + \Phi_0 S_3 \Phi_1^T + \Phi_1 S_3 \Phi_0^T) + \dots \quad (29)$$

Важно отметить, что при $t = t_f$ матричные функции P_1, P_2, P_3 обращаются в нуль. Отсюда следует, что правые пограничные функции Z_2, Z_3 в представлении матриц P_2, P_3 должны содержать в качестве множителя малый параметр. Это означает, что если при построении закона управления пренебречь правыми пограничными функциями, то в силу формулы (14) погрешность функционала качества не превысит величину $O(\varepsilon^2)$.

Система уравнений для χ_1 и χ_2 в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{\chi}_1 = -(A_3 - S_3 P_2^T)^T \chi_2 + C_1^T Q \xi - P_2 f_2, \quad (30)$$

$$\varepsilon \dot{\chi}_2 = -\chi_1 - (A_4 - S_3 P_3)^T \chi_2 - P_3 f_2 \quad (31)$$

с граничными условиями

$$\chi_1(t_f) = 0, \quad \chi_2(t_f) = 0.$$

Рассмотрим соответствующую однородную систему, не содержащую правых пограничных функций Z_1, Z_2, Z_3 и членов порядка $o(\varepsilon)$ у регулярных матричных функций V_2, V_3 :

$$\dot{\chi}_1 = -(A_3 - S_3(-V_1 A_4^{-1} + \varepsilon \Phi_1(V_1, t))^T)^T \chi_2, \quad \varepsilon \dot{\chi}_2 = -\chi_1 - (A_4 - \varepsilon S_3 \Psi_1(V_1, t))^T \chi_2.$$

Для матричных функций L и H , пренебрегая членами второго и более высоких порядков в разложении по степеням малого параметра, получаем представления

$$L = L_0 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2), \quad H = H_0 + O(\varepsilon).$$

Здесь

$$L_0 = -(A_4^T)^{-1}, \quad L_1 = (A_4^T)^{-1} [\dot{L}_0 - L_0 (A_3^T + (A_4^T)^{-1} V_1 S_3) L_0 - \Psi_1 S_3], \quad (32)$$

$$H_0 = -[A_3 + S_3 V_1 A_4^{-1}]^T (A_4^T)^{-1}.$$

После преобразований

$$y_2 = \chi_2 - L \chi_1, \quad y_1 = \chi_1 - \varepsilon H y_2 \quad (33)$$

в неоднородной системе (30), (31) будем иметь уравнения

$$\dot{y}_1 = [-(A_3 + S_3\Phi(V_1, t, \varepsilon))^T L]y_1 + \tilde{f}_1, \quad (34)$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_3\Psi_1)^T + \varepsilon L_0(A_3 - S_3\Phi_0(t)^T)^T]y_2 + \tilde{f}_2.$$

Здесь

$$\tilde{f}_1 = (I + \varepsilon H_0 L_0)(C_1^T Q\xi - \Phi(V_1, t, \varepsilon)f_2) - H_0(-\varepsilon\Psi_1(V_1, t)f_2),$$

$$\tilde{f}_2 = -\varepsilon\Psi_1(V_1, t, \varepsilon)f_2 - \varepsilon L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f_2).$$

В этих уравнениях и в выражениях для функций $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ опущены правые пограничные функции Z_1 , Z_2 , Z_3 и члены порядка $o(\varepsilon)$ у регулярных функций. Принимая во внимание, что функция $\tilde{f}_2$ содержит малый параметр в качестве множителя, получаем следующее приближённое выражение для y_2 :

$$y_2 = -\varepsilon A_4^{-1}(\Psi_1(V_1, t)f_2 - L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f_2)),$$

в котором учтены только регулярные члены порядка $O(\varepsilon)$, а регулярные члены более высоких порядков и правые пограничные функции, которые содержат в качестве множителя малый параметр, опущены. В рассматриваемом случае формула для оптимального управления принимает вид

$$u_{opt} = -R^{-1}B_2^T[P_2x + P_3\dot{x} + \chi_2].$$

Чтобы получить погрешность порядка $O(\varepsilon^2)$ при вычислении значения функционала качества для субоптимального управления, следует использовать приближённое выражение

$$P_2 = \Phi(V_1, t, \varepsilon) \simeq \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 = -V_1 A_4^{-1} + \varepsilon\Phi_1(V_1, t), \quad P_3 \simeq \varepsilon\Psi_1(V_1, t). \quad (35)$$

Что касается χ_2 , то использование представления

$$\chi_2 = Ly_1 + (I + \varepsilon LH)y_2,$$

вытекающего из (33), и полученного выше выражения для y_2 позволяет применять следующее приближённое выражение:

$$\chi_2 = (L_0 + \varepsilon L_1)y_1 - \varepsilon A_4^{-1}(\Psi_1(V_1, t)f_2 - L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f_2)).$$

Таким образом, система (25) имеет медленное интегральное многообразие, которое с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ включительно описывается уравнениями (29), где Ψ_1 является решением уравнения Ляпунова (27), Φ_1 задаётся формулой (28), а матрица V_1 представляет собой решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{P}_1 = -P_2 A_3 - A_3^T P_2^T + P_2 S_3 P_2^T - M_1, \quad P_1(t_f) = 0,$$

в котором P_2 определяется выражением (35). Через v_2 обозначим выражение

$$v_2 = (L_0 + \varepsilon L_1)v_1 - \varepsilon A_4^{-1}(\Psi_1(V_1, t)f_2 - L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f_2)), \quad (36)$$

в нём в качестве v_1 следует взять решение уравнения (34) с граничным условием $y_1(t_f) = 0$.

Суммируя приведённое выше, можно выписать соотношения, необходимые для получения субоптимального управления. Пусть матричная функция V_1 является решением уравнения (29), описывающего движение по медленному интегральному многообразию с условием $V_1(t_f) = 0$, в котором отброшены члены второго и более высоких порядков по ε , т.е.

$$\dot{V}_1 = -\Phi_0 A_3 - A_3^T \Phi_0^T - M_1 + \varepsilon(-\Phi_1 A_3 - A_3^T \Phi_1^T + \Phi_0 S_3 \Phi_1^T + \Phi_1 S_3 \Phi_0^T), \quad V_1(t_f) = 0. \quad (37)$$

Здесь, в соответствии с формулами (26)–(28),

$$\Phi_0 = -V_1 A_4^{-1}, \quad (38)$$

матрица Ψ_1 является решением уравнения Ляпунова

$$\Psi_1 A_4 + A_4^T \Psi_1 = V_1 A_4^{-1} + (V_1 A_4^{-1})^T, \quad (39)$$

в котором аргумент t играет роль параметра, а для Φ_1 справедливо выражение

$$\Phi_1 = \left(-\Phi_0 A_3 - A_3^T \Phi_0^T - M_1 + V_1 \frac{d}{dt}(A_4^{-1}) - A_3^T \Psi_1 - V_1 A_4^{-1} S_3 \Psi_1 \right) A_4^{-1}. \quad (40)$$

Используя формулы (37)–(40), с учётом членов нулевого и первого порядков по ε из (26) получаем

$$V_2 = -V_1 A_4^{-1} + \varepsilon \Phi_1, \quad (41)$$

$$V_3 = \varepsilon \Psi_1. \quad (42)$$

Принимая во внимание (32), (34) и (36), имеем

$$v_2 = (L_0 + \varepsilon L_1) v_1 - \varepsilon A_4^{-1} (\Psi_1(V_1, t) f_2 - L_0(C_1^T Q \xi - \Phi_0(t) f_2)). \quad (43)$$

Здесь

$$L_0 = -(A_4^T)^{-1}, \quad L_1 = (A_4^T)^{-1} [\dot{L}_0 - L_0(A_3^T + (A_4^T)^{-1} V_1 S_3) L_0 - \Psi_1 S_3],$$

v_1 является решением задачи

$$\dot{v}_1 = [-(A_3 + S_3(\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1))^T (L_0 + \varepsilon L_1)] v_1 + \tilde{f}_1, \quad v_1(t_f) = 0$$

при

$$\tilde{f}_1 = (I + \varepsilon H_0 L_0)(C_1^T Q \xi - \Phi(V_1, t, \varepsilon) f_2) - H_0(-\varepsilon \Psi_1(V_1, t) f_2),$$

$$H_0 = -[A_3 + S_3 V_1 A_4^{-1}]^T (A_4^T)^{-1}.$$

Полученные выражения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Если выполнено сформулированное условие, то применение субоптимального управления

$$u_s = -R^{-1} B_2^T [V_2 x + V_3 \dot{x} + v_2],$$

где V_2 и V_3 заданы выражениями (41) и (42), а v_2 — выражением (43), приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале (24).

Пример. Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon \ddot{x} + (1 + \varepsilon^2 \nu) \dot{x} = u + f, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть наблюдается координата x , т.е. $y = x$, эталонное движение задаётся в явном виде $\xi = \xi(t)$, а функционал качества определяется формулой

$$J = \int_0^1 [(y(t) - \xi(t))^2 + u^2(t)] dt.$$

Здесь в качестве параметра ν рассматривается величина

$$\nu = \frac{-1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \simeq 1/2.$$

Получаем соответствующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(1+\varepsilon^2\nu) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \varepsilon^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = (1), \quad R = (1).$$

Формула для оптимального управления принимает вид

$$u_{opt} = -[P_2x + P_3\dot{x} + \chi_2].$$

Матричное дифференциальное уравнение Риккати для элементов матрицы

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3 \end{pmatrix}$$

может быть записано в виде системы трёх скалярных дифференциальных уравнений

$$\dot{P}_1 = P_2^2 - 1, \quad \varepsilon \dot{P}_2 = (1 + \varepsilon^2\nu)P_2 + P_2P_3 - P_1, \quad \varepsilon \dot{P}_3 = P_3^2 - 2\varepsilon P_2 + (1 + \varepsilon^2\nu)P_3.$$

Эта система имеет точное инвариантное многообразие

$$P_2 = P_1 - \varepsilon, \quad P_3 = \varepsilon P_1 - \varepsilon^2(1 + \nu),$$

движение на котором описывается скалярным дифференциальным уравнением Риккати

$$\dot{P}_1 = P_1^2 - 2\varepsilon P_1 - (1 - \varepsilon^2).$$

Преобразование

$$P_2 = P_1 - \varepsilon + Z_2, \quad P_3 = \varepsilon(P_1 - \varepsilon(1 + \nu)) + Z_3$$

приводит эту систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= (P_1 - \varepsilon + Z_2)^2 - 1, & \varepsilon \dot{Z}_2 &= Z_2Z_3 + Z_2(1 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 - \varepsilon 2P_1) + Z_3(P_1 - \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{Z}_2 &= Z_3^2 + 2Z_3(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon P_1) - 2\varepsilon Z_2. \end{aligned}$$

Ограничимся рассмотрением регулярных компонентов решений до порядка $O(\varepsilon)$ и правых пограничных функций Z_2, Z_3 до порядка $O(1)$ включительно. Заметим, что $Z_2(1) = O(\varepsilon)$, $Z_3(1) = O(\varepsilon^2)$, что позволяет не принимать во внимание значения Z_2, Z_3 и перейти к рассмотрению только уравнений, описывающих поведение решений на медленном интегральном многообразии:

$$\dot{V}_1 = (V_1 - \varepsilon)^2 - 1, \quad V_1(1) = 0, \quad V_2 = V_1 - \varepsilon, \quad V_3 = \varepsilon V_1 - \varepsilon^2(1 + \nu).$$

Имеем

$$V_1(t, \varepsilon) = \varepsilon + \phi(t, \varepsilon), \quad V_2 = \phi(t, \varepsilon), \quad V_3 = \varepsilon V_1(t, \varepsilon) - \varepsilon^2(1 + \nu).$$

Здесь

$$\phi(t, \varepsilon) = V_2 = \frac{1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon) \exp\{2(t - 1)\}}{1 - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \exp\{2(t - 1)\}}.$$

Скалярные переменные χ_1 и χ_2 удовлетворяют линейной дифференциальной системе

$$\dot{\chi}_1 = \phi\chi_2 + \xi - \phi f, \quad \varepsilon \dot{\chi}_2 = -\chi_1 + (1 + \varepsilon\phi)\chi_2 - \varepsilon(\phi - \varepsilon\nu)f$$

с граничными условиями $\chi_1(1) = 0$, $\chi_2(1) = 0$. Следует отметить, что соответствующая однородная дифференциальная система

$$\dot{\chi}_1 = \phi\chi_2, \quad \varepsilon \dot{\chi}_2 = -\chi_1 + (1 + \varepsilon\phi)\chi_2$$

имеет точное медленное интегральное многообразие $\chi_2 = \chi_1$ и точное быстрое интегральное многообразие $\chi_1 = \varepsilon(\varepsilon + \phi)y_2/(1 - \varepsilon^2)$, т.е. $L = 1$, $H = (\varepsilon + \phi)/(1 - \varepsilon^2)$. Преобразование (33) приводит однородную систему для переменных χ_1 и χ_2 к диагональному виду $\dot{y}_1 = \phi y_1$, $\varepsilon \dot{y}_2 = y_2$, а соответствующую неоднородную систему — к виду

$$\dot{y}_1 = \phi y_1 + \left(1 + \varepsilon \frac{\varepsilon + \phi}{1 - \varepsilon^2}\right)(\xi - \phi f) - \varepsilon(\phi - \varepsilon \nu)f, \quad \varepsilon \dot{y}_2 = y_2 + \varepsilon^2 \nu f - \varepsilon \xi.$$

Пренебрегая выражениями второго и более высоких порядков по малому параметру, получаем дифференциальную систему

$$\dot{y}_1 = \phi y_1 + (1 + \varepsilon \phi)\xi - (1 + \varepsilon 2\phi)f, \quad \varepsilon \dot{y}_2 = y_2 - \varepsilon \xi.$$

Следовательно, для субоптимального управления имеем выражение

$$u_s = -(\phi(\varepsilon)x + \varepsilon \phi(t, 0)\dot{x} + v_1 + \varepsilon \xi),$$

где $v_1 = v_1(t, \varepsilon)$ — решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{v}_1 = \phi(t, \varepsilon)v_1 + (1 + \varepsilon \phi(t, 0))\xi - (1 + \varepsilon 2\phi(t, 0))f, \quad v_1(1, \varepsilon) = 0,$$

которое легко проинтегрировать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье для изучения сингулярно возмущённого оптимального отслеживания задач с заданной эталонной траекторией использован метод декомпозиции, основанный на геометрическом подходе к анализу дифференциальных систем с быстрыми и медленными переменными. Показано, что применение метода декомпозиции позволяет значительно уменьшить размерность сингулярно возмущённых систем матричных и векторных дифференциальных уравнений, возникающих при решении задач оптимального слежения, и тем самым упрощает анализ этих задач. Рассмотрено решение задачи о построении субоптимального управления, не содержащего пограничных функций, и приведён пример.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева, А.Б. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А.Б. Васильева, М.Г. Дмитриев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. — М. : ВИНТИ, 1982. — Т. 20. — С. 3–78.
2. Дмитриев, М.Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
3. Naidu, D.S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview / D.S. Naidu // Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. & Algorithms. — 2002. — V. 9, № 2. — P. 233–278.
4. Sobolev, V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system / V.A. Sobolev // Syst. Control Lett. — 1984. — V. 5. — P. 169–179.

5. Воропаева, Н.В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущённых систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. — М. : Физматлит, 2009. — 256 с.
6. Kokotović, P.V. Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design / P.V. Kokotović, H.K. Khalil, J. O'Reily. — London : Academic Press, 1986. — 371 p.
7. Sontag, E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems / E. Sontag. — 2nd ed. — New York : Springer-Verlag, 1998. — 531 p.
8. Prasov, A. Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise / A. Prasov, H.K. Khalil // Int. J. Adapt. Control Signal Proc. — 2016. — V. 30, № 8–10. — P. 1228–1243.
9. Соболев, В.А. Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления / В.А. Соболев // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 2. — С. 53–64.
10. Воропаева, Н.В. Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущённых дифференциальных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 569–578.

SINGULARLY PERTURBED OPTIMAL TRACKING PROBLEM

V. A. Sobolev

Samara National Research University, Russia
e-mail: hsablem@gmail.com

We consider a singularly perturbed optimal tracking problem with a given etalon trajectory in the case of incomplete information about the state vector in the presence of external disturbances. To analyze the differential equations that arise when solving this problem, the decomposition method is used, which is based on the technique of integral manifolds of fast and slow motions.

Keywords: optimal tracking problem, singular perturbation, integral manifold, decomposition.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 21-11-00202).

REFERENCES

1. Vasil'eva, A.B. and Dmitriev, M.G., Singular perturbations in optimal control problems, *J. Math. Sci.*, 1986, vol. 34, pp. 1579–1629.
2. Dmitriev, M.G. and Kurina, G.A., Singular perturbations in control problems, *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, pp. 1–43.
3. Naidu, D.S., Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview, *Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. & Algorithms*, 2002, vol. 9, pp. 233–278.
4. Sobolev, V.A., Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system, *Syst. Control Lett.*, 1984, vol. 5, pp. 169–179.
5. Voropaeva, N.V. and Sobolev, V.A., *Geometricheskaya dekompozitsiya singulyarno vozmushchennykh sistem* (Geometric decomposition of singularly perturbed systems), Moscow: Fizmatlit, 2009.
6. Kokotović, P.V., Khalil, H.K., and O'Reily, J., *Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design*, London: Academic Press, 1986.
7. Sontag, E., *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1998.
8. Prasov, A. and Khalil, H.K., Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise, *Int. J. Adapt. Control Signal Proc.*, 2016, vol. 30, no. 8–10, pp. 1228–1243.
9. Sobolev, V.A., Singular perturbations in a linear-quadratic problem of optimal control, *Autom. Remote Control*, 1991, vol. 52, pp. 180–189.
10. Voropaeva, N.V. and Sobolev, V.A., A constructive method for splitting nonlinear singularly perturbed differential systems, *Differ. Equat.*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 528–537.