ISSN 0374-0641

Том 60, Номер 3

Март 2024

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЖУРНАЛ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ДУ

300 лет Российская Академия Наук

НАУКА

1727

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 3, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 291–297

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

И. С. Ломов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 02.09.2023 г., после доработки 18.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Оператор Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом определён на отрезке числовой прямой. Заданы условия сопряжения во внутренней точке отрезка. Потенциал оператора может иметь неинтегрируемую особенность. Для сильного решения задачи Коши для уравнения с параметром получены асимптотические формулы и оценки на каждом из отрезков гладкости решения.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, сингулярный коэффициент, асимптотическое представление решения, условия сопряжения, лемма Гронуолла–Беллмана.

DOI: 10.31857/S0374064124030015, EDN: PSEVBO

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В книге [1, с. 28–38] представлены исследования автора по вопросам спектральной теории дифференциальных операторов второго порядка на отрезке с нелокальными краевыми условиями, в частности, изучены спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля с интегрируемым на отрезке потенциалом. Цель данной статьи — показать, что часть из этих свойств справедлива и для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами, имеющими неинтегрируемые особенности. Получены асимптотические формулы для решения задачи Коши для уравнения с параметром, которые позволяют получить асимптотические представления для собственных функций оператора с краевыми условиями и для сопряжённого оператора. Установив асимптотические формулы для собственных значений, доказав справедливость неравенства Бесселя для прямого и сопряжённого операторов и справедливость теоремы полноты для каждого из операторов, применим теорему Бари и придём к теореме о безусловной базисности систем собственных функций операторов в пространстве $\mathcal{L}^2$.

Изучим свойства решения при произвольных значениях спектрального параметра λ следующей модельной задачи:

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \quad x\in(0,1), \tag{1}$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y[1/2]=0, \quad y'[1/2]=y'(0)=1. \tag{2}$$

Будем изучать *сильное решение задачи* — решение, удовлетворяющее уравнению (1) почти всюду на интервале $G=(0,1)$ при выполнении условий (2) в обычном смысле.

Задачу (1), (2) рассматриваем на множестве функций $y(x)$, абсолютно непрерывных вместе с первой производной на каждом из отрезков $[0,1/2]$ и $[1/2,1]$ и принадлежащих классу $\mathcal{L}^2(G)$ функций, интегрируемых с квадратом на множестве G.

Через $y[1/2]$ обозначен скачок функции $y(x)$ в точке $x=1/2$: $y[1/2]=y(1/2+0)-y(1/2-0)$, $q(x)$ — комплекснозначная функция из класса $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)=\left\{f(x): \int_0^1 x^{1-\varepsilon}|f(x)|\,dx<\infty\right\}$ для некоторого числа $\varepsilon\in[0,1]$. Таким образом, потенциал $q(x)$ может иметь неинтегрируемую особенность в нуле.

Отметим, что краевая задача для уравнения (1) с потенциалом $q(x)\in\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)$, $\varepsilon\in(1/2,1]$, исследована в статье [2]. Рассмотрены гладкие на интервале G решения. Получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений соответствующего оператора. Решена обратная задача по нахождению потенциала. Некоторые идеи из этой статьи используются для получения оценок решения задачи (1), (2).

В работе [3] изучена краевая задача для уравнения (1) с потенциалом из класса $\mathcal{L}^{1,\varrho}(G)$, т.е. $\varrho(x)q(x)\in\mathcal{L}^1(G)$, где через $\varrho(x)$ обозначено расстояние от точки x до границы интервала G. Рассмотрены гладкие на интервале G решения, найдены условия безусловной базисности в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$ системы корневых функций оператора.

В статье [4] для общего дифференцильного оператора второго порядка на интервале G (в случае оператора Шрёдингера потенциал $q(x)\in\mathcal{L}^{1,\sqrt{\varrho}}(G)$) найдены условия, гарантирующие безусловную базисность системы корневых функций в пространстве $\mathcal{L}^2(G)$. Рассмотрены нерегулярные решения. В [3, 4] корневые функции понимаются в обобщённом по В.А. Ильину смысле [5, с. 347].

Основы теории сингулярных задач Коши и теории сингулярных краевых задач на примере двухточечных задач и задач об ограниченных и монотонных решениях дифференциальных уравнений второго порядка изложены в фундаментальной работе [6].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Выведем асимптотические формулы для функции $y(x,\mu,q)\equiv y(x)$ — решения задачи (1), (2). Здесь $\mu^2=\lambda$, $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$.

Методом вариации постоянных найдём интегральные уравнения для функции $y(x)$ на каждом из отрезков $[0,1/2]$ и $[1/2,1]$. Пусть $\mu\neq 0$, ищем решение задачи в виде $y(x)=c_1(x)\sin(\mu x)+c_2(x)\cos(\mu x)$ и получим следующие уравнения:

$$y(x)=\frac{\sin(\mu x)}{\mu}+\int\limits_0^x\frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu}q(t)y(t)\,dt,\quad x\in[0,1/2],\tag{3}$$

$$y(x)=\frac{\sin(\mu x)}{\mu}+\frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu}+\int\limits_0^x\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}q(t)y(t)\,dt,\quad x\in[1/2,1],\tag{4}$$

где функция $y(t)$ при $t\in[0,1/2]$ в уравнении (4) является решением уравнения (3).

Прежде чем переходить к получению асимптотических формул для функции $y(x)$, убедимся в том, что особенность потенциала $q(x)$ в точке $x=0$ не мешает существованию интегралов в правых частях равенств (3), (4). Из леммы 1.1 [6] следует, что для решения уравнения (1) с потенциалом $q(x)$ из рассматриваемого класса справедлива оценка $|y(x)|\leqslant cx$ для значений $x>0$, близких к точке $x=0$. Это означает, что поведение функции $y(x)$ в окрестности нуля компенсирует возможную особенность потенциала.

Будем использовать обозначение $\nu=|\operatorname{Im}\mu|$.

Лемма 1. *Пусть коэффициент $q(x)$ уравнения (1) принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)$ для некоторого числа $\varepsilon\in[0,1]$. Тогда для произвольного комплексного числа $\mu\neq 0$ дифференциальное уравнение (1) при начальных условиях (2) в промежутке $[0,1/2]$ имеет единственное решение $y(x)$, допускающее оценки*

$$|y(x)|\leqslant r(\delta,\mu,x)|\mu|^{-\delta}x^{1-\delta},\quad x\in[0,1/2],\quad \delta\in[0,\varepsilon],\tag{5}$$

$$\left|y(x)-\frac{\sin(\mu x)}{\mu}\right| \leqslant r(\delta,\mu,x)|\mu|^{-1-\delta}\int\limits_0^x t^{1-\delta}|q(t)|dt, \quad x\in[0,1/2], \quad \delta\in[0,\varepsilon], \tag{6}$$

где $r(\delta,\mu,x)=\exp\{\nu x+|\mu|^{-\delta}\int_0^x t^{1-\delta}|q(t)|dt\}$.

Доказательство. В силу леммы 1.1 [6] задача (1), (2) имеет единственное решение y. Прежде чем доказывать оценки леммы, установим некоторые неравенства, связанные с функцией $\sin z$, $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$:

$$|\sin z|\leqslant |z|\operatorname{ch} y\leqslant |z|e^{|y|}, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{7}$$

Действительно, для значений $|z|\leqslant 1$ получаем оценку (7), исходя из известных соотношений

$$|\sin z|^2=\operatorname{sh}^2 y+\sin^2 x\leqslant y^2\operatorname{ch}^2 y+x^2\operatorname{ch}^2 y=(x^2+y^2)\operatorname{ch}^2 y,$$

где использованы неравенства $\operatorname{ch} y\geqslant 1$ и $|\operatorname{th} y|\leqslant |y|$ для $y\in[-1,1]$.

Для $|z|>1$ имеем $|\sin z/z|\leqslant |\sin z|\leqslant \operatorname{ch} y$, тем самым устанавливаем оценку (7) для остальных значений z.

При $\mu\in\mathbb{C}$, $\mu\neq 0$, $0\leqslant t_j-t_{j+1}\leqslant 1$, $t_j,t_{j+1}\in[0,1]$, из неравенства (7) следует оценка

$$\frac{|\sin(\mu(t_j-t_{j+1}))|}{|\mu|t_j}\leqslant e^{\nu(t_j-t_{j+1})}. \tag{8}$$

Если число $\delta\in[0,1]$, то из (8) получим

$$\frac{|\sin(\mu(t_j-t_{j+1}))|}{|\mu|t_j^{1-\delta}}\leqslant e^{\nu(t_j-t_{j+1})}.$$

Уточним последнюю оценку. Используя неравенство $|\sin z|\leqslant\operatorname{ch} y$, справедливое для всех значений $z\in\mathbb{C}$, $y=\operatorname{Im} z$, и оценку (8), будем иметь

$$\frac{|\sin(\mu(t_j-t_{j+1}))|}{|\mu|t_j^{1-\delta}}=\frac{|\sin(\mu(t_j-t_{j+1}))|^{\delta}}{|\mu|^{\delta}}\frac{|\sin(\mu(t_j-t_{j+1}))|^{1-\delta}}{(|\mu|t_j)^{1-\delta}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|\mu|^{\delta}}e^{\delta\nu(t_j-t_{j+1})}e^{(1-\delta)\nu(t_j-t_{j+1})}=\frac{1}{|\mu|^{\delta}}e^{\nu(t_j-t_{j+1})},$$

т.е.

$$\frac{|\sin(\mu(t_j-t_{j+1}))|}{|\mu|t_j^{1-\delta}}\leqslant\frac{1}{|\mu|^{\delta}}e^{\nu(t_j-t_{j+1})}, \quad \mu\neq 0. \tag{9}$$

Из оценки (9) при $\delta\in[0,1]$, $\mu\in\mathbb{C}$, $\mu\neq 0$, получим

$$\frac{|\sin(\mu t_n)|}{|\mu|t_n^{1-\delta}}\leqslant\frac{1}{|\mu|^{\delta}}e^{\nu t_n}. \tag{10}$$

Для установления оценки (5) используем представление (3) и неравенство (10). Имеем

$$|y(x)|\leqslant e^{\nu x}|\mu|^{-\delta}x^{1-\delta}+|\mu|^{-\delta}\int\limits_0^x e^{\nu(x-t)}(x-t)^{1-\delta}|q(t)y(t)|\,dt\leqslant e^{\nu x}|\mu|^{-\delta}x^{1-\delta}\left(1+\int\limits_0^x e^{-\nu t}|q(t)y(t)|\,dt\right)$$

и, следовательно,

$$e^{-\nu x}|\mu|^{\delta}x^{\delta-1}|y(x)|\leqslant 1+|\mu|^{-\delta}\int\limits_0^x t^{1-\delta}|q(t)|\left(e^{-\nu t}|\mu|^{\delta}t^{\delta-1}|y(t)|\right)dt, \quad x\in(0,1/2].$$

Из этого неравенства, в силу леммы Гроноулла–Беллмана [7, с. 49; 8, с. 46], вытекает оценка (5).

С учётом полученной оценки (5) находим

$$\left|\int_0^x \frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu}\,q(t)y(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\mu|}\int_0^x e^{\nu(x-t)}|q(t)||y(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{|\mu|}\int_0^x e^{\nu(x-t)}|q(t)|r(\delta,\mu,t)\frac{t^{1-\delta}}{|\mu|^\delta}\,dt =$$

$$= \frac{1}{|\mu|^{1+\delta}}\int_0^x e^{\nu(x-t)}t^{1-\delta}|q(t)|\exp\left\{\nu t + \frac{1}{|\mu|^\delta}\int_0^t t_1^{1-\delta}|q(t_1)|\,dt_1\right\}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\mu|^{1+\delta}}\exp\left\{\nu x + \frac{1}{|\mu|^\delta}\int_0^x t^{1-\delta}|q(t)|\,dt\right\}\int_0^x t^{1-\delta}|q(t)|\,dt = r(\delta,\mu,x)\frac{1}{|\mu|^{1+\delta}}\int_0^x t^{1-\delta}|q(t)|\,dt.$$

Отсюда и из представления (3) получаем оценку (6):

$$\left|y(x) - \frac{\sin(\mu x)}{\mu}\right| = \left|\int_0^x \frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu}q(t)y(t)\,dt\right| \leqslant r(\delta,\mu,x)\frac{1}{|\mu|^{1+\delta}}\int_0^x t^{1-\delta}|q(t)|\,dt, \quad x\in[0,1/2].$$

Лемма доказана.

Используем интегральное уравнение (4) для получения оценок решения задачи (1), (2) при $x\in[1/2,1]$. Обозначим

$$c_q = \|\widetilde{q}\|_1\, e^{\|\widetilde{q}\|_1}, \quad \widetilde{q}(x) = x^{1-\varepsilon}q(x), \quad y_0(x) = \int_0^{1/2}\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}q(t)y(t)\,dt, \quad x\in[1/2,1],$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве $\mathcal{L}^1(G)$.

Лемма 2. *Пусть коэффициент $q(x)$ уравнения (1) принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)$ для некоторого числа $\varepsilon\in[0,1]$. Тогда для любого комплексного параметра μ, $|\mu|\geqslant 1$, задача (1), (2) имеет единственное решение $y(x)$, допускающее оценки*

$$|y(x)| \leqslant \frac{2+c_q}{|\mu|}e^{2\nu+\|\widetilde{q}\|_1}, \quad |y_0(x)| \leqslant \frac{r(\varepsilon,\mu,1)}{|\mu|^{1+\varepsilon}}\int_0^{1/2} t^{1-\varepsilon}|q(t)|\,dt, \quad x\in[1/2,1].$$

Для этого решения справедливо равенство

$$y(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu} + y_0(x) + O(\mu^{-2}), \quad x\in[1/2,1], \tag{11}$$

где слагаемое $O(\mu^{-2})$ удовлетворяет оценке

$$|O(\mu^{-2})| \leqslant 2c_q\frac{2+c_q}{|\mu|^2}e^{3\nu}, \quad x\in[1/2,1].$$

Доказательство. Запишем интегральное уравнение (4) для функции $y(x)$ в следующем виде:

$$y(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu} + y_0(x) + \int_{1/2}^x \frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu}q(t)y(t)\,dt. \tag{12}$$

Применив неравенства (5) и (7), получим оценку слагаемого $y_0(x)$:

$$|y_0(x)| \leqslant \int\limits_0^{1/2} \frac{e^{\mu(x-t)}}{|\mu|} |q(t)| r(\varepsilon,\mu,t)\, \frac{t^{1-\varepsilon}}{|\mu|^{\varepsilon}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \int\limits_0^{1/2} e^{\nu(x-t)} t^{1-\varepsilon} |q(t)| \exp\left\{\nu t + \frac{1}{|\mu|^{\varepsilon}} \int\limits_0^{t} t_1^{1-\varepsilon} |q(t_1)|\, dt_1\right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \exp\left\{\nu x + \frac{1}{|\mu|^{\varepsilon}} \int\limits_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)|\, dt\right\} \int\limits_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \exp\left\{\nu + \frac{1}{|\mu|^{\varepsilon}} \int\limits_0^{1} t^{1-\varepsilon} |q(t)|\, dt\right\} \int\limits_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)|\, dt = \frac{r(\varepsilon,\mu,1)}{|\mu|^{1+\varepsilon}} \int\limits_0^{1/2} t^{1-\varepsilon} |q(t)|\, dt, \quad x \in [1/2, 1],$$

здесь $\mu \neq 0$ — любое комплексное число. Если $|\mu| \geqslant 1$, то справедлива оценка $|y_0(x)| \leqslant \leqslant c_q |\mu|^{-1-\varepsilon} e^{\nu}$.

Представим решение интегрального уравнения (12) в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x), \quad c_0(x) = \frac{\sin(\mu x)}{\mu} + \frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu} + y_0(x), \quad x \in [1/2, 1],$$

$$c_n(x) = \int\limits_{1/2}^{x} dt_1 \int\limits_{1/2}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{1/2}^{t_{n-1}} \left[\frac{\sin(\mu(x-t_1))}{\mu} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(\mu(t_j - t_{j+1}))}{\mu} c_0(t_n) \prod_{j=1}^{n} \widetilde{q}(t_j)\right] dt_n.$$

Для коэффициента $c_0(x)$ имеет место неравенство

$$|c_0(x)| \leqslant \frac{2 + c_q}{|\mu|}\, e^{\nu}, \quad x \in [1/2, 1], \quad |\mu| \geqslant 1.$$

Чтобы получить оценки для остальных слагаемых ряда, воспользуемся неравенствами (9), (10) и равенством

$$\int\limits_0^{x} f(t_1) \int\limits_0^{t_1} f(t_2) \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n\, dt_{n-1} \ldots dt_1 = \frac{1}{n!} \left(\int\limits_0^{x} f(t)\, dt\right)^n, \quad n \geqslant 1,$$

для доказательства которого нужно последовательно вводить новые переменные

$$\xi_1 = \int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n, \quad \xi_2 = \int\limits_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})\, dt_{n-1}, \quad \ldots, \quad \xi_{n-1} = \int\limits_0^{t_1} f(t_2)\, dt_2$$

и интегрировать функции ξ_k в промежутках $\left[0, \int_0^{t_{n-k}} f(t_{n-k+1})\, dt_{n-k+1}\right]$.

Тем самым будет установлена оценка для решения уравнения

$$|y(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x)| \leqslant \frac{2 + c_q}{|\mu|}\, e^{2\nu + \|\widetilde{q}\|_1}, \quad |\mu| \geqslant 1, \quad x \in [1/2, 1].$$

Полученную для функции $y(x)$ оценку применим для доказательства равенства (11):

$$|y(x)-c_0(x)|=\left|\int\limits_{1/2}^{x}\frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu}q(t)y(t)\,dt\right|\leqslant\frac{2+c_q}{|\mu|}\,e^{2\nu+\|\widetilde{q}\|_1}\frac{e^{\nu}}{|\mu|}\|\widetilde{q}\|_1=2c_q\frac{2+c_q}{|\mu|^2}\,e^{3\nu},$$

где $|\mu|\geqslant 1,\ x\in[1/2,1]$. Эта оценка доказывает соотношение (11). Лемма доказана.

Отметим, что лемму 2 можно было бы доказать с помощью неравенства Гронуолла–Беллмана, как и при доказательстве леммы 1. При этом можно допустить наличие аналогичной сингулярной особенности у потенциала $q(x)$ и в точке $x=1$.

Сформулируем доказанные утверждения в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть коэффициент $q(x)$ уравнения (1) принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{1-\varepsilon}(G)$ для некоторого числа $\varepsilon\in[0,1]$. Тогда для любого комплексного параметра $\mu\neq 0$ задача (1), (2) имеет единственное решение $y(x)$, для которого справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$y(x)=\frac{\sin(\mu x)}{\mu}+O\left(\frac{e^{\nu}}{\mu^{1+\varepsilon}}\right),\quad x\in[0,1/2],$$

$$y(x)=\frac{\sin(\mu x)}{\mu}+\frac{\sin(\mu(x-1/2))}{\mu}+O\left(\frac{e^{\nu}}{\mu^{1+\varepsilon}}\right)+O\left(\frac{e^{3\nu}}{\mu^2}\right),\quad x\in[1/2,1],$$

здесь $|\mu|\geqslant 1,\ \nu=|\operatorname{Im}\mu|$, оценки выражений $O(\cdot)$ в правых частях равенств равномерны по переменной x.

Замечание. Рассмотрим уравнение (1) с краевыми условиями $y(0)=0,\ y(1)=0$ и условиями сопряжения (2) в точке $x=1/2$. Если полученное в теореме 1 решение задачи (1), (2) удовлетворяет условию $y(1)=0$, то для решения краевой задачи справедливы соотношения теоремы 1. В противном случае аналогичные оценки можно получить, изменив интегральные уравнения (3), (4). Решение $\widetilde{y}(x)$ краевой задачи можно представить в виде $\widetilde{y}(x)=\widetilde{y}'(0)y(x)$, где $y(x)$ — решение задачи (1), (2). При этом равенство $y(1)\equiv y(1,\mu)=0$ будет уравнением на собственные значения соответствующего дифференциального оператора.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов, И.С. Спектральный метод В.А. Ильина. Несамосопряжённые операторы. I. Оператор второго порядка. Базисность и равномерная сходимость спектральных разложений / И.С. Ломов. — М. : МАКС Пресс, 2019. — 230 с.
2. Жорницкая, Л.А. Об одной теореме единственности для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с потенциалом, имеющим неинтегрируемую особенность / Л.А. Жорницкая, В.С. Серов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2125–2134.
3. Kritskov, L.V. Estimates for root functions of a singular second-order differential operator / L.V. Kritskov // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications / Eds. T.S. Kalmenov, E.D. Nursultanov, M.V. Ruzhansky, M.A. Sadybekov. — Cham : Springer, 2017. — P. 245–257.

4. Ломов, И.С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 9. — С. 1550–1563.
5. Ильин, В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов / В.А. Ильин. М. : Наука, 1991. — 386 с.
6. Кигурадзе, И.Т. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / И.Т. Кигурадзе, Б.Л. Шехтер // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Новые достижения. — 1987. — Т. 30. — С. 105–201.
7. Кигурадзе, И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. — Тбилисси : Изд-во Тбилисск. ун-та. 1975. — 351 с.
8. Беллман, Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман ; пер. с англ. А.Д. Мышкиса. — М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1954. — 216 с.

STUDY OF THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE SOLUTION TO A PROBLEM WITH A PARAMETER FOR THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH A SINGULAR POTENTIAL

I. S. Lomov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: lomov@cs.msu.ru

The Sturm–Liouville operator with a singular potential on an interval with conjugation conditions at the interior point of the interval is considered. The operator potential may have a non-integrable singularity. For a strong solution of the Cauchy problem for an equation with a parameter, asymptotic formulas and estimates are obtained on each of the smoothness segments of the solution.

Keywords: differential equation, singular coefficient, asymptotic representation of solution, conjugation conditions, Gronwall–Bellman lemma.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program for the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Lomov, I.S., *Spektral'nyy metod V.A. Il'ina. Nesamosopryazhonnyye operatory. I. Operator vtorogo poryadka. Bazisnost' i ravnomernaya skhodimost' spektral'nykh razlozheniy* (The Il'in Spectral Method. Non-Self-Adjoint Operators. I. Operator of the Second Order. Basis Property and Uniform Convergence of Spectral Expansions), Moscow: MAKS Press, 2019.
2. Zhornitskaya, L.A. and Serov, V.S., On a uniqueness theorem for the Sturm–Liouville operator on an interval with a potential having a non-integrable singularity, *Differ. Uravn.*, 1993, vol. 29, no. 12, pp. 2125–2134.
3. Kritskov, L.V., Estimates for root functions of a singular second-order differential operator, *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications*, T.S. Kalmenov, E.D. Nursultanov, M.V. Ruzhansky, and M.A. Sadybekov eds., Cham: Springer, 2017, pp. 245–257.
4. Lomov, I.S., A Theorem on the Unconditional Basis Property of the Root Vectors of Loaded Second-Order Differential Operators, *Differ. Equat.*, 1991, vol. 27, no. 9, pp. 1098–1107.
5. Il'in, V.A., *Spectral Theory of Differential Operators*, New York: Springer, 1995.
6. Kiguradze, I.T. and Shekhter, B.L., Singular boundary value problems for ordinary differential equations of the second order, *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Nov. dostizh.*, 1987, vol. 30, pp. 105–201.
7. Kiguradze, I.T., *Nekotoryye singulyarnyye krayevyye zadachi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Some Singular Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations), Tbilissi: Izd-vo Tbilissk. un-ta, 1975.
8. Bellman, R., Stability Theory of Differential Equations, New York–Toronto–London: McGraw Hill, 1953.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 298–311

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.923+517.925.54

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА НА ПОЛУОСИ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

А. Э. Маматов

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Узбекистан

e-mail: aematatov@mail.ru

Поступила в редакцию 14.07.2023 г., после доработки 17.10.2023 г.; принята к публикации 13.11.2023 г.

Изучена прямая задача рассеяния на полуоси для системы дифференциальных уравнений Дирака в случае конечной плотности с граничным условием $y_1(0)=y_2(0)$. Исследован спектр, построены резольвента, а также спектральное разложение по собственным функциям оператора Дирака.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, непрерывный спектр, собственное значение, теорема разложения по собственным функциям.

DOI: 10.31857/S0374064124030029, EDN: PPIXSE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гильбертовом пространстве вектор-функций $L_2^2(0,+\infty)$ рассмотрим самосопряжённый оператор Дирака D, порождённый дифференциальным выражением вида

$$dy = i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{dy}{dx} + i\begin{pmatrix}0 & -\overline{q(x)}\\ q(x) & 0\end{pmatrix}y=\lambda y,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{1}$$

с граничным условием

$$y_1(0)=y_2(0), \tag{2}$$

где функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{+\infty}(1+x)|q(x)-m|dx<\infty, \tag{3}$$

а $m>0$ — масса.

В качестве области определения этого оператора мы принимаем множество D_D всех вектор-функций f, абсолютно непрерывных в каждом промежутке $[0,a]$, $a>0$, таких,что $f, d(f)\in L_2^2(0,+\infty)$ и $f_1(0)=f_2(0)$. При $f\in D_D$ будем полагать, что $Df=d(f)$.

Обратная задача рассеяния для системы уравнений (1) на полупрямой с граничным условием $y_1(0)=0$ рассматривалась в статье [1]. Обобщение на случай $2n$-компонентных векторов было получено в работе [2]. Для системы уравнений (1) с массой $m=0$ обратная задача решена в работе [3]. Обратная задача рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля на полупрямой изучена в [4]. Следует отметить, что задачи для несамосопряжённого оператора Дирака на всей оси, а также на полуоси, исследованы в работах [5–9].

В настоящей статье решается прямая задача рассеяния для системы уравнений (1) с граничным условием (2).

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА

Известно [10, стр. 57], что если выполняется условие (3), то система уравнений (1) при действительных λ и $|\lambda|>m$ имеет специальные решения

$$f^+(x,\lambda)=\begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}+\int\limits_x^{+\infty}\Gamma(x,y)\begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1 \end{pmatrix} e^{iky}dy,$$

$$f^-(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda-k)/m \end{pmatrix} e^{-ikx}+\int\limits_x^{+\infty}\Gamma(x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda-k)/m \end{pmatrix} e^{-iky}dy,$$

где $k=\sqrt{\lambda^2-m^2}$, $\operatorname{sign}k(\lambda)=\operatorname{sign}\lambda$, ядро $\Gamma(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,y)+\sigma_3\frac{\partial}{\partial y}\Gamma(x,y)\sigma_3-U_0(x)\Gamma(x,y)+\sigma_3\Gamma(x,y)\sigma_3 U=0$$

и условиям $\Gamma(x,x)-\sigma_3\Gamma(x,x)\sigma_3=U-U_0(x)$, $\lim_{y\to\infty}\Gamma(x,y)=0$, где

$$\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad U_0=\begin{pmatrix} 0 & \overline{q(x)} \\ q(x) & 0 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{pmatrix},$$

причём для элементов матрицы $\Gamma(x,y)$ справедливы оценки

$$|\Gamma_{ij}|\leqslant C_1/\big((1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}\big),\quad i\neq j;\quad |\Gamma_{ii}|\leqslant C_1/(1+t)^{1+\varepsilon},$$

C_1 и ε — положительные константы.

При $\lambda\in(-\infty,-m)\cup(m,+\infty)$ имеет место свойство инволюции $\sigma_1 f^-(x,\lambda)=\overline{f^+(x,\lambda)}$, где

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для ядра $\Gamma(x,y)$ справедливо свойство инволюции $\overline{\Gamma}(x,y)=\sigma_1\Gamma(x,y)\sigma_1$.

Непрерывный спектр задачи (1), (2) состоит из вещественных λ, удовлетворяющих условию $\lambda^2\geqslant m^2$. Множество таких λ обозначим через R_m, т.е.

$$R_m=\{\lambda:\lambda\in R^1,\lambda^2\geqslant m^2\}=(-\infty,-m)\cup(m,+\infty).$$

Аналитические свойства решений $f^{\pm}(x,\lambda)$ естественно формулировать на римановой поверхности Γ функции $k(\lambda)$. Эта поверхность состоит из двух частей Γ_+ и Γ_- комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами на вещественной оси от $-\infty$ до $-m$ и от m до $+\infty$ (рис. 1) с отождествлёнными надлежащим образом берегами разрезов.

Точку на поверхности Γ, отличную от точек ветвления $\pm m$, будем задавать парой (λ,ε), где λ — комплексное число, а $\varepsilon=\pm1$, причём $\varepsilon=1$ на листе Γ_+ и $\varepsilon=-1$ на листе Γ_-. Функция $k(\lambda)$ вводится на Γ формулой $k(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-m^2}$, где $\pm\operatorname{Im}k(\lambda)\geqslant0$ на листах $\Gamma_\pm$ соответственно. Альтернативным образом лист Γ_+ характеризуется условием $k(\lambda+i0)>0$ при $\operatorname{Im}\lambda=0$ и $\lambda>m$; а $k(\lambda+i0)<0$ при $\operatorname{Im}\lambda=0$, $\lambda<-m$. Таким образом, равенство

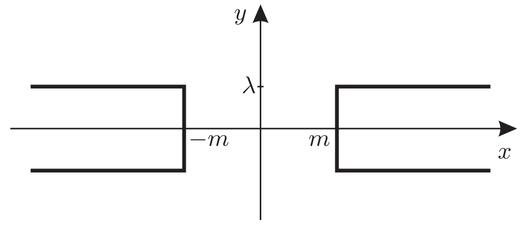

Рис. 1. Риманова поверхность.

$\operatorname{sign} k(\lambda) = \operatorname{sign} \lambda$ выполняется для предельных значений k на верхних берегах разрезов на листе Γ_+ и на нижних берегах разрезов на листе Γ_-.

В дальнейшем будем опускать в тексте зависимость функции $k(\lambda)$ от λ, а в формулах, где участвуют k и λ, всегда подразумевается, что k является функцией от λ.

При значениях λ вне разрезов вектор-функции

$$f_0^+(x,\lambda) = \begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad f_0^-(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda-k)/m \end{pmatrix} e^{-ikx}$$

не являются ограниченными функциями от x. При этом $f_0^+(x,\lambda)$ на Γ_+ и $f_0^-(x,\lambda)$ на Γ_- экспоненциально убывают при $x \to +\infty$.

Функция $f^+(x,\lambda)$ $(f^-(x,\lambda))$ допускает аналитическое продолжение по λ в верхнюю (нижнюю) полуплоскость, причём при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ $f^+(x,\lambda) \in L_2^2(0,+\infty)$ (при $\operatorname{Im}\lambda < 0$ $f^-(x,\lambda) \in$ $\in L_2^2(0,+\infty)$).

При фиксированных x и $|\lambda| \to \infty$ имеют место асимптотики

$$f^+(x,\lambda)e^{-ikx} = \begin{pmatrix} i(k-\lambda)/m \\ 1 \end{pmatrix} + O(1),$$

если λ на листе Γ_+, и

$$f^-(x,\lambda)e^{ikx} = \begin{pmatrix} 1 \\ i(\lambda-k)/m \end{pmatrix} + O(1),$$

если λ на листе Γ_-.

На поверхности Γ введём инволюцию $\lambda \to \overline{\lambda}$, $k \to -\overline{k}$, которую можно задать следующим образом: $J(\lambda,\varepsilon) = (\overline{\lambda},\varepsilon)$, так что она оставляет на месте листы $\Gamma_\pm$. При всех λ из Γ_+ и Γ_-, соответственно, имеем

$$\overline{f^+(x,J(\lambda))} = -\frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^+(x,\lambda) \quad \text{и} \quad \overline{f^-(x,J(\lambda))} = \frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^-(x,\lambda).$$

В частности, отсюда получим связь значений функций $f^\pm(x,\lambda)$ на верхних и нижних берегах разрезов соответствующих листов аналитичности:

$$\overline{f^+(x,\lambda-i0)} = -\frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^+(x,\lambda+i0), \quad \overline{f^-(x,\lambda-i0)} = \frac{\lambda+k}{im}\sigma_1 f^-(x,\lambda+i0),$$

где λ вещественно, $|\lambda| \geqslant m$.

Во всей полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|f^+(x,\lambda)| \leqslant \exp\left\{-\operatorname{Im}\lambda x + \int_x^{+\infty} |q(y)-m|\,dy\right\}, \tag{4}$$

где $|f^+(x,\lambda)| = |f_1^+(x,\lambda)| + |f_2^+(x,\lambda)|$ — векторная норма.

Вронскианом двух решений $f(x,\lambda)$ и $g(x,\lambda)$ уравнения (1) называется выражение

$$W(f,g) = f_1(x,\lambda)g_2(x,\lambda) - f_2(x,\lambda)g_1(x,\lambda). \tag{5}$$

Легко доказать, что $W(f,g)$ не зависит от x, т.е. $dW(f,g)/dx = 0$, а решения $f(x,\lambda)$ и $g(x,\lambda)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(f,g) \neq 0$.

При действительных λ, $|\lambda|>m$, решения $f^+(x,\lambda)$ и $f^-(x,\lambda)$ линейно независимы, что видно из следующих равенств:

$$W(f^+,f^-)=f_1^+(x,\lambda)f_2^-(x,\lambda)-f_2^+(x,\lambda)f_1^-(x,\lambda)=\lim_{x\to+\infty}W(f^+,f^-)=-\frac{2k}{k+\lambda}.$$

В дальнейшем важную роль будет играть решение $\Phi(x,\lambda)$ системы уравнений (1) с начальным условием

$$\Phi_1(0,\lambda)=\Phi_2(0,\lambda)=1.$$

Известно [3], что это решение удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\Phi_1(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}-\frac{1}{i}\int_0^x e^{\lambda(y-x)}\overline{q(y)}\Phi_2(y,\lambda)dy,$$

$$\Phi_2(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\frac{1}{i}\int_0^x e^{i\lambda(x-y)}q(y)\Phi_1(y,\lambda)dy.$$

Очевидно, что для любого $x\geqslant 0$ векторная функция $\Phi(x,\lambda)$ является целой аналитической функцией параметра λ. Рассмотрим теперь связь решения $\Phi(x,\lambda)$ с решениями $f^\pm(x,\lambda)$.

Лемма 1. *При всех вещественных значениях λ, $|\lambda|>m$, справедливо тождество*

$$-\frac{2k}{k+\lambda}\,\frac{\Phi(x,\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}=f^-(x,\lambda)+S(\lambda)f^+(x,\lambda), \tag{6}$$

где

$$S(\lambda)=\frac{f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}=\overline{S^{-1}(\lambda)}.$$

Доказательство. Так как функции $f^+(x,\lambda)$ и $f^-(x,\lambda)$ при вещественных λ, $|\lambda|>m$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), то

$$\Phi(x,\lambda)=A(\lambda)f^+(x,\lambda)+B(\lambda)f^-(x,\lambda).$$

Из формулы (5) вытекает, что

$$W(\Phi,f^-)=-\frac{2k}{k+\lambda}A(\lambda),\quad W(\Phi,f^+)=\frac{2k}{k+\lambda}B(\lambda).$$

Здесь

$$W(\Phi,f^\pm)=\lim_{x\to 0}\big[\Phi_1(x,\lambda)f_2^\pm(x,\lambda)-\Phi_2(x,\lambda)f_1^\pm(x,\lambda)\big]=f_2^\pm(0,\lambda)-f_1^\pm(0,\lambda)=f_2^\pm(\lambda)-f_1^\pm(\lambda),$$

т.е.

$$A(\lambda)=-\frac{k+\lambda}{2k}\big[f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)\big],\quad B(\lambda)=-\frac{k+\lambda}{2k}\big[f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)\big].$$

Поэтому

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{k+\lambda}{2k}\big[f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)\big]f^+(x,\lambda)-\frac{k+\lambda}{2k}\big[f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)\big]f^-(x,\lambda).$$

Отсюда имеем

$$-\frac{2k}{k+\lambda}\frac{\Phi(x,\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}=S(\lambda)f^+(x,\lambda)+f^-(x,\lambda),$$

где

$$S(\lambda)=\frac{f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}=\frac{\overline{f_1^+(\lambda)}-\overline{f_2^+(\lambda)}}{\overline{f_2^-(\lambda)}-\overline{f_1^-(\lambda)}}=\overline{\left(\frac{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}{f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)}\right)}=\overline{S^{-1}(\lambda)}.$$

Лемма доказана.

Функция

$$S(\lambda)=\frac{f_2^-(\lambda)-f_1^-(\lambda)}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)} \tag{7}$$

называется *функцией рассеяния задачи* (1), (2).

Рассмотрим некоторые простейшие свойства функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$.

Лемма 2. *Функция* $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)\neq 0$ *для всех* λ *при* $\operatorname{Im}\lambda>0$.

Доказательство. Докажем это утверждение от противного. Допустим, что при некотором λ_0, $\operatorname{Im}\lambda_0>0$, выполняется равенство $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$. Следовательно, функция $f^+(x,\lambda_0)\in L_2^2(0,+\infty)$ удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2). Отсюда вытекает, что самосопряжённая задача (1), (2) имеет комплексное собственное значение λ_0, но это невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 3. *Для всех* λ *из интервалов* $(-\infty,-m)\cup(m,+\infty)$ *функция* $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ *отлична от нуля.*

Доказательство. При вещественном λ, $|\lambda|>m$, вронскиан двух решений уравнения (1) не зависит от x и $W(f^+,f^-)=-2k/(k+\lambda)$. Пусть утверждение леммы неверно, т.е. существует точка $\lambda_0\in(-\infty,-m)\cup(m,+\infty)$ такая, что $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$.

Тогда

$$-\frac{2k}{k+\lambda_0}=W(f^+,f^-)=\lim_{x\to 0}\big[f_1^+(x,\lambda_0)f_2^-(x,\lambda_0)-f_2^+(x,\lambda_0)f_1^-(x,\lambda_0)\big]=$$
$$=\begin{vmatrix} f_1^+(\lambda_0) & f_1^-(\lambda_0)\\ f_2^+(\lambda_0) & f_2^-(\lambda_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0) & f_1^-(\lambda_0)-f_2^-(\lambda_0)\\ f_1^+(\lambda_0) & f_1^-(\lambda_0)\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Так как при $\lambda\in(-\infty,-m)\cup(m,+\infty)$ $\overline{f_1^+(\lambda)}=f_2^-(\lambda)$ и $\overline{f_2^+(\lambda)}=f_1^-(\lambda)$, то $f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda)=\overline{f_2^+(\lambda)}-\overline{f_1^+(\lambda)}=\overline{f_2^+(\lambda)-f_1^+(\lambda)}$. Отсюда и из $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$ следует, что $f_1^-(\lambda_0)-f_2^-(\lambda_0)=0$, поэтому правая часть равенства (8) равна нулю, а левая отлична от нуля. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 4. *Оператор (1), (2) имеет только конечное число простых дискретных собственных значений из интервала* $(-m,m)$.

Доказательство. Из формулы (7) видно, что для того чтобы некоторое число λ_0 из интервала $(-m,m)$ было собственным значением задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$. Действительно, пусть при $\lambda_0\in(-m,m)$ $f_1^+(\lambda_0)-f_2^+(\lambda_0)=0$, тогда $f_1^+(\lambda_0)=f_2^+(\lambda_0)$, и поэтому функция $f^+(x,\lambda_0)\in L_2^2(0,+\infty)$ является решением системы уравнений (1) и удовлетворяет граничному условию (2), т.е. $f^+(x,\lambda_0)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_0\in(-m,m)$.

Теперь предположим, что $\lambda_0\in(-m,m)$ — любое собственное значение задачи (1), (2), тогда существует решение системы (1) $\varphi(x,\lambda_0)\neq 0$, принадлежащее пространству $L_2^2(0,+\infty)$, и

$$\varphi_1(0,\lambda_0)=\varphi_2(0,\lambda_0).$$

Числа $\varphi_1(0,\lambda_0)$, $\varphi_2(0,\lambda_0)$ отличны от нуля, иначе в противном случае, в силу единственности решения задачи Коши для системы (1), будет выполнено тождество $\varphi(x,\lambda_0)\equiv 0$.

Так как определитель Вронского решений $\varphi(x,\lambda_0)$ и $f^+(x,\lambda_0)$, принадлежащих $L_2^2(0,+\infty)$, не зависит от x, то существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$\varphi_1(0,\lambda_0)\Big[f_2^+(0,\lambda_0)-f_1^+(0,\lambda_0)\Big]=W(\varphi,f^+)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big[\varphi_1(x_n,\lambda_0)f_2^+(x_n,\lambda_0)-\varphi_2(x_n,\lambda_0)f_1^+(x_n,\lambda_0)\Big]=0.$$

Отсюда следует, что $f_2^+(0,\lambda_0)-f_1^+(0,\lambda_0)=0$.

Покажем, что корни уравнения $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)=0$ простые.

Условимся точками обозначать дифференцирование по λ, а штрихами — по x:

$$\dot f^+(x,\lambda)=\frac{d}{d\lambda}f^+(x,\lambda),\quad f^{+'}(x,\lambda)=\frac{d}{dx}f^+(x,\lambda).$$

Продифференцировав систему уравнений

$$f_1^{+'}(x,\lambda)-\overline{q(x)}f_2^+(x,\lambda)=-i\lambda f_1^+(x,\lambda),\quad f_2^{+'}(x,\lambda)-q(x)f_1^+(x,\lambda)=i\lambda f_2^+(x,\lambda) \tag{9}$$

по λ, видим, что функция $\dot f^+(x,\lambda)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\dot f_1^{+'}(x,\lambda)-\overline{q(x)}\dot f_2^+(x,\lambda)=-i\lambda\dot f_1^+(x,\lambda)-if_1^+(x,\lambda),$$

$$\dot f_2^{+'}(x,\lambda)-q(x)\dot f_1^+(x,\lambda)=i\lambda\dot f_2^+(x,\lambda)+if_2^+(x,\lambda). \tag{10}$$

Первые уравнения систем (9) и (10) умножим соответственно на $\dot f_2^+(x,\lambda)$ и $f_2^+(x,\lambda)$ и, вычислив разность, получим

$$f_1^{+'}(x,\lambda)\dot f_2^+(x,\lambda)-\dot f_1^{+'}(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda)=$$

$$=-i\lambda\big[f_1^+(x,\lambda)\dot f_2^+(x,\lambda)-\dot f_1^+(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda)\big]+if_1^+(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda). \tag{11}$$

Вторые уравнения систем (9) и (10) умножим соответственно на $\dot f_1^+(x,\lambda)$ и $f_1^+(x,\lambda)$ и, вычислив разность, найдём

$$f_2^{+'}(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^{+'}(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)=$$

$$=i\lambda\big[f_2^+(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^+(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)\big]-if_1^+(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda). \tag{12}$$

Вычитая (11) из (12), получаем

$$f_2^{+'}(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^{+'}(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)-f_1^{+'}(x,\lambda)\dot f_2^+(x,\lambda)+\dot f_1^{+'}(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda)=$$

$$=-2if_1^+(x,\lambda)f_2^+(x,\lambda).$$

Это выражение можно записать как

$$\frac{d}{dx}\big[f_2^+(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^+(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)\big]=-if^{+T}(x,\lambda)\sigma_1f^+(x,\lambda),$$

а с помощью инволюции

$$\overline{f^+(x,\lambda)}=-\frac{\lambda+k}{im}\sigma_1f^+(x,\lambda)$$

оно преобразуется к виду

$$\left(f_2^+(x,\lambda)\dot f_1^+(x,\lambda)-\dot f_2^+(x,\lambda)f_1^+(x,\lambda)\right)\Big|_a^b=-\frac{m}{\lambda+k}\int\limits_a^b f^{+^T}(x,\lambda)\overline{f^+(x,\lambda)}\,dx.$$

Если $\lambda_0\in(-m,m)$ — нуль функции $f_1^+(\lambda)-f^+(\lambda)$, то $\gamma_0^{-1}=f_1^+(\lambda_0)=f_2^+(\lambda_0)$, и согласно оценке (4) справедливы равенства

$$\lim_{x\to 0}\left[f_2^+(x,\lambda_0)\dot f_1^+(x,\lambda_0)-\dot f_2^+(x,\lambda_0)f_1^+(x,\lambda_0)\right]=\gamma_0^{-1}(\dot f_1^+(\lambda_0)-\dot f_2^+(\lambda_0)),$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f_2^+(x,\lambda_0)\dot f_1^+(x,\lambda_0)-\dot f_2^+(x,\lambda_0)f_1^+(x,\lambda_0)\right]=0,$$

из которых следует, что

$$\dot f_1^+(\lambda_0)-\dot f_2^+(\lambda_0)=\frac{m\gamma_0}{\lambda_0+k}\int\limits_0^{+\infty}f^{+T}(x,\lambda_0)\overline{f^+(x,\lambda_0)}\,dx=\frac{m\gamma_0}{\lambda_0+k}\|f^+(x,\lambda_0)\|^2.$$

Так как $\|f^+(x,\lambda_0)\|>0$, то $\dot f_1^+(\lambda_0)-\dot f_2^+(\lambda_0)\neq 0$ и простота нулей функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ доказана.

Теперь докажем, что множество нулей функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ конечно. Для этого оценим снизу расстояние между её соседними нулями.

Пусть λ_1 и λ_2 — какие-нибудь нули функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$. Если функция $f^+(x,\lambda_1)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}&f_1^{+'}(x,\lambda_1)-\overline{q(x)}f_2^+(x,\lambda_1)=-i\lambda_1f_1^+(x,\lambda_1),\\&f_2^+(x,\lambda_1)-q(x)f_1^+(x,\lambda_1)=i\lambda_1f_2^+(x,\lambda_1),\end{aligned}\tag{13}$$

то функция $\overline{f^+(x,\lambda_2)}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}&\overline{(f_1^+(x,\lambda_2))'}-q(x)\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}=i\lambda_2\overline{f_1^+(x,\lambda_2)},\\&\overline{(f_2^+(x,\lambda_2))'}-\overline{q(x)}\,\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}=-i\lambda_2\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}.\end{aligned}\tag{14}$$

Первое уравнение системы (13) и второе уравнение системы (14) умножим соответственно на $\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}$ и $f_2^+(x,\lambda_1)$ и, вычислив разность, получим

$$f_1^{+'}(x,\lambda_1)\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}-\overline{(f_2^+(x,\lambda_2))'}f_2^+(x,\lambda_1)=-i\lambda_1f_1^+(x,\lambda_1)\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}+i\lambda_2\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}f_2^+(x,\lambda_1).\tag{15}$$

Второе уравнение системы (13) и первое уравнение системы (14) умножим соответственно на $\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}$ и $f_1^+(x,\lambda_1)$ и, вычислив разность, получим

$$f_2^{+'}(x,\lambda_1)\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}-\overline{(f_1^+(x,\lambda_2))'}f_1^+(x,\lambda_1)=i\lambda_1f_2^+(x,\lambda_1)\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}-i\lambda_2\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}f_1^+(x,\lambda_1).\tag{16}$$

Вычитание (16) из (15) даёт

$$\frac{d}{dx}\Big(f_1^+(x,\lambda_1)\overline{f_1^+(x,\lambda_2)}-f_2^+(x,\lambda_1)\overline{f_2^+(x,\lambda_2)}\Big)=i(\lambda_2-\lambda_1)f^{+T}(x,\lambda_1)\overline{f^+(x,\lambda_2)},$$

$$\frac{d}{dx}W\Big(f^+(x,\lambda_1),\sigma_1\overline{f^+(x,\lambda_2)}\Big)=i(\lambda_2-\lambda_1)f^{+T}(x,\lambda_1)\overline{f^+(x,\lambda_2)},$$

$$W\Big(f^+(x,\lambda_1),\sigma_1\overline{f^+(x,\lambda_2)}\Big)\Big|_a^b=i(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_a^b f^{+T}(x,\lambda_1)\overline{f^+(x,\lambda_2)}\,dx.$$

При $x=0$ имеем $f_1^+(\lambda_1)-f_2^+(\lambda_1)=0$ и $f_1^+(\lambda_2)-f_2^+(\lambda_2)=0$, следовательно, $f_1^+(\lambda_1)=f_2^+(\lambda_1)$ и $\overline{f_1^+(\lambda_2)}=\overline{f_2^+(\lambda_2)}$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} W\Big(f^+(x,\lambda_1),\sigma_1\overline{f^+(x,\lambda_2)}\Big)=0.$$

Из оценки (4) следует, что

$$\lim_{x\to +\infty} W\Big(f^+(x,\lambda_1),\sigma_1\overline{f^+(x,\lambda_2)}\Big)=0.$$

Таким образом,

$$i(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_0^{+\infty} f^{+T}(x,\lambda_1)\overline{f^+(x,\lambda_2)}\,dx=0. \tag{17}$$

Обозначим через δ точную нижнюю границу расстояния между двумя соседними нулями функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ и покажем, что $\delta>0$. Предполагая противное, мы смогли бы выделить такие последовательности нулей $\{\tilde\lambda_k\}$, $\{\lambda_k\}$ функции $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$, что $\lim_{k\to\infty}(\tilde\lambda_k-\lambda_k)=0$, $\tilde\lambda_k>\lambda_k\geqslant 0$ и $\max_k\tilde\lambda_k<M$. Из оценки (4) следует, что при достаточно большом A равномерно относительно $x\in[A,\infty)$ и $\lambda\in[0,\infty)$ выполняется неравенство $|f^{+T}(x,\lambda)|>e^{-\lambda x}/2$, так что

$$\int\limits_A^{\infty} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\lambda_k)}\,dx>\frac{e^{-A(\tilde\lambda_k-\lambda_k)}}{4(\tilde\lambda_k-\lambda_k)}>\frac{e^{-2AM}}{8M}. \tag{18}$$

С другой стороны, из равенства (17) получаем

$$0=\int\limits_0^{\infty} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\lambda_k)}\,dx=\int\limits_0^{A} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\Big[\overline{f^+(x,\lambda_k)}-\overline{f^+(x,\tilde\lambda_k)}\Big]\,dx+$$
$$+\int\limits_0^{A} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\tilde\lambda_k)}\,dx+\int\limits_A^{\infty} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\lambda_k)}\,dx$$

и, переходя к пределу при $k\to\infty$, находим

$$\varliminf_{k\to\infty}\int\limits_A^{\infty} f^{+T}(x,\tilde\lambda_k)\overline{f^+(x,\lambda_k)}\,dx\leqslant 0, \tag{19}$$

так как равномерно относительно $x\in[0,A]$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}[f^+(x,\tilde\lambda_k)-f^+(x,\lambda_k)]=0.$$

Очевидно, что неравенства (18) и (19) приводят к противоречию, поэтому сделанное предположение неверно, т.е. $\delta>0$, а функция $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)$ имеет конечное число нулей. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если выполняется условие (3), то все числа λ, такие что $\lambda\notin(-\infty,-m)\cup$ $\cup(m,+\infty)$, $f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)\neq 0$, принадлежат резольвентному множеству оператора D. Резольвента $R_\lambda=(D-\lambda I)^{-1}$ является интегральным оператором вида*

$$R_\lambda g(x)=\int\limits_0^{\infty} R(x,y;\lambda)g(y)\,dy$$

с ядром

$$R(x,y;\lambda)=\begin{cases} R^+(x,y;\lambda), & \operatorname{Im}\lambda>0,\\ R^-(x,y;\lambda), & \operatorname{Im}\lambda<0,\end{cases}$$

где

$$R^{\pm}(x,y;\lambda)=\frac{-i}{f_1^{\pm}(\lambda)-f_2^{\pm}(\lambda)}\begin{cases}f^{\pm}(x,\lambda)(\sigma_1\Phi(y,\lambda))^T, & y<x,\\ \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^{\pm}(y,\lambda))^T, & y>x.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im}\lambda>0$ и резольвента R_λ существует, и пусть $g(x)$ входит в область определения R_λ. Положим $R_\lambda g=y$, тогда

$$Dy-\lambda y=g(x). \tag{20}$$

Равенство (20) означает, что y является решением уравнения

$$dy-\lambda y=g(x), \tag{21}$$

принадлежащим $L_2^2(0,+\infty)$ и удовлетворяющим условию (2). Так как $\Phi(x,\lambda)$ и $f^+(x,\lambda)$ — решения соответствующего однородного уравнения $dy-\lambda y=0$, то его общее решение будет следующим:

$$y=c_1\Phi(x,\lambda)+c_2 f^+(x,\lambda),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Будем искать общее решение уравнения (21) в виде

$$y=c_1(x)\Phi(x,\lambda)+c_2(x)f^+(x,\lambda), \tag{22}$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ — неизвестные функции.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, найдём

$$i\sigma_3c_1'(x)\Phi(x,\lambda)+i\sigma_3c_2'(x)f^+(x,\lambda)=g(x). \tag{23}$$

Так как

$$\sigma_3^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\sigma_3,$$

то, умножив обе части равенства (23) на $-i\sigma_3$, получим

$$c_1'(x)\Phi(x,\lambda)+c_2'(x)f^+(x,\lambda)=-i\sigma_3g(x).$$

Найдём коэффициенты $c_1(x)$ и $c_2(x)$. Используя формулу для вронскиана $W(y,z)$, можем записать

$$W(-i\sigma_3g,f^+)=W(c_1'(x)\Phi(x,\lambda)+c_2'(x)f^+(x,\lambda),f^+(x,\lambda))=c_1'(x)W(\Phi,f^+),$$

$$c_1'(x)=\frac{W(-i\sigma_3g,f^+)}{W(\Phi,f^+)}=\frac{-i}{f_2^+(\lambda)-f_1^+(\lambda)}W(\sigma_3g,f^+). \tag{24}$$

Проинтегрировав обе части равенства (24) в пределах от x до $+\infty$ и воспользовавшись условием при $x\to+\infty$, $c_1\to0$, находим

$$c_1(x)=\frac{i}{f_2^+(\lambda)-f_1^+(\lambda)}\int\limits_x^{+\infty}W(\sigma_3g,f^+)(y)\,dy, \tag{25}$$

а при $x\to0$, $c_2\to0$ получаем

$$c_2(x)=\frac{-i}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}\int\limits_0^{x}W(\sigma_3g,\Phi)(y)\,dy. \tag{26}$$

Подставив соответственно в (25) и (26) выражения для вронскиана

$$W(\sigma_3 g, f^+) = W\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ -g_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1^+ \\ f_2^+ \end{pmatrix}\right) = g_1 f_2^+ + g_2 f_1^+ = (\sigma_1 f^+(x,\lambda))^T g(x),$$

$$W(\sigma_3 g, \Phi) = (\sigma_1 \Phi(x,\lambda))^T g(x),$$

получим

$$c_1(x) = \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \int\limits_x^{+\infty} (\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T g(y)\, dy,$$

$$c_2(x) = \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \int\limits_0^{x} (\sigma_1 \Phi(y,\lambda))^T g(y)\, dy. \tag{27}$$

Подстановка в (22) выражений для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ из (27) даёт

$$y(x) = \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \int\limits_0^{x} f^+(x,\lambda)(\sigma_1 \Phi(y,\lambda))^T g(y)\, dy +$$

$$+ \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \int\limits_x^{+\infty} \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T g(y)\, dy. \tag{28}$$

Положим

$$R^+(x,y;\lambda) = \frac{-i}{f_1^+(\lambda) - f_2^+(\lambda)} \begin{cases} f^+(x,\lambda)(\sigma_1 \Phi(y,\lambda))^T, & y < x, \\ \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T, & y > x, \end{cases} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

тогда формула (28) принимает вид

$$R_\lambda g(x) = y(x) = \int\limits_0^{+\infty} R^+(x,y;\lambda) g(y)\, dy.$$

Для $\operatorname{Im}\lambda < 0$ аналогично получим

$$R_\lambda g(x) = y(x) = \int\limits_0^{+\infty} R^-(x,y;\lambda) g(y)\, dy,$$

где

$$R^-(x,y;\lambda) = \frac{-i}{f_1^-(\lambda) - f_2^-(\lambda)} \begin{cases} f^-(x,\lambda)(\sigma_1 \Phi(y,\lambda))^T, & y < x, \\ \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^-(y,\lambda))^T, & y > x, \end{cases} \quad \operatorname{Im}\lambda < 0,$$

т.е. резольвента R_λ есть интегральный оператор с ядром

$$R(x,y;\lambda) = \begin{cases} R^+(x,y;\lambda), & \operatorname{Im}\lambda > 0, \\ R^-(x,y;\lambda), & \operatorname{Im}\lambda < 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

3. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Теорема 2. *Если коэффициент $q(x)$ дифференциального оператора D удовлетворяет условию (3), то каждая вектор-функция $g(x)\in L_2^2(0,+\infty)$ имеет следующее разложение:*

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m}\frac{-k}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(x,\lambda)\Phi^T(\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{-i}{(\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j))\gamma_j}\Phi(x,\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j),$$

где

$$\Phi^T(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}(\sigma_1\Phi(x,\lambda))^T g(x)\,dx.$$

Доказательство. Сначала докажем теорему разложения для гладких финитных вещественных вектор-функций $g(x)$, т.е. на плотном в $L_2^2(0,+\infty)$ множестве. Интегрируя, как обычно, $R_\lambda g$ по контуру (рис. 2), получаем

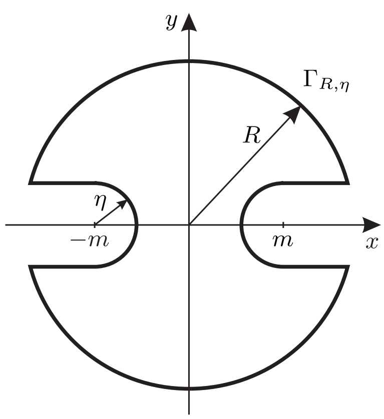

Рис. 2. Контур интегрирования.

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{R,\eta}\operatorname{Im}R_\lambda g\,d\lambda+\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}R_\lambda g. \tag{29}$$

Преобразуем формулу (29). Введём обозначение

$$\Phi^T(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}(\sigma_1\Phi(x,\lambda))^T g(x)\,dx.$$

Тогда

$$2i\operatorname{Im}R_\lambda g=\int\limits_0^{+\infty}[R^+(x,y;\lambda+i0)-R^-(x,y;\lambda-i0)]g(y)\,dy=$$

$$=-i\int\limits_0^{x}\frac{(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))f^+(x,\lambda)-(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))f^-(x,\lambda)}{(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}(\sigma_1\Phi(y,\lambda))^T g(y)\,dy-$$

$$-i\int\limits_x^{+\infty}\Phi(x,\lambda)\frac{(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T-(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T}{(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}g(y)\,dy=$$

$$=\frac{-2ik}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(x,\lambda)\int\limits_0^{+\infty}(\sigma_1\Phi(y,\lambda))^T g(y)\,dy=$$

$$=\frac{-2ik}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(x,\lambda)\Phi^T(\lambda). \tag{30}$$

Для собственных значений $\lambda_j\in(-m,m)$, $j=\overline{1,n}$, выполняется равенство $f_1^+(\lambda_j)-f_2^+(\lambda_j)=0$.

Функции $\Phi(x,\lambda_j)$ и $f^+(x,\lambda j)$ линейно зависимы, т.е. $\Phi(x,\lambda_j)=\gamma_j f^+(x,\lambda_j)$. Применяя известные формулы для нахождения вычетов, определяем вычеты вектор-функции $R_\lambda g$ в точках λ_j $(j=\overline{1,n})$:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j} R_\lambda g = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j} \int\limits_0^{+\infty} R^+(x,y;\lambda)g(y)\,dy =$$

$$= \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left(\frac{-i}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}\int\limits_0^x f^+(x,\lambda)(\sigma_1\Phi(y,\lambda))^T g(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \frac{-i}{f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda)}\int\limits_x^{+\infty} \Phi(x,\lambda)(\sigma_1 f^+(y,\lambda))^T g(y)\,dy\right) =$$

$$= \frac{-i}{\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j)}\int\limits_0^x f^+(x,\lambda_j)(\sigma_1\Phi(y,\lambda_j))^T g(y)\,dy +$$

$$+ \frac{-i}{\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j)}\int\limits_x^{+\infty} \Phi(x,\lambda_j)(\sigma_1 f^+(y,\lambda_j))^T g(y)\,dy =$$

$$= \frac{-i}{(\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j))\gamma_j}\Phi(x,\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j). \tag{31}$$

Подставив (30) и (31) в (29), получим выражение

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m} \frac{-k}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(x,\lambda)\Phi^T(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{-i}{(\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j))\gamma_j}\Phi(x,\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j). \tag{32}$$

Интеграл в (32) сходится в пространстве $L_2^2(0,+\infty)$. Обобщение на случай комплексных g получается линейной комбинацией разложения (32) для $\operatorname{Re} g$ и $\operatorname{Im} g$.

Умножим теперь (32) на $\overline{g}^T$ и проинтегрируем полученное соотношение по переменной x. В результате имеем равенство Парсеваля для оператора D в виде

$$\|g\|^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>m} \frac{-k}{(k+\lambda)(f_1^+(\lambda)-f_2^+(\lambda))(f_1^-(\lambda)-f_2^-(\lambda))}\Phi(\lambda)\Phi^T(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{-i}{(\dot f_1^+(\lambda_j)-\dot f_2^+(\lambda_j))\gamma_j}\Phi(\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j),$$

где

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \overline{g}^T(x)\Phi(x,\lambda)dx.$$

Равенство Парсеваля по непрерывности распространяется на всё пространство. Используя этот факт, замкнём (32) на всём пространстве $L_2^2(0,+\infty)$. Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00732).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гасымов, М.Г. Определение системы Дирака по фазе рассеяния / М.Г. Гасымов, Б.М. Левитан // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 167, № 6. — С. 1219–1222.
2. Гасымов, М.Г. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнения Дирака порядка $2n$ / М.Г. Гасымов // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1968. — Т. 19. — С. 41–190.
3. Фам, Л.В. Обратная задача рассеяния для системы уравнений Дирака на полуоси / Л.В. Фам // Линейные краевые задачи математической физики. Киев : Институт математики АН УССР, 1973. — С. 174–207.
4. Марченко, В.А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн / В.А. Марченко // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 104, № 5. — С. 695–698.
5. Соловьев, А.Н. Разложение по собственным функциям оператора, порождённого системой уравнений 1-го порядка / А.Н. Соловьев // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 1981. — № 5. — С. 31–37.
6. Маматов, А.Э. Разложение по собственным функциям для несамосопряжённого оператора Дирака на полуоси / А.Э. Маматов, А.Б. Хасанов // Докл. АН РУз. — 2002. — № 4. — С. 10–13.
7. Нижник, Л.П. Обратная задача рассеяния на полуоси с несамосопряжённой потенциальной матрицей / Л.П. Нижник, Л.В. Фам // Укр. мат. журн. — 1974. — № 4. — С. 469–486.
8. Хасанов, А.Б. Обратная задача теории рассеяния для системы дифференциальных уравнений первого порядка / А.Б. Хасанов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 277, № 3. — С. 559–562.
9. Хасанов, А.Б. Обратная задача теории рассеяния на полуоси для системы разностных уравнений / А.Б. Хасанов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 278, № 6. — С. 1316–1319.
10. Тахтаджян, Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. — М. : Наука, 1986. — 528 с.

DIRECT PROBLEM OF SCATTERING THEORY FOR A SYSTEM OF DIRAC DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE SEMI-AXIS IN THE CASE OF FINITE DENSITY

A. E. Mamatov

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Uzbekistan
e-mail: aemamatov@mail.ru

In this paper, we study the direct scattering problem on the semi-axis for the system of Dirac differential equations in the case of finite density with the boundary condition $y_1(0)=y_2(0)$. The spectrum was studied, the resolvent and spectral expansion in terms of eigenfunctions of the Dirac operator were constructed.

Keywords: systems of differential equations, continuous spectrum, eigenvalues, eigenfunction expansion theorem.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00732).

REFERENCES

1. Gasimov, M.G. and Levitan, B.M. Determination of the Dirac system by scattering phase, *Dokl. AN SSSR*, 1966, vol. 167, no. 6, pp. 1219–1222.
2. Gasimov, M.G. Inverse problem of scattering theory for the Dirac equation system of order 2n, *Tr. Mosk. mat. ob-va* (Proc. of the Moscow Math. Soc.), 1968, vol. 19, pp. 41–190.
3. Pham, L.V., Inverse scattering problem for the system of Dirac equations on the semi-axis, in *Lineynyye krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki* (Linear Boundary Value Problems of Mathematical Physics), Kyiv: Institute of Mathematics of Academy of Sciences of the USSR, 1973, pp. 174–207.
4. Marchenko, V.A., Reconstruction of potential energy from the phases of scattered waves, *Dokl. AN SSSR*, 1955, vol. 104, no. 5, pp. 695–698.
5. Soloviev, A.N., Expansion in eigenfunctions of the operator generated by the system of the 1st order equation, *Izv. AN AzSSR. Ser. fiz.-tekh. i mat. nauk* (News of the Academy of Sciences of the AzSSR, series of physics, technology and mathematical sciences), 1981, no. 5, pp. 31–37.
6. Mamatov, A.E. and Khasanov, A.B., Expansion in eigenfunctions for the non-self-adjoint Dirac operator on the semi-axis, *Dokl. AN RUz*, 2002, no. 4, pp. 10–13.
7. Nizhnik, L.P. and Pham Loy Vu. Inverse scattering problem on a semi-axis with a non-self-adjoint potential matrix, *Ukr. mat. zhurnal* (Ukrainian Math. J.), 1974, no. 4, pp. 469–486.
8. Khasanov, A.B., Inverse problem of scattering theory for a system of first order differential equations, *Dokl. AN SSSR*, 1984, vol. 277, no. 3, pp. 559–562.
9. Khasanov, A.B., Inverse problem of the theory of scattering on a semi-axis for a system of difference equations, *Dokl. AN SSSR*, 1984, vol. 278, no. 6, pp. 1316–1319.
10. Takhtadzhyan, L.A. and Faddeev, L.D., *Gamil'tonov podkhod v teorii solitonov* (Hamiltonian Approach to Soliton Theory), Moscow: Nauka, 1986.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 312–321

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Э. Мухамадиев[1], А. Н. Наимов[2]

Вологодский государственный университет

e-mail: [1]emuhamadiev@rambler.ru, [2]naimovan@vogu35.ru

Поступила в редакцию 15.10.2023 г., после доработки 15.10.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Исследована разрешимость периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с выделенной главной положительно однородной частью. Найдены новые условия, обеспечивающие априорную оценку решений рассматриваемой периодической задачи. Они сформулированы в терминах свойств главной положительно однородной части системы уравнений. В условиях априорной оценки, применяя и развивая методы вычисления вращения векторных полей, доказана теорема о разрешимости периодической задачи, в которой обобщены полученные ранее результаты авторов по исследованию периодической задачи для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: периодическая задача, главная положительно однородная часть, возмущение, априорная оценка, вращение векторного поля, гомотопия.

DOI: 10.31857/S0374064124030037, EDN: PNQUAC

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим периодическую задачу

$$x''(t)=P(t,x(t),x'(t))+f(t,x(t),x'(t)),\quad t\in(0,1),\quad x(t)\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$x(0)=x(1),\qquad x'(0)=x'(1). \tag{2}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство n-мерных векторов ($n\geqslant 2$) с вещественными координатами, отображения $P,f\colon\ \mathbb{R}^{2n+1}\mapsto\mathbb{R}^n$ заданы, непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

1) отображение $P(t,y_1,y_2)$ по y_1, y_2 положительно однородно порядка $m>1$:

$$P(t,\lambda y_1,\lambda y_2)\equiv\lambda^m P(t,y_1,y_2),\quad \lambda>0;$$

2) порядок роста $|f(t,y_1,y_2)|$ при больши́х значениях $|y_1|+|y_2|$ ограничен условием

$$\lim_{|y_1|+|y_2|\to\infty}(|y_1|+|y_2|)^{-m}\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t,y_1,y_2)|=0;$$

3) отображения $P(t,y_1,y_2)$, $f(t,y_1,y_2)$ периодичны по t с периодом, равным единице, т.е.

$$P(t+1,y_1,y_2)\equiv P(t,y_1,y_2),\quad f(t+1,y_1,y_2)\equiv f(t,y_1,y_2).$$

Учитывая условия 1) и 2), отображение P называем *главной положительно однородной частью*, а отображение f — *возмущением*.

Решением задачи (1), (2) называем вектор-функцию $x\in C^2([0,1];\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнениям системы (1) и условиям (2). Такое решение можно периодически продолжить на $\mathbb{R}$, тогда $x \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ и при всех $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнениям системы (1) и условию периодичности $x(t+1) \equiv x(t)$.

Если $x(t)$ является решением задачи (1), (2), то пара функций $(x(t), x'(t))$ будет нулём вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(x,y) := \left(x(t) - x(1) - \int_0^t y(s)\,ds,\, y(t) - y(1) - \int_0^t \big(P(s,x(s),y(s)) + f(s,x(s),y(s))\big)\,ds \right), \qquad (3)$$

определённого в банаховом пространстве $E := C([0,1];\mathbb{R}^n) \times C([0,1];\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|(x,y)\|_E := \|x\|_C + \|y\|_C$, где $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$. И обратно, если пара $(x,y) \in E$ является нулём векторного поля Φ, то $x' = y$ и x будет решением задачи (1), (2). Таким образом, разрешимость задачи (1), (2) сводится к нахождению нулей векторного поля Φ.

В настоящей работе задача (1), (2) исследуется в два этапа. На первом этапе выясняется, при каких условиях на отображение P для решений задачи (1), (2) имеет место так называемая априорная оценка

$$\|x\|_C + \|x'\|_C < M, \qquad (4)$$

где положительное число M не зависит от $x(t)$. Если имеет место априорная оценка (4), то вполне непрерывное векторное поле Φ не обращается в нуль на сфере $\|(x,y)\|_E = r$ при $r \geqslant M$. Поэтому, согласно теории вполне непрерывных векторных полей [1, с. 135], определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ векторного поля Φ на бесконечности, равное вращению (степени отображения) Φ на сфере $\|(x,y)\|_E = r$ при $r \geqslant M$. На втором этапе, применяя и развивая методы вычисления вращения векторных полей, вычисляется $\gamma_\infty(\Phi)$ через числовую характеристику отображения P. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения [1, с. 138] существует нуль векторного поля Φ, этим самым доказывается разрешимость задачи (1), (2). Эта задача по изложенной выше схеме исследована в статьях [2–4]: в [2] при $n=1$; в [3] при $n \geqslant 2$, когда множество нулей отображения P состоит из одной поверхности; в [4] при $n=2$ в одном частном примере, когда множество нулей отображения P состоит из двух поверхностей. Ниже обобщены результаты перечисленных работ в предположении, что $n \geqslant 2$ и множество нулей отображения P состоит из конечного числа поверхностей. При этом использована оценка вида

$$|x'(t)| \leqslant M_0(1 + |x(t)|), \quad t \in [0,1], \qquad (5)$$

которая доказана в [5] для решений задачи (1), (2), здесь $M_0 > 0$ и не зависит от $x(t)$. Данная оценка также представляет интерес с точки зрения априорной оценки решений обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотренной в работе [6].

Вопрос существования периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследован в многочисленных работах других авторов. Отметим статьи [7, 8], где применяются идеи и методы, близкие к настоящей работе. Например, в работе [8] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в $\mathbb{R}^n$, чтобы при любом ω-периодическом её возмущении она имела ω-периодическое решение.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предположим, что наряду с условиями 1)–3) выполнены также следующие условия:

4) при любых фиксированных $t_0 \in [0,\ 1]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ автономная система

$$y'(t) = P(t_0, x_0, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \qquad (6)$$

не имеет нестационарных ограниченных траекторий;

5) множество нулей $\{(t,y_1,y_2)\colon\ P(t,y_1,y_2)=0\}$ отображения P состоит из q поверхностей вида $\{(t,y_1,y_2)\colon\ y_2=B_j(t,y_1)\}$, $j=\overline{1,q}$, где отображения $B_j(t,x)\colon\mathbb{R}^{1+n}\mapsto\mathbb{R}^n$, $j=\overline{1,q}$, непрерывны, периодичны по t с периодом, равным единице, и удовлетворяют условиям:

а) $B_j(t,\lambda y_1)\equiv\lambda B_j(t,y_1)$ при любых $\lambda>0$, $j=\overline{1,q}$;

б) $B_j(t,y_1)\neq B_k(t,y_1)$ при любых $t\in\mathbb{R}$, $y_1\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $j\neq k$;

в) каждая из систем уравнений $x'(t)=B_j(t,x(t))$, $j=\overline{1,q}$, не имеет ненулевых периодических решений с единичным периодом.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)–5). Тогда для решений задачи (1), (2) имеет место априорная оценка (4).*

Теорема 1 доказана в работе [2] при $n=1$, в работе [3] при $n\geqslant 2$, $q=1$, а в работе [4] при $n=2$, $q=2$ в одном частном примере.

Из теоремы 1 следует, что при выполнении условий 1)–5) для вполне непрерывного векторного поля Φ, заданного формулой (3), определено его вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ на бесконечности. Если $\gamma_\infty(\Phi)\neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения [1, с. 138] существует нуль векторного поля Φ, этим самым доказывается разрешимость задачи (1), (2). Вычислим $\gamma_\infty(\Phi)$ через числовую характеристику отображения P. Основная идея вычисления состоит в том, что на сфере $\|(x,y)\|_E=r$ большого радиуса r векторное поле Φ гомотопируется к конечномерному векторному полю, определяемому отображением P. Для построения такой гомотопии требуется, кроме условий 1)–5), выполнение следующих условий:

6) отображение P не зависит от t, т.е. $P(t,y_1,y_2)\equiv Q(y_1,y_2)$, в этом случае отображения B_j, $j=\overline{1,q}$, также не зависят от t;

7) при любом $y_1\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ имеет место неравенство $Q(y_1,0)\neq 0$, что следует из условий 5);

8) при любом $\mu\in(0,1]$ каждая из систем уравнений $x'(t)=\mu B_j(x(t))$, $j=\overline{1,q}$, не имеет ненулевых периодических решений с единичным периодом;

9) отлично от нуля вращение $\gamma(Q(\cdot,0))$ конечномерного векторного поля $Q(y_1,0)$ на сфере $|y_1|=1$ пространства $\mathbb{R}^n$.

Верна следующая

Теорема 2. *Если выполнены условия 1)–9), то существует хотя бы одно решение задачи (1), (2).*

В утверждении теоремы 2 фактически доказано равенство $\gamma_\infty(\Phi)=\gamma(Q(\cdot,0))$. Отсюда, в силу условия 9) и принципа ненулевого вращения [1, с. 138], вытекает разрешимость задачи (1), (2). Теорема 2 в частных случаях доказана в работах [2–4].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Предположим, что оценка (4) не верна. Тогда существует последовательность решений $x_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, задачи (1), (2) такая, что

$$r_k:=\|x_k\|_C+\|x_k'\|_C\to\infty,\quad k\to\infty.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t)=r_k^{-1}x_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$. Для них имеем

$$r_k^{1-m}y_k''(t)=P(t,y_k(t),y_k'(t))+r_k^{-m}f(t,r_ky_k(t),r_ky_k'(t)),\quad t\in(0,1),$$
$$y_k(0)=y_k(1),\quad y_k'(0)=y_k'(1),\quad \|y_k\|_C+\|y_k'\|_C=1.$$

В силу условия 2) имеет место предел

$$r_k^{-m}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t,r_ky_k(t),r_ky_k'(t))|\to 0,\quad k\to\infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|y_k - y_0\|_C \to 0$, $k\to\infty$. Вектор-функции $y_0(t)$, $y_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, можно считать периодически продолженными на всю числовую ось $\mathbb{R}$. Отсюда заключаем, что

$$r_k^{1-m} y_k''(t) = P(t, y_0(t), y_k'(t)) + o(1), \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\|y_0\|_C + \|y_k'\|_C \to 1, \quad k\to\infty.$$

Покажем, что

$$y_0(t)\neq 0, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Прежде всего проверим, что $y_0(t)\not\equiv 0$. Действительно, если $y_0(t)\equiv 0$, то $\|y_k'\|_C = |y_k'(\tau_k)|\to 1$ при $k\to\infty$ и для вектор-функций $z_k(t) = y_k'(\tau_k + r_k^{1-m}t)$, $k\in\mathbb{N}$, имеем $|z_k(t)|\leqslant 1$, $t\in\mathbb{R}$, $|z_k(0)|\to 1$ при $k\to\infty$,

$$z_k'(t) = P(\tau_k + r_k^{1-m}t, 0, z_k(t)) + o(1), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений $z'(t) = P(\tau_0, 0, z(t))$, что противоречит условию 4). Следовательно, $y_0(t)\not\equiv 0$.

Пусть (α,β) — наибольший интервал, где $y_0(t)$ не обращается в нуль. Из оценки (5) следует, что на произвольном отрезке $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$ имеет место неравенство

$$\limsup_{k\to\infty} \max_{a\leqslant t\leqslant b} \frac{|y_k'(t)|}{|y_k(t)|} \leqslant M_0.$$

Учитывая его и равенства

$$\ln\frac{|y_k(b)|}{|y_k(a)|} = \int_a^b (\ln|y_k(t)|)'\,dt = \int_a^b \left\langle \frac{y_k'(t)}{|y_k(t)|}, \frac{y_k(t)}{|y_k(t)|}\right\rangle dt,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидовое скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, оценим при больших k выражение

$$\left|\ln\frac{|y_k(b)|}{|y_k(a)|}\right| < (M_0+1)(b-a).$$

Переходя здесь к пределу, получаем соотношения

$$-(M_0+1)(b-a)\leqslant \ln\frac{|y_0(b)|}{|y_0(a)|}\leqslant (M_0+1)(b-a).$$

Если α конечно, то в неравенстве справа, устремляя a к α, будем иметь $y_0(\alpha)\neq 0$, что противоречит выбору α. Значит, $\alpha=-\infty$. Аналогичным образом из неравенства слева следует, что $\beta=+\infty$. Таким образом, свойство (7) верно.

Проверим, что

$$\lim_{k\to\infty} P(t, y_0(t), y_k'(t)) = 0, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Если это не так, то можно считать, что при некотором $t_0\in\mathbb{R}$ существует ненулевой предел

$$\lim_{k\to\infty} P(t_0, y_0(t_0), y_k'(t_0)) = v_0, \quad v_0\neq 0.$$

Для вектор-функций $\tilde{y}_k(t) = y_k'(t_0 + r_k^{1-m}t)$, $k\in\mathbb{N}$, имеем

$$|\tilde{y}_k(t)|\leqslant 1, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\tilde{y}_k'(t) = P(t_0 + r_k^{1-m}t, y_0(t_0 + r_k^{1-m}t), \tilde{y}_k(t)) + o(1), \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{k\to\infty} P(t_0, y_0(t_0), \tilde{y}_k(0)) = v_0, \quad v_0\neq 0.$$

Переходя к пределу, получаем нестационарное ограниченное решение автономной системы (6) при фиксированных t_0, $x_0=y_0(t_0)$, что противоречит условию 4).

Возьмём произвольную точку $\tau\in\mathbb{R}$. Учитывая (8) и условие 5), без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(\tau)=B_1(\tau,y_0(\tau)).$$

Покажем, что существует такое число $\delta>0$, что для любых $t\in(\tau-\delta,\tau+\delta)$

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(t)=B_1(t,y_0(t)). \tag{9}$$

Тогда в силу произвольности $\tau\in\mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(t)=B_1(t,y_0(t)), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Отсюда, переходя к пределу в равенстве

$$y_k(t)=y_k(0)+\int_0^t y_k'(s)ds, \quad t\in\mathbb{R},$$

получаем, что $y_0(t)$ является ненулевым периодическим решением системы уравнений $x'(t)=$ $=B_1(t,x(t))$ с периодом, равным единице. А это противоречит условию 5в).

Для доказательства (9) заметим, что из $y_0(\tau)\neq 0$ и условия 5б) вытекает, что

$$d:=\min_{j_1\neq j_2}\bigl|B_{j_1}(\tau,y_0(\tau))-B_{j_2}(\tau,y_0(\tau))\bigr|>0.$$

Выберем число $\delta>0$ так, чтобы из условий

$$s_1,s_2\in(\tau-\delta,\tau+\delta), \quad |u_1-y_0(\tau)|<\delta, \quad |u_2-y_0(\tau)|<\delta$$

следовало неравенство

$$\min_{j_1\neq j_2}\bigl|B_{j_1}(s_1,u_1)-B_{j_2}(s_2,u_2)\bigr|>\frac{d}{2}.$$

Предположим, что при некоторых $t_0\in(\tau-\delta,\tau+\delta)$ и $j_0\neq 1$ имеет место предел

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(t_0)=B_{j_0}(t_0,y_0(t_0)).$$

Тогда при бо́льших k существует t_k между τ и t_0 такое, что

$$\bigl|y_k'(t_k)-B_{j_0}(t_k,y_k(t_k))\bigr|=\frac{d}{4}.$$

Отсюда, в силу выбора δ, вытекает неравенство

$$\min_j\bigl|y_k'(t_k)-B_j(t_k,y_k(t_k))\bigr|\geqslant\frac{d}{4}.$$

Теперь, рассматривая вектор-функции $z_k(t)=y_k'(t_k+r_k^{1-m}t)$, $k\in\mathbb{N}$, и переходя к пределу, получаем ограниченную вектор-функцию $z_0(t)$ такую, что

$$z_0'(t)=P(s_0,y_0(s_0),z_0(t)), \quad t\in\mathbb{R}, \quad \min_j\bigl|z_0(0)-B_j(s_0,y_0(s_0))\bigr|\geqslant\frac{d}{4},$$

следовательно, $P(s_0,y_0(s_0),z_0(0))\neq 0$, что противоречит условию 4). Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

В банаховом пространстве $E := C([0,1];\mathbb{R}^n) \times C([0,1];\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|(x,y)\|_E := \|x\|_C + \|y\|_C$ рассмотрим вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi(x,y) := \left(x(t) - x(1) - \int\limits_0^t y(s)ds,\, y(t) - y(1) - \int\limits_0^t \big(Q(x(s),y(s)) + f(s,x(s),y(s))\big)\, ds \right).$$

Разрешимость задачи (1), (2) равносильна существованию нуля векторного поля Φ.

Из теоремы 1 следует, что определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ вполне непрерывного векторного поля Φ на бесконечности. Докажем равенство

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma(Q(\cdot,0)), \tag{10}$$

тогда в силу условия 9) и принципа ненулевого вращения [1, с. 138] будет существовать хотя бы один нуль векторного поля Φ. Этим самым будет доказана разрешимость задачи (1), (2).

По аналогии с теоремой 1 можно показать, что семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\left(x(t) - x(1) - \int\limits_0^t y(s)ds,\, y(t) - y(1) - \int\limits_0^t \big(Q(x(s),y(s)) + \lambda f(s,x(s),y(s))\big)\, ds \right), \quad \lambda \in [0,1],$$

не обращается в нуль на сферах $\|(x,y)\|_E = r$ больши́х радиусов r пространства E. Поэтому, согласно свойству вращения [1, с. 137], имеет место равенство

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_0), \tag{11}$$

где

$$\Phi_0(x,y) := \left(x(t) - x(1) - \int\limits_0^t y(s)\, ds,\, y(t) - y(1) - \int\limits_0^t Q(x(s),y(s))\, ds \right).$$

Вычислим $\gamma_\infty(\Phi_0)$, гомотопируя векторное поле Φ_0 к конечномерному векторному полю следующей формулой:

$$\Phi_\lambda(x,y) := \left(x(t) - x(1) - \int\limits_0^t y(s)\, ds - \lambda \int\limits_t^1 y(s)\, ds,\, y(t) - y(1) - \int\limits_0^t Q(x(s),y(s))\, ds - \lambda \int\limits_t^1 Q(x(s),y(s))\, ds \right),$$
$$\lambda \in [0,1].$$

Покажем, что семейство векторных полей Φ_λ не обращается в нуль вне некоторого шара радиуса r_0:

$$\Phi_\lambda(x,y) \neq 0, \quad \lambda \in [0,1], \quad (x,y) \in E, \quad \|(x,y)\|_E > r_0. \tag{12}$$

Тогда из (11) и (12) вытекает равенство

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_1). \tag{13}$$

Для векторного поля Φ_1 согласно определению вращения вполне непрерывного векторного поля имеем

$$\gamma_\infty(\Phi_1) = \gamma(F_1), \tag{14}$$

где $\gamma(F_1)$ — вращение конечномерного поля $F_1(\xi,\eta):=(-\eta,-Q(\xi,\eta))$, $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, на единичной сфере $|\xi|+|\eta|=1$ пространства $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. На сфере $|\xi|+|\eta|=1$ векторное поле $F_1(\xi,\eta)$ гомотопируется к векторному полю $F_0(\xi,\eta):=(-\eta,-Q(\xi,0))$ семейством векторных полей $(-\eta,-Q(\xi,\lambda\eta))$, $\lambda\in[0,1]$, а для векторного поля F_0 имеем $\gamma(F_0)=\gamma(Q(\cdot,0))$. Следовательно,

$$\gamma(F_1)=\gamma(Q(\cdot,0)). \tag{15}$$

Из равенств (13)–(15) вытекает (10). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2 остаётся проверить справедливость утверждения (12).

Предположим, что (12) не верно. Тогда существуют $\lambda_k\in[0,1]$, $(x_k,y_k)\in E$, $k\in\mathbb{N}$, такие, что

$$x_k'(t)=(1-\lambda_k)y_k(t),\quad y_k'(t)=(1-\lambda_k)Q(x_k(t),y_k(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$x_k(0)=x_k(1),\quad y_k(0)=y_k(1),\quad \int\limits_0^1 y_k(s)\,ds=0,\quad \int\limits_0^1 Q(x_k(s),y_k(s))\,ds=0,$$

$$r_k:=\|x_k\|_C+\|y_k\|_C\to\infty,\quad k\to\infty.$$

Обозначив $\tilde{x}_k(t)=r_k^{-1}x_k(t)$, $\tilde{y}_k(t)=r_k^{-1}y_k(t)$, получим

$$\tilde{x}_k'(t)=(1-\lambda_k)\tilde{y}_k(t),\quad r_k^{1-m}\tilde{y}_k'(t)=(1-\lambda_k)Q(\tilde{x}_k(t),\tilde{y}_k(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$\tilde{x}_k(0)=\tilde{x}_k(1),\quad \tilde{y}_k(0)=\tilde{y}_k(1),\quad \|\tilde{x}_k\|_C+\|\tilde{y}_k\|_C=1,$$

$$\int\limits_0^1 \tilde{y}_k(s)\,ds=0,\quad \int\limits_0^1 Q(\tilde{x}_k(s),\tilde{y}_k(s))\,ds=0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k\to\lambda_0$, $\|\tilde{x}_k-\tilde{x}_0\|_C\to 0$ при $k\to\infty$.

Если $\lambda_0<1$, то для $\tilde{x}_k(t)$ имеем

$$r_k^{1-m}\tilde{x}_k''(t)=(1-\lambda_0)^2Q(\tilde{x}_0(t),(1-\lambda_0)^{-1}\tilde{x}_k'(t))+o(1),\quad t\in(0,1),$$

$$\tilde{x}_k(0)=\tilde{x}_k(1),\quad \tilde{x}_k'(0)=\tilde{x}_k'(1),\quad \|\tilde{x}_k\|_C+(1-\lambda_k)^{-1}\|\tilde{x}_k'\|_C=1,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 1, приходим к противоречию с условием 8).

Если $\lambda_k=1$, то $\tilde{y}_k(t)\equiv 0$, $\tilde{x}_k(t)\equiv\tilde{x}_k(0)$, $|\tilde{x}_k(0)|=1$, $Q(\tilde{x}_k(0),0)=0$. Полученное противоречит условию 7).

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda_k<1$ при всех k и $\lambda_k\to 1$ при $k\to\infty$. Тогда $\tilde{x}_0(t)\equiv\tilde{x}_0(0)$. Если $||\tilde{y}_k||_C\to 0$ при $k\to\infty$, то $|\tilde{x}_0(0)|=1$ и $Q(\tilde{x}_0(0),0)=0$, что противоречит условию 7). Следовательно,

$$\liminf_{k\to\infty}\|\tilde{y}_k\|_C>0.$$

Можно считать, что $(1-\lambda_k)r_k^{m-1}\to\mu_0$ при $k\to\infty$, где $\mu_0\leqslant+\infty$. Если $\mu_0<+\infty$, то, переходя к пределу, получаем

$$\tilde{y}_0'(t)=\mu_0Q(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$\tilde{y}_0(0)=\tilde{y}_0(1),\quad |\tilde{x}_0|+\|\tilde{y}_0\|_C=1,\quad \int\limits_0^1 \tilde{y}_0(s)\,ds=0,\quad \|\tilde{y}_0\|_C>0.$$

Отсюда следует, с одной стороны, что вектор-функция $\tilde{y}_0(t)$ не может быть постоянной и $\mu_0>0$, а с другой — если $\mu_0>0$, то в силу условия 4) вектор-функция $\tilde{y}_0(t)$ должна быть постоянной. Значит, случай $\mu_0<+\infty$ невозможен.

Таким образом, $(1-\lambda_k)r_k^{m-1}\to+\infty$ и $\|\tilde{x}_k-\tilde{x}_0\|_C\to 0$ при $k\to\infty$, где $\tilde{x}_0\in\mathbb{R}^n$,

$$((1-\lambda_k)r_k^{m-1})^{-1}\tilde{y}_k'(t)=Q(\tilde{x}_k(t),\tilde{y}_k(t)),\quad t\in(0,1),$$

$$\tilde{y}_k(0)=\tilde{y}_k(1),\quad \|\tilde{x}_k\|_C+\|\tilde{y}_k\|_C=1,\quad \int\limits_0^1\tilde{y}_k(s)\,ds=0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Если $\tilde{x}_0=0$, то, рассматривая вектор-функции $z_k(t)=\tilde{y}_k(t_k+((1-\lambda_k)r_k^{m-1})^{-1}t)$, $k\in\mathbb{N}$, где $\|\tilde{y}_k\|_C=|\tilde{y}_k(t_k)|$, и переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений $z'(t)=Q(0,z(t))$, что противоречит условию 4). А в случае $\tilde{x}_0\neq 0$, используя условия 4), 5) и рассуждая как при доказательстве теоремы 1, выводим, что при некотором номере j_0 имеет место предел $\tilde{y}_k(t)\to B_{j_0}(\tilde{x}_0)$ при $k\to\infty$.

Переходя к пределу в равенстве $\int_0^1\tilde{y}_k(s)\,ds=0$, получаем $B_{j_0}(\tilde{x}_0)=0$. Отсюда, в силу условия 5в), следует, что $\tilde{x}_0=0$, тем самым пришли к противоречию. Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим следующую систему уравнений на комплексной плоскости:

$$z''(t)=\overline{(z'(t)-B_1(z(t)))^{m_1}\ldots(z'(t)-B_q(z(t)))^{m_q}}+f(t,z(t),z'(t)),\quad z(t)\in\mathbb{C}. \tag{16}$$

Здесь $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость; черта сверху означает операцию комплексного сопряжения; $q>1$, m_1, $\ldots$, m_q — натуральные числа; отображения $B_j:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$, $j=\overline{1,q}$, непрерывны, положительно однородны первого порядка. Предполагаем также, что $B_{j_1}(z)\neq B_{j_2}(z)$ при любых $z\neq 0$, $j_1\neq j_2$, и что при каждом $j=\overline{1,q}$ автономная система $z'(t)=B_j(z(t))$ не имеет ненулевых ограниченных траекторий. При таких предположениях выполнены условия 1)–8) теоремы 2, кроме условия 4). Главная нелинейная часть системы уравнений (16) определена отображением

$$Q(z_1,z_2)=\overline{(z_2-B_1(z_1))^{m_1}\ldots(z_2-B_q(z_1))^{m_q}},\quad z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

Для векторного поля $Q(\cdot,0)$: $\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ его вращение $\gamma(Q(\cdot,0))$ на единичной окружности $|z|=1$ вычисляется как

$$\gamma(Q(\cdot,0))=-\left(m_1\gamma(B_1)+\ldots+m_q\gamma(B_q)\right).$$

Выясним, при каких условиях автономная система

$$w'(t)=\overline{(w(t)-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(w(t)-B_q(z_0))^{m_q}},\quad w(t)\in\mathbb{C}, \tag{17}$$

при любом фиксированном $z_0\in\mathbb{C}$ не имеет нестационарных ограниченных траекторий. Для произвольного нестационарного решения $w(t)$ автономной системы (17) имеем

$$\frac{d}{dt}\Bigg(\int\limits_0^{w(t)}(s-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(s-B_q(z_0))^{m_q}\,ds\Bigg)=\left|(w(t)-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(w(t)-B_q(z_0))^{m_q}\right|^2>0.$$

Отсюда следует, что траектория нестационарного решения $w(t)$ незамкнута и вдоль неё постоянна функция

$$V_{m_1,\ldots,m_q}(z;B_1(z_0),\ldots,B_q(z_0)):=\mathrm{Im}\Bigg(\int\limits_0^z(s-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(s-B_q(z_0))^{m_q}\,ds\Bigg).$$

Если траектория нестационарного решения ограничена, то она при возрастании и убывании t приближается к двум разным стационарным точкам $B_{j_1}(z_0)$, $B_{j_2}(z_0)$, и в этих точках функция $V_{m_1,\ldots,m_q}$ принимает одинаковые значения. Следовательно, автономная система (17) при любом фиксированном $z_0\in\mathbb{C}$ не имеет нестационарных ограниченных траекторий, если выполнено условие

$$\operatorname{Im}\Bigg(\int\limits_{B_{j_1}(z_0)}^{B_{j_2}(z_0)}(s-B_1(z_0))^{m_1}\ldots(s-B_q(z_0))^{m_q}\,ds\Bigg)\neq 0,\quad z_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad j_1\neq j_2.$$

Данное условие запишем в следующей форме:

$$\operatorname{Im}\Bigg(\big(B_{j_2}(z_0)-B_{j_1}(z_0)\big)^{m+1}\int\limits_0^1\prod_{j=1}^{q}\bigg(s-\frac{B_j(z_0)-B_{j_1}(z_0)}{B_{j_2}(z_0)-B_{j_1}(z_0)}\bigg)^{m_j}ds\Bigg)\neq 0,\quad z_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad j_1\neq j_2,\quad (18)$$

где $m=m_1+\ldots+m_q$.

Таким образом, если выполнено условие (18) и отлично от нуля число $m_1\gamma(B_1)+\ldots$ $\ldots+m_q\gamma(B_q)$, то согласно теореме 2 система уравнений (16) имеет хотя бы одно периодическое решение с периодом, равным единице.

Положим

$$B_j(z)=z+b_j|z|e^{i\pi/(2(m+1))},\quad j=\overline{1,q},\quad b_1=0<b_2<\ldots<b_q<1.$$

В этом случае при каждом $j=\overline{1,q}$ имеет место равенство $\gamma(B_j)=1$, автономная система $z'(t)=$ $=B_j(z(t))$ не имеет ненулевых ограниченных траекторий, а условие (18) будет следующим:

$$\int\limits_0^1\prod_{j=1}^{q}\bigg(s-\frac{b_j-b_{j_1}}{b_{j_2}-b_{j_1}}\bigg)^{m_j}ds\neq 0,\quad j_1\neq j_2.$$

Условие (18) при $q=2$ принимает вид $\operatorname{Im}(B_1(z_0)-B_2(z_0))^{m_1+m_2+1}\neq 0$ для любого $z_0\in$ $\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Если положим $m_1=m_2=1$, $B_1(z)=z$, $B_2(z)=z+i2|z|$, то $\gamma(B_1)=1$, $\gamma(B_2)=0$ и все условия 1)–9) теоремы 2 выполнены.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00032).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 511 с.
2. Наимов, А.Н. О разрешимости периодической задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка / А.Н. Наимов, М.М. Кобилзода // Изв. вузов. Математика. — 2021. — № 8. — С. 56–65.
3. Наимов, А.Н. О разрешимости одной нелинейной периодической задачи / А.Н. Наимов, Р.И. Хакимов // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2003. — Т. 46, № 3–4. — С. 22–27.

4. Наимов, А.Н. Априорная оценка и существование периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости / А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 7. — С. 998–1001.
5. Наимов, А.Н. Оценка производных периодических решений одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / А.Н. Наимов, Р.И. Хакимов // Вестн. Таджикского нац. ун-та. Сер. естеств. наук. — 2017. — № 1/5. — С. 12–16.
6. Клоков, Ю.А. Априорные оценки решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.А. Клоков // Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15, № 10. — С. 1766–1773.
7. Звягин, В.Г. Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений / В.Г. Звягин, С.В. Корнев // Совр. математика. Фунд. направления. — 2015. — Т. 58. — С. 59–81.
8. Перов, А.И. Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова / А.И. Перов, В.К. Каверина // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 269–272.

ON THE SOLVABILITY OF A PERIODIC PROBLEM FOR A SYSTEM OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

E. Mukhamadiev[1], A. N. Naimov[2]

Vologda State University, Russia
e-mail: [1]emuhamadiev@rambler.ru, [2]naimovan@vogu35.ru

In this paper is investigated the solvability of a periodic problem for a system of nonlinear ordinary differential equations second order with the main positively homogeneous part. New conditions have been found that provide an a priori estimate solutions of the periodic problem under consideration. The conditions for the a priori estimate are formulated in terms of the properties of the main positively homogeneous part of the system of equations. Under the conditions of an a priori estimate, using and developing methods for calculating the mapping degree, a theorem on the solvability of the periodic problem is proven. The proven theorem generalizes previously obtained the authors' results on the study of a periodic problem for systems of nonlinear ordinary differential equations of the second order.

Keywords: periodic problem, main positively homogeneous part, perturbation, apriori estimate, mapping degree, homotopy.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00032).

REFERENCES

1. Krasnoselsky, M.A. and Zabreiko, P.P., *Geometric Methods of Non-Linear Analysis*, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
2. Naimov, A.N. and Kobilzoda, M.M., On the solvability of a periodic problem for nonlinear ordinary differential equation of the second order, *Russ. Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 8, pp. 49–57.
3. Naimov, A.N. and Khakimov, R.I., On the solvability of a nonlinear periodic problem, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan*, 2003, vol. 46, no. 3–4, pp. 22–27.
4. Naimov, A.N., A priori estimate and existence of periodic solutions for a certain class of systems of nonlinear second order ordinary differential equations on the plane, *Differ. Equat.*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 1025–1030.
5. Naimov, A.N. and Khakimov, R.I. Estimation of derivatives of periodic solutions of one class of systems of nonlinear ordinary differential equations of second order, *Vestnik Tadzhikskogo natsional'nogo universiteta. Seriya yestestvennykh nauk*, 2017, no. 1/5, pp. 12–16.
6. Klokov, Yu.A., A priori estimates for solutions of ordinary differential equations, *Differ. uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1766–1773.
7. Zvyagin, V.G. and Kornev, S.V., Method of guiding functions for existence problems for periodic solutions of differential equations, *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 233, no. 4, pp. 578–601.
8. Perov, A.I. and Kaverina, V.K., On a problem posed by Vladimir Ivanovich Zubov, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 274–278.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 322–345

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

М. В. Шамолин

Институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.11.2023 г., после доработки 01.11.2023 г.; принята к публикации 10.01.2024 г.

Предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы и дифференциальные формы) однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трёхмерным многообразиям (систем с тремя степенями свободы). Показана связь таких инвариантов и полного набора первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. Введены силовые поля, которые делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, тензорный инвариант.

DOI: 10.31857/S0374064124030041, EDN: PNLTLT

ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно [1–3], даёт возможность проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объёма позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, а для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны быть, вообще говоря, трансцендентными (т.е. имеющими существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функциями (см. [4–6]).

Кратко приведём примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты — это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий для данной системы (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (что, в частности, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов. Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает её и интегрирование, и качественное исследование. Подход данной статьи состоит в том, что для интегрирования автономной системы порядка m нужно знать $(m-1)$-й независимый тензорный инвариант.

Как показано ранее, задача о движении четырёхмерного маятника на обобщённом сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно образно описать как “поток набегающей среды, заполняющей объемлющее четырёхмерное пространство", приводит к динамической системе на касательном расслоении к трёхмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7–10]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Такое же фазовое пространство возникает в задаче о движении точки по трёхмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего четырёхмерного пространства. Отметим также и задачи о движении точки по более общим трёхмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т.д. Результаты, полученные в работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с тремя степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в статьях [11–13]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы первых интегралов и инвариантных дифференциальных форм фазового объёма для однородных систем на касательных расслоениях к гладким трёхмерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. в [14, 15]).

1. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЁХМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ

1.1. КООРДИНАТЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Рассмотрим гладкое трёхмерное риманово многообразие $M^3\{\alpha,\beta\}$ с координатами (α,β), $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha,\beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$, и изучим на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ структуру уравнений геодезических линий (при изменении координат на нём). Для этого исследуем достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),\quad \dot\beta_1=z_2f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2=z_1f_2(\alpha)g(\beta_1),\tag{1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда изучаются уравнения геодезических, например, с семью ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении трёхмерных поверхностей вращения, пространства Лобачевского и т.д.):

$$\begin{gathered}\ddot\alpha+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_1+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_2+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2=0,\end{gathered}\tag{2}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае кинематических соотношений (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$, примут вид

$$\dot z_1=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_1z_3-f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]z_1z_2,$$

$$\dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2z_3-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$\dot z_3 = -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_3^2-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2, \qquad (3)$$

и уравнения геодезических (2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1) почти всюду эквивалентны на многообразии $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ составной системе (1), (3) с новой частью координат z_1, z_2, z_3 на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(a) Системы на касательном расслоении к трёхмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере: метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего четырёхмерного пространства (естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере), и приведённая метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного четырёхмерного твердого тела (см. [13, 16, 17]).

(b) Системы на касательных расслоениях более общих трёхмерных поверхностей вращения.

(c) Системы на касательном расслоении трёхмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

1.2. О КОЛИЧЕСТВАХ “НЕИЗВЕСТНЫХ” ФУНКЦИЙ И УСЛОВИЙ, НА НИХ НАКЛАДЫВАЕМЫХ

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении трёхмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ штук при $n=3$, т.е. 18 коэффициентов. Как видно, общая задача интегрирования уравнений геодезических очень сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются ещё функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (1)), определяющие координаты на касательном расслоении. Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся “лишь” семью $(n(n-1)+1$ при $n=3)$ ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (2). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет четыре штуки $(n(n-1)/2+1$ при $n=3)$. Таким образом, мы имеем 11 функций, *характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нём.*

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий $(B(3))$ на имеющиеся $A(3)=11$ функций $(A(n)=3n(n-1)/2+2$ штук при $n=3)$? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 11, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(3)$, тем больше разность $A(3)-B(3)$ и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(3)=8$ условий на имеющиеся $A(3)=11$ функций. Число $B(3)$ складывается из трёх слагаемых: $B(3)=B_1(3)+B_2(3)+B_3(3)$. Число $B_1(3)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$, а именно:

$$f_1(\alpha)\equiv f_2(\alpha)=:f(\alpha), \qquad (4)$$

т.е. $B_1(3)=1$ (в общем случае $B_1(n)=(n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(3)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно:

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_1(\alpha), \quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_2(\beta_1), \qquad (5)$$

т.е. $B_2(3)=3$ (в общем случае $B_2(n)=n(n-1)/2$). Число $B_3(3)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$, и на коэффициенты связности, а именно:

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\equiv 0, \tag{6}$$

т.е. $B_3(3)=4$ (в общем случае $B_3(n)=n(n-1)/2+1$). Видно, что в общем случае $B(n)=$ $=B_1(n)+B_2(n)+B_3(n)=(n-1)^2+n(n-1)/2+1$, при этом $A(n)-B(n)=n$, что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия. В нашем случае $A(3)-B(3)=3$.

Замечание 1. Пусть выполнены условия (4), (5), при этом реализуется система равенств (6). Тогда справедливы следующие четыре ($n(n-1)/2+1$ при $n=3$) тождества:

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\alpha_{11}(\alpha),\quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^1_{22}(\beta_1),\quad \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha), \tag{7}$$

а также одно ($(n-1)(n-2)/2$ при $n=3$) тождество

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)\equiv g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)=:\Gamma_3(\alpha). \tag{8}$$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 1.

Замечание 2. Пусть выполнены условия (4), (5), при этом реализуются пять тождеств ((7) и (8)). Тогда справедлива система равенств (6), которая примет вид

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)\equiv\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1)=:\Gamma_3(\alpha),$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\equiv 0,$$

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\equiv 0,$$

$$2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}+g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)\equiv 0. \tag{9}$$

Таким образом, при выполнении четырёх условий ((4) и (5)) четыре условия (6) и четыре условия (9) в упомянутом смысле эквивалентны.

1.3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Для полного интегрирования системы шестого порядка достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Как будет показано, для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимые дифференциальные формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм с общим количеством, равным четырём. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, что рассмотрено далее. И то, что полный набор состоит из четырёх, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде $\ddot{x}^i+\sum_{j,k=1}^3\Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k=0$, $i=1,2,3$, является гладкая функция $\Phi(\dot{x};x)=\sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k$, но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым "выпрямив" квадратичную форму на фазовом многообразии. Кроме того, подчеркнём, что в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений (4), (5), (9) на 11 функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (1) и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ из (2).

Теорема 1. *Если выполнены условия (4), (5), (9), то система (1), (3) обладает полным набором, состоящим из четырёх первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1)=z_1^2+z_2^2+z_3^2=C_1^2=\text{const}; \tag{10}$$

$$\Phi_2(z_2,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+z_2^2}\ \Phi_0(\alpha)=C_2=\text{const},\quad \Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\,db\right\}; \tag{11}$$

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1)=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi(\beta_1)=C_3=\text{const},\quad \Psi(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)\,db\right\}; \tag{12}$$

$$\Phi_4(\beta_1,\beta_2)=\beta_2\pm\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\frac{C_3g(b)}{\sqrt{C_2^2\Psi^2(b)-C_3^2}}\,db=C_4=\text{const}\,. \tag{13}$$

Более того, после некоторого её приведения заменой независимой переменной

$$\frac{d}{dt}=f_3(\alpha)\frac{d}{d\tau} \tag{14}$$

и фазовых

$$w_3=z_3,\quad w_2^*=\ln|w_2|,\quad w_2=\sqrt{z_1^2+z_2^2},\quad w_1^*=\ln\bigl|w_1+\sqrt{1+w_1^2}\bigr|,\quad w_1=\frac{z_2}{z_1}, \tag{15}$$

фазовый поток системы (1), (3) сохраняет фазовый объём с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^3\{w_3,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dw_3\wedge dw_2^*\wedge dw_1^*\wedge d\alpha\wedge d\beta_1\wedge d\beta_2. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы, а именно, сделаем замены (14) независимой переменной и (15) фазовых переменных. Тогда система (1), (3) распадается следующим образом:

$$\dot\alpha=w_3,\quad \dot w_3=-\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)e^{2w_2^*},\quad \dot w_2^*=\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)w_3, \tag{17}$$

$$\dot w_1^*=\pm e^{w_2^*}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right],\quad \dot\beta_1=\pm\frac{W_1(w_1^*)e^{w_2^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \tag{18}$$

$$\dot\beta_2=\pm\frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}g(\beta_1), \tag{19}$$

где $w_1 = W_1(w_1^*)$ в силу замены (15), при этом в составной системе (17)–(19) точкой обозначена производная по новой переменной τ. Видно, что дивергенция правой части составной системы (17)–(19) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании четырёх первых интегралов. Действительно, дифференцирование функции (10) в силу системы (1), (3) приводит к тождеству

$$-2f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2^3-$$
$$-2\left(f_3^2(\alpha)\left(2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right)+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right)\frac{z_2^2 z_3}{f_3(\alpha)}-$$
$$-2\left(f_3^2(\alpha)\left(2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right)+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right)\frac{z_1^2 z_3}{f_3(\alpha)}-$$
$$-2\left(f_1^2(\alpha)\left(2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right)+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right)\frac{z_1^2 z_2}{f_1(\alpha)}\equiv 0,$$

если выполнена система дифференциальных равенств (6). Но, как указано выше, при выполнении четырёх условий ((4) и (5)) четыре условия (6) и четыре условия (9) в известном смысле эквивалентны.

Далее дифференцирование функции (11) в силу системы (1), (3) в условиях теоремы даёт

$$-f_3(\alpha)\left(\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right)z_3\sqrt{z_1^2+z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (11).

Дифференцирование функции (12) в силу системы (1), (3) в условиях теоремы даёт

$$-f_3(\alpha)\left(\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right)z_1 z_3\Psi(\beta_1)-$$
$$-f(\alpha)\left(\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]\Psi(\beta_1)-\frac{d\Psi(\beta_1)}{d\beta_1}\right)z_1 z_2\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]\Psi(\beta_1),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (12).

Далее рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (11) и (12) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2}=\mp\frac{C_3}{\sqrt{C_2^2\Psi^2(\beta_1)-C_3^2}}.\tag{20}$$

Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2} g(\beta_1).$$

Используя в нём равенство (20), получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (13). Теорема доказана.

Заметим также, что система равенств (6) (или (9)) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (10) (или см. ниже (27)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [18–20]). Ну а поиск как первого интеграла (10), так и интегралов (11)–(13) основывается на наличии в системе дополнительных групп симметрий [21–24].

Пример 1. В случае обобщённых сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, когда метрика на трёхмерной сфере $\mathbf{S}^3$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего четырёхмерного пространства (задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2 \sin^2\beta_1\right] \sin\alpha\cos\alpha = 0, \quad \ddot\beta_1 + 2\dot\alpha\dot\beta_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dot\beta_2^2 \sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,$$
$$\ddot\beta_2 + 2\dot\alpha\dot\beta_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2 \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0$$

и имеющая первые интегралы (10)–(13), примет следующий вид:

$$\dot\alpha = -z_3, \quad \dot z_3 = -(z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},$$
$$\dot z_2 = z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + z_1^2 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\dot z_1 = z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_1 z_2 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\dot\beta_1 = z_2 \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \dot\beta_2 = -z_1 \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (21) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 2. В случае обобщённых сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, но когда метрика на трёхмерной сфере $\mathbf{S}^3$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2 \sin^2\beta_1\right] \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \quad \ddot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1 \frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \dot\beta_2^2 \sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,$$
$$\ddot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2 \frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2 \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0 \tag{22}$$

и имеющая первые интегралы (10)–(13), примет вид

$$\dot\alpha=-z_3,\quad \dot z_3=-(z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},$$
$$\dot z_2=z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\dot z_1=z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\dot\beta_1=z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\quad \dot\beta_2=-z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\quad \nu_1\in\mathbb{R},\tag{23}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (23) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 3. В случае трёхмерного пространства Лобачевского (с координатами $x=\beta_1$, $y=\beta_2$, $z=\alpha$, задача класса (c)) трёхпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot\alpha-\frac{1}{\alpha}(\dot\alpha^2-\dot\beta_1^2-\dot\beta_2^2)=0,\quad \ddot\beta_1-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_1=0,\quad \ddot\beta_2-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_2=0\tag{24}$$

и имеющая первые интегралы (10)–(13), будет иметь вид

$$\dot\alpha=z_3\nu_1\alpha,$$
$$\dot z_3=-z_2^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}-z_1^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3},\quad \dot z_2=z_2z_3\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2},\quad \dot z_1=z_1z_3\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3},$$
$$\dot\beta_1=z_2\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}},\quad \dot\beta_2=z_1\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_3}},\quad \nu_1,\nu_2,\nu_3\in\mathbb{R},\tag{25}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (25) рассматривать как новые кинематические соотношения.

2. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЁХМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

2.1. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (1), (3) и получим систему *консервативную*, а именно, внесём в систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)\\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha)\\ F_3(\alpha)f_3(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),$$

$$\dot z_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$\dot z_2 = F_2(\beta_1)f_1(\alpha) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$\dot z_1 = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_1z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]z_1z_2,$$

$$\dot\beta_1 = z_2f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1), \tag{26}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - F_3(\alpha)f_3^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,$$

$$\ddot\beta_1 - F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,$$

$$\ddot\beta_2 - F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

2.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Для полного интегрирования системы шестого порядка (26) достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Как будет показано, для полного интегрирования системы (26) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимые дифференциальные формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм с общим количеством, равным четырём. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, что рассмотрено далее. И то, что полный набор состоит из четырёх, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Кроме того, подчеркнём, что в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений ((4), (5) и (9)) на 11 функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Теорема 2. *Если выполнены условия (4), (5), (9), то система (26) обладает полным набором, состоящим из четырёх первых интегралов:*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \text{const},$$

$$V(\alpha,\beta) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)\,da - 2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b)\,db - 2\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b)\,db, \tag{27}$$

а также, для упрощения, при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$ — первые интегралы (11)–(13).

Более того, после некоторого её приведения — замен независимой переменной (14) и фазовых (15) — фазовый поток системы (26) сохраняет фазовый объём с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^3\{w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма (16).

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

3. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЁХМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

3.1. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем систему (26) и получим систему *с диссипацией*. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$\begin{gathered}
\dot\alpha = z_3f_3(\alpha)+b\delta(\alpha),\\
\dot z_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha)-f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_3^2-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2-\\
-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2+z_3F_3^1(\alpha),\\
\dot z_2 = F_2(\beta_1)f_1(\alpha)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2z_3-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2+z_2F_2^1(\alpha),\\
\dot z_1 = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_1z_3-\\
-f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]z_1z_2+z_1F_1^1(\alpha),\\
\dot\beta_1 = z_2f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2 = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1),
\end{gathered}\tag{28}$$

и она почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\ddot\alpha-\left(b\tilde\delta(\alpha)+F_3^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\right)\dot\alpha-F_3(\beta_1)f_3^2(\alpha)+b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha)+\\
+b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_3(\alpha)|)}{d\alpha}\right]+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\
\ddot\beta_1-\left(F_2^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_1(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\right)\dot\beta_1-F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha)+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\
\ddot\beta_2-\left(F_1^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d(\ln|f_2(\alpha)|)}{d\alpha}\right]\right)\dot\beta_2-F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)+\\
+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2=0
\end{gathered}$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$. Здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha)=d\delta(\alpha)/d\alpha$.

Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b>0$, в первом уравнении системы (28) (в отличие от системы (26)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от z_1, z_2, z_3 в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)\\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha)\\ F_3(\alpha)f_3(\alpha)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1F_1^1(\alpha)\\ z_2F_2^1(\alpha)\\ z_3F_3^1(\alpha)\end{pmatrix}.$$

3.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Для полного интегрирования системы шестого порядка (28) достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Как будет показано, для полного интегрирования системы (28) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимые дифференциальные формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм с общим количеством, равным четырём. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде. То, что полный набор состоит из четырёх, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Подчеркнём, что в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений ((4), (5) и (9)) на 11 функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (28) при выполнении свойств (4), (5), (9), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси $\dot z_1$ и $\dot z_2$ (т.е. присутствует проекция внешней силы лишь на ось $\dot z_3$): $F_1(\beta_2)\equiv F_2(\beta_1)\equiv 0$.

Тогда система (28) допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка

$$\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha),\quad \dot z_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)(z_2^2+z_1^2) + z_3F_3^1(\alpha),$$

$$\dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_2z_3 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha),$$

$$\dot z_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d(\ln|f(\alpha)|)}{d\alpha}\right]z_1z_3 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha),$$

$$\dot\beta_1 = z_2 f(\alpha) \tag{29}$$

при наличии шестого уравнения

$$\dot\beta_2 = z_1 f(\alpha)g(\beta_1). \tag{30}$$

Далее накладываем определённые ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому предположим, что выполнены следующие равенства:

$$F_1^1(\alpha)\equiv F_2^1(\alpha) =: F^1(\alpha). \tag{31}$$

Для полного интегрирования (по Якоби) системы (29), (30) при условии (31) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных $w_3=z_3$, $w_2=\sqrt{z_1^2+z_2^2}$, $w_1=z_2/z_1$ система (29), (30) распадается следующим образом:

$$\dot\alpha = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha),\quad \dot w_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)w_2^2 + w_3F_3^1(\alpha),$$

$$\dot w_2 = \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)w_2w_3 + w_2F^1(\alpha); \tag{32}$$

$$\dot w_1 = \pm w_2\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right],\quad \dot\beta_1 = \pm\frac{w_1w_2}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha); \tag{33}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{34}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (32)–(34) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (32), один — для системы (33) (после соответствующей замены независимой переменной в ней) и дополнительный тензорный инвариант, “привязывающий” уравнение (34) (т.е. всего четыре).

Продолжим определённые ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha}(\ln|\Delta(\alpha)|) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \tag{35}$$

а для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k=1,2,3$, должны выполняться равенства

$$F_3(\alpha) = \lambda_3^0 \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}\right) = \lambda_3^0 \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_3(\alpha) \frac{d}{d\alpha}(\Delta(\alpha)) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha), \quad k=1,2,3. \tag{36}$$

Условие (35) назовём “геометрическим”, а условия из группы (36) — “энергетическими”. При этом $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 =: \lambda^1$ в силу (31). Условие (35) названо геометрическим в том числе потому, что оно накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (36) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *(знако)переменную диссипацию* (см. также [15, 25]).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (35) и (36). Тогда система (32)–(34) обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными [15] (т.е. имеющими существенно особые точки) первыми интегралами.*

Доказательство. Сопоставим сначала системе третьего порядка (32) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)w_2^2/f_3(\alpha) + w_3F_3^1(\alpha)}{w_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)},$$
$$\frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)w_2w_3/f_3(\alpha) + w_2F^1(\alpha)}{w_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \tag{37}$$

Далее введём однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_2 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)} \tag{38}$$

и приведём систему (37) к следующему виду:

$$\Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \frac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F_3^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)},$$
$$\Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)},$$

или, учитывая (9), к (почти всюду) эквивалентному виду

$$\Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha}=\frac{F_3(\alpha)f_3(\alpha)-f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_3(\alpha)-\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2+[\Delta(\alpha)F_3^1(\alpha)-b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_2}{u_2\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)},$$

$$\Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha}=\frac{[f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)/f_3(\alpha)-\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1u_2+[\Delta(\alpha)F^1(\alpha)-b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1}{u_2\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)}, \qquad (39)$$

здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha)=d(\Delta(\alpha))/d\alpha$.

Для интегрирования системы (39) должны выполняться геометрическое и энергетические условия (35) и (36). Действительно, после их выполнения система (39) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{\lambda_3^0-\kappa u_1^2-u_2^2+(\lambda_3^1-b)u_2}{(\kappa-1)u_1u_2+(\lambda^1-b)u_1}. \qquad (40)$$

Уравнение (40) есть уравнение Абеля [26], его общее решение имеет громоздкий вид. В частности, при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$ уравнение имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{-u_2^2-u_1^2+(\lambda^1-b)u_2+\lambda_3^0}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \qquad (41)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_3,w_2;\alpha)=\frac{f_3^2(\alpha)(w_3^2+w_2^2)+(b-\lambda^1)w_3\delta(\alpha)f_3(\alpha)-\lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{w_2\delta(\alpha)f_3(\alpha)}=C_1=\mathrm{const}\,. \qquad (42)$$

Замечание 3. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (32) (как часть системы (32)–(34)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [27, 28]). При этом она превращается в консервативную систему при выполнении условия (9), геометрического и энергетических условий (35), (36) (но при любой гладкой функции $F_3(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1=\lambda_3^1=-b$, $\kappa=-1$:

$$\dot{\alpha}=w_3f_3(\alpha)+b\delta(\alpha), \quad \dot{w}_3=F_3(\alpha)f_3(\alpha)-\kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_2^2-bw_3f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha),$$

$$\dot{w}_2=\kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_2w_3-bw_2f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha). \qquad (43)$$

Действительно, система (43) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_3,w_2;\alpha)=w_2^2+w_3^2+2bw_3\Delta(\alpha)+V(\alpha)=C_1=\mathrm{const}, \quad V(\alpha)=-2\int_{\alpha_0}^{\alpha}F_3(a)\,da, \qquad (44)$$

$$\Phi_2(w_2;\alpha)=w_2\Delta(\alpha)=C_2=\mathrm{const}\,. \qquad (45)$$

В силу предыдущих свойств первых интегралов имеем

$$\Phi_2(w_2;\alpha)=w_2f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\,db\right\}=$$

$$=w_2f(\alpha)\exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_3(b)\frac{f^2(b)}{f_3^2(b)}+\frac{d(\ln|f(b)|)}{db}\right]db\right\}\cong w_2\exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_3(b)\frac{f^2(b)}{f_3^2(b)}\,db\right\},$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

В силу (35), (36) последняя величина при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1=-b$ будет иметь вид

$$w_2\exp\biggl\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|\Delta(b)|\,db\biggr\}\cong w_2\Delta(\alpha)$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (44), (45) также является первым интегралом системы (43), но при $\lambda^1=\lambda_3^1\neq-b$ каждая из функций

$$w_3^2+w_2^2+(b-\lambda^1)w_3\Delta(\alpha)-\lambda_3^0\Delta^2(\alpha) \tag{46}$$

и (45) по отдельности не является первым интегралом системы (32). Однако отношение (46) к (45) является первым интегралом системы (32) (при $\kappa=-1$) при любых $\lambda^1=\lambda_3^1$, b.

Далее найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (32) при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$. Для этого преобразуем инвариантное соотношение (41) при $u_1\neq0$ следующим образом:

$$\left(u_2+\frac{-\lambda^1+b}{2}\right)^2+\left(u_1+\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{(\lambda^1-b)^2+C_1^2}{4}+\lambda_3^0. \tag{47}$$

Параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1-b)^2+C_1^2+4\lambda_3^0\geqslant0, \tag{48}$$

и фазовое пространство системы (32) расслаивается на семейство поверхностей (47).

Таким образом, в силу соотношения (41) первое уравнение системы (39) при условиях (35), (36) и при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde\Delta(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha}=\frac{2(-\lambda_3^0-(\lambda^1-b)u_2+u_2^2)+C_1U_1(C_1,u_2)}{u_2+b},$$

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\Bigl(-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-(\lambda^1-b)u_2-\lambda_3^0)}\Bigr),$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (48). Тогда квадратуру для поиска дополнительного первого интеграла системы (32) запишем как

$$-\int\frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}=\int\frac{(b+u_2)\,du_2}{2(-\lambda_3^0-(\lambda^1-b)u_2+u_2^2)+C_1(-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-(\lambda^1-b)u_2-\lambda_3^0)})/2}. \tag{49}$$

Левая часть (49) (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если $u_2-(\lambda^1-b)/2=r_1$, $b_1^2=(\lambda^1-b)^2+C_1^2+4\lambda_3^0$, то правая часть равенства (49) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}+b\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm1\right|\mp\frac{b}{2}I_1,$$

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{50}$$

При вычислении интеграла (50) возможны три случая: если $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_3^0$, то

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2+4\lambda_3^0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+\mathrm{const};$$

если $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_3^0$, то

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const};$$

если $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_3^0$, то

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}.$$

Возвращаясь к переменной $r_1=w_3/\Delta(\alpha)-(\lambda^1-b)/2$, получим окончательный вид для величины I_1 во всех случаях: при $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_3^0$

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+\mathrm{const};$$

при $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_3^0$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const};$$

при $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_3^0$

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}.$$

Итак, найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (32) при перечисленных выше условиях (в том числе при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных. Полученный дополнительный первый интеграл имеет структурный вид

$$\Theta_2(w_3,w_2;\alpha)=G\left(\Delta(\alpha),\frac{w_3}{\Delta(\alpha)},\frac{w_2}{\Delta(\alpha)}\right)=C_2=\mathrm{const}\,. \tag{51}$$

Выражение первого интеграла (51) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть неэлементарной функцией).

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (32)–(34) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (32). Для полной же её интегрируемости достаточно найти один первый интеграл — для системы (33) (меняя в ней независимую переменную), становящуюся независимой подсистемой после соответствующей замены независимой переменной, а также ещё один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (34). Первый интеграл для системы (33) будет иметь вид

$$\Theta_3(w_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\Psi(\beta_1)}=C_3=\mathrm{const}, \tag{52}$$

функция $\Psi(\beta_1)$ определена в (12). В переменных z первый интеграл (52) записывается как

$$\Theta_3'(z_2,z_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Psi(\beta_1)}=C_3'=\mathrm{const}\,. \tag{53}$$

Дополнительный первый интеграл, "привязывающий" (34), находится по аналогии с (13):

$$\Theta_4(\beta_1,\beta_2)=\beta_2\pm\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\frac{C_3g(b)}{\sqrt{C_2^2\Psi^2(b)-C_3^2}}\,db=C_4=\mathrm{const}, \tag{54}$$

где после вычисления интеграла (54) вместо постоянной C_3 можно формально подставить левую часть равенства (52) (или (53)).

Таком образом, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (32)–(34) имеет четыре первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки).

Теорема 3 доказана.

3.3. ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Теорема 4. *Если для системы вида (32)–(34) выполняются геометрическое и энергетические свойства (35), (36), то у неё также существуют функционально независимые между собой четыре инвариантные дифференциальные формы с, вообще говоря, трансцендентными (т.е. имеющими существенно особые точки) коэффициентами (ср. с [8]). Эти дифференциальные формы, для упрощения, при* $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$ *примут следующий вид:*

$$\rho_1(w_3,w_2;\alpha)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(w_3,w_2;\alpha)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\}\frac{u_3^2+u_2^2+(b-\lambda^1)u_3-\lambda_3^0}{u_2},\quad u_k=\frac{w_k}{\Delta(\alpha)},\quad k=2,3,$$

$$\rho_2(w_3,w_2;\alpha)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha,\ \rho_2(w_3,w_2;\alpha)=\Delta(\alpha)\exp\left\{\int\frac{(2b+\lambda^1+u_3)\,du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\},$$

$$\rho_3(w_1;\beta_1)=\frac{1}{\sqrt{1+w_1^2}}\ \ dw_1\wedge d\beta_1,$$

$$\rho_4(w_3,w_2;\alpha,\beta_1,\beta_2)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha\wedge d\beta_1\wedge d\beta_2,$$

$$\rho_4(w_3,w_2;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_3}{U_2(C_1,u_3)}\right\}\Theta_4(\beta_1,\beta_2),$$

и они, вообще говоря, зависимы с первыми интегралами (42), (51), (52), (54).

Доказательство. I. Система (32) составной рассматриваемой системы (32)–(34) при выполнении свойств (35), (36) имеет вид

$$\dot\alpha = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \quad \dot w_3 = \lambda_3^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2^2 + \lambda_3^1 w_3 f_3(\alpha)\tilde\Delta(\alpha),$$
$$\dot w_2 = \kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 w_3 + \lambda^1 w_2 f_3(\alpha)\tilde\Delta(\alpha). \tag{55}$$

После замен независимой $d/dt = f_3(\alpha) d/d\tau$ и фазовой $w_2^* = \ln|w_2|$ переменных система (55) примет вид

$$\dot\alpha = X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha) = w_3 + b\Delta(\alpha), \quad \dot w_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) = \lambda_3^0\Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_2^*} + \lambda_3^1 w_3\tilde\Delta(\alpha),$$
$$\dot w_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 + \lambda^1\tilde\Delta(\alpha), \tag{56}$$

здесь точкой обозначена производная по τ.

Для системы (56) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_3, w_2^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объёма $\rho(w_3, w_2^*; \alpha) dw_3 \wedge dw_2^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\big[\rho(w_3, w_2^*; \alpha) X(w_3, w_2^*; \alpha)\big] = 0, \tag{57}$$

где

$$X(w_3, w_2^*; \alpha) = \{X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha)\}$$

— векторное поле системы (56) в координатах $(w_3, w_2^*; \alpha)$. Уравнение (57) перепишем как

$$X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_{w_3} + X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_{w_2^*} = -\rho \operatorname{div} X(w_3, w_2^*; \alpha), \tag{58}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_3, w_2^*; \alpha) = (b + \lambda_3^1)\tilde\Delta(\alpha). \tag{59}$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (58) в частных производных будет иметь вид

$$\dot\alpha = X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), \quad \dot w_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), \quad \dot w_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha), \quad \dot\rho = -\rho(b + \lambda_3^1)\tilde\Delta(\alpha). \tag{60}$$

У системы, состоящей из первых трёх уравнений системы (60), уже найдены два первых интеграла (42) и (51). Найдём третий независимый первый интеграл системы (60) уравнений характеристик. Сопоставим системе (60) следующую неавтономную систему:

$$\frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{\lambda_3^0\Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa\tilde\Delta(\alpha) w_2^2/\Delta(\alpha) + \lambda_3^1 w_3\tilde\Delta(\alpha)}{w_3 + b\Delta(\alpha)}, \tag{61}$$

$$\frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{\kappa\tilde\Delta(\alpha) w_2 w_3/\Delta(\alpha) + \lambda^1 w_2\tilde\Delta(\alpha)}{w_3 + b\Delta(\alpha)}, \quad \frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{(b + \lambda_3^1)\rho\tilde\Delta(\alpha)}{w_3 + b\Delta(\alpha)} \tag{62}$$

или

$$\frac{dw_3}{d\Delta} = \frac{\lambda_3^0\Delta - \kappa w_2^2/\Delta + \lambda_3^1 w_3}{w_3 + b\Delta}, \quad \frac{dw_2}{d\Delta} = \frac{\kappa w_2 w_3/\Delta + \lambda^1 w_2}{w_3 + b\Delta}, \quad \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1)\rho}{w_3 + b\Delta}. \tag{63}$$

После введения однородных переменных $w_3 = u_2\Delta$, $w_2 = u_1\Delta$, похожих на соответствующие переменные в замене (38), систему (63) перепишем в виде

$$\Delta\frac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_3^1 u_2}{u_2 + b}, \quad \Delta\frac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \frac{\kappa u_1 u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \quad \Delta\frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1)\rho}{u_2 + b}$$

или

$$\Delta\frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b - \lambda_3^1)u_2}{u_2 + b}, \quad \Delta\frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa - 1)u_1 u_2 - (b - \lambda^1)u_1}{u_2 + b}, \quad \Delta\frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1)\rho}{u_2 + b}. \tag{64}$$

Из первых двух уравнений системы (64) получим первый интеграл (42). Из квадратуры

$$-\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{(u_2 + b)du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2}\left(C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)}\right),$$
$$U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda^1)u_2 - \lambda_3^0, \quad C_1 \neq 0,$$

можем записать первый интеграл (51) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda_3^1$). И, наконец, из

$$\frac{d\rho}{(b + \lambda^1)\rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \tag{65}$$

получаем первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ. Вычислим квадратуру (65). В самом деле, справедливо инвариантное соотношение

$$\rho\exp\left\{-(b + \lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} = C_\rho = \text{const}, \tag{66}$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (60). Таким образом, общее решение линейного уравнения (58) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\}\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2], \tag{67}$$

где $\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (42), (51) соответственно.

В частности, за два функционально независимых решения линейного уравнения (58) можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_3, w_2; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\}\Theta_1(w_3, w_2; \alpha),$$
$$\rho_2(w_3, w_2; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\}\Theta_2(w_3, w_2; \alpha), \quad u_2 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}.$$

II. Рассмотрим систему (33). После замены независимой переменной $d/dt = \pm w_2 f(\alpha)d/d\tau$ она примет вид

$$\dot{w}_1 = X_{w_1}(w_1; \beta_1) = \sqrt{1 + w_1^2}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right], \quad \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_1; \beta_1) = \frac{w_1}{\sqrt{1 + w_1^2}}, \tag{68}$$

где также точкой обозначена производная по τ.

Для системы (68) будем искать интегральный инвариант с плотностью $\rho(w_1;\beta_1)$, соответствующей дифференциальной форме площади $\rho(w_1;\beta_1)dw_1\wedge d\beta_1$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}[\rho(w_1;\beta_1)X(w_1;\beta_1)]=0, \tag{69}$$

где $X(w_1;\beta_1)=\{X_{w_1}(w_1;\beta_1),X_{\beta_1}(w_1;\beta_1)\}$ — векторное поле рассматриваемой системы (68) в координатах $(w_1;\beta_1)$. Уравнение (69) перепишем как

$$X_{w_1}(w_1;\beta_1)\rho_{w_1}+X_{\beta_1}(w_1;\beta_1)\rho_{\beta_1}=-\rho\operatorname{div}X(w_1;\beta_1), \tag{70}$$

при этом

$$\operatorname{div}X(w_1;\beta_1)=\frac{w_1}{\sqrt{1+w_1^2}}\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right].$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (70) в частных производных примет вид

$$\dot w_1=X_{w_1}(w_1;\beta_1),\quad \dot\beta_1=X_{\beta_1}(w_1;\beta_1),\quad \dot\rho=-\rho\frac{w_1}{\sqrt{1+w_1^2}}\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right]. \tag{71}$$

У системы, состоящей из первых двух уравнений системы (71), уже найден первый интеграл (52). Найдём дополнительный независимый первый интеграл для системы (71). Сопоставим двум последним уравнениям системы (71) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{d\rho}{d\beta_1}=-\rho\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right],$$

которое даёт инвариантное соотношение

$$\Theta_{\rho_3}(\beta_1;\rho)=\rho\Psi(\beta_1)=C_{\rho_3}=\mathrm{const},$$

являющееся вторым, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (71) (о функции $\Psi(\beta_1)$ см. (12)).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (70) в частных производных будет иметь вид $\rho=\mathcal{G}[\Theta_3]/\Psi_1(\beta_1)$, где $\mathcal{G}[\Theta_3]$ — произвольная гладкая функция одного аргумента, при этом Θ_3 — первый интеграл (52).

В частности, если в качестве функции $\mathcal{G}[\Theta_3]$ выбрать

$$\mathcal{G}[\Theta_3]=\frac{1}{\Theta_3}=\frac{\Psi(\beta_1)}{\sqrt{1+w_1^2}},$$

то за решение линейного уравнения (70) можно взять функцию

$$\rho_3(w_1;\beta_1)=\frac{1}{\sqrt{1+w_1^2}}. \tag{72}$$

III. Инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_3,w_2;\alpha)$, $p=1,2$, а также $\rho_3(w_1;\beta_1)$ были получены выше из исследований отдельных систем (32) и (33), которые сами составляют общую рассматриваемую составную систему (32)–(34). Возникает вопрос: а как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит нам, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, “привязывающей” уравнение (34).

Составная рассматриваемая система (32)–(34) при выполнении свойств (35), (36) имеет вид

$$\dot\alpha = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \quad \dot w_3 = \lambda_3^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2^2 + \lambda_3^1 w_3 f_3(\alpha)\tilde\Delta(\alpha),$$

$$\dot w_2 = \kappa f_3(\alpha)\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 w_3 + \lambda^1 w_2 f_3(\alpha)\tilde\Delta(\alpha); \tag{73}$$

$$\dot w_1 = \pm w_2\sqrt{1+w_1^2} f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right], \quad \dot\beta_1 = \pm\frac{w_1 w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha); \tag{74}$$

$$\dot\beta_2 = \pm\frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{75}$$

После замен независимой $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ и фазовых переменных по формулам

$$w_2^* = \ln|w_2|, \quad w_1^* = \ln\left|w_1 + \sqrt{1+w_1^2}\right| \tag{76}$$

составная система (73)–(75) примет вид

$$\dot\alpha = X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha) = w_3 + b\Delta(\alpha),$$

$$\dot w_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) = \lambda_3^0\Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_2^*} + \lambda_3^1 w_3\tilde\Delta(\alpha),$$

$$\dot w_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 + \lambda^1\tilde\Delta(\alpha); \tag{77}$$

$$\dot w_1^* = X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_2^*}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d(\ln|g(\beta_1)|)}{d\beta_1}\right],$$

$$\dot\beta_1 = X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha) = \pm\frac{W_1(w_1^*)e^{w_2^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}; \tag{78}$$

$$\dot\beta_2 = X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm\frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1), \tag{79}$$

при этом в составной системе (77)–(79) точкой обозначена производная по новой независимой переменной τ, а $w_1 = W_1(w_1^*)$ — функция в силу замен (76). В принципе, замена (76) носит технический характер, при этом можно использовать как группу переменных w_2^*, w_1^*, так и группу переменных w_2, w_1.

Для составной системы (77)–(79) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$, соответствующие дифференциальным формам объёма

$$\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\left[\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) X(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\right] = 0, \tag{80}$$

где

$$X(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \{X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha),$$

$$X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1)\}$$

— векторное поле составной системы (77)–(79) в координатах $(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$.

Уравнение (80) перепишем в виде

$$X_\alpha(w_3,w_2^*;\alpha)\rho_\alpha+X_{w_3}(w_3,w_2^*;\alpha)\rho_{w_3}+X_{w_2^*}(w_3,w_2^*;\alpha)\rho_{w_2^*}+X_{w_1^*}(w_2^*;\alpha,\beta_1)\rho_{w_1^*}+$$
$$+X_{\beta_1}(w_2^*,w_1^*;\alpha)\rho_{\beta_1}+X_{\beta_2}(w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1)\rho_{\beta_2}=-\rho\,\mathrm{div}\,X(w_3,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2), \tag{81}$$

при этом $\mathrm{div}\,X(w_3,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2)=(b+\lambda_3^1)\tilde{\Delta}(\alpha)$, как и в случае (59) для "отдельной" системы (56). Тогда будем иметь следующую систему уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (81) в частных производных:

$$\dot{\alpha}=X_\alpha(w_3,w_2^*;\alpha),\quad \dot{w}_3=X_{w_3}(w_3,w_2^*;\alpha),\quad \dot{w}_2^*=X_{w_2^*}(w_3,w_2^*;\alpha),\quad \dot{w}_1^*=X_{w_1^*}(w_2^*;\alpha,\beta_1),$$
$$\dot{\beta}_1=X_{\beta_1}(w_2^*,w_1^*;\alpha),\quad \dot{\beta}_2=X_{\beta_2}(w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1),\quad \dot{\rho}=-\rho(b+\lambda_3^1)\tilde{\Delta}(\alpha); \tag{82}$$

она включает систему уравнений характеристик (60) для уравнения (58).

У системы, состоящей из первых шести уравнений системы (82), уже найдены четыре первых интеграла (42), (51), (52) и (54) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (66), "привязывающий" уравнение (последнее уравнение системы (82)) на функцию ρ. Таким образом, общее решение уравнения (81) имеет вид

$$\rho=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\mathcal{H}[\Theta_1,\ldots,\Theta_4],$$

где $\mathcal{H}[\Theta_1,\ldots,\Theta_4]$ — произвольная гладкая функция четырёх аргументов, Θ_1, …, Θ_4 — четыре первых интеграла (42), (51), (52), (54) соответственно.

В частности, за четыре функционально независимых решения линейного уравнения (81) в частных производных можно взять функции

$$\begin{gathered}
\rho_1(w_3,w_2;\alpha)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\Theta_1(w_3,w_2;\alpha),\\
\rho_2(w_3,w_2;\alpha)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\Theta_2(w_3,w_2;\alpha),\quad u_2=\frac{w_3}{\Delta(\alpha)},\quad u_1=\frac{w_2}{\Delta(\alpha)},\\
\rho_3(w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\Theta_3(w_1;\beta_1),\\
\rho_4(w_3,w_2;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\Theta_4(\beta_1,\beta_2).
\end{gathered}\tag{83}$$

В п. III данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (77)–(79). Понятно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_3,w_2;\alpha)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_3,w_2;\alpha)dw_3\wedge dw_2\wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (32), но и для составной системы (32)–(34). При этом для интегрирования составной системы (32)–(34) можно использовать как более "громоздкую" форму с функцией (83), так и форму с функцией (72), имеющей более простой наглядный вид, поскольку составная система (32)–(34) распалась известным образом. Теорема доказана.

Строение первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией изучалось также в [24, 25]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [7, 14, 16], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к трёхмерной сфере, а также более общих систем на расслоении трёхмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского. При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, особо выделим работы [22, 29].

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов, В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, № 1 (445). — С. 117–148.
2. Колмогоров, А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А.Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.
3. Poincaré, H. Calcul des probabilités / H. Poincaré. — Paris : Gauthier–Villars, 1912. — 352 p.
4. Бурбаки, Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер / Н. Бурбаки ; пер. с фр. Е.И. Стечкиной ; ред. С.Б. Стечкин. — М. : Наука, 1967. — 396 с.
5. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат ; в 2-х ч. — М. : Наука, 1987.
6. Шамолин, М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 3. — С. 209–210.
7. Георгиевский, Д.В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в $\mathbb{R}^n$ / Д.В. Георгиевский, М.В. Шамолин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
8. Трофимов, В.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем / В.В. Трофимов, М.В. Шамолин // Фунд. и прикл. математика. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 3–229.
9. Шамолин, М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырёхмерного твердого тела в сопротивляющейся среде / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2000. — Т. 375, № 3. — С. 343–346.
10. Шамолин, М.В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2009. — Т. 425, № 3. — С. 338–342.
11. Шамолин, М.В. Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. — 2010. — Т. 65, № 1. — С. 189–190.
12. Шамолин, М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2011. — Т. 437, № 2. — С. 190–193.
13. Шамолин, М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 506–509.
14. Иванова, Т.А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики / Т.А. Иванова // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 43–51.
15. Самсонов, В.А. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде / В.А. Самсонов, М.В. Шамолин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
16. Шамолин, М.В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^4$ / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 6. — С. 233–234.
17. Шамолин, М.В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2011. — Т. 440, № 2. — С. 187–190.
18. Вейль, Г. Симметрия / Г. Вейль ; пер. с англ. Б.В. Бирюкова и Ю.А. Данилова ; под ред. Б.А. Розенфельда ; 3-е изд. — М. : URSS, 2007. — 192 с.

19. Дубровин, Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. — М. : Наука, 1979. — 760 с.
20. Клейн, Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн ; пер. с нем. Н.К. Брушлинского. — М. : Ленанд, 2017. — 351 с.
21. Козлов, В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем / В.В. Козлов // Прикл. математика и механика. — 2015. — Т. 79, № 3. — С. 307–316.
22. Трофимов, В.В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли / В.В. Трофимов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 1191–1199.
23. Шамолин, М.В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трёхмерной сфере / М.В. Шамолин // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, № 5 (413). — С. 185–186.
24. Шамолин, М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырёхмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2013. — Т. 449, № 4. — С. 416–419.
25. Шамолин, М.В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере / М.В. Шамолин // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 6. — С. 743–759.
26. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке ; пер. с нем. С.В. Фомина. — 5-е изд., стер. — М. : Наука, 1976. — 576 с.
27. Шамолин, М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трёхмерного многообразия / М.В. Шамолин // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 84–90.
28. Шамолин, М.В. Инвариантные формы объёма систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией / М.В. Шамолин // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 507, № 1. — С. 86–92.
29. Трофимов, В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств / В.В. Трофимов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1984. — № 6. — С. 31–33.

INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

M. V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Russia
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Tensor invariants (first integrals and differential forms) of homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth three-dimensional manifolds (systems with three degrees of freedom) are presented in this paper. The connection between the presence of such invariants and the complete set of the first integrals, which are necessary for the integration of geodesic, potential, and dissipative systems, is shown. At the same time, the introduced force fields make the considered systems dissipative with dissipation of different signs and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamic system, nonconservative force field, integrability, tensor invariant.

REFERENCES

1. Kozlov, V.V., Tensor invariants and integration of differential equations, *Russ. Math. Surv.*, 2019, vol. 74, no. 1, pp. 111–140.
2. Kolmogorov, A.N., On dynamical systems with an integral invariant on the torus, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 93, no. 5, pp. 763–766.
3. Poincaré, H., *Calcul des probabilités*, Paris: Gauthier–Villars, 1912.
4. Bourbaki, N., *Eléments de mathématique. Premiere partie. Les Structures Fondamentales de L'Analyse. Livre VI. Integration*, Paris: Hermann & Cie, 1959.

5. Shabat, B.V., *Introduction to Complex Analysis*, Providence: Amer. Math. Soc., 1992.
6. Shamolin, M.V., On integrability in transcendental functions, *Russ. Math. Surveys*, 1998, vol. 53, no. 3, pp. 637–638.
7. Georgievskii, D.V. and Shamolin, M.V., First integrals of motion equations of a generalized gyroscope in $\mathbb{R}^n$, *Moscow Univ. Math. Bulletin*, 2003, vol. 58, no. 5, pp. 25–29.
8. Trofimov, V.V. and Shamolin, M.V., Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems, *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 180, no. 4, pp. 365–530.
9. Shamolin, M.V., Integrability according to Jacobi in the problem of motion of a four-dimensional solid in a resistant medium, *Doklady Physics*, 2000, vol. 45, no. 11, pp. 632–634.
10. Shamolin, M.V., New cases of full integrability in dynamics of a dynamically symmetric four-dimensional solid in a nonconservative field, *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, no. 3, pp. 155–159.
11. Shamolin, M.V., A completely integrable case in the dynamics of a four-dimensional rigid body in a nonconservative field, *Russ. Math. Surveys*, 2010, vol. 65, no. 1, pp. 183–185.
12. Shamolin, M.V., A new case of integrability in dynamics of a $4D$-Solid in a nonconservative field, *Doklady Physics*, 2011, vol. 56, no. 3, pp. 186–189.
13. Shamolin, M.V., A new case of integrability in the dynamics of a 4D-rigid body in a nonconservative field under the assumption of linear damping, *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 6, pp. 250–253.
14. Ivanova, T.A., Euler equations in models of theoretical physics, *Math. Notes*, 1992, vol. 52, pp. 784–790.
15. Samsonov, V.A. and Shamolin, M.V., Body motion in a resisting medium, *Moscow Univ. Mech. Bulletin*, 1989, vol. 44, no. 3, pp. 16–20.
16. Shamolin, M.V., An integrable case of dynamical equations on $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^4$, *Russ. Math. Surveys*, 2005, vol. 60, no. 6, pp. 1245–1246.
17. Shamolin, M.V., Complete list of first integrals in the problem on the motion of a $4D$ solid in a resisting medium under assumption of linear damping, *Doklady Physics*, 2011, vol. 56, no. 9, pp. 498–501.
18. Weyl, H., *Symmetry*, Princeton: Princeton University Press, 1952.
19. Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., and Fomenko A.T., *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya* (Modern Geometry. Methods and Applications), Moscow: Nauka, 1979.
20. Klein, F., *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Saarbrucken: VDM Verlag Dr. Müller, 2006.
21. Kozlov, V.V., Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems, *J. Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 79, no. 3, pp. 209–216.
22. Trofimov, V.V., Euler equations on finite-dimensional solvable lie groups, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1981, vol. 17, no. 2, pp. 405–412.
23. Shamolin, M.V., New case of integrability of dynamic equations on the tangent bundle of a 3-sphere, *Russ. Math. Surveys*, 2013, vol. 68, no. 5, pp. 963–965.
24. Shamolin, M.V., Complete list of first integrals of dynamic equations of motion of a $4D$ rigid body in a nonconservative field under the assumption of linear damping, *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 4, pp. 143–146.
25. Shamolin, M.V., Integrable nonconservative dynamical systems on the tangent bundle of the multidimensional sphere, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 6, pp. 722–738.
26. Kamke, E., *Gewohnliche Differentialgleichungen*, Leipzig: Akademie-Verlag, 1959.
27. Shamolin, M.V., New cases of homogeneous integrable systems with dissipation on tangent bundles of three-dimensional manifolds, *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 102, no. 3, pp. 518–523.
28. Shamolin, M.V., Invariant volume forms of variable dissipation systems with three degrees of freedom, *Doklady Mathematics*, 2022, vol. 106, no. 3, pp. 479–484.
29. Trofimov, V.V., Symplectic structures on groups of automorphisms of symmetric spaces, *Moscow Univ. Math. Bulletin*, 1984, vol. 39, no. 6, pp. 44–47.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 346–364

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

А. В. Глушак

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: aleglu@mail.ru

Поступила в редакцию 27.10.2023 г., после доработки 09.01.2024 г.; принята к публикации 10.01.2024 г.

В банаховом пространстве для функционально-дифференциального уравнения, обобщающего уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, рассмотрены задача Коши и граничные задачи Дирихле и Неймана. Доказано достаточное условие разрешимости задачи Коши и указан явный вид разрешающего оператора, который записан с помощью введённых автором операторных функций Бесселя и Струве. Для граничных задач в гиперболическом случае установлены достаточные условия их однозначной разрешимости, налагаемые на операторный коэффициент уравнения и граничные элементы.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, задача Коши, задача Дирихле, задача Неймана, однозначная разрешимость, операторная функция Бесселя, операторная функция Струве.

DOI: 10.31857/S0374064124030057, EDN: PMUKGQ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в нём областью определения $D(A)$. При $k>0$ рассмотрим уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД)

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=Au(t), \qquad t>0. \tag{1}$$

Из результатов работ [1, 2] следует, что корректная постановка начальных условий для уравнения (1) состоит в задании в точке $t=0$ начальных условий

$$u(0)=u_0, \qquad u'(0)=0, \tag{2}$$

при этом, если $k\geqslant 1$, начальное условие $u'(0)=0$ снимается, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t=0$.

Корректная постановка начальных условий в зависимости от параметра $k\in\mathbb{R}$, а также решение соответствующих начальных задач в случае, когда A — оператор Лапласа по пространственным переменным, приводится в [3, гл. 1]. Дальнейшие исследования по теории сингулярных уравнений в частных производных можно найти в работах [4–8]. Что касается абстрактного уравнения ЭПД (1), то оно встречалось ранее в [9; 10, гл. 1; 11] при различных предположениях об операторе A.

В статьях [1, 2] приведены условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (1), (2). В [2] они сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda, A)$ оператора A и её весовых производных, а в [1] — в терминах дробной степени резольвенты и её обычных производных. Множество операторов A, с которыми задача (1), (2) при $k\geqslant 0$ равномерно корректна, обозначим через G_k, а разрешающий оператор этой задачи обозначим через $Y_k(t)$ и назовём *операторной функцией Бесселя* (ОФБ). В дальнейшем предположение $A\in G_k$ при некотором $k\geqslant 0$ означает, в частности, что с оператором A корректно разрешима задача Коши (1), (2) и $Y_k(t)$ — разрешающий оператор этой задачи, при этом $Y_0(t)=C(t)$ — косинус оператор-функция (КОФ) (подробнее о ней см., например, в работах [12; 13, с. 175; 14; 15]).

ОФБ $Y_k(t)$ ($Y_k(0)=I$, $Y_k'(0)=0$) была введена в рассмотрение в [1, 2] как разрешающий оператор задачи Коши для уравнения ЭПД. Но, также как и в теории полугрупп и косинус оператор-функций, семейство операторных функций Бесселя можно ввести (см. [16]) независимо от дифференциального уравнения ЭПД, с которым в итоге оно связано.

В статье [17] исследована задача Коши для уравнения Бесселя–Струве

$$u''(t)+\frac{k}{t}(u'(t)-u'(0))=Au(t),\quad t>0, \tag{3}$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)=u_1, \tag{4}$$

указан явный вид разрешающего оператора этой задачи, который был назван *операторной функцией Струве* (ОФС) и обозначен как $L_k(t)$ ($L_k(0)=0$, $L_k'(0)=I$), а также приведены формулы, связывающие ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $L_k(t)$ с проинтегрированной косинус оператор-функцией (ПКОФ).

К понятию ПКОФ привело (см. [18–21]) желание исследователей ослабить требования на операторный коэффициент задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка. Напомним далее определение ПКОФ.

Определение. Пусть $\alpha>0$. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $C_\alpha(t)$, $t\geqslant 0$, называется *α раз проинтегрированной косинус оператор-функцией*, если:

1) $2\Gamma(\alpha)C_\alpha(t)C_\alpha(s)=\int_t^{t+s}(t+s-r)^{\alpha-1}C_\alpha(r)\,dr-\int_0^s(t+s-r)^{\alpha-1}C_\alpha(r)\,dr+\int_{t-s}^t(r-t+s)^{\alpha-1}\times$ $\times C_\alpha(r)\,dr+\int_0^s(r+t-s)^{\alpha-1}C_\alpha(r)\,dr$, $t>s>0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера;

2) $C_\alpha(0)=0$;

3) для любого $x\in E$ функция $C_\alpha(t)x$ непрерывна по $t\geqslant 0$;

4) существуют постоянные $M>0$, $\omega\geqslant 0$ такие, что

$$\|C_\alpha(t)\|\leqslant Me^{\omega t},\quad t\geqslant 0.$$

Генератор A ПКОФ $C_\alpha(t)$ определяется следующим образом: $D(A)$ — множество элементов $x\in E$ таких, что существует элемент $y\in E$, удовлетворяющий равенству

$$C_\alpha(t)x-\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x=\int\limits_0^t(t-r)C_\alpha(r)y\,dr,\quad t\geqslant 0, \tag{5}$$

и в этом случае полагаем $Ax=y$.

Критерием того, что оператор A — генератор ПКОФ $C_\alpha(t)$, является наличие у его резольвенты $R(\lambda^2,A)$ оценки (см., например, теорему 2.2.5 из [21])

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^{1-\alpha}R(\lambda^2,A))\right\|\leqslant\frac{Mn!}{(\lambda-\omega)^{n+1}},\quad \lambda>\omega,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Пусть $P_\nu(t)$ — сферическая функция Лежандра (см. [22, с. 205]). Формулы, связывающие ОФБ $Y_k(t)$ и ОФС $L_k(t)$ с ПКОФ $C_\alpha(t)$, содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 1 [17]. *Пусть $k=2\alpha>0$ и оператор A является генератором α раз ПКОФ $C_\alpha(t)$, $u_0\in D(A)$. Тогда задача (1), (2) равномерно корректна, т.е. $A\in G_k$, и соответствующая ОФБ представима в виде*

$$Y_k(t)u_0=\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}t^\alpha}\bigg(C_\alpha(t)u_0-\int\limits_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0\,d\tau\bigg). \tag{6}$$

Из теоремы 1 следует, что определяемая равенством (6) функция $u(t)=Y_k(t)u_0$ является единственным решением задачи Коши (1), (2).

Теорема 2 [17]. *Пусть $u_1\in D(A)$, $k=2\alpha>0$ и оператор A является генератором α раз ПКОФ $C_\alpha(t)$. Тогда функция $u(t)=L_k(t)u_1$, где*

$$L_k(t)u_1=\frac{2^\alpha\ \Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha-1}}\int\limits_0^1 P_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_1\ d\tau, \tag{7}$$

будет решением задачи (3), (4).

Отметим также, что условием существования операторных функций $Y_k(t)$ и $L_k(t)$ в равенствах (6), (7) является условие $A\in G_k$ (см. [17, 23]).

Пример 1. Если оператор A — оператор умножения на число, то

$$Y_k(t)=\Gamma(k/2+1/2)\sum_{j=0}^\infty\frac{(t^2A/4)^j}{j!\,\Gamma(j+k/2+1/2)}=\Gamma(k/2+1/2)(t\sqrt{A}/2)^{1/2-k/2}I_{k/2-1/2}(t\sqrt{A}),$$

$$L_k(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(k/2+1)\sum_{j=0}^\infty\frac{t(t^2A/4)^j}{\Gamma(j+3/2)\Gamma(j+k/2+1)}=\frac{2^{k/2-1/2}\sqrt{\pi}\Gamma(k/2+1)}{A^{k/4+1/4}t^{k/2-1/2}}\mathbf{L}_{k/2-1/2}(t\sqrt{A}),$$

где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $\mathbf{L}_\nu(z)$ — модифицированная функция Струве [24, с. 655]. Поэтому операторная функция $Y_k(t)$ была названа ОФБ, а операторная функция $L_k(t)$ — ОФС.

В настоящей работе будем рассматривать функционально-дифференциальное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу вида

$$u''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}(u'(t)-u'(0))+\frac{4\mu\nu}{t^2}(u(t)-u(0)-tu'(0))=Au(t),\quad t>0. \tag{8}$$

Функционально-дифференциальное уравнение (8), которое обобщает уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и Бесселя–Струве, следуя [21, 22], можно также назвать *слабо нагруженным уравнением ЭПД*. Интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений объясняется объёмом их приложений и тем фактом, что нагруженные уравнения составляют особый класс функционально-дифференциальных уравнений со своими специфическими задачами. Обзор публикаций по нагруженным дифференциальным уравнениям содержится в монографиях [25, 26].

1. ЗАДАЧА КОШИ

Далее рассмотрим начальную задачу и найдём решение сингулярного функционально-дифференциального уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1. \tag{9}$$

Если $\nu=0$, $\mu\geqslant-1/2$, $A\in G_{2\mu+1}$, то уравнение (8) превращается в уравнение Бесселя–Струве и в силу теорем 1, 2 единственным решением задачи (8), (9) является функция

$$u_{\mu,0}(t)=Y_{2\mu+1}(t)u_0+L_{2\mu+1}(t)u_1. \tag{10}$$

Пусть теперь $\nu>0$, $\mu\geqslant -1/2$. В этом случае будем искать решение задачи (8), (9) в виде интеграла типа Эрдейи–Кобера

$$u(t)=\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds, \tag{11}$$

где $U(ts)$ и u_2 — подлежащие определению дважды дифференцируемая операторная функция и начальный элемент.

Вычислим производные определяемой равенством (11) функции $u(t)$ и после интегрирования по частям получим

$$u'(t)=\int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1}U'(ts)u_2\,ds=-\frac{1}{2\nu}\int\limits_0^1\frac{d}{ds}(1-s^2)^{\nu}sU'(ts)u_2\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\nu}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu}(tsU''(ts)u_2+U'(ts)u_2)\,ds, \tag{12}$$

$$u''(t)=\int\limits_0^1 s^3(1-s^2)^{\nu-1}U''(ts)u_2\,ds. \tag{13}$$

Предположим, что функция $U(t)u_2$ удовлетворяет равенству

$$AU(t)u_2=U''(t)u_2+\frac{2\mu+1}{t}(U'(t)-U'(0))u_2, \tag{14}$$

тогда, учитывая (12)–(14) и элементарный интеграл (2.2.4.8) [27], после интегрирования по частям будем иметь

$$u''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}(u'(t)-u'(0))+\frac{4\mu\nu}{t^2}(u(t)-u(0)-tu'(0))-Au(t)=$$

$$=\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}\left(\frac{2(\mu+\nu)+1}{2\nu}(1-s^2)+s^2-1\right)U''(ts)u_2\,ds+$$

$$+\frac{1}{t}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu-1}\left(\frac{2(\mu+\nu)+1}{2\nu}(1-s^2)-2\mu-1\right)U'(ts)u_2\,ds+$$

$$+\frac{2\mu+1}{t}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu-1}U'(0)u_2\,ds-\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}\int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1}U'(0)u_2\,ds-$$

$$-\frac{4\mu\nu}{t}\int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1}U'(0)u_2\,ds+\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds-\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(0)u_2\,ds=$$

$$=\frac{2\mu+1}{2\nu t}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu}\frac{d}{ds}U'(ts)u_2\,ds+\frac{1}{t}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu-1}\left(\frac{2(\mu+\nu)+1}{2\nu}(1-s^2)-2\mu-1\right)U'(ts)u_2\,ds+$$

$$+\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds-\frac{2\mu}{t^2}U(0)u_2=$$

$$=-\frac{2\mu}{t}\int\limits_0^1(1-s^2)^{\nu}U'(ts)u_2\,ds+\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds-\frac{2\mu}{t^2}U(0)u_2=$$

$$=\frac{2\mu}{t^2}U(0)u_2-\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds+\frac{4\mu\nu}{t^2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}U(ts)u_2\,ds-\frac{2\mu}{t^2}U(0)u_2=0.$$

Поэтому если выполнено равенство (14), то определяемая равенством (11) функция $u(t)$ является решением уравнения (8).

Как следует из теоремы 1, функция $Y_{2\mu+1}(t)u_2$ удовлетворяет равенству (14), и если выбрать $U(t)=Y_{2\mu+1}(t)$, $u_2=2\nu u_0$, то функция $u(t)=Y_{2\mu+1}(t)u_2$, очевидно, будет удовлетворять условиям $u(0)=u_0$, $u'(0)=0$.

В силу теоремы 2 функция $L_{2\mu+1}(t)u_2$ также удовлетворяет равенству (14), и если выбрать

$$U(t)=L_{2\mu+1}(t), \quad u_2=\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}u_1,$$

то функция $u(t)=L_{2\mu+1}(t)u_2$ будет удовлетворять условиям $u(0)=0$, $u'(0)=u_1$.

Таким образом, если $\nu>0$, $\mu\geqslant -1/2$, то решением задачи (8), (9) будет функция

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\nu\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds+\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\nu)}\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}L_{2\mu+1}(ts)u_1\,ds. \tag{15}$$

Пример 2. Если оператор A — оператор умножения на число, то, учитывая результаты примера 1, интегралы в выражении (15) вычисляются (см. соответственно интегралы (2.15.2.5) [28], (2.7.4.1) [24]) и решение $u_{\mu,\nu}(t;u_0,u_1)$ задачи (8), (9) примет вид

$$u_{\mu,\nu}(t)={}_1F_2\left(1;\mu+1,\nu+1;\frac{t^2A}{4}\right)u_0+t\,{}_1F_2\left(1;\mu+\frac{3}{2},\nu+\frac{3}{2};\frac{t^2A}{4}\right)u_1, \tag{16}$$

где ${}_1F_2(\cdot)$ — гипергеометрическая функция

$${}_1F_2\left(1;\alpha,\beta;\frac{t^2A}{4}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(j+\alpha)\Gamma(j+\beta)}\left(\frac{t^2A}{4}\right)^j.$$

Естественно, определение решения в виде гипергеометрических рядов по формуле (16) имеет место и для любого ограниченного оператора A, действующего в E. Укажем также, что ранее результаты о разрешимости некоторых интегро-дифференциальных уравнений при других значениях параметров гипергеометрических рядов встречались в статье [29].

Проведённые выше рассуждения приводят к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть $\nu>0$, $\mu\geqslant -1/2$, начальные элементы $u_0,u_1\in D(A)$ и оператор $A\in G_{2\mu+1}$. Тогда определяемая равенством (15) функция $u_{\mu,\nu}(t)$ является единственным решением задачи (8), (9).*

Доказательство. Для доказательства теоремы осталось лишь доказать единственность решения задачи (8), (9), которую мы установим методом от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения указанной задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t,s)=f\big(Y_{2\mu+1}(s)(u_1(t)-u_2(t))\big),$$

где $f\in E^*$ (E^* — сопряжённое пространство), $t,s\geqslant 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial t^2}+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t}+\frac{4\mu\nu}{t^2}w(t,s)=\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial s^2}+\frac{2\mu+1}{s}\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}, \quad t,s>0, \tag{17}$$

и условиям

$$\lim_{t\to 0}\; w(t,s)=\lim_{t\to 0}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t}=\lim_{s\to 0}\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}=0. \tag{18}$$

Подобно тому как это было сделано в [30], понимаем под $w(t,s)$ обобщённую функцию умеренного роста и по переменной s применим преобразование Фурье–Бесселя

$$\hat{w}(t,\lambda)=\int\limits_0^\infty s^{2\mu+1}\ j_\mu(\lambda s)w(t,s)\,ds,\quad w(t,s)=\gamma_\mu\int\limits_0^\infty \lambda^{2\mu+1}j_\mu(\lambda s)\hat{w}(t,\lambda)\,d\lambda,$$
$$\gamma_\mu=\frac{1}{2^{2\mu}\Gamma^2(\mu+1)},\quad j_\mu(s)=\frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)}{s^\mu}J_\mu(s),$$

где $J_\mu(\cdot)$ — функция Бесселя.

Из (17), (18) для образа $\hat{w}(t,\lambda)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t^2}+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}\frac{\partial\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t}+\frac{4\mu\nu}{t^2}\hat{w}(t,\lambda)=-\lambda^2\ \hat{w}(t,\lambda),\quad t>0, \tag{19}$$

$$\lim_{t\to0}\hat{w}(t,\lambda)=\lim_{t\to0}\frac{\partial\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t}=0. \tag{20}$$

В силу примера 2 общее решение дифференциального уравнения (19) имеет вид

$$\hat{w}(t,\lambda)=c_1(\lambda)\,{}_1F_2\left(1;\mu+1,\nu+1;-\frac{t^2\lambda^2}{4}\right)+c_2(\lambda)t\,{}_1F_2\left(1;\mu+\frac{3}{2},\nu+\frac{3}{2};-\frac{t^2\lambda^2}{4}\right),$$

и из начальных условий (20), очевидно, вытекают равенства $c_1(\lambda)=c_2(\lambda)=0$. Следовательно, $\hat{w}(t,\lambda)=w(t,s)=0$ для любого $s\geqslant0$. Ввиду произвольности функционала $f\in E^*$ при $s=0$ получим равенство $u_1(t)\equiv u_2(t)$, тем самым единственность решения рассматриваемой задачи установлена. Теорема доказана.

Определяемая равенством (7) ОФС $L_{2\mu+1}(t)$ выражается через ОФБ $Y_{2\mu+2}(t)$ по формуле (см. [17])

$$L_{2\mu+1}(t)u_1=\int\limits_0^t\frac{\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\,d\xi,$$

поэтому второе слагаемое в представлении (15) можно преобразовать к виду

$$\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}L_{2\mu+1}(ts)u_1\,ds=\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}\int\limits_0^{ts}\frac{\xi}{\sqrt{t^2s^2-\xi^2}}Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\,d\xi\,ds=$$
$$=\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int\limits_0^t\xi Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\int\limits_{\xi/t}^1\frac{s(1-s^2)^{\nu-1}\,ds}{\sqrt{t^2s^2-\xi^2}}\,d\xi=\frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)t^{2\nu}}\int\limits_0^t\xi Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\int\limits_{\xi^2}^{t^2}\frac{(t^2-\eta)^{\nu-1}\,d\eta}{\sqrt{\eta-\xi^2}}\,d\xi=$$
$$=\frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)t^{2\nu}}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_0^t\xi(t^2-\xi^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(\xi)u_1\,d\xi=(2\nu+1)t\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(ts)u_1\,ds,$$

в силу которого справедливо следующее

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 3 определяемое равенством (15) решение $u_{\mu,\nu}(t)$ может быть записано в виде*

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\nu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds+(2\nu+1)t\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(ts)u_1\,ds. \tag{21}$$

Поскольку параметры μ и ν входят в уравнение (8) симметрично, то, естественно, справедливы и следующие два утверждения.

Теорема 4. *Пусть $\mu>0$, $\nu\geqslant -1/2$, начальные элементы $u_0,u_1\in D(A)$ и оператор $A\in \in G_{2\nu+1}$. Тогда определяемая равенством*

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\mu\int_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1}Y_{2\nu+1}(ts)u_0\,ds+\frac{4\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu)}\int_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1}L_{2\nu+1}(ts)u_1\,ds$$

функция $u_{\mu,\nu}(t)$ является единственным решением задачи (8), (9).

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 4 решение $u_{\mu,\nu}(t)$ может быть записано в виде*

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\mu\int_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1}Y_{2\nu+1}(ts)u_0\,ds+(2\mu+1)t\int_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1/2}Y_{2\nu+2}(ts)u_1\,ds.$$

Если одновременно выполнены условия теорем 3 и 4 и нужно ослабить требования на оператор A, то следует выбирать теорему, в которой используются операторные функции с большим индексом, поскольку $G_k\subset G_m$ при $k<m$ (см. [1, 16]).

Приведём примеры уравнений, для которых интегралы в представлении (15) могут быть вычислены.

Пример 3. Пусть в уравнении (8) $\mu>0$, $\nu=1/2$ и A — оператор умножения на число, $A\neq 0$. Тогда по формуле (16) единственным решением задачи

$$u''(t)+\frac{2\mu+2}{t}(u'(t)-u'(0))+\frac{2\mu}{t^2}(u(t)-u(0)-tu'(0))=Au(t),\quad t>0, \tag{22}$$

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1, \tag{23}$$

в силу равенств (7.14.1.11) и (7.14.1.12) [24], является функция

$$u_{\mu,1/2}(t)={}_1F_2\left(1;\frac{3}{2},\mu+1;\frac{t^2A}{4}\right)u_0+t\,{}_1F_2\left(1;2,\mu+\frac{3}{2};\frac{t^2A}{4}\right)u_1=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(\mu+1)\left(\frac{t\sqrt{A}}{2}\right)^{-\mu-1/2}\mathbf{L}_{\mu-1/2}(t\sqrt{A})u_0+\frac{4\mu+2}{tA}\left(\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t\sqrt{A}}{2}\right)^{1/2-\mu}I_{\mu-1/2}(t\sqrt{A})-1\right)u_1=$$

$$=\frac{1}{t}L_{2\mu}(t)u_0+\frac{4\mu+2}{tA}(Y_{2\mu}(t)-1)u_1.$$

Если у неограниченного оператора $A\in G_{2\mu}$ существует обратный, то представление решения задачи (22), (23) в виде

$$u_{\mu,1/2}(t)=\frac{1}{t}L_{2\mu}(t)u_0+\frac{4\mu+2}{t}(Y_{2\mu}(t)-I)A^{-1}u_1$$

сохраняется, в чём нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

В частности, если оператор A является генератором КОФ $C(t)$, то, учитывая приведённые в [17] примеры операторных функций, при $\mu=1$ получим

$$u_{1,1/2}(t)=\frac{1}{t^2}(C(t)-I)A^{-1}u_0+\frac{6}{t^2}(S(t)-tI)A^{-1}u_1,$$

где $S(t)=C_1(t)$ — синус оператор-функция.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда равномерно по $t\in[0,T]$, $T>0$, имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\nu\to+0}u_{\mu,\nu}(t)=u_{\mu,0}(t), \tag{24}$$

где $u_{\mu,0}(t)$ определена равенством (10).

Доказательство. Учитывая представления (15), (10), для любого $\delta > 0$ имеем

$$u_{\mu,\nu}(t) - u_{\mu,0}(t) = 2\nu\left(\int\limits_0^{1-\delta/T} + \int\limits_{1-\delta/T}^{1}\right)s(1-s^2)^{\nu-1}(Y_{2\mu+1}(ts) - Y_{2\mu+1}(t))u_0\,ds +$$

$$+\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\left(\int\limits_0^{1-\delta/T} + \int\limits_{1-\delta/T}^{1}\right)s(1-s^2)^{\nu-1}(L_{2\mu+1}(ts) - L_{2\mu+1}(t))u_1\,ds.$$

В силу сильной непрерывности операторных функций $Y_{2\mu+1}(t)$ и $L_{2\mu+1}(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\|(Y_{2\mu+1}(ts) - Y_{2\mu+1}(t))u_0\| + \|(L_{2\mu+1}(ts) - L_{2\mu+1}(t))u_1\| < \varepsilon,$$

если только $|s-1| < \delta/T$. Зафиксируем такое $\delta > 0$. Пусть также

$$M(T) = \sup_{[0,T]}(\|Y_{2\mu+1}(t)u_0\| + \|L_{2\mu+1}(t)u_1\|).$$

Тогда после очевидных оценок получим

$$\|u_{\mu,\nu}(t) - u_{\mu,0}(t)\| \leqslant 2\nu\left(1 + \frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}\right)\left(2M(T)\int\limits_0^{1-\delta/T} s(1-s^2)^{\nu-1}\,ds + 2\varepsilon\int\limits_{1-\delta/T}^{1} s(1-s^2)^{\nu-1}\,ds\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}\right)\left(2M(T)\left(1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{T^2}\right)^{\nu}\right) + 2\varepsilon\right).$$

Поскольку при $\nu \to +0$ слагаемое

$$2M(T)\left(1 + \frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{T^2}\right)^{\nu}\right)$$

стремится к нулю, а слагаемое

$$2\varepsilon\left(1 + \frac{2\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\nu+1)}\right)$$

может быть сделано меньше произвольного числа $\varepsilon_1 > 0$, то отсюда и вытекает справедливость предельного равенства (24). В частности, если оператор A ограничен, то, учитывая пример 2, оно принимает вид

$$\lim_{\nu\to+0} u_{\mu,\nu}(t) = \lim_{\nu\to+0}\left({}_1F_2\left(1; \mu+1, \nu+1; \frac{t^2A}{4}\right)u_0 + t\,{}_1F_2\left(1; \mu+\frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; \frac{t^2A}{4}\right)u_1\right) =$$

$$= {}_1F_2\left(1; \mu+1, 1; \frac{t^2A}{4}\right)u_0 + t\,{}_1F_2\left(1; \mu+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{t^2A}{4}\right)u_1 =$$

$$= \Gamma(\mu+1)(t\sqrt{A}/2)^{-\mu}I_\mu(t\sqrt{A})u_0 + \frac{2^\mu\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+3/2)}{A^{\mu/2+1/2}t^\mu}\mathbf{L}_\mu(t\sqrt{A}) = Y_{2\mu+1}(t)u_0 + L_{2\mu+1}(t)u_1 = u_{\mu,0}(t).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим случай при $\nu < 0$, который не охватывает теорема 3. Если $\mu \geqslant \nu - 1/2$, то непосредственная проверка показывает, что функция

$$u_{\mu,\nu}(t) = t^{-2\nu}Y_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0 + \frac{1}{2}t^{-2\nu}L_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1 + \frac{1}{2}t^{1-2\nu}u_1 \quad (25)$$

удовлетворяет уравнению (8) и условиям

$$\lim_{t\to 0} t^{2\nu}u(t)=u_0, \quad \lim_{t\to 0}(t^{2\nu}u(t))'=u_1. \tag{26}$$

Действительно, вычислив производные определяемой равенством (25) функции $u_{\mu,\nu}(t)$, получим

$$u'_{\mu,\nu}(t)=-2\nu t^{-2\nu-1}Y_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0+t^{-2\nu}Y'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0-$$

$$-\nu t^{-2\nu-1}L_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}t^{-2\nu}L'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}(1-2\nu)t^{-2\nu},$$

$$u''_{\mu,\nu}(t)=-2\nu(-2\nu-1)t^{-2\nu-2}Y_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0-4\nu t^{-2\nu-1}Y'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+$$

$$+t^{-2\nu}Y''_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0-\nu(-2\nu-1)t^{-2\nu-2}L_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1-$$

$$-2\nu t^{-2\nu-1}L'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}t^{-2\nu}L''_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1-\nu(1-2\nu)t^{-2\nu-1},$$

$$u''_{\mu,\nu}(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}u'_{\mu,\nu}(t)+\frac{4\mu\nu}{t^2}u_{\mu,\nu}(t)=t^{-2\nu}\left(Y''_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0+\frac{2(\mu-\nu)+1}{t}Y'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0\right)+$$

$$+\frac{1}{2}t^{-2\nu}\left(L''_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{2(\mu-\nu)+1}{t}L'_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1\right)=t^{-2\nu}AY_{2\mu-2\nu+1}(t)u_0+$$

$$+\frac{1}{2}t^{-2\nu}\left(AL_{2\mu-2\nu+1}(t)u_1+\frac{2(\mu-\nu)+1}{t}u_1\right)-\frac{2(\mu-\nu)+1}{2t^{2\nu+1}}u_1=Au_{\mu,\nu}(t), \quad A\in G_{2\mu-2\nu+1}.$$

При этом учитывалось, что функция $v(t)=t^{1-2\nu}$ удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению

$$v''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}v'(t)+\frac{4\mu\nu}{t^2}v(t)=(2\mu-2\nu+1)t^{-2\nu-1}u_1.$$

Отметим также, что представление решения в виде (25) найдено подстановкой в равенство (11) операторной функции $U(t)=t^{-2\mu}Y_{1-2\mu}(t)$, $\mu<0$.

Справедливость начальных условий (26), очевидно, вытекает из свойств операторных функций $Y_{2\mu-2\nu+1}(t)$ и $L_{2\mu-2\nu+1}(t)$, тем самым проверка утверждения завершена.

Таким образом, справедливы следующие две теоремы, утверждение о единственности решения в которых устанавливается методом от противного, подобно тому как это было сделано в теореме 3.

Теорема 6. *Пусть $\nu<0$, $\mu\geqslant\nu-1/2$, $u_0,u_1\in D(A)$ и оператор $A\in G_{2\mu-2\nu+1}$. Тогда определяемая равенством (25) функция $u_{\mu,\nu}(t)$ является единственным решением дифференциального уравнения*

$$u''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}u'(t)+\frac{4\mu\nu}{t^2}u(t)=Au(t), \quad t>0, \tag{27}$$

удовлетворяющим условиям (26).

Теорема 7. *Пусть $\mu<0$, $\nu\geqslant\mu-1/2$, $u_0,u_1\in D(A)$ и оператор $A\in G_{2\nu-2\mu+1}$. Тогда функция*

$$u_{\mu,\nu}(t)=t^{-2\mu}Y_{2\nu-2\mu+1}(t)u_0+\frac{1}{2}t^{-2\mu}L_{2\nu-2\mu+1}(t)u_1+\frac{1}{2}t^{1-2\mu}u_1$$

является единственным решением дифференциального уравнения (27), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t\to 0} t^{2\mu}u(t)=u_0, \quad \lim_{t\to 0}(t^{2\mu}u(t))'=u_1.$$

Следствие 3. *Если дополнительно в условиях теоремы 6 параметр $\nu \leqslant -1/2$, а в условиях теоремы 7 параметр $\mu \leqslant -1/2$, то указанные в этих теоремах функции $u_{\mu,\nu}(t)$ обладают свойством $u_{\mu,\nu}(0)=u'_{\mu,\nu}(0)=0$ и удовлетворяют не только дифференциальному уравнению (27), но и функционально-дифференциальному уравнению (8).*

Отметим, что в теоремах 6 и 7 для выделения единственного решения классическая ("невесовая") постановка начальных условий не подходит, поскольку, например, функция

$$u(t)=t^2c, \quad c\in E,$$

при $\mu=-1$, $\nu=1$ удовлетворяет однородной задаче

$$u''(t)+\frac{1}{t}u'(t)-\frac{4}{t^2}u(t)=0, \quad u(0)=u'(0)=0,$$

тем самым нарушается однозначная разрешимость рассматриваемых задач.

Пример 4. Пусть в уравнении (27) $\mu=-1$, $\nu=-1/2$ и оператор A является генератором КОФ $C(t)$. Тогда по формуле (25) теоремы 6 единственным решением задачи (26), (27) является функция

$$u_{-1,-1/2}(t)=tC(t)u_0+\frac{1}{2}tS(t)u_1+\frac{1}{2}t^2u_1.$$

Замечание 1. Определяемые в теоремах 3 и 4 разрешающие операторы задачи Коши (8), (9) представляют собой проинтегрированные специальным образом КОФ $C(t)$.

Отметим, что если оператор A является генератором ПКОФ $C_{\mu+\nu+1/2}(t)$ и при этом $\mu>-1/2$, $\mu+\nu+1/2>0$, то функция

$$u(t)=\frac{\Gamma(\mu+\nu+3/2)}{t^{\mu+\nu+1/2}}C_{\mu+\nu+1/2}(t)u_0$$

является решением уравнения

$$u''(t)+\frac{2(\mu+\nu)+1}{t}(u'(t)-u'(0))+\frac{4(\mu+\nu)^2-1}{4t^2}(u(t)-u(0)-tu'(0))=Au(t), \tag{28}$$

удовлетворяющим условиям

$$u(0)=u_0, \quad u'(0)=0, \tag{29}$$

в чём нетрудно убедиться непосредственной проверкой с использованием равенства (5).

При $\nu=\mu+1/2$ уравнения (28) и (8) совпадают и, в силу утверждения о единственности теоремы 3, для решения задачи (28), (29) справедливо представление

$$u(t)=(2\mu+1)\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1/2}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds=\frac{\Gamma(2\mu+2)}{t^{2\mu+1}}C_{2\mu+1}(t)u_0.$$

Замечание 2. Определяемые в теоремах 3 и 4 разрешающие операторы задачи Коши (8), (9) при $\mu>0$, $\nu=\mu+1/2$ связаны соотношением

$$2\mu\int\limits_0^t\tau^{2\mu+1}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu-1}\ Y_{2\mu+2}(\tau s)\,ds\,d\tau=2\mu\int\limits_0^t\xi Y_{2\mu+2}(\xi)\int\limits_\xi^t\tau(\tau^2-\xi^2)^{\mu-1}\,d\tau\,d\xi=$$
$$=t^{2\mu+2}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\mu}Y_{2\mu+2}(ts)\,ds. \tag{30}$$

Если оператор A ограничен, то, учитывая пример 2 и интеграл (2.22.2.1) [24], соотношение (30) запишем как

$$\int_0^t \tau^{2\mu+1}\,{}_1F_2\left(1;\mu+1,\mu+\frac{3}{2};\frac{\tau^2A}{4}\right)d\tau=\frac{t^{2\mu+2}}{2\mu+2}\,{}_1F_2\left(1;\mu+\frac{3}{2},\nu+\frac{3}{2};\frac{t^2A}{4}\right),\quad \mu>-1. \tag{31}$$

В частности, при $\mu=-1/2$ равенство (31) принимает вид известной формулы связи КОФ $C(t)$ и СОФ $S(t)$:

$$\int_0^t C(\tau)\,d\tau=\int_0^t \operatorname{ch}(\tau\sqrt{A})\,d\tau=\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{A})}{\sqrt{A}}=S(t).$$

2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Граничные задачи для уравнения (8) в гиперболическом случае, вообще говоря, не являются корректными, но в настоящее время общепризнана необходимость решать некорректные задачи (см. введение в [31], а также работы [32, 33] и обширную библиографию в них). В монографии [31, гл. 2] исследована корректность общих краевых задач для дифференциально-операторного уравнения первого порядка и для абстрактного волнового уравнения (случай $k=0$ в уравнении (1)).

Многие некорректные задачи для дифференциально-операторных уравнений могут быть сведены к операторным уравнениям первого рода $Bx=y,\ x,y\in E$, и основная трудность состоит в установлении их разрешимости. Ниже при $A\in G_{2\mu+1}$ в гиперболическом случае решим операторное уравнение первого рода и установим условия корректности граничной задачи Дирихле для функционально-дифференциального уравнения (8).

При $\nu>0$, $\mu\geqslant-1/2$ будем искать решение $u(t)\in C^2([0,1],E)\cap C((0,1],D(A))$ уравнения (8) на интервале конечной длины $t\in(0,1)$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0)=u_0,\quad u(1)=v_1. \tag{32}$$

Как уже было отмечено, задача (8), (32) не является корректной. Установим условия, налагаемые на оператор $A\in G_{2\mu+1}$ и элементы $u_0,\ v_1\in E$, обеспечивающие её однозначную разрешимость. Случай с параметром $\nu=0$ в уравнении (8) был рассмотрен в работе [34].

Из теоремы 3 следует, что корректная постановка начальных условий для функционально-дифференциального уравнения (8) состоит в задании в точке $t=0$ начальных значений (9), при этом единственное решение задачи (8), (9) имеет вид (15) или (21).

Возвращаясь к рассматриваемой нами задаче Дирихле (8), (32), отметим, что, учитывая представление (21), нам следует определить элемент $u_1\in D(A)$ из уравнения

$$(2\nu+1)\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(s)u_1\,ds=v_2, \tag{33}$$

где

$$v_2=v_1-2\nu\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(s)u_0\,ds. \tag{34}$$

Уравнение (33) преобразуем, воспользовавшись формулой (см. [1]), выражающей ОФБ $Y_{2\mu+2}(t)$ через резольвенту $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$ оператора A:

$$Y_{2\mu+2}(t)u_0=\frac{2^{\mu+1/2}\Gamma(\mu+3/2)}{i\pi t^{\mu+1/2}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{1/2-\mu}I_{\mu+1/2}(t\lambda)R(\lambda^2)u_0\,d\lambda,\quad \sigma>\omega,\quad u_0\in D(A), \tag{35}$$

где λ^2 при $\operatorname{Re}\lambda>\omega\geqslant0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A.

Подставив выражение (35) в левую часть (33), после элементарных преобразований получим

$$(2\nu+1)\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(s)u_1\,ds=$$

$$=(2\nu+1)\int_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}\frac{2^{\mu+1/2}\Gamma(\mu+3/2)}{i\pi\ \ s^{\mu+1/2}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{1/2-\mu}I_{\mu+1/2}(s\xi)R(\xi^2)u_1\,d\xi\,ds=$$

$$=\frac{2^{\mu+1/2}(2\nu+1)\Gamma(\mu+3/2)}{i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{1/2-\mu}R(\xi^2)u_1\int_0^1 s^{1/2-\mu}(1-s^2)^{\nu-1/2}I_{\mu+1/2}(s\xi)\,ds\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\,{}_1F_2\big(1;\mu+3/2,\nu+3/2;\xi^2/4\big)R(\xi^2)u_1\,d\xi, \tag{36}$$

при этом был использован интеграл (2.15.2.5) [28].

Важную роль в дальнейшем будет играть целая функция

$$\chi_{\mu,\nu}(\lambda)={}_1F_2\big(1;\mu+3/2,\nu+3/2;\lambda/4\big), \tag{37}$$

применяя которую и учитывая представление (36), операторное уравнение первого рода (33) запишем в виде

$$Bu_1\equiv\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)\ \ R(\xi^2)u_1\,d\xi=v_2. \tag{38}$$

Для установления разрешимости уравнения (38) наложим дополнительное условие на резольвенту оператора A.

Условие 1. Каждый нуль λ_j, $j\in\mathbb{N}$, определяемой равенством (37) целой функции $\chi_{\mu,\nu}(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$, и существует такое число $d>0$, что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\|R(\lambda_j)\|\leqslant d.$$

Будем считать условие 1 выполненным. Поскольку каждый нуль λ_j, $j\in\mathbb{N}$, функции $\chi_{\mu,\nu}(\lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $1/d$, границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим γ_j. Пусть Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re}z=\sigma_0>\omega$, Υ_0^2 — парабола — образ Υ_0 при отображении $w=z^2$ $(z\in\Upsilon_0,\ w\in\Upsilon_0^2)$, и $\Xi=\Upsilon_0^2\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\gamma_j$.

Возьмём $\lambda_0\in\rho(A)$, $\operatorname{Re}\lambda_0>\sigma>\sigma_0$, и выберем $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы

$$n>(2\mu+\nu+3)/2. \tag{39}$$

Рассмотрим ограниченный оператор

$$Hq=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Xi}\frac{R(z)q\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n},\quad H\colon\ E\to E. \tag{40}$$

Покажем, что интеграл в (40) при выполнении некоторых условий абсолютно сходится. Действительно, в силу выбора контура Υ_0^2, неравенства (см. [2])

$$\|\lambda^{1/2-\mu}R(\lambda^2)\|\leqslant\frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{\mu+3/2}},\quad \operatorname{Re}\lambda>\omega,$$

и асимптотического поведения гипергеометрической функции ${}_1F_2(a;b_1,b_2;z)$ при $|z|\to\infty$, $|\arg z|<\pi$:

$${}_1F_2(a;b_1,b_2;z)=\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(a)}z^{(a-b_1-b_2+1/2)/2}e^{2\sqrt{z}}\biggl(1+O\biggl(\frac{1}{\sqrt{z}}\biggr)\biggr),$$

интеграл

$$\int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n}=2\int\limits_{\Upsilon_0}\frac{\lambda^{\mu+1/2}\lambda^{1/2-\mu}R(\lambda^2)\,d\lambda}{{}_1F_2(1;\mu+3/2,\nu+3/2;\lambda^2/4)(\lambda^2-\lambda_0)^n}$$

абсолютно сходится, поскольку, как следует из ограничения (39), справедливо неравенство $2n-2\mu-\nu-2>1$, обеспечивающее его абсолютную сходимость.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}\gamma_j}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n} \tag{41}$$

по оставшейся части контура Ξ.

В общем случае асимптотика нулей λ_j функции $\chi_{\mu,\nu}(\lambda)$ нам не известна, поэтому абсолютную сходимость интеграла (41) мы, наряду с условием 1, обеспечим следующим предположением.

Условие 2. При некотором числе n, удовлетворяющем неравенству (39), ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_j}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n}$$

сходится абсолютно.

Пример 5. Если в уравнении (8) $\mu=0$, $\nu=1$, то

$$\chi_{0,1}(\lambda)=\frac{2(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}-1)}{\lambda},\quad \lambda_j=-4\pi^2j^2,\quad j\in\mathbb{N}.$$

Рассматриваемый в условии 2 ряд будет абсолютно сходящимся, если при некотором n абсолютно сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_j}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{0,1}(z)(z-\lambda_0)^n}=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma}\frac{(\xi+2\pi ji)^3R((\xi+2\pi ji)^2)\,d\xi}{(\operatorname{ch}\xi-1)((\xi+2\pi ji)^2-\lambda_0)^n},$$

где γ — окружность радиуса $1/d$ с центром в точке $z=0$. В силу условия 1 резольвента $R(\cdot)$ ограничена в круговой окрестности с контуром γ, поэтому порядок интеграла по $j\to\infty$ равен j^{3-2n}, следовательно, рассматриваемый в условии 2 ряд сходится абсолютно при $n>2$.

Теорема 8. *Пусть $\nu>0$, $\mu\geqslant-1/2$, $A\in G_{2\mu+1}$, число $n\in\mathbb{N}$ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство (39) и были справедливы условия 1, 2. Если $u_0,u_2\in D(A^{n+1})$, то задача (8), (32) имеет единственное решение.*

Доказательство. Как мы ранее уже выяснили, доказательство существования единственного решения задачи (8), (32) сводится к доказательству существования обратного оператора у ограниченного оператора B, определяемого равенством (38). Покажем, что оператор B имеет обратный B^{-1}: $D(A^n)\to E$.

Пусть $q\in D(A)$, $\sigma_0<\sigma<\operatorname{Re}\lambda$. Тогда, применяя определяемый равенством (40) оператор H к Bq и учитывая тождество Гильберта

$$R(z)R(\xi^2)=\frac{R(z)-R(\xi^2)}{\xi^2-z},$$

получаем равенство

$$HBq=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(\xi^2)q\,d\xi=$$

$$=\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(z)q}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}-\frac{\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(\xi^2)q}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}\right)d\xi\,dz. \tag{42}$$

Интеграл в (42) абсолютно сходится. Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$HBq=\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(z)q\,d\xi\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}-$$

$$-\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(\xi^2)q\int\limits_{\Xi}\frac{dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}\,d\xi. \tag{43}$$

Если контур интегрирования Υ_0^2 замкнуть влево, не пересекая $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\gamma_j$, то внутренний интеграл во втором слагаемом (43) обратится в нуль в силу выбора контура Ξ и теоремы Коши для многосвязной области. Для вычисления интегралов в первом слагаемом (43) используем интегральную формулу Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$HBq=\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon}\frac{\xi\chi_{\mu,\nu}(\xi^2)R(z)q\,d\xi\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\xi^2-z)}=\frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon^2}\frac{\chi_{\mu,\nu}(\lambda)R(z)q\,d\lambda\,dz}{\chi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^n(\lambda-z)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)q\,dz}{(z-\lambda_0)^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Upsilon_0^2}\frac{R(z)q\,dz}{(z-\lambda_0)^n}=\frac{-1}{(n-1)!}R^{(n-1)}(\lambda_0)q=(-1)^nR^n(\lambda_0)q.$$

Коммутирующие операторы H, B, $R^n(\lambda_0)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E, поэтому равенство $HBq=(-1)^nR^n(\lambda_0)q$ справедливо и для $q\in E$, и при этом HB: $E\to D(A^n)$. Отсюда следует, что оператор $B^{-1}q=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHq$ при $q\in D(A^n)$ является обратным по отношению к B, B^{-1}: $D(A^n)\to E$. Действительно,

$$BB^{-1}q=(-1)^nB(\lambda_0I-A)^nHq=(-1)^nBH(\lambda_0I-A)^nq=R^n(\lambda_0)(\lambda_0I-A)^nq=q,\quad q\in D(A^n),$$

$$B^{-1}Bq=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHBq=(\lambda_0I-A)^nR^n(\lambda_0)q=q,\quad q\in E.$$

Возвращаясь к задаче (8), (32), определим принадлежащий области $D(A)$ начальный элемент $u_1=(-1)^n(\lambda_0I-A)^nHv_2$, где v_2 определён равенством (34), $v_2\in D(A^{n+1})$, оператор H задан равенством (40), $\lambda_0\in\rho(A)$, $\operatorname{Re}\lambda_0>\sigma_0>\omega$. Тогда в силу представления (21) единственное решение $u(t)$ задачи (8), (32) имеет вид

$$u_{\mu,\nu}(t)=2\nu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds+(2\nu+1)t\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1/2}Y_{2\mu+2}(ts)u_1\,ds.$$

Теорема доказана.

3. ЗАДАЧА НЕЙМАНА

Рассмотрим ещё один случай регулярных граничных условий для гиперболического уравнения (8) (задачу Неймана):

$$u'(0)=u_1,\quad u'(1)=w_1. \tag{44}$$

При этом, также как в [34, 35], для корректной разрешимости задачи Неймана необходимо существование ограниченного оператора A^{-1}, что мы будем предполагать при исследовании данной задачи.

Учитывая представление (15) и условия (44), определим неизвестный элемент $u_0 \in D(A)$ из уравнения

$$2\nu \int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1} Y'_{2\mu+1}(s)u_0\,ds + \frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1} L'_{2\mu+1}(s)u_1\,ds = w_1. \tag{45}$$

Используя формулу для дифференцирования (см. [1])

$$Y'_k(t)u_0 = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t)Au_0,$$

уравнение (45) перепишем как

$$\frac{\nu}{\mu+1} \int\limits_0^1 s^3(1-s^2)^{\nu-1} Y_{2\mu+3}(s)Au_0\,ds = u_2, \tag{46}$$

где

$$u_2 = w_1 - \frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \int\limits_0^1 s^2(1-s^2)^{\nu-1} L'_{2\mu+1}(s)u_1\,ds. \tag{47}$$

С учётом представления (35) левая часть уравнения (46) после элементарных преобразований примет вид

$$\frac{\nu}{\mu+1} \int\limits_0^1 s^3(1-s^2)^{\nu-1} Y_{2\mu+3}(s)Au_0\,ds =$$

$$= \frac{\nu}{\mu+1} \int\limits_0^1 s^{2-\mu}(1-s^2)^{\nu-1} \frac{2^{\mu+1}\Gamma(\mu+2)}{i\pi s^{\mu+1}} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi^{-\mu} I_{\mu+1}(s\xi)R(\xi^2)Au_0\,d\xi\,ds =$$

$$= \frac{2^{\mu+1}\nu\Gamma(\mu+1)}{i\pi} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi^{-\mu} R(\xi^2)Au_0 \int\limits_0^1 s^{2-\mu}(1-s^2)^{\nu-1} I_{\mu+1}(s\xi)\,ds\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2(\mu+1)\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi\, {}_1F_2\left(1; \mu+2, \nu+1; \frac{\xi^2}{4}\right) R(\xi^2)Au_0\,d\xi, \tag{48}$$

при этом был использован интеграл (2.15.2.5) [28].

Введём в рассмотрение целую функцию

$$\psi_{\mu,\nu}(\lambda) = \frac{1}{2(\mu+1)}\, {}_1F_2\left(1; \mu+2, \nu+1; \frac{\lambda}{4}\right), \tag{49}$$

используя которую и учитывая представление (48), операторное уравнение первого рода (46) запишем в виде

$$B_1 Au_0 \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi\psi_{\mu,\nu}(\xi^2) R(\xi^2)Au_0\,d\xi = u_3. \tag{50}$$

Доказательство разрешимости уравнения (50) относительно Au_0 проводится аналогично доказательству теоремы 8. Сформулируем достаточные для этого условия, потребовав существование обратного оператора A^{-1}.

Условие 3. Число $\theta_0=0$, а также каждый нуль θ_j, $j\in\mathbb{N}$, определяемой равенством (49) функции $\psi_{\mu,\nu}(\lambda)$ принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, и существует такое число $d>0$, что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\|R(\theta_j)\|\leqslant d.$$

Далее будем использовать введённые ранее контуры Ξ, γ_j, но, в отличие от теоремы 8, построенные по нулям θ_j функции $\psi_{\mu,\nu}(\lambda)$.

Условие 4. При некотором m, удовлетворяющем неравенству $m>(2\mu+\nu+3)/2$, ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_j}\frac{R(z)\,dz}{\psi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^m}$$

сходится абсолютно.

При выполнении условий 3 и 4 введём в рассмотрение ограниченный оператор

$$H_1q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z)q\,dz}{\psi_{\mu,\nu}(z)(z-\lambda_0)^m},\quad H_1\colon\ E\to E. \tag{51}$$

Справедливо следующее утверждение о разрешимости задачи Неймана.

Теорема 9. *Пусть $\nu>0$, $\mu\geqslant-1/2$, $A\in G_{2\mu+1}$, $u_1,w_1\in D(A^{n+2})$ и выполнены условия 3, 4. Тогда задача (8), (44) однозначно разрешима и её решение имеет вид*

$$u(t)=2\nu\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}Y_{2\mu+1}(ts)u_0\,ds+\frac{4\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int\limits_0^1 s(1-s^2)^{\nu-1}L_{2\mu+1}(ts)u_1\,ds,$$

где $u_0=(-1)^mA^{-1}(\lambda_0I-A)^mH_1u_2$, элемент u_2 и оператор H_1 определены, соответственно, равенствами (47) и (51).

Пример 6. Если A — оператор умножения на число, $A\neq0$, то по формуле (16) решение задачи Коши имеет вид

$$u_{\mu,\nu}(t)={}_1F_2\big(1;\mu+1,\nu+1;t^2A/4\big)u_0+t\,{}_1F_2\big(1;\mu+3/2,\nu+3/2;t^2A/4\big)u_1,$$

поэтому задача Дирихле с условиями $u(0)=u_0$, $u(1)=v_1$ разрешима, если

$${}_1F_2\big(1;\mu+3/2,\nu+3/2;A/4\big)\neq0.$$

Пусть в уравнении (8) $\mu=-1/2$, $\nu=1$ и $u_0=0$. В этом частном случае удовлетворяющее условиям $u(0)=0$, $u(1)=v_1$ решение $u(t)$ уравнения (8) имеет вид

$$u(t)=\frac{\big(\sqrt{A}t\operatorname{ch}(t\sqrt{A})-\operatorname{sh}(t\sqrt{A})\big)}{t^2}u_1,\quad u_1=\frac{v_1}{\sqrt{A}\operatorname{ch}\sqrt{A}-\operatorname{sh}\sqrt{A}}.$$

Аналогично решение задачи Неймана, удовлетворяющее условиям $u'(0)=0$, $u'(1)=w_1$, имеет вид

$$u(t)=\frac{1-\operatorname{ch}(t\sqrt{A})+\sqrt{A}\ \ t\operatorname{sh}(t\sqrt{A})}{t^2}u_0,\quad u_0=\frac{w_1}{(2+A)\operatorname{ch}\sqrt{A}-2\sqrt{A}\operatorname{sh}\sqrt{A}-2}.$$

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушак, А.В. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак, О.А. Покручин // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 41–59.
2. Глушак, А.В. Операторная функция Бесселя / А.В. Глушак // Докл. РАН. — 1997. — Т. 352, № 5. — С. 587–589.
3. Терсенов, С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С.А. Терсенов. — Новосибирск : Новосибирский гос. ун-т, 1973. — 143 с.
4. Иванов, Л.А. Задача Коши для некоторых операторов с особенностями / Л.А. Иванов // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 6. — С. 1020–1028.
5. Ситник, С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. — М. : Физматлит, 2019. — 224 с.
6. Шишкина, Э.Л. Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и гиперболические B-потенциалы / Э.Л. Шишкина // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2019. — Т. 65, № 2. — С. 157–338.
7. Шишкина, Э.Л. Единственность решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / Э.Л. Шишкина // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1688–1693.
8. Ляхов, Л.Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.
9. Donaldson, J.A. A singular abstract Cauchy problems / J.A. Donaldson // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1970. — V. 66, № 2. — P. 269–274.
10. Carroll, R.W. Singular and Degenerate Cauchy Problems / R.W. Carroll, R.E. Showalter. — New York : Academic Press, 1976. — 333 p.
11. Bragg L.R. Some abstract Cauchy problems in exceptional cases / L.R. Bragg // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — V. 65, № 1. — P. 105–112.
12. Fattorini, H.O. Ordinary differential equations in linear topological space. II / H.O. Fattorini // J. Differ. Equat. — 1969. — V. 6. — P. 50–70.
13. Баскаков, А.Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций / А.Г. Баскаков // Мат. сб. Новая серия. — 1984. — Т. 166, № 1. — С. 68–95.
14. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн ; пер. с англ. В.В. Любашенко ; под ред. Ю.Л. Далецкого. — Киев : Выща школа, 1989. — 347 с.
15. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.
16. Глушак, А.В. Семейство операторных функций Бесселя / А.В. Глушак // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обз. — 2020. — Т. 187. — С. 36—43.
17. Глушак, А.В. Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя–Струве / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 7. — С. 891–905.
18. Мельникова, И.В. Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Упехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 6 (300). — С. 111–150.
19. Zheng, Q. Integrated cosine functions / Q. Zheng // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1996. — V. 19, № 3. — P. 575–580.
20. Zhang, J. On α-times integrated cosine functions / J. Zhang, Q. Zheng // Math. Jap. — 1999. — V. 50. — P. 401–408.
21. Kostić, M. Generalized semigroups and cosine functions / M. Kostić. — Beograd : Matematički institut SANU, 2011. — 352 p.
22. Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. — М. : Физматлит, 1963. — 359 с.
23. Глушак, А.В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 5. — С. 583–589.
24. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — 2-е изд. — М. : Физматлит, 2003. — 688 с.

25. Дженалиев, М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы : ГЫЛЫМ, 2010. — 334 с.
26. Нахушев, А.М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М. Нахушев. — М. : Наука, 2012. — 231 с.
27. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Наука, 1981. — 798 с.
28. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Наука, 1983. — 750 с.
29. Глушак, А.В. Операторные гипергеометрические функции / А.В. Глушак // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обз. — 2020. — Т. 174. — С. 37–45.
30. Житомирский, Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя / Я.И. Житомирский // Мат. сб. — 1955. — Т. 36, № 2. — С. 299–310.
31. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. — М. : Физматлит, 1995. — 176 с.
32. Кабанихин, С.И. Численный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения / С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько // Сиб. журн. индустр. математики. — 2012. — Т. 15, № 4. — С. 90–101.
33. Васильев, В.И. Решение задачи Дирихле для уравнения колебаний струны методом сопряжённых градиентов / В.И. Васильев, А.М. Кардашевский, В.В. Попов // Вестн. СВФУ. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 43–50.
34. Глушак А.В. О разрешимости граничных задач для абстрактного уравнения Бесселя–Струве / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 8. — С. 1103–1110.
35. Небольсина, М.Н. Ортогональные многочлены Чебышева и краевая задача Неймана / М.Н. Небольсина // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 449–450.

ON SOLVABILITY OF INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ABSTRACT FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EULER–POISSON–DARBOUX EQUATIONS

A. V. Glushak

Belgorod National Research University, Russia
e-mail: aleglu@mail.ru

In the Banach space for functional-differential equation, generalizing the Euler–Poisson–Darboux equation, the Cauchy problem and boundary value problems of Dirichlet and Neumann are consider. A sufficient condition for solvability is proved Cauchy problem and an explicit form of the resolving operator is indicated, which is written using the ones introduced by the author Bessel and Struve operator functions. For boundary value problems in the hyperbolic case, sufficient conditions for their unique solvability imposed on the operator coefficient of the equation and boundary elements.

Keywords: functional-differential equation, Cauchy problem, Dirichlet problem, Neumann problem, unique solvability, Bessel operator function, Struve operator function.

REFERENCES

1. Glushak, A.V. and Pokruchin, O.A., Criterion for the solvability of the Cauchy problem for an abstract Euler-Poisson–Darboux equation, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 39–57.
2. Glushak, A.V., The Bessel operator function, *Dokl. RAN*, 1997, vol. 352, no. 5, pp. 587–589.
3. Tersenov, S.A., *Vvedenie v teoriyu uravnenii, vyrozhdayushchikhsya na granitse* (Introduction to the Theory of Equations Degenerating on the Boundary), Novosibirsk: Novosibirsk. Gos. Univ., 1973.
4. Ivanov, L.A., A Cauchy problem for some operators with singularities, *Differ. Equat.*, 1982, vol. 18, no. 6, pp. 724–731.

5. Sitnik, S.M. and Shishkina, E.L., *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravnenii s operatorami Besselya* (Transformation Operator Method for Differential Equations with Bessel Operators), Moscow: Fizmatlit, 2019.
6. Shishkina, E.L., The general Euler–Poisson–Darboux equation and hyperbolic B-potentials, *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2019, vol. 65, no. 2, pp. 157–338.
7. Shishkina, E.L., Uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the general Euler–Poisson–Darboux equation, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 12, pp. 1673–1679.
8. Lyakhov, L.N. and Sanina, E.L., Kipriyanov–Beltrami operator with negative dimension of the Bessel operators and the singular Dirichlet problem for the B-harmonic equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1564–1574.
9. Donaldson, J.A., A singular abstract Cauchy problems, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1970, vol. 66, no. 2, pp. 269–274.
10. Carroll, R.W. and Showalter, R.E., *Singular and Degenerate Cauchy Problems*, New York: Academic Press, 1976.
11. Bragg, L.R., Some abstract Cauchy problems in exceptional cases, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 65, no. 1, pp. 105–112.
12. Fattorini, H.O., Ordinary differential equations in linear topological space. II, *J. Differ. Equat.*, 1969, vol. 6, pp. 50–70.
13. Baskakov, A.G., Harmonic analysis of cosine and exponential operator-valued functions, *Math. USSR Sbornik*, 1985, vol. 52, no. 1, pp. 63–90.
14. Goldstein, J.A., Semigroups of Linear Operators and Applications, New York: Oxford Univ. Press, 1985.
15. Vasil'ev, V.V., Krein, S.G., and Piskarev, S.I., Semigroups of operators, cosine operator functions, and linear differential equations, *J. Sov. Math.*, 1991, vol. 54, no. 4, pp. 1042–1129.
16. Glushak, A.V., Family of Bessel operator functions, *Geom. Mekh. Itogi Nauki Tekh. Ser.: Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, Moscow: VINITI RAN, 2020, vol. 187, pp. 36–43.
17. Glushak, A.V., Abstract Cauchy problem for the Bessel–Struve equation, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 7, pp. 864–878.
18. Mel'nikova, I.V. and Filinkov, A.I., Integrated semigroups and C-semigroups. Well-posedness and regularization of differential-operator problems, *Russ. Math. Surveys*, 1994, vol. 49, no. 6 (300), pp. 115–155.
19. Zheng, Q., Integrated cosine functions, *Int. J. Math. and Math. Sci.*, 1996, vol. 19, no. 3, pp. 575–580.
20. Zhang, J. and Zheng, Q., On α-times integrated cosine functions, *Math. Jap.*, 1999, vol. 50, pp. 401–408.
21. Kostić, M., *Generalized semigroups and cosine functions*, Beograd: Matematički institut SANU, 2011.
22. Lebedev, N.N., *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya* (Special Functions and Their Applications), Moscow: Fizmatlit, 1963.
23. Glushak, A.V., On the relationship between the integrated cosine function and the operator Bessel function, *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 5, pp. 619–626.
24. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integraly i ryady. T. 3. Special'nye funkcii. Dopolnitel'nyye glavy* (Integrals and Series. V. 3. Special functions. Additional chapters), Moscow: Fizmatlit, 2003.
25. Dzhenaliev, M.T. and Ramazanov, M.I., *Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravnenii* (Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations), Almaty: Gylym, 2010.
26. Nakhushev, A.M., *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* (Loaded Equations and Their Applications), Moscow: Nauka, 2012.
27. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* (Integrals and Series. Elementary Functions), Moscow: Nauka, 1981.
28. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii* (Integrals and Series. Special Functions), Moscow: Nauka, 1983.
29. Glushak, A.V., Operator hypergeometric functions, *J. Math. Sci.*, 2023, vol. 272, no. 5, pp. 658–666.
30. Zitomirskii, Ya.I., Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with Bessel-type differential operators, *Mat. Sb.*, 1955, vol. 36, no. 2, pp. 299–310.
31. Ivanov, V.K., Mel'nikova, I.V., and Filinkov, A.I., *Differentsial'no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi* (Operator-Differential Equations and Ill-Posed Problems), Moscow: Fizmatlit, 1995.
32. Kabanikhin, S.I. and Krivorot'ko, O.I., A numerical method for solving the Dirichlet problem for the wave equation, *J. Appl. Ind. Math.*, 2012, vol. 15, no. 4, pp. 187–198.
33. Vasil'ev, V.I., Kardashevskii, A.M., and Popov, V.V., Solving the Dirichlet problem for vibrating string equation by the conjugate gradient method, *Vestn. Sev.-Vost. Fed. Univ.*, 2015, vol. 12, no. 2, pp. 43–50.
34. Glushak, A.V., On the solvability of boundary value problems for an abstract Bessel–Struve equation, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 8, pp. 1069–1076.
35. Nebol'sina, M.N., Chebyshev orthogonal polynomials and the Neumann problem, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 455–457.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 365–374

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.925.75

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ МАЛОГО НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Д. П. Емельянов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: emelianov@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 04.10.2023 г., после доработки 04.10.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Рассмотрена краевая задача Дирихле для уравнения эллиптического типа с нерегулярным вырождением в прямоугольнике с нецелым порядком вырождения и аналитическими коэффициентами. Методом спектрального выделения особенностей построено формальное решение задачи в виде ряда, характер неаналитической зависимости решения от переменной y в окрестности $y=0$ выписан явно. Методом функции Грина доказана сходимость построенного ряда к классическому решению задачи.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, вырождающееся эллиптическое уравнение, нецелое вырождение, аналитическая теория дифференциальных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064124030069, EDN: PMAFMB

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в прямоугольной области $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<b\}$:

$$u_{xx}+y^m u_{yy}+c(y)u_y-a(y)u=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$
$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\partial D. \tag{1}$$

Здесь $a(y),c(y)$ и $f(x,y)$ — некоторые аналитические функции переменной y в комплексной области G такой, что $[0,b]\subset G$. Также потребуем, чтобы были выполнены условия $a(y)\geqslant 0$ при $y\in[0,b]$ и $c(0)=0$. Порядок вырождения уравнения в (1) определяется постоянной m. Будем полагать, что $0<m<1$, $m\notin\mathbb{Q}$.

Классическое решение задачи (1) будем искать в классе $C^2(D)\cap C(\overline{D})$. Покажем, что такое решение существует и единственно. Получим представление решения задачи в виде сходящегося ряда, в котором характер неаналитической зависимости решения от переменной y в окрестности $y=0$ будет выписан явно. Таким образом, будет предложен аналог теоремы Коши–Ковалевской для случая эллиптических уравнений с вырождением нецелого порядка.

Данная работа продолжает цикл публикаций, в которых аналогичные результаты получены при других порядках вырождения уравнения: $m=2$ [1; 2; 3, гл. X; 4; 5], $m=1$ [6] и $1<m<2$ [7].

Уравнения данного типа исследовались разными авторами. Отметим некоторые результаты. В работах М.В. Келдыша [8; 9, с. 299–301] рассмотрены различные краевые задачи вида (1) для однородного уравнения в области с гладкой границей, доказаны теоремы существования и единственности. Результаты в рамках аналитической теории дифференциальных уравнений получены А.И. Янушаускасом [10, гл. 3–5]. Также следует отметить работы [11; 12, с. 88–94; 13, с. 73–88; 14–17].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема. *Пусть правая часть $f(x,y)$ уравнения задачи (1) аналитична в области G как функция переменной y при каждом фиксированном $x\in[0,1]$, имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{D}$, при каждом фиксированном $y\in(0,b)$ принадлежит классу Гёльдера как функция переменной x. Тогда существует классическое решение задачи (1) в виде ряда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\eta_k(y)\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in\overline{D},$$

который сходится абсолютно и равномерно в $\overline{D}$, допускает двукратное почленное дифференцирование по x и по y внутри области D, функции $\eta_k(y)\in A(G\setminus\{0\})$ в достаточно малой окрестности U точки $y=0$ представимы в виде

$$\eta_k(y)=\psi_{k,0}(y)+\sum_{n=1}^{+\infty}y^{n(2-m)}\psi_{k,n}(y),\quad y\in U\subset G,\tag{2}$$

где функции $\psi_{k,n}(y)$ аналитичны в U, $\psi_{k,0}(0)=0$, ряд (2) сходится в $A(U\setminus\{0\})$.

Доказательство данной теоремы будет приведено ниже после доказательств лемм.

3. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решение задачи (1) будем искать в виде ряда по системе функций $\{\sin(\pi kx)\}_{k=1}^{+\infty}$:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}Y_k(y)\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in\overline{D},\tag{3}$$

где функции $Y_k(y)$ являются решениями одномерных краевых задач

$$y^mY_k''+c(y)Y_k'-(a(y)+\pi^2k^2)Y_k=f_k(y),\quad 0<y<b,\quad k\in\mathbb{N},$$
$$Y_k(0)=Y_k(b)=0,\quad k\in\mathbb{N}.\tag{4}$$

Здесь $f_k(y)$ — коэффициенты разложения функции $f(x,y)$ в ряд по системе $\{\sin(\pi kx)\}_{k=1}^{+\infty}$ на отрезке $[0,1]$.

Решения задачи (4) будем искать в виде $Y_k(y)=\hat{Y}_k(y)+C_1Y_k^0(y)$, где

$$y^m\hat{Y}_k''+c(y)\hat{Y}_k'-(a(y)+\pi^2k^2)\hat{Y}_k=f_k(y),\quad \hat{Y}_k(0)=0,\quad k\in\mathbb{N},\tag{5}$$

$$y^mY_k^{0\,\prime\prime}+c(y)Y_k^{0\,\prime}-(a(y)+\pi^2k^2)Y_k^0=0,\quad Y_k^0(0)=0,\quad k\in\mathbb{N}.\tag{6}$$

Также рассмотрим ещё один набор вспомогательных задач для функций $Y_k^b(y)$:

$$y^mY_k^{b\,\prime\prime}+c(y)Y_k^{b\,\prime}-(a(y)+\pi^2k^2)Y_k^b=0,\quad Y_k^b(b)=0,\quad k\in\mathbb{N}.\tag{7}$$

Зафиксируем произвольное $k\in\mathbb{N}$ и построим частное решение задачи (5) явно в некоторой окрестности $U\equiv\{y\in\mathbb{C}:|y|<\varepsilon\}$ точки $y=0$, где $\varepsilon>0$ таково, что $U\subset G$.

Пусть функция $z_0(y)$ — единственное решение задачи

$$y^mz_0''=f_k(y),\quad z_0(0)=z_0'(0)=0.\tag{8}$$

В предположении аналитичности функции $f(x,y)$ по переменной $y\in G$ все коэффициенты $f_k\in A(G)$. Тогда в окрестности U имеет место разложение

$$f_k(y)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_{k,n}y^n,\quad y\in U,\quad k\in\mathbb{N},$$

а функция $z_0(y)$ примет вид

$$z_0(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f_{k,n}y^{n+2-m}}{(n-m+1)(n-m+2)}\equiv y^{2-m}\sum_{n=0}^{+\infty}z_{0,n}y^n,\quad y\in U,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Построим новые функции $z_j(y)$, $j\in\mathbb{N}$, по индукции. Пусть функция $z_{j-1}(y)$ представима в виде

$$z_{j-1}(y)=y^{j(2-m)}\sum_{n=0}^{+\infty}z_{j-1,n}y^n,\quad y\in U,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Потребуем, чтобы функция $z_j(y)$ была решением задачи Коши

$$y^m z_j''+c(y)z_{j-1}'-(a(y)+\pi^2k^2)z_{j-1}=0,\quad z_j(0)=z_j'(0)=0,\quad j\in\mathbb{N}.$$

Принимая во внимание соотношения (9), (10) для $z_{j-1}(y)$ и аналитичность коэффициентов $a(y)$, $c(y)$ в U, получаем представление

$$z_j(y)=y^{(j+1)(2-m)}\sum_{n=0}^{+\infty}z_{j,n}y^n,\quad y\in U,\quad k\in\mathbb{N},\quad j\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Все ряды сходятся в $A(U)$. Коэффициенты $z_{j,n}$ зависят только от коэффициентов $z_{j-1,n}$ и коэффициентов Тейлора функций $a(y)$ и $c(y)$.

Лемма 1. *Для любого $k\in\mathbb{N}$ существует аналитическое в $G\setminus\{0\}$ решение $\hat{Y}_k(y)$ задачи (5). При этом в окрестности U точки $y=0$ оно представимо рядом*

$$\hat{Y}_k(y)=\sum_{j=0}^{+\infty}z_j(y),$$

который сходится в классах $A(U\setminus\{0\})$ и $C(K)$ для любого множества $K\equiv\{y\in\mathbb{C}:|y|\leqslant\varepsilon'\}\subset G$, где $\varepsilon'>0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное компактное множество $K\subset U\subset G$. Выберем индекс $j_0\in\mathbb{N}$ такой, что $(j_0+1)(2-m)\geqslant 2$. Тогда для функции $z_j(y)$, $j\geqslant j_0$, при $y\in K$ имеет место интегральное представление

$$z_j(y)=\int_0^y(y-\eta)\eta^{-m}((a(\eta)+\pi^2k^2)z_{j-1}(\eta)-c(\eta)z_{j-1}'(\eta))d\eta. \tag{11}$$

Так как функции $a(y)$, $c(y)y^{-1}$ и $z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)}$ аналитичны в U, то они принадлежат классу $C^1(K)$. Значит, можно выбрать постоянные $M,M_{j_0}\geqslant 0$ такие, что

$$|a(y)+\pi^2k^2|\leqslant M,\quad |c(y)y^{-1}|\leqslant M,\quad y\in K,$$

$$|z_{j_0}(y)y^{-(j_0+1)(2-m)}|\leqslant M_{j_0},\quad y\in K,$$

$$|(z_{j_0}(y)y^{-(j_0+1)(2-m)})'|\leqslant M_{j_0}\frac{(j_0+1)(2-m)}{|y|},\quad y\in K\setminus\{0\}.$$

Покажем по индукции, что в общем случае имеют место оценки

$$|z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)}| \leqslant M_j, \quad y \in K, \quad j \geqslant j_0,$$

$$|(z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)})'| \leqslant M_j \frac{(j+1)(2-m)}{|y|}, \quad y \in K \setminus \{0\}, \quad j \geqslant j_0,$$

$$M_{j+1} = M_j \frac{12M}{(j+1)(2-m)}, \quad j \geqslant j_0.$$

Подставив оценки для $z_{j-1}(y)$ в формулу (11), получим

$$|z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)}| \leqslant |y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^y |y-\eta|\,|\eta|^{-m}(M|z_{j-1}(\eta)| + \eta M|z'_{j-1}(\eta)|)\,|d\eta| \leqslant$$

$$\leqslant |y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^y |\eta|^{j(2-m)}|y-\eta|\,|\eta|^{-m}(MM_{j-1} + |\eta|M|z'_{j-1}(\eta)||\eta|^{-j(2-m)})\,|d\eta| \leqslant$$

$$\leqslant |y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^y |\eta|^{j(2-m)}|y-\eta|\,|\eta|^{-m}(MM_{j-1} + 2jMM_{j-1}(2-m))\,|d\eta| =$$

$$= (MM_{j-1} + 2jMM_{j-1}(2-m))|y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^{|y|}\int\limits_0^{\eta} \zeta^{j(2-m)-m}\,d\zeta d\eta \leqslant$$

$$\leqslant 3jMM_{j-1}(2-m)|y|^{-(j+1)(2-m)} \frac{|y|^{(j+1)(2-m)}}{(j+1)(2-m)((j+1)(2-m)-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3MM_{j-1}}{(j+1)(2-m)-(2-m)} = \frac{3MM_{j-1}}{j(2-m)} \leqslant \frac{12MM_{j-1}}{j(2-m)} \equiv M_j, \quad y \in K.$$

Аналогично будем иметь

$$|(z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)})'| \leqslant$$

$$\leqslant |y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^{|y|} \zeta^{j(2-m)-m} 3jMM_{j-1}(2-m)\,d\zeta + |z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)}| \frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant 3jMM_{j-1}(2-m)|y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^{|y|} \zeta^{j(2-m)-m}\,d\zeta + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant 3jMM_{j-1}(2-m)|y|^{-(j+1)(2-m)} \frac{|y|^{j(2-m)+1-m}}{j(2-m)+1-m} + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant 3jMM_{j-1}(2-m)\frac{1}{|y|}\,\frac{1}{(j+1)(2-m)-1} + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_j}{4}\,\frac{j(2-m)}{|y|}\,\frac{j(2-m)}{(j+1)(2-m)-1} + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_j}{2}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant M_j \frac{(j+1)(2-m)}{|y|}.$$

Обе оценки доказаны.

В круге K при $j \geqslant j_0$

$$|z_j(y)| \leqslant M_j |y|^{(j+1)(2-m)} \leqslant (\varepsilon')^{(j+1)(2-m)} M_0 \prod_{l=j_0}^{j} \frac{12M}{(l+1)(2-m)} \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon')^{(j+1)(2-m)} M_0 \prod_{l=0}^{j} \frac{12M}{(l+1)(2-m)} = M_0 \left((\varepsilon')^{(2-m)} \frac{12M}{2-m} \right)^{j+1} \prod_{l=1}^{j+1} \frac{1}{l} = M_0 \frac{p^{j+1}}{(j+1)!},$$

$$p = (\varepsilon')^{(2-m)} \frac{12M}{2-m},$$

следовательно, ряд $\sum_{j=0}^{+\infty} z_j(y)$ сходится равномерно на любом множестве $K \subset G$, а значит, и в $A(U \setminus \{0\})$. Кроме того, он допускает дифференцирование под знаком суммы любое число раз внутри U. Подставим этот ряд в (5):

$$y^m \sum_{j=0}^{+\infty} z_j''(y) + c(y) \sum_{j=0}^{+\infty} z_j'(y) - (a(y) + \pi^2 k^2) \sum_{j=0}^{+\infty} z_j(y) =$$

$$= y^m z_0''(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} y^m z_j''(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} (c(y) z_{j-1}'(y) - (a(y) + \pi^2 k^2) z_{j-1}(y)) =$$

$$= y^m z_0''(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} y^m z_j''(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} (-y^m z_j''(y)) = f_k(y), \quad \sum_{j=0}^{+\infty} z_j(0) = 0,$$

т.е. построенный ряд действительно является решением задачи (5) в области U.

Коэффициенты и правая часть уравнения задачи (5) не имеют иных особенностей в области G, кроме точки $y = 0$, значит построеное решение $\hat{Y}(y)$ может быть единственным образом аналитически продолжено [18, с. 102–103] во всю область G. Лемма доказана.

Аналогично построим функции $\hat{z}_j(y)$:

$$\hat{z}_0 = y,$$

$$y^m \hat{z}_j'' + c(y) \hat{z}_{j-1}' - (a(y) + \pi^2 k^2) \hat{z}_{j-1} = 0, \quad \hat{z}_j(0) = \hat{z}_j'(0) = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Соответствующие функции будут иметь следующие разложения в области U:

$$\hat{z}_j(y) = y^{j(2-m)} \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{z}_{j,n} y^n, \quad y \in U, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует аналитическое в $G \setminus \{0\}$ решение $Y_k^0(y)$ задачи (6). При этом в окрестности U точки $y = 0$ оно представимо рядом*

$$Y_k^0(y) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{z}_j(y),$$

который сходится в классах $A(U \setminus \{0\})$ и $C(K)$ для любого множества $K \equiv \{y \in \mathbb{C} : |y| \leqslant \varepsilon'\} \subset G$, где $\varepsilon' > 0$.

Доказательство данной леммы полностью повторяет доказательство леммы 1.

Построим решение задачи (4) в виде

$$Y_k(y) = \hat{Y}_k(y) - \frac{\hat{Y}_k(b)}{Y_k^0(b)} Y_k^0(y) = \sum_{j=0}^{+\infty} y^{j(2-m)} \varphi_{k,j}(y), \quad y \in G,$$

разложение в ряд имеет место при $y\in U$, функции $\varphi_{k,j}\in A(U)$, ряд сходится в классах $A(U\setminus\{0\})$ и $C[0,\varepsilon/2]$. Указанная формула корректна и даёт единственное решение задачи (4) в силу лемм 1 и 2 из работы [5].

4. ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДА

Покажем, что ряд (3) сходится к классическому решению задачи (1) при некоторых ограничениях на функцию $f(x,y)$. Доказательство этого факта в целом повторяет рассуждения из работ [2–7], поэтому ограничимся его основными моментами.

Аналогично [7] сведём задачу (6) к задаче с линейным вырождением следующей заменой:

$$y=((2-m)t)^{\alpha},\quad Y_k^0(t)=t^{\alpha}z_k(t),\quad \alpha=\frac{1}{2-m}.$$

Тогда для новой неизвестной функции $z_k(t)$ и новой независимой переменной t получим задачи

$$tz_k''(t)+d(t)z_k'(t)-\left[\bar a(t)+\pi^2\left(\frac{k}{\sqrt{2-m}}\right)^2\right]z_k(t)=0,\quad t\in(0,\bar b),\quad \bar b=\alpha b^{2-m},\quad k\in\mathbb{N},$$
$$z_k(0)=1,\quad k\in\mathbb{N},$$

причём новые коэффициенты $d(t)$ и $\bar a(t)$ в некоторой окрестности точки $t=0$ имеют следующие разложения:

$$d(t)=(1+\alpha)+c_1t+c_2(2-m)^{\alpha(3-m)-1}t^{\alpha(3-m)}+\ldots+c_j(2-m)^{\alpha(1+j-m)-1}t^{\alpha(1+j-m)}+\ldots,$$
$$\bar a(t)=\frac{a_0+\ldots+a_j((2-m)t)^{j\alpha}+\ldots}{2-m}-\alpha^3[c_1+\ldots+c_j((2-m)t)^{\alpha(1+j-m)-1}+\ldots],$$

здесь a_0, a_1, … и c_1, c_2, … — коэффициенты разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $y=0$ исходных коэффициентов $a(y)$ и $c(y)$. Кроме того, коэффициенты $\bar a(t), d(t)\in C^1[0,\bar b]$, а производная функции $\bar D(t)\equiv(d(t)-d(0))/t$ непрерывна на $(0,\bar b]$ и интегрируема на $[0,\bar b]$.

Тогда с учётом теорем 1–3 [6] получим двусторонние оценки для функций $z_k(t)$ при больших индексах $k\in\mathbb{N}$:

$$0<B_1\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1+(\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}}\leqslant z_k(t)\leqslant B_2\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1+(\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}},\quad 0\leqslant t\leqslant\bar b,$$
$$0<B_1k\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1+(\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}}\leqslant z_k'(t)\leqslant B_2\frac{k}{\sqrt{\alpha t}}\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1+(\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}},\quad 0<t\leqslant\bar b,$$

где B_1 и B_2 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от t и k. Обратная замена приводит нас к следующему утверждению.

Лемма 3. *Можно выбрать такие нетривиальные решения $Y_k^0(y)$ задач (6) и постоянные $0<C_1<C_2$, не зависящие от y и $k\in\mathbb{N}$, что будут выполнены соотношения*

$$0<C_1y\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\leqslant Y_k^0(y)\leqslant C_2y\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}},\quad 0\leqslant y\leqslant b,$$

$$0 < C_1 k y^{1/\alpha} \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \leqslant \frac{dY_k^0}{dy}(y) \leqslant C_2 k \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}, \quad 0 < y \leqslant b.$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 1 из работы [7].

Аналогичные оценки можно получить для серии частных решений задач (7). Зафиксируем функции $Y_k^0(y)$ из леммы 3 и определим $Y_k^b(y)$ следующим образом:

$$Y_k^b(y) \equiv -Y_k^0(y) \int\limits_b^y \exp\left\{-\int\limits_b^\eta \xi^{-m} c(\xi)\, d\xi\right\} \Big/ (Y_k^0(\eta))^2\, d\eta, \quad y \in [0,b].$$

Справедлива следующая

Лемма 4. *Найдутся такие постоянные* $0 < C_3 < C_4$, *не зависящие от* y *и* $k \in \mathbb{N}$, *что*

$$0 < C_3 \frac{1}{k} \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}} \leqslant Y_k^b(y), \quad \frac{b}{4} \leqslant y \leqslant \frac{3b}{4},$$

$$Y_k^b(y) \leqslant C_4 \frac{1}{k} \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}, \quad 0 \leqslant y \leqslant b,$$

$$0 \leqslant -\frac{dY_k^b}{dy}(y) \leqslant C_4 \frac{1}{y} \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}, \quad 0 < y \leqslant b.$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательствам теоремы 3 из работы [5], теоремы 5 из [6] и леммы 2 из [7].

Рассмотрим определители Вронского систем функций $Y_k^0(y)$, $Y_k^b(y)$:

$$w_k(y) = Y_k^0(y) \frac{dY_k^b}{dy}(y) - Y_k^b(y) \frac{dY_k^0}{dy}(y), \quad y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N},$$

и функции Грина задач (4):

$$G_k(y,\eta) = \begin{cases} \dfrac{Y_k^0(y) Y_k^b(\eta)}{\eta^m w_k(\eta)}, & 0 \leqslant y < \eta \leqslant b, \\ \dfrac{Y_k^b(y) Y_k^0(\eta)}{\eta^m w_k(\eta)}, & 0 \leqslant \eta < y \leqslant b, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 5. *Существует не зависящая от* $k \in \mathbb{N}$ *и* y *постоянная* $W > 0$ *такая, что*

$$w_k(y) \leqslant -W, \quad y \in [0,b].$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательствам леммы 4 из работы [5], теоремы 7 из [6] и леммы 3 из [7].

Лемма 6. *Существует постоянная* $C > 0$, *не зависящая от* $k \in \mathbb{N}$ *и* y, *такая, что*

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\, d\eta \leqslant \frac{C}{k^2}, \quad y \in [0,b].$$

Для любого $\varepsilon > 0$ *найдётся постоянная* $C'(\varepsilon) > 0$, *не зависящая от* $k \in \mathbb{N}$ *и* y, *такая, что*

$$\int\limits_0^b \left|\frac{\partial G_k}{\partial y}(y,\eta)\right| d\eta \leqslant \frac{C'}{k}, \quad y \in [\varepsilon, b].$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательствам теоремы 4 из работы [5], теоремы 8 из [6] и леммы 4 из [7].

Из утверждений лемм 3, 4 и 6 следует

Лемма 7. *Пусть правые части* $f_k(y)$ *уравнений задач (4) ограничены по норме пространства* $C^2[0,b]$. *Тогда имеет место следующая равномерная по* $y \in [0,b]$ *оценка:*

$$Y_k(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ *справедлива асимптотическая формула*

$$Y_k^{(p)}(y) = -\frac{f_k^{(p)}(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-p}}\right), \quad y \in [\varepsilon, b-\varepsilon], \quad k \in \mathbb{N}, \quad p = 0,1,2,$$

равномерная по y.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательствам леммы 5 из работы [5], теоремы 9 из [6] и теоремы 2 из [7].

Лемма 8. *Пусть правая часть* $f(x,y)$ *уравнения задачи (1) имеет вторую непрерывную производную по* y *в* $\overline{D}$, *при каждом фиксированном* $y \in (0,b)$ *принадлежит классу Гёльдера как функция переменной* x. *Тогда существует классическое решение задачи (1). Оно представляется рядом (3), который сходится абсолютно и равномерно в* $\overline{D}$, *допускает двукратное почленное дифференцирование по* x *и по* y *внутри области* D.

Утверждение данной леммы следует из леммы 7 и известных свойств рядов Фурье. Подробное доказательство приведено, например, в работе [5, теорема 5].

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Правая часть уравнения задачи (1) допускает разложение в ряд Фурье по системе $\{\sin(\pi kx)\}_{k=1}^{+\infty}$:

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)\sin(\pi kx), \quad (x,y) \in D.$$

Коэффициенты разложения могут быть найдены по формулам

$$f_k(y) = 2\int\limits_0^1 f(x,y)\sin(\pi kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in G,$$

из которых следует, что функции $f_k \in A(G)$. Таким образом, выполнены все условия лемм 1 и 2, задача (4) имеет единственное решение $\eta_k(y)$, аналитическое в $G \setminus \{0\}$, и общий член ряда (3) определён.

Выполнены все условия леммы 8, следовательно, ряд (3) сходится равномерно в $\overline{D}$ к решению задачи (1). Разложение (2) следует из утверждений лемм 1 и 2. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. И.С. Ломову за постановку задачи и полезные обсуждения полученных результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов, И.С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2079–2089.
2. Ломов, И.С. Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов / И.С. Ломов // Докл. РАН. — 2001. — Т. 376, № 5. — С. 593–596.
3. Ломов, И.С. Основы математической теории пограничного слоя / И.С. Ломов, С.А. Ломов. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2011. — 453 с.
4. Емельянов, Д.П. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами / Д.П. Емельянов, И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 45–58.
5. Емельянов, Д.П. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов / Д.П. Емельянов, И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 5. — С. 655–672.
6. Емельянов, Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением / Д.П. Емельянов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 607–627.
7. Емельянов, Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с вырождением нецелого порядка / Д.П. Емельянов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. — 2023. — № 2. — С. 12–22.
8. Келдыш, М.В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.
9. Келдыш, М.В. Избранные труды. Математика / М.В. Келдыш. — М. : Наука, 1985. — 447 с.
10. Янушаускас, А.И. Аналитическая теория эллиптических уравнений / А.И. Янушаускас. — Новосибирск : Наука, 1979. — 190 с.
11. Олейник, О.А. О гладкости решений вырождающихся эллиптических и параболических уравнений / О.А. Олейник // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 163, № 3. — С. 577–580.
12. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М. : Высшая школа, 1985. — 304 с.
13. Моисеев, Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е.И. Моисеев. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 149 с.
14. Петрушко, И.М. Краевые задачи для уравнений смешанного типа / И.М. Петрушко // Тр. ордена Ленина Мат. института им. В.А. Стеклова. Т. 103. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. — 1968. — С. 181–200.
15. Петрушко, И.М. О фредгольмовости некоторых краевых задач для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+ +\alpha(x,y)u_y+\beta(x,y)u_x+\gamma(x,y)u=f(x,y)$ в смешанной области / И.М. Петрушко // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 1. — С. 123–135.
16. Ивакин, В.М. Видоизменённая задача Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических уравнений и систем / В.М. Ивакин // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. — Новосибирск : Наука, 1982. — С. 12–21.
17. Фурсиков, А.В. О глобальной гладкости решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений / А.В. Фурсиков // Успехи мат. наук. — 1971. — Т. 26, № 5. — С. 227–228.
18. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон ; пер. с англ. Б.М. Левитана. — М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1958. — 474 с.

SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH A SMALL NONINTEGER ORDER DEGENERACY

D. P. Emel'yanov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: emelianov@cs.msu.ru

We consider a Dirichlet boundary problem for an elliptic type equation with a non-regular degeneracy of noninteger order in a rectangle. The coefficients of the differential operator are supposed to be analytic. We build a formal solution by using the method for spectral separation of the singularities. The solution is series where its non-analytic dependency on y near point $y=0$ is written explicitly. We proof the convergence of the series to the classical solution using the Green's function method.

Keywords: elliptic equation, degenerate elliptic equation, noninteger degeneracy, analytic theory of differential equation.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program for the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Lomov, I.S., Small denominators in analitic theory of degenerate differential equations, *Differ. Equat.*, 1993, vol. 29, no. 12, pp. 1811–1820.
2. Lomov, I.S., Method of spectral separation of variables for irregularly degenerating elliptic differential operators, *Dokl. RAN*, 2001, vol. 376, no. 5, pp. 593–596.
3. Lomov, I.S. and Lomov, S.A., *Osnovy matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya* (Fundamentals of the Mathematical Theory of a Boundary Layer), Moscow: MSU Press, 2011.
4. Emel'yanov, D.P. and Lomov, I.S., Construction of exact solutions of irregularly degenerate elliptic equations with analytic coefficients, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 46–59.
5. Emel'yanov, D.P. and Lomov, I.S., Using poisson series in the analytic theory of irregularly degenerate elliptic differential operators, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 5, pp. 636–653.
6. Emel'yanov, D.P., Elliptic differential operators with analytic coefficients and linear degeneracy, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 610–630.
7. Emel'yanov, D.P., Elliptic differential operators with noninteger order degeneration, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2023, vol. 47, no. 2, pp. 71–81.
8. Keldysh, M.V., On some cases of equations of elliptic type degenerate on the boundary of a domain, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.
9. Keldysh, M.V., *Izbrannye trudy. Matematika* (Selected Works. Mathematics), Moscow: Nauka, 1985.
10. Yanushauskas, A.I., *Analiticheskaya teoriya ellipticheskikh uravnenii* (Analytic Theory of Elliptic Equations), Novosibirsk: Nauka, 1979.
11. Oleinik, O.A., On the smoothness of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1965, vol. 163, no. 3, pp. 577–580.
12. Smirnov, M.M., *Uravneniya smeshannogo tipa* (Mixed Type Equations), Moscow: Vyssh. Shkola, 1985.
13. Moiseev, E.I., *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* (Mixed Type Equations with Spectral Parameter), Moscow: MSU Press, 1988.
14. Petrushko, I.M., Boundary value problems for equations of mixed type, *Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova*, 1968, vol. 103, pp. 181–200.
15. Petrushko, I.M., On the Fredholm property of some boundary value problems for the equation $u_{xx}+yu_{yy}+ +\alpha(x,y)u_y+\beta(x,y)u_x+\gamma(x,y)u=f(x,y)$ in a mixed domain, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 1, pp. 123–135.
16. Ivakin, V.M., A modified Dirichlet problem for elliptic equations and systems degenerate on the boundary, in *Analiticheskiye metody v teorii ellipticheskikh uravneniy* (Analytical Methods in the Theory of Elliptic Equations), Novosibirsk: Nauka, 1982, pp. 12–21.
17. Fursikov, A.V., The global smoothness of the solutions of a class of degenerating elliptic equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1971, vol. 26, no. 5, pp. 227–228.
18. Coddington, E.A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York; Toronto; London: McGraw-Hill, 1955.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 375–385

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

О ДИНАМИЧЕСКОМ РАСТЯЖЕНИИ ТОНКОГО КРУГЛОГО ИДЕАЛЬНО ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ИЗ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

И. М. Цветков

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: cvetkoviv@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.09.2023 г., после доработки 24.11.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Изучена система уравнений, моделирующая динамическое растяжение однородного круглого слоя из несжимаемого идеально жёсткопластического трансверсально-изотропного материала, подчиняющегося критерию Мизеса–Генки. Верхнее и нижнее основания свободны от напряжений, на боковой границе задана радиальная скорость, при этом учтена возможность утолщения либо утоньшения слоя, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. С использованием метода асимптотического интегрирования выявлены два характерных режима растяжения, т.е. определены соотношения безразмерных параметров, при которых учёт инерционных членов является необходимым. При рассмотрении режима, связанного с достижением ускорения на боковой грани своих критических значений, построено приближённое решение задачи.

Ключевые слова: идеальная пластичность, круглый слой, трансверсально-изотропный материал, растяжение, динамика, шейка, асимптотическое разложение.

DOI: 10.31857/S0374064124030073, EDN: PLNZKQ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим деформирование во времени круглого слоя из однородного несжимаемого идеально жёсткопластического трансверсально-изотропного материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки с плотностью ρ и пределом текучести σ_s. Область Ω_t в пространстве $\mathbb{R}^3$, занятая слоем в момент t, симметрична относительно оси z, имеет неизменный во времени объём $|\Omega|$ и в цилиндрической системе координат, связанной с осью симметрии слоя, определяется как

$$\Omega_t = \{(r,\theta,z):\ 0\leqslant r\leqslant R(t),\ 0\leqslant\theta<2\pi,\ -h(t,r)\leqslant z\leqslant h(t,r)\}, \tag{1}$$

$$|\Omega| = 4\pi\int\limits_0^{R(t)} rh(t,r)\,dr = 2\pi R^2(t)h^*(t). \tag{2}$$

Средняя высота слоя h^* задаётся в (2) таким образом, чтобы объём слоя цилиндрической формы радиуса $R(t)$ и высоты $2h^*(t)$ равнялся $|\Omega|$.

Представим симметричный тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ как сумму шаровой и девиаторной частей: $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}+\mathbf{s}$, где p — давление, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, $\mathbf{s}$ — девиатор напряжений, $\operatorname{tr}\mathbf{s}=0$. Определим интенсивности скоростей деформаций v_u и напряжений σ_u:

$$v_u=\sqrt{\mathbf{v}:\mathbf{v}},\quad \sigma_u=\sqrt{\mathbf{s}:\mathbf{s}}, \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ — тензор скоростей деформации.

Векторные определяющие соотношения анизотропной идеально жёсткопластичной среды имеют следующий вид:

$$v_u\mathbf{s} = \sigma_u \mathbf{A} : \mathbf{v}, \tag{4}$$

где $\mathbf{A}$ — безразмерный тензор четвёртого ранга, отвечающий за тип анизотропии.

Так как материал трансверсально-изотропный, будем считать $\mathbf{A}$ трансверсально-изотропным тензором, компоненты которого, в силу симметричности $\mathbf{s}$ и $\mathbf{v}$, обладают следующими свойствами: $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}$, $i,j = 1,2,3$. Кроме того, предположим симметрию относительно первой и последней пары индексов, тогда имеет место следующее утверждение [1, 2].

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *трансверсально-изотропный тензор и его компоненты обладают следующими симметриями:* $A_{ijkl} = A_{klij} = A_{ijlk}$. *Тогда тензор* $\mathbf{A}$ *имеет пять независимых компонент следующего вида:*

$$\begin{gathered} A_{IJKL} = \Lambda_1\delta_{IJ}\delta_{KL} + \Lambda_2(\delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}), \\ A_{IJ33} = \Lambda_3\delta_{IJ}, \quad A_{I3K3} = \Lambda_4\delta_{IK}, \quad A_{3333} = \Lambda_5, \end{gathered} \tag{5}$$

где $I,J,K,L \in \{1,2\}$.

Для того чтобы в результате свёртки тензора $\mathbf{A}$ с девиатором скоростей деформаций получился девиатор, достаточно предположить, что A_{iijk} являются компонентами шарового тензора, откуда $2(\Lambda_1+\Lambda_2) = \Lambda_3 + \Lambda_5$, т.е. число независимых компонент сокращается до четырёх.

Верхнее и нижнее основания слоя $z = \pm h(r,t)$ свободны от напряжений, а на боковой поверхности $r = R(t)$ задана радиальная скорость, т.е. рассматривается растяжение слоя с заданной кинематикой движения боковой поверхности:

$$r = R(t)\colon \quad v_r = V(t), \quad V(t) > 0. \tag{6}$$

В данной работе ограничимся рассмотрением поля вектора скорости следующего вида: $\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = \big(v_r(r,z,t), 0, v_z(r,z,t)\big)$. Это порождает тензор скоростей деформации $\mathbf{v}$ с ненулевыми компонентами:

$$v_{rr} = v_{r,r}, \quad v_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad v_{zz} = v_{z,z}, \quad v_{rz} = \frac{1}{2}(v_{r,z} + v_{z,r}), \tag{7}$$

где запятая в индексе обозначает дифференцирование по соответствующей переменной.

Используя выражения для компонент трансверсально-изотропного тензора (5), выпишем вытекающие из (4) нетривиальные связи между девиатором напряжений и тензором скоростей деформаций:

$$\begin{gathered} v_u s_{rr} = \sigma_u((\Lambda_1 + 2\Lambda_2)v_{rr} + \Lambda_1 v_{\theta\theta} + \Lambda_3 v_{zz}), \quad v_u s_{zz} = \sigma_u(\Lambda_3 v_{rr} + \Lambda_3 v_{\theta\theta} + \Lambda_5 v_{zz}), \\ v_u s_{\theta\theta} = \sigma_u(\Lambda_1 v_{rr} + (\Lambda_1 + 2\Lambda_2)v_{\theta\theta} + \Lambda_3 v_{zz}), \quad v_u s_{rz} = 2\sigma_u\Lambda_4 v_{rz}. \end{gathered} \tag{8}$$

Исключая интенсивности σ_u и v_u из соотношений (8), можно образовать две независимые пропорции, которые с учётом (7) преобразуются к виду

$$\begin{gathered} s_{rr}\Big(\Lambda_3 v_{r,r} + \Lambda_3\frac{v_r}{r} + \Lambda_5 v_{z,z}\Big) = s_{zz}\Big((\Lambda_1 + 2\Lambda_2)v_{r,r} + \Lambda_1\frac{v_r}{r} + \Lambda_3 v_{z,z}\Big), \\ s_{rr}\Lambda_4(v_{r,z} + v_{z,r}) = s_{rz}\Big((\Lambda_1 + 2\Lambda_2)v_{r,r} + \Lambda_1\frac{v_r}{r} + \Lambda_3 v_{z,z}\Big). \end{gathered} \tag{9}$$

Следуя [3], представим массив компонент A_{ijkl} в виде матрицы размера 9×9 с нумерацией строк и столбцов в порядке (11), (22), (33), (12), (23), (31), (21), (32), (13). Число ненулевых компонент в данной матрице равно 21 — верхний левый минор размера 3×3 и 12 компонент из остальных строк, заполняющихся с использованием симметрий A_{1212}, A_{2323}, A_{3131}. Обозначим компоненты верхнего минора через a_{ij}, $i,j=1,2,3$, и $a_{44}=A_{1212}$, $a_{55}=A_{2323}$, $a_{66}=A_{3131}$. Тогда

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\Lambda_1+2\Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_3\\ \Lambda_1 & \Lambda_1+2\Lambda_2 & \Lambda_3\\ \Lambda_3 & \Lambda_3 & \Lambda_5\end{pmatrix},\quad a_{44}=\Lambda_2,\quad a_{55}=a_{66}=\Lambda_4.$$

Компоненты верхнего левого минора матрицы, соответствующей обратному тензору $\mathbf{A}^{-1}$, обозначим через d_{ij}, тогда

$$a_{ij}d_{jk}=\delta_{ik},\quad i,k=1,2,3;\quad d_{\gamma\gamma}=\frac{1}{4a_{\gamma\gamma}}\neq 0,\quad \gamma=4,5,6.$$

Таким образом, всюду далее будем предполагать $\det\mathbf{a}=4\Lambda_2(\Lambda_1\Lambda_5+\Lambda_2\Lambda_5-\Lambda_3^2)\neq 0$. Компоненты $\mathbf{d}$, выраженные через $\mathbf{a}$, имеют следующий вид:

$$\mathbf{d}=\frac{1}{\det\mathbf{a}}\begin{pmatrix}(\Lambda_1+2\Lambda_2)\Lambda_5-\Lambda_3^2 & \Lambda_3^2-\Lambda_1\Lambda_5 & -2\Lambda_2\Lambda_3\\ \Lambda_3^2-\Lambda_1\Lambda_5 & (\Lambda_1+2\Lambda_2)\Lambda_5-\Lambda_3^2 & -2\Lambda_2\Lambda_3\\ -2\Lambda_2\Lambda_3 & -2\Lambda_2\Lambda_3 & 4\Lambda_2(\Lambda_1+\Lambda_2)\end{pmatrix}.$$

Используя критерий пластичности для анизотропного идеальнопластического тела $\mathbf{s}^T:\mathbf{B}:\mathbf{s}=\sigma_u^2$, где $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-T}:\mathbf{A}^{-1}$, и кинематические условия (7), выпишем критерий пластичности для трансверсально-изотропной среды:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}d_{j\alpha}d_{j\beta}s_{\alpha\alpha}s_{\beta\beta}+8d_{66}^2s_{rz}^2=\sigma_s^2, \tag{10}$$

при этом греческие индексы у компонент тензора необходимо заменить на r, θ, z соответственно.

Лемма 2. *Пусть тензор* $\mathbf{A}$ *обратим, тогда квадратичная форма (10) положительно определена.*

Доказательство. Так как тензор $\mathbf{A}$ обратим, то обратима матрица $\mathbf{a}$. Заметим, что для положительной определённости квадратичной формы (10) необходимо и достаточно положительной определёности формы $\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}d_{j\alpha}d_{j\beta}s_{\alpha\alpha}s_{\beta\beta}$. Введя векторы $\mathbf{d}_i=(d_{1i},d_{2i},d_{3i})$, где $i=1,2,3$, убедимся, что матрица квадратичной формы является матрицей Грамма — $G(\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_3)$. Все её угловые миноры строго положительны тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{d}_i$ линейно независимы, что равносильно невырожденности матрицы $\mathbf{a}$.

Выразив $s_{\theta\theta}=-s_{rr}-s_{zz}$, оставим у девиатора напряжений независимыми компоненты s_{rr}, s_{rz}, s_{zz}, тогда условие пластичности Мизеса–Генки запишется следующим образом:

$$B_{11}s_{rr}^2+B_{22}s_{zz}^2-2B_{12}s_{rr}s_{zz}+Bs_{rz}^2=\tau_s^2, \tag{11}$$

где τ_s — предел текучести при сдвиге, а

$$B_{11}=\frac{1}{2}|\mathbf{d}_1-\mathbf{d}_2|^2,\quad B_{22}=\frac{1}{2}|\mathbf{d}_2-\mathbf{d}_3|^2,\quad B_{12}=\frac{1}{2}(\mathbf{d}_1-\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_2-\mathbf{d}_3),\quad B=\frac{1}{4\Lambda_4^2}.$$

Добавим к полученным ранее уравнениям условие несжимаемости и уравнения движения в осесимметричном случае

$$v_{r,r}+\frac{v_r}{r}+v_{z,z}=0, \tag{12}$$

$$-p_{,r}+s_{rr,r}+s_{rz,z}+\frac{1}{r}(2s_{rr}+s_{zz})=\rho(v_{r,t}+v_r v_{r,r}+v_z v_{r,z}), \tag{13}$$

$$-p_{,z}+s_{rz,r}+s_{zz,z}+\frac{s_{rz}}{r}=\rho(v_{z,t}+v_r v_{z,r}+v_z v_{z,z}). \tag{14}$$

Таким образом, получим нелинейную систему из шести уравнений (9), (11)–(14), замкнутую относительно шести функций v_r, v_z, p, s_{rr}, s_{rz}, s_{zz}, зависящих от r, z и t в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $z=\pm h(r,t)$.

Предположим, что функция $h(r,t)$ непрерывно дифференцируема, поэтому компоненты единичной нормали к поверхности $z=\pm h(t,r)$ имеют вид

$$n_r=-\frac{\partial h/\partial r}{\sqrt{1+(\partial h/\partial r)^2}},\quad n_\theta=0,\quad n_z=\pm\frac{1}{\sqrt{1+(\partial h/\partial r)^2}}.$$

В силу того, что верхнее и нижнее основания слоя свободны от напряжений, на этих частях границы $z=\pm h(r,t)$ выполнены условия равенства нулю двух компонент вектора напряжений:

$$(p-s_{rr})\frac{\partial h}{\partial r}\pm s_{rz}=0,\quad -s_{rz}\frac{\partial h}{\partial r}\pm(-p+s_{zz})=0. \tag{15}$$

Для строгой постановки начально-краевой задачи, рассматриваемой при $t>0$, необходимо задать функцию $h(r,0)\equiv h_0(r)$, $0\leqslant r<r_0$, удовлетворяющую интегральному условию

$$\frac{|\Omega|}{4\pi}=\int\limits_0^{r_0} r h_0(r)\,dr.$$

Так как область Ω_t симметрична, будем считать функции s_{rz}, v_z антисимметричными по z.

2. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ РАСТЯЖЕНИЯ

Квазистатическая постановка задачи о растяжении идеально жёсткопластического слоя отличается от динамической тем, что в правых частях уравнений (13), (14) стоят нули, т.е. время t становится параметром, входящим в решения неявно через V, h и R. Уравнения (13) и (14) превращаются в уравнения равновесия.

Аналитическое решение квазистатической задачи несложно получить, если в начальный момент времени слой имел цилиндрическую форму, т.е. $h_0^*=\mathrm{const}$. Обозначив параметры этого решения верхним индексом “qs”, будем иметь

$$v_r^{qs}=\frac{Vr}{R},\quad v_z^{qs}=-2\frac{Vz}{R}, \tag{16}$$

$$s_{rz}^{qs}=0,\quad s_{rr}^{qs}=s_{\theta\theta}^{qs}=\frac{\tau_s}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}},\quad s_{zz}^{qs}=p^{qs}=-\frac{2\tau_s}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}. \tag{17}$$

Напряжённое состояние (17) однородно и не зависит от заданной скорости V.

Кинематика (16) обеспечивает отсутствие жестких зон в области Ω_t, поскольку согласно (3) $v_u^{qs}=\sqrt{6}V/R>0$ во всех точках слоя.

Исследуем далее, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) выписанное выше квазистатическое приближение является главным и им можно ограничиться в технологических расчётах, и когда инерционные эффекты, вызванные слагаемыми в правых частях уравнений (13) и (14), начинают играть соизмеримую роль в распределении напряжений и движении точек слоя.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Обратимся к динамическим уравнениям (13), (14) и образуем три явно зависящих от времени безразмерных параметра:

$$\alpha(t)=\frac{h^*(t)}{R(t)}\ll 1,\quad \varepsilon_1=\frac{\rho V^2(t)}{\tau_s},\quad \varepsilon_2=\frac{\rho\dot V(t)h^*(t)}{\tau_s}. \tag{18}$$

Первый из них — малый геометрический параметр, второй — обратное число Эйлера. На разных интервалах процесса растяжения порядок малости α по отношению к ε_1 и ε_2 может меняться.

Представим разложения шести неизвестных функций в виде регулярных асимтотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α (в работах [4–7] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе динамического растяжения изотропных стержня, круглого слоя, бесконечного листа и прямоугольной пластины соответственно, в [8] разложения использовались при исследовании инерционных эффектов в задаче Прандтля):

$$v_r(r,z,t)=V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)v_\xi^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$v_z(r,z,t)=V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)v_\zeta^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$s_{(rr;rz;zz)}(r,z,t)=\tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)s_{(\xi\xi;\xi\zeta;\zeta\zeta)}^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$p(r,z,t)=\tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)p^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau), \tag{19}$$

где

$$\xi=\frac{\alpha(t)r}{h^*(t)}=\frac{r}{R(t)},\quad \zeta=\frac{z}{h^*(t)},\quad \tau=\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{t}{h^*(t)}.$$

Безразмерные коэффициенты рядов (19) (с верхними индексами) зависят от новых безразмерных координат ξ, ζ и безразмерного времени τ. Область слоя Ω_t (1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_\tau=\{(\xi,\theta,\zeta)\colon\ 0\leqslant\xi\leqslant 1,\ \ 0\leqslant\theta<2\pi,\ \ -\eta(\xi,\tau)\leqslant\zeta\leqslant\eta(\xi,\tau)\},$$

$$\eta(\xi,\tau)=\frac{h(r,t)}{h^*(t)},\quad \int\limits_0^1\xi\eta(\xi,\tau)\,d\xi=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial h}{\partial r}=\alpha\frac{\partial\eta}{\partial\xi}. \tag{20}$$

Отметим, что порядок малости по α безразмерных производных $\partial h/\partial r$ и $\partial\eta/\partial\xi$ разный. Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан замены переменных $\partial(\xi,\zeta,\tau)/\partial(r,z,t)$ отличен от нуля, т.е. она (замена) невырождена.

Имеют место формулы замены дифференциальных операторов

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{R(t)}\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\alpha(t)}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial\zeta}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{V\xi}{R}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{2V\zeta}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\left(\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{1}{h^*}+\frac{2V\tau}{R}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}. \tag{22}$$

Из определений малого параметра (18) и средней высоты слоя (2) следуют кинетические соотношения

$$\dot\alpha=-\frac{3\alpha V}{R},\quad \dot{h^*}=-2\frac{h^*V}{R}. \tag{23}$$

Подставим ряды (19) в шесть уравнений (9), (11)–(14) и в граничные условия (6), (15). С учётом формул (20)–(23) получим систему, состоящую из уравнений движения (13), (14)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\Big(-\alpha p^{\{n\}}_{,\xi}+\alpha s^{\{n\}}_{\xi\xi,\xi}+s^{\{n\}}_{\xi\zeta,\zeta}+\frac{1}{\xi}\Big(2\alpha s^{\{n\}}_{\xi\xi}+\alpha s^{\{n\}}_{\zeta\zeta}\Big)\Big)=$$
$$=\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\Big(-3nv^{\{n\}}_{\xi}-\xi v^{\{n\}}_{\xi,\xi}+2\zeta v^{\{n\}}_{\xi,\zeta}+2\tau v^{\{n\}}_{\xi,\tau}\Big)+$$
$$+\sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\xi,\tau}+\varepsilon_1\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\xi}v^{\{n-j\}}_{\xi,\xi}+\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\zeta}v^{\{n-j\}}_{\xi,\zeta}+\varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\xi}, \tag{24}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\Big(-p^{\{n\}}_{,\zeta}+\alpha s^{\{n\}}_{\xi\zeta,\xi}+s^{\{n\}}_{\zeta\zeta,\zeta}+\frac{\alpha}{\xi}s^{\{n\}}_{\xi\zeta}\Big)=$$
$$=\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\Big(-3nv^{\{n\}}_{\zeta}-\xi v^{\{n\}}_{\zeta,\xi}+2\zeta v^{\{n\}}_{\zeta,\zeta}+2\tau v^{\{n\}}_{\zeta,\tau}\Big)+$$
$$+\sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\zeta,\tau}+\varepsilon_1\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\xi}v^{\{n-j\}}_{\zeta,\xi}+\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\zeta}v^{\{n-j\}}_{\zeta,\zeta}+\varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\zeta}, \tag{25}$$

условия несжимаемости (12), которое в силу линейности может быть записано в виде рекуррентной цепочки (коэффициенты с отрицательными индексами далее всюду считаются равными нулю)

$$v^{\{n-1\}}_{\xi,\xi}+\frac{1}{\xi}v^{\{n-1\}}_{\xi}+v^{\{n\}}_{\zeta,\zeta}=0,\quad n\geqslant 0, \tag{26}$$

критерия Мизеса–Генки (11)

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(B_{11}s^{\{j\}}_{\xi\xi}s^{\{n-j\}}_{\xi\xi}+B_{22}s^{\{j\}}_{\zeta\zeta}s^{\{n-j\}}_{\zeta\zeta}-2B_{12}s^{\{j\}}_{\xi\xi}s^{\{n-j\}}_{\zeta\zeta}+Bs^{\{j\}}_{\xi\zeta}s^{\{n-j\}}_{\xi\zeta}\Big)=\delta_{n0},\quad n\geqslant 0, \tag{27}$$

следствия определяющих соотношений трансверсально-изотропной среды (9)

$$\Lambda_3\sum_{j=0}^{n-1}s^{\{j\}}_{\xi\xi}v^{\{n-1-j\}}_{\xi,\xi}+\frac{\Lambda_3}{\xi}\sum_{j=0}^{n-1}s^{\{j\}}_{\xi\xi}v^{\{n-1-j\}}_{\xi}+\Lambda_5\sum_{j=0}^{n}s^{\{j\}}_{\xi\xi}v^{\{n-j\}}_{\zeta,\zeta}=$$
$$=(\Lambda_1+2\Lambda_2)\sum_{j=0}^{n-1}s^{\{j\}}_{\zeta\zeta}v^{\{n-1-j\}}_{\xi,\xi}+\frac{\Lambda_1}{\xi}\sum_{j=0}^{n-1}s^{\{j\}}_{\zeta\zeta}v^{\{n-1-j\}}_{\xi}+\Lambda_3\sum_{j=0}^{n}s^{\{j\}}_{\zeta\zeta}v^{\{n-j\}}_{\zeta,\zeta},\quad n\geqslant 0, \tag{28}$$

$$\Lambda_4\sum_{j=0}^{n}s_{\xi\xi}^{\{j\}}v_{\xi,\zeta}^{\{n-j\}}+\Lambda_4\sum_{j=0}^{n-1}s_{\xi\xi}^{\{j\}}v_{\zeta,\xi}^{\{n-1-j\}}=$$

$$=(\Lambda_1+2\Lambda_2)\sum_{j=0}^{n-1}s_{\xi\zeta}^{\{j\}}v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}+\frac{\Lambda_1}{\xi}\sum_{j=0}^{n-1}s_{\xi\zeta}^{\{j\}}v_{\xi}^{\{n-1-j\}}+\Lambda_3\sum_{j=0}^{n}s_{\xi\zeta}^{\{j\}}v_{\zeta,\zeta}^{\{n-j\}},\quad n\geqslant 0. \tag{29}$$

Граничные условия (6) имеют вид

$$\xi=1:\quad v_{\xi}^{\{n\}}=\delta_{n0},\quad n\geqslant 0. \tag{30}$$

Условия того, что верхнее и нижнее основания $\zeta=\pm\eta(\xi,\tau)$ свободны от напряжений (15), следующие:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\Big(p^{\{n\}}-s_{\xi\xi}^{\{n\}}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\pm\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}s_{\xi\zeta}^{\{n\}}=0,$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}s_{\xi\zeta}^{\{n\}}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\pm\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}\Big(-p^{\{n\}}+s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}\Big)=0. \tag{31}$$

Безразмерные параметры $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ входят только в уравнения (24) и (25). На тех или иных временны́х интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может меняться. От этого зависит учёт или неучёт слагаемых в правых частях уравнений в процессе приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра.

4. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Воспользуемся методом асимптотического интегрирования [4–9] задачи (24)–(31), заключающемся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $v_{\xi}^{\{n\}}$, $v_{\zeta}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{n\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}$, $p^{\{n\}}$, где $n\geqslant 0$, в области Ω_τ с заранее неизвестной частью границы $\zeta=\pm\eta(\xi,\tau)$.

Обратимся к уравнению (26) при $n=0$: $v_{\zeta,\zeta}^{\{0\}}=0$. Отсюда следует, что $v_{\zeta}^{\{0\}}=v_{\zeta}^{\{0\}}(\xi,\tau)$, а с учётом требования антисимметричности по ζ получим $v_{\zeta}^{\{0\}}=0$.

Из рекуррентной цепочки (26) при $n=1$ и из (29) при $n=0$ имеем

$$v_{\xi,\xi}^{\{0\}}+\frac{v_{\xi}^{\{0\}}}{\xi}+v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}}=0,\quad s_{\xi\xi}^{\{0\}}v_{\xi,\zeta}^{\{0\}}=0. \tag{32}$$

Перепишем первое уравнение и запишем следствие второго уравнения (32):

$$\frac{1}{\xi}\big(\xi v_{\xi}^{\{0\}}\big)_{,\xi}=-v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}},\quad v_{\xi}^{\{0\}}=v_{\xi}^{\{0\}}(\xi,\tau).$$

Таким образом, $v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}}$ является функцией от ξ, τ. Обозначим $v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}}=a(\xi,\tau)$, тогда, ввиду нечётности $v_{\zeta}^{\{1\}}$ по ζ, общий вид $v_{\xi}^{\{0\}}$ и $v_{\zeta}^{\{1\}}$ будет следующий:

$$v_{\xi}^{\{0\}}=-\frac{1}{\xi}\bigg(\int\limits_0^{\xi}a(u,\tau)u\,du-b(\tau)\bigg),\quad v_{\zeta}^{\{1\}}=a(\xi,\tau)\zeta, \tag{33}$$

где $a(\xi,\tau)$ и $b(\tau)$ — произвольные функции, удовлетворяющие граничному условию (26):

$$-\int\limits_0^1 a(u,\tau)u\,du+b(\tau)=1.$$

Из физических соображений $\lim_{\xi\to 0} v_\xi^{\{0\}}=0$, откуда вытекает, что $b(\tau)\equiv 0$. Потребуем, чтобы решение (33) совпало с квазистатическим, для чего достаточно положить $a(\xi,\tau)$ равной константе, тогда

$$v_\xi^{\{0\}}=\xi,\quad v_\zeta^{\{1\}}=-2\zeta. \tag{34}$$

Линейные зависимости (34) имеют место для любых соотношений порядков малости по α параметров $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$. Рассмотрев первое уравнение в (27) и уравнения (28), (29) при $n=1$, выведем незамкнутую систему уравнений относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $v_\xi^{\{1\}}$:

$$B_{11}\Big(s_{\xi\xi}^{\{0\}}\Big)^2+B_{22}\Big(s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}\Big)^2-2B_{12}s_{\xi\xi}^{\{0\}}s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}+B\Big(s_{\xi\zeta}^{\{0\}}\Big)^2=1,\quad -2s_{\xi\xi}^{\{0\}}=s_{\zeta\zeta}^{\{0\}},$$
$$\Lambda_4 s_{\xi\xi}^{\{0\}}v_{\xi,\zeta}^{\{1\}}=2(\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3)s_{\xi\zeta}^{\{0\}}. \tag{35}$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{a}$ *— невырожденная матрица и* A_{iijk} *являются компонентами шарового тензора, тогда* $\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3\neq 0$.

Доказательство. Пусть $\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3=0$. Как отмечалось ранее, условие шаровости A_{iijk} следующее: $2(\Lambda_1+\Lambda_2)=\Lambda_3+\Lambda_5$. Несложно показать, что из этих двух условий следует, что $\det\mathbf{a}=4\Lambda_2(\Lambda_1\Lambda_5+\Lambda_2\Lambda_5-\Lambda_3^2)=0$. Получили противоречие, которое доказывает утверждение леммы.

Для замыкания системы (35) необходимо рассмотреть конкретный режим растяжения. Из (24) следует, что на временны́х интервалах, где одновременно $\varepsilon_1\alpha^2=o(1)$ и $\varepsilon_2=o(1)$, после приравнивания к нулю коэффициентов при α^0 с учётом (34) придём к системе уравнений

$$B_{11}\big(s_{\xi\xi}^{\{0\}}\big)^2+B_{22}\big(s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}\big)^2-2B_{12}s_{\xi\xi}^{\{0\}}s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}+B\big(s_{\xi\zeta}^{\{0\}}\big)^2=1,$$
$$-2s_{\xi\xi}^{\{0\}}=s_{\zeta\zeta}^{\{0\}},\quad s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{0\}}=0.$$

Из последнего уравнения имеем, что $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}=s_{\xi\zeta}^{\{0\}}(\xi,\tau)$, а ввиду требования нечетности $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ по ζ получаем

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}}=0,\quad s_{\xi\xi}^{\{0\}}=\frac{1}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}},\quad s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}=\frac{-2}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}.$$

Таким образом, пришли к напряжённому состоянию, соответствующему квазистатическому растяжению слоя цилиндрической формы. Также приравнивая коэффициенты при α^0, из (25) следует, что $-p_{,\zeta}^{\{0\}}+s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{0\}}=0$. Тем самым доказана

Теорема 1. *Пусть* s_{rz}, v_z *антисимметричны по* z, $a(\xi,\tau)$ *— константа и* $\varepsilon_1(t)=o(\alpha^{-2})$, $\varepsilon_2(t)=o(1)$. *Тогда с точностью до* $O(\alpha)$ *при* $\alpha\to 0$ *поле скорости и компоненты девиатора напряжений (19) совпадают с квазистатическим решением (16), (17).*

Итак, динамические эффекты начинают играть роль и вносить вклад в напряжённо-деформированное состояние, сопоставимый с квазистатикой, если выполняется хотя бы одно из требований: а) параметр ε_1 принимает значение порядка α^n, $n\leqslant -2$; б) параметр ε_2 принимает значение порядка α^m, $m\leqslant 0$.

Остановимся на случае, когда $\varepsilon_2=O(1)$ и $\varepsilon_1=o(\alpha^{-2})$. Рассмотрев коэффициенты при α^0 в (24) и (25) и добавив полученные уравнения к (35), получим замкнутую систему относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $v_{\xi}^{\{1\}}$:

$$s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{0\}}=\varepsilon_2\xi, \quad -p_{,\zeta}^{\{0\}}+s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{0\}}=0, \tag{36}$$

где первое уравнение замыкает систему, а второе служит для определения давления $p^{\{0\}}$.

Решение системы (36) имеет вид

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}}=\varepsilon_2\xi\zeta, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}}=\frac{\sqrt{1-B\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}, \quad s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}=-\frac{2\sqrt{1-B\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}},$$

$$v_{\xi}^{\{1\}}=-8\Lambda_4(\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3)\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}\,\frac{\sqrt{1-B\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}}{\varepsilon_2\xi}+f(\xi,\tau), \tag{37}$$

где функция $f(\xi,\tau)$ определяется из последующих по α приближений. Заметим, что если формально устремить $\varepsilon_2\to 0$, то компоненты девиатора (37) будут стремиться к квазистатическому решению. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть s_{rz}, v_z антисимметричны по z, $a(\xi,\tau)$ — константа и $\varepsilon_1(t)=o(\alpha^{-2})$, $\varepsilon_2(t)=O(1)$. Тогда при $\alpha\to 0$ коэффициенты $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $v_{\xi}^{\{1\}}$ рядов (19) имеют вид (37), причём выражение $\Lambda_4(\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3)\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}$ отлично от нуля в силу лемм 2 и 3.*

Вид функции $v_{\xi}^{\{1\}}$ позволяет сделать следующие выводы.

Следствие 1. *Точно однородным граничным условиям на боковой границе слоя $\xi=1$ удовлетворить не удаётся.*

Следствие 2. *Если $|\xi|\to 0$ (т.е. стремится к центру слоя), то $\left|v_{\xi}^{\{1\}}\right|\to\infty$, что означает потерю асимптотичности в смысле Пуанкаре вблизи точки $\xi=0$ ряда (19) для радиальной скорости v_ξ.*

Из этих утверждений следует, что использование асимптотических рядов (19) вблизи боковой поверхности $\xi=1$ слоя, т.е. в зоне краевого эффекта и в центре $\xi=0$, где происходит перестройка течения, неправомерно. По своей геометрии область неприменимости асимптотического разложения аналогична задаче Прандтля [8].

5. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ СЛОЯ

Обратимся к граничным условиям (31) на неизвестной границе слоя $\zeta=\pm\eta(\xi,\tau)$. Порядок малости по α производной $\partial\eta/\partial\xi$ заранее неизвестен, поэтому необходимо сделать некоторые предположения о свойствах границы.

Теорема 3. *Пусть $\eta(\xi,\tau)=1+(\varepsilon_2/\alpha)\eta_1(\xi,\tau)$, где $\varepsilon_2=C(t)\alpha^2$, $C(t)=O(1)$, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\eta_1=\dfrac{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}{6}\left(\xi^2-\dfrac{1}{2}\right)$;

2) $p^{\{0\}}=-\dfrac{2}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}$.

Доказательство. Исключим из уравнений (15) давление p, перейдём к безразмерным переменным и разложим компоненты девиатора в ряды (19). Будем работать только с верхней частью границы $\zeta=\pm\eta(\xi,\tau)$, так как нижнее основание получается отражением относительно плоскости $\zeta=0$, т.е., используя уравнения (15), оставим знак “+”. Тогда получим

$$\zeta=\eta(\xi,\tau):\quad \alpha^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\xi\zeta}^{\{n\}}+\alpha\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(s_{\xi\xi}^{\{n\}}-s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\xi\zeta}^{\{n\}}=0. \tag{38}$$

Подставим в (38) компоненты девиатора (37), выражение для $\eta(\xi,\tau)$ из условия теоремы и приравняем подобные члены при α^2. Относительно η_1 будем иметь уравнение

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{\xi}{3}\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}},$$

из которого после интегрирования и нормировки (20) получим параболическую зависимость

$$\eta = 1 + \frac{\varepsilon_2\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}{6\alpha}\left(\xi^2-\frac{1}{2}\right),$$

моделирующую утоньшение слоя в центре и утолщение вблизи его боковой поверхности, т.е. шейкообразование при динамическом растяжении.

Найдём последний из неопределённых коэффициентов главного по α приближения (19) — давление $p^{\{0\}}$. Из второго уравнения (36) следует, что $-p^{\{0\}}+s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$ не зависит от ζ, а из второго граничного условия (31), рассматривая подобные члены при α^0, получаем, что эта же комбинация на границе равна нулю. Следовательно, всюду в области Ω_τ

$$p^{\{0\}} = s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = -\frac{2}{\sqrt{B_{11}+4B_{22}+4B_{12}}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Переход от квазистатики к динамическому режиму растяжения трансверсально-изотропного слоя, характеризующийся достижением безразмерной фунции ε_2 своих критических значений, влечет за собой образование и рост шейки в средней части слоя. Точно или приближённо найдены параметры напряжённо-деформированного состояния и других инерционных эффектов.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Победря, Б.Е. Лекции по тензорному анализу : учеб. пособие / Б.Е. Победря. — 3-е изд. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986.
2. Никабадзе, М.У. О некоторых вопросах тензорного исчисления с приложениями к механике / М.У. Никабадзе // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2015. — Т. 55. — С. 3–194.
3. Георгиевский, Д.В. Анизотропные скалярные определяющие соотношения и соответствующие им модели вязкопластического течения / Д.В. Георгиевский // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2022. — № 5. — С. 54–57.
4. Георгиевский, Д.В. Динамические режимы растяжения стержня из идеально жёстко-пластического материала / Д.В. Георгиевский // Прикл. механика и техн. физика. — 2021. — Т. 62, № 5. — С. 119–130.
5. Цветков, И.М. Динамическое осесимметричное растяжение тонкого круглого идеально жёстко-пластического слоя / И.М. Цветков // Изв. РАН. МТТ. — 2023. — № 5. — С. 79–88.
6. Цветков, И.М., Динамическое растяжение листа из идеально жёсткопластического материала / И.М. Цветков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2022. — № 6. — С. 51–60.
7. Цветков, И.М. Динамические режимы двухосного растяжения тонкой идеально жёсткопластичной прямоугольной пластины / И.М. Цветков // Прикл. математика и механика. — 2023. — Т. 87, № 4. — С. 684–695.
8. Georgievskii, D.V. Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem / D.V. Georgievskii, W.H. Müller, B.E. Abali // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2019. — Bd. 99, № 12. — S. 1–11.
9. Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques / A.H. Nayfeh. — New York : Wiley, 1981. — 519 p.

ON THE DYNAMIC STRETCHING OF A THIN ROUND IDEALLY RIGID PLASTIC LAYER MADE OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC MATERIAL

I. M. Tsvetkov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: cvetkoviv@yandex.ru

A system of equations modeling the dynamic stretching of a homogeneous circular layer of incompressible ideally rigid-plastic transversely isotropic material obeying the Mises–Hencky criterion is studied. The upper and lower bases are stress-free, the radial velocity is set at the lateral boundary, and the possibility of thickening or thinning of the layer is taken into account, which simulates neck formation and further development of the neck. Using the method of asymptotic integration, two characteristic stretching modes are identified, that is, the relations of dimensionless parameters are determined, in which consideration of inertial terms is necessary. When considering the regime associated with the achievement of acceleration on the side face of its critical values, an approximate solution of the problem was constructed.

Keywords: ideal plasticity, round layer, transversely isotropic material, tension, dynamics, neck, asymptotic expansion.

REFERENCES

1. Pobedrya, B.E., *Lektsii po tenzornomu analizu* (Lectures on Tensor Analysis), Moscow: MSU Press, 1986.
2. Nikabadze, M.U., Topics on tensor calculus with applications to mechanics, *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 225, no. 1, pp. 1–194.
3. Georgievskii, D.V., Anisotropic scalar constitutive equations and corresponding models of viscoplastic flow, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2022, vol. 77, no. 5, pp. 143–145.
4. Georgievskii, D.V., Dynamic tension of a rod made of an ideally rigid-plastic material, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 806–815.
5. Tsvetkov, I.M., Dynamic axisymmetric tension of a thin round ideally rigid-plastic layer, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1500–1508.
6. Tsvetkov, I.M., Dynamic tension of a sheet made of an ideally rigid-plastic material, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2022, vol. 77, no. 6, pp. 177–185.
7. Tsvetkov, I.M. Dynamic regimes of biaxial stretching of a thin ideally rigid-plastic rectangular plate, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 2656–2665.
8. Georgievskii, D.V., Müller, W.H., and Abali, B.E., Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2019, Bd. 99, no. 12, ss. 1–11.
9. Nayfeh, A.H., *Introduction to Perturbation Techniques*, New York: Wiley, 1981.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 386–398

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СУБЛОРЕНЦЕВЫ ЭКСТРЕМАЛИ, ЗАДАННЫЕ АНТИНОРМОЙ

А. В. Подобряев

Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский
e-mail: alex@alex.botik.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г., после доработки 20.12.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Выведена гамильтонова система для экстремалей в левоинвариантной сублоренцевой задаче на группе Ли в предположении, что сублоренцева структура определяется произвольным замкнутым выпуклым острым конусом и ассоциированной с ним непрерывной антинормой в соответствующей алгебре Ли. Получены условия, при которых нормальные экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип. Кроме того, показано, что касательные векторы анормальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами некоторых субримановых анормальных экстремальных траекторий, которые определяются распределением плоскостей, порождённым конусом.

Ключевые слова: лоренцево многообразие, сублоренцево многообразие, антинорма, экстремаль, экстремальная траектория, каузальный тип.

DOI: 10.31857/S0374064124030089, EDN: PLBQDM

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время вырос интерес к исследованию левоинвариантных лоренцевых и сублоренцевых задач с точки зрения геометрической теории управления. Отметим прежде всего пионерские в этом направлении работы М. Гроховского [1, 2], посвящённые сублоренцевой геометрии группы Гейзенберга. Эти исследования были продолжены Ю.Л. Сачковым и Е.Ф. Сачковой [3, 4] (см. также статью [5] о левоинвариантной сублоренцевой геометрии на пространстве анти-де Ситтера и работы [6, 7] о левоинвариантной лоренцевой геометрии на плоскости Лобачевского).

Для описания сублоренцевых экстремальных траекторий в данной статье использован гамильтонов формализм принципа максимума Понтрягина. Трудность заключается в том, что сублоренцев функционал длины содержит квадратный корень, а оптимизационная задача заключается в максимизации этого функционала, в отличие от субримановой задачи, цель которой — минимизация соответствующего функционала длины. Именно поэтому стандартная для субримановой геометрии [8, гл. 3] замена функционала длины на функционал энергии (см., например, [9, § 3.3.1]) в сублоренцевом случае не работает. Напомним, что при этом используется неравенство Коши–Буняковского–Шварца

$$l(g)^2 = \left(\int_0^{t_1} \sqrt{q(\dot g(t))}\, dt \right)^2 \leqslant t_1 \int_0^{t_1} q(\dot g(t))\, dt = 2t_1 J(g),$$

где $g\colon [0,t_1] \to G$ — допустимая траектория, длина касательного вектора которой определяется квадратичной формой q; $l(g)$ и $J(g)$ — длина и энергия кривой g соответственно. Важно отметить, что равенство в этом соотношении достигается только на кривых постоянной скорости.

Тем не менее оказывается, что "энергия" может быть использована в сублоренцевом случае для описания нормальных экстремалей. Кроме того, мы рассматриваем более общую постановку задачи, в которой левоинвариантная сублоренцева структура задана с помощью произвольного замкнутого выпуклого острого конуса в алгебре Ли и ассоциированной с ним непрерывной антинормы. С помощью принципа максимума Понтрягина выводится соответствующая гамильтонова система. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях нормальная экстремальная траектория сохраняет свой каузальный тип (т.е. её касательный вектор всегда остается либо времениподобным, либо светоподобным). В отличие от римановой геометрии анормальные экстремальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии и совпадают со светоподобными экстремальными траекториями и тем самым нестрого анормальны. В сублоренцевой геометрии, вообще говоря, анормальные экстремальные траектории могут иметь как светоподобные касательные векторы, так и касательные векторы, совпадающие с касательными векторами некоторых из субримановых анормальных траекторий, определяемых распределением плоскостей, которое линейно порождено конусом. Если это распределение контактно, то анормальные экстремальные траектории светоподобны и нестрого анормальны.

В контексте настоящей работы следует упомянуть статью Л.В. Локуциевского [10], в которой разработана замечательная техника выпуклой тригонометрии, позволяющая параметризовать решения гамильтоновых систем для экстремалей в субфинслеровом случае с двумерным распределением [11, 12], а также для некоторых распределений бо́льших размерностей [13]. Представляет интерес разработка вогнутой гиперболической тригонометрии для сублоренцевых задач, определяемых произвольными антинормами.

Настоящая работа имеет следующую структуру: в п. 1 приводятся понятие антинормы и постановка задачи оптимального управления, в п. 2 даются некоторые необходимые определения из выпуклого анализа и с помощью принципа максимума Понтрягина выводится гамильтонова система для экстремальных траекторий, в п. 3 рассмотрены примеры.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном векторном пространстве V.

Определение 1. *Относительной внутренностью* конуса $\mathcal{C}$ называется множество

$$\operatorname{ri}\mathcal{C}=\{u\in\mathcal{C}\colon \text{ для любого } v\in\mathcal{C},\ v\neq u, \text{ существуют } \lambda\in(0,1) \text{ и } w\in\mathcal{C}, \text{ что } u=\lambda v+(1-\lambda)w\}.$$

Относительной границей конуса $\mathcal{C}$ будем называть множество $\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}=\mathcal{C}\setminus\operatorname{ri}\mathcal{C}$.

Определение 2. *Антинормой* [14], ассоциированной с конусом $\mathcal{C}$, называется функция $\alpha\colon V\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ такая, что

(i) $\alpha|_{\operatorname{ri}\mathcal{C}}>0,\ \alpha|_{\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}}=0,\ \alpha|_{V\setminus\mathcal{C}}=-\infty$;

(ii) для любых $v\in V$ и $\lambda>0$ выполнено равенство $\alpha(\lambda v)=\lambda\alpha(v)$;

(iii) для любых $v,w\in V$ выполнено $\alpha(v+w)\geqslant\alpha(v)+\alpha(w)$, т.е. функция α вогнута.

Будем называть антинорму α *непрерывной*, если функция $\alpha|_{\mathcal{C}}$ непрерывна.

Рассмотрим следующую левоинвариантную задачу оптимального управления на вещественной конечномерной группе Ли G. Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутый выпуклый конус в соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, α — ассоциированная с ним непрерывная антинорма. Требуется найти липшицеву кривую $g\colon[0,t_1]\to G$, соединяющую единичный элемент id группы G с наперёд заданным элементом $g_1 \in G$, и измеримое управление $u \in L^\infty([0,t_1],\mathcal{C}\setminus 0)$ со значениями в множестве $\mathcal{C}\setminus 0$ такие, что

$$g(0)=\mathrm{id}, \quad g(t_1)=g_1, \quad \dot g(t)=L_{g(t)*}u(t), \quad \int\limits_0^{t_1} \alpha(u(t))\,dt \to \max, \tag{1}$$

где терминальное время t_1 свободно, через L_g обозначен левый сдвиг на элемент $g\in G$, а через L_{g*} — его дифференциал.

Замечание 1. Естественно называть задачу (1) *сублоренцево-финслеровой задачей.* Действительно, если антинорма α определяется невырожденной квадратичной формой сигнатуры $(1,n)$, например,

$$\alpha|_{\mathcal{C}}(u)=\sqrt{u_0^2-u_1^2-\ldots-u_n^2}, \quad \mathcal{C}=\{u=(u_0,u_1,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon\ u_0^2\geqslant u_1^2+\ldots+u_n^2,\ u_0\geqslant 0\},$$

то получается задача максимизации лоренцевой длины в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n}$.

Если $\dim\mathcal{C}<\dim\mathfrak{g}$, то скорости допустимых кривых лежат в некотором распределении подпространств в касательном расслоении группы G. По аналогии с субримановым случаем будем называть соответствующую задачу *сублоренцевой.*

Кроме того, в постановке задачи (1) рассматривается произвольная непрерывная антинорма. В случае произвольной нормы соответствующая задача минимизации называется *финслеровой*, поэтому в нашем случае естественно говорить о лоренцево-финслеровой задаче.

Замечание 2. Каково множество достижимости для задачи (1)? Существует ли оптимальное решение этой задачи для данных граничных условий? Вообще говоря, эти вопросы нетривиальны. Например, в лоренцевой задаче на пространстве анти-де Ситтера [5] необходимое условие оптимальности (принцип максимума Понтрягина) выделяет множество (в котором могут существовать глобально оптимальные решения), содержащееся внутри нетривиального множества достижимости. При этом глобально оптимальные решения существуют и имеют ограниченную длину. В некотором смысле противоположным примером является сублоренцева задача на группе Гейзенберга [3], где глобально оптимальные решения существуют на всём множестве достижимости. В настоящей работе изучаются лишь экстремальные траектории, т.е. траектории, удовлетворяющие необходимому условию оптимальности — принципу максимума Понтрягина.

2. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Напомним некоторые необходимые определения из выпуклого анализа. Всюду ниже V^* обозначает двойственное пространство векторного пространства V, а $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — каноническое спаривание ковекторов и векторов.

Определение 3. Конус $\mathcal{C}^\vee=\{p\in V^*\colon\ p|_{\mathcal{C}}\leqslant 0\}\subset V^*$ называется *отрицательным двойственным конусом* для конуса $\mathcal{C}$. *Антисферой* радиуса r антинормы α называется множество $S_r=\{v\in V\colon\ \alpha(v)=r\}$. *Двойственной функцией* для α называется функция $\alpha^\vee\colon V^*\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ такая, что

$$\alpha^\vee(p)=-\sup_{v\in S_1}\langle p,v\rangle, \quad p\in V^*.$$

Определение 4. Конус называется *острым*, если не содержит ненулевых подпространств.

Лемма 1. *Пусть конус $\mathcal{C}$ острый. Тогда если $p\in\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)$, то $p|_{\mathcal{C}\setminus 0}<0$.*

Доказательство. От противного предположим, что найдётся ненулевое $u\in\mathcal{C}$ такое, что $\langle p,u\rangle=0$. Так как $p\in\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)$, то по определению 1 для любого $q\in\mathcal{C}^\vee$ существуют $r\in\mathcal{C}^\vee$ и

$\lambda \in (0,1)$ такие, что $p=\lambda q+(1-\lambda)r$. В частности, $\lambda\langle q,u\rangle+(1-\lambda)\langle r,u\rangle=\langle p,u\rangle=0$. Следовательно, $\langle q,u\rangle=0$. Таким образом, $\operatorname{span}\{u\}\subset\mathcal{C}^{\vee\vee}=\mathcal{C}$. Это противоречие остроте конуса $\mathcal{C}$ доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть конус $\mathcal{C}$ острый, а антинорма α непрерывна. Функция $\alpha^\vee$ является антинормой, ассоциированной с конусом $\mathcal{C}^\vee$, тогда и только тогда, когда $\alpha^\vee|_{\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)}=0$.*

Доказательство. Ясно, что функция $\alpha^\vee$ однородна и вогнута. Кроме того, $\alpha^\vee|_{\mathcal{C}^\vee}\geqslant 0$ и $\alpha^\vee|_{V^*\setminus\mathcal{C}^\vee}=-\infty$. Покажем, что $\alpha^\vee|_{\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)}>0$. Действительно, если $p\in\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)$, то по лемме 1 $p|_{\mathcal{C}\setminus 0}<0$. Антисфера S_1 отделена от гиперплоскости $\{u\in V\colon\ \langle p,u\rangle=0\}$ замкнутой поверхностью конуса $\mathcal{C}$, поэтому $\alpha^\vee(p)>0$. Действительно, если $\alpha^\vee(p)=0$, то для последовательности $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$, существует последовательность $u_n\in S_1$ такая, что $-\varepsilon_n<\langle p,u_n\rangle\leqslant 0$. Последовательность u_n отделена от нуля, так как антинорма α непрерывна. Тогда последовательность $1/|u_n|$ ограничена, где $|\cdot|$ — евклидова норма в пространстве V. Значит, $\langle p,u_n/|u_n|\rangle\to 0$. Так как конус $\mathcal{C}$ замкнут, то, переходя к подпоследовательности, имеем $u_n/|u_n|\to u\in\mathcal{C}\setminus 0$ и $\langle p,u\rangle=0$, получили противоречие. Для выполнения всех требований определения 2 должно быть выполнено условие $\alpha^\vee|_{\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)}=0$. Лемма доказана.

Сформулируем определение экстремальной траектории задачи (1).

Определение 5. Зададим семейство функций $H_u^\nu\colon T^*G\to\mathbb{R}$ на кокасательном расслоении группы G, зависящее от параметров $u\in\mathcal{C}\setminus 0$ и $\nu\in\{0,1\}$, как

$$H_u^\nu(\lambda)=\langle L_{\pi(\lambda)}^*\lambda,u\rangle+\nu\alpha(u),\qquad \lambda\in T^*G.$$

Липшицева кривая $\lambda\colon[0,t_1]\to T^*G$ называется *экстремалью*, если $t_1>0$ и существуют допустимое управление $\hat u\in L^\infty([0,t_1],\mathcal{C}\setminus 0)$ и число $\nu\in\{0,1\}$ такие, что $(\lambda,\nu)\neq 0$ и для почти всех $t\in[0,t_1]$ выполнено

$$\dot\lambda(t)=\vec H_{\hat u(t)}^\nu(\lambda(t)),\qquad H_{\hat u(t)}^\nu(\lambda(t))=\max_{u\in\mathcal{C}\setminus 0}H_u^\nu(\lambda(t)),\qquad H_{\hat u(t)}^\nu(\lambda(t))=0, \tag{2}$$

через $\vec H_{\hat u(t)}^\nu$ обозначено гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану $H_{\hat u(t)}^\nu$ относительно канонической симплектической структуры на кокасательном расслоении T^*G.

Если $\nu=1$, то кривая λ называется *нормальной экстремалью*, а если $\nu=0$, то *анормальной экстремалью*. Пусть $\pi: T^*G\to G$ — естественная проекция. Кривая $\pi\circ\lambda\colon[0,t_1]\to G$ называется *нормальной/анормальной экстремальной траекторией*. Анормальная экстремальная траектория *строго анормальна*, если она не является проекцией нормальной экстремали.

Замечание 3. Если $(\hat g,\hat u)$ — оптимальный процесс для задачи (1), то в соответствии с принципом максимума Понтрягина (см. [15, § 3] или [16, гл. 12]) кривая $\hat g$ является экстремальной траекторией, соответствующей управлению $\hat u$. Условия принципа максимума Понтрягина (см., например, [16, § 10.1]) в нашей ситуации выполняются автоматически, а именно: левоинвариантность задачи (1) на группе Ли влечёт гладкость допустимых векторных полей, а непрерывность антинормы α влечёт непрерывность по управлению подынтегральной функции функционала качества.

Кроме того, отметим, что в случае произвольной непрерывной антинормы α максимизированный гамильтониан, вообще говоря, негладок, поэтому уравнения $\dot\lambda(t)=\vec H_{\hat u(t)}^\nu(\lambda(t))$ следует понимать как семейство гамильтоновых векторных полей. Иными словами, гамильтонова система неавтономна и зависит от управления.

Замечание 4. Так как гамильтонианы $H_{\hat u(t)}^\nu$ левоинвариантны, то гамильтоновы векторные поля $\vec H_{\hat u(t)}^\nu$ определяются своими вертикальными составляющими. Более точно можно считать [16, § 18.3], что функции $H_{\hat u(t)}^\nu$ определены на двойственном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}^*=T_{\mathrm{id}}^*G$ с координатами $h_1=\langle\,\cdot\,,e_1\rangle$, $\ldots$, $h_n=\langle\,\cdot\,,e_n\rangle$, где $e_1,\ldots,e_n$ — некоторый базис пространства $\mathfrak{g}$. Тогда экстремаль $\lambda(t)$ определяется сопряжённой подсистемой (гамильтоновой системы) $\dot{h}_i(t)=\{H^{\nu}_{\hat{u}(t)}, h_i(t)\}$ на пространстве $\mathfrak{g}^*$, где $h(t)=(h_1(t),\ldots,h_n(t))=L^*_{\pi(\lambda(t))}\lambda(t)$, $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ — стандартная пуассонова структура на пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Для ковектора $p\in\mathfrak{g}^*$ введём обозначение $u_p=\arg\max_{u\in\mathcal{C}\setminus 0} H^{\nu}_u(p)$. Вообще говоря, u_p определено неоднозначно. Ковектор $h(0)\in\mathfrak{g}^*$ и выбор значений управления $u(t)=u_{h(t)}$ однозначно определяют экстремаль $\lambda(t)$ с начальным условием $\lambda(0)=h(0)$.

Определение 6. Будем называть касательный вектор в точке $g\in G$ *времениподобным* (соответственно, *светоподобным*), если он лежит в $L_{g*}\operatorname{ri}\mathcal{C}$ (соответственно, в $L_{g*}\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}$). Траектория называется *времениподобной/светоподобной*, если каждый её касательный вектор времениподобен/светоподобен. Эти термины происходят из геометрии Минковского и специальной теории относительности.

Теорема. *Рассмотрим задачу оптимального управления (1), заданную замкнутым выпуклым острым конусом $\mathcal{C}$ и ассоциированной с ним непрерывной антинормой α такой, что функция $\alpha^{\vee}$ является антинормой, ассоциированной с конусом $\mathcal{C}^{\vee}$. Тогда всякая экстремальная траектория $g(\cdot)$ является решением уравнения $\dot{g}(t)=L_{g(t)*}u_{h(t)}$, где $\dot{h}_i(t)=\{H_{u_{h(t)}}, h_i(t)\}$ и $H_{u_{h(t)}}=\langle h(t), u_{h(t)}\rangle$.*

1. Если траектория нормальна, то выполнено одно из двух условий:

а) $h(t)\in S_1^{\vee}=\{p\in\mathfrak{g}^*\colon\ \alpha^{\vee}(p)=1\}$ для всех t и траектория времениподобна,

б) $h(t)\in S_0^{\vee}=\{p\in\mathfrak{g}^*\colon\ \alpha^{\vee}(p)=0\}$ для всех t и траектория светоподобна.

2. Касательные векторы анормальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами субримановых анормальных траекторий, которые определяются распределением подпространств $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C}\subset T_gG$. В частности, светоподобные дуги нестрого анормальны.

Для доказательства теоремы потребуются несколько дополнительных лемм.

Для ковектора $p\in V^*$ определим множества

$$p_r^{\vee}=\Big\{v=\arg\max_{u\in S_r}\langle p,u\rangle\Big\},\quad p^{\vee}=\bigcup_{r\geqslant 0}p_r^{\vee}. \tag{3}$$

Лемма 3. *Пусть конус $\mathcal{C}$ острый. Тогда если $p\in\operatorname{ri}(\mathcal{C}^{\vee})$, то $p_0^{\vee}=0$.*

Доказательство. Если $p_0^{\vee}\neq 0$, то существует ненулевое $u\in\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}$ такое, что $\langle p,u\rangle=0$. Это противоречит лемме 1.

Лемма 4. *Если антинорма α непрерывна, то для любого $p\in\mathcal{C}^{\vee}$ множество $p^{\vee}$ является замкнутым выпуклым конусом.*

Доказательство. Ясно, что в силу однородности антинормы α множество $p^{\vee}$ является конусом, более того, $p_r^{\vee}=rp_1^{\vee}$ для $r>0$.

Пусть $M=\sup_{u\in S_1}\langle p,u\rangle$. Тогда $M\leqslant 0$, а функция $F(u)=\langle p,u\rangle-M\alpha(u)$ непрерывна, однородна и вогнута на конусе $\mathcal{C}$. Очевидно, что $F|_{S_1}\leqslant 0$, следовательно, в силу однородности, $F|_{\operatorname{ri}\mathcal{C}}\leqslant 0$, а так как функция F непрерывна, то $F|_{\mathcal{C}}\leqslant 0$. Функция F вогнута, поэтому множество $D=\{u\in V\colon\ F(u)\geqslant 0\}$ выпукло и замкнуто. Кроме того, функция $F|_{\mathcal{C}}$ обращается в нуль в точности на множестве $p^{\vee}$, поэтому множество $p^{\vee}=\mathcal{C}\cap D$ выпукло и замкнуто как пересечение выпуклых и замкнутых множеств.

Лемма 5. *Если $p\in\mathcal{C}^{\vee}$ и $p|_{\mathcal{C}}\neq 0$, то $p|_{\operatorname{ri}\mathcal{C}}<0$.*

Доказательство. Предположим от противного, что существует $v\in\operatorname{ri}\mathcal{C}$ такое, что $\langle p,v\rangle=0$. Тогда в силу определения 1 для $w_1\in\mathcal{C}$, $\langle p,w_1\rangle\neq 0$, существует $w_2\in\mathcal{C}$ такое, что v лежит внутри отрезка, соединяющего точки w_1 и w_2. Значит, линейная функция p принимает значения разных знаков в точках $w_1,w_2\in\mathcal{C}$, что противоречит условию $p\in\mathcal{C}^{\vee}$.

Лемма 6. *Если антинорма α непрерывна, $p\in\mathcal{C}^{\vee}$ и $p|_{\mathcal{C}}\neq 0$, то антинорма α линейна на конусе $p^{\vee}$.*

Доказательство. Так как антинорма α однородна, то достаточно показать, что $\alpha(u+v)=\alpha(u)+\alpha(v)$ для любых $u,v\in p^\vee$. Если $u,v\in p_0^\vee$, то это очевидно. Если $u,v\notin p_0^\vee$, то

$$\alpha(u+v)=\alpha(\alpha(u)\bar u+\alpha(v)\bar v)=(\alpha(u)+\alpha(v))\alpha(\lambda\bar u+\mu\bar v),$$
$$\bar u=\frac{u}{\alpha(u)},\quad \bar v=\frac{v}{\alpha(v)},\quad \lambda=\frac{\alpha(u)}{\alpha(u)+\alpha(v)},\quad \mu=\frac{\alpha(u)}{\alpha(u)+\alpha(v)}.$$

По лемме 4 $\lambda\bar u+\mu\bar v\in p_1^\vee$, откуда следует требуемое равенство.

Остаётся рассмотреть случай $\alpha(u)\neq 0$, $\alpha(v)=0$. В силу леммы 4 можно считать, что $\alpha(u)=1$. Кроме того, по лемме 5 $\langle p,u\rangle<0$. Заметим, что $\langle p,v\rangle=0$. В самом деле, в противном случае для $\lambda\in(0,1)$ имеем $\langle p,\lambda v\rangle>\langle p,v\rangle$ и $\alpha(\lambda v)=0$, но тогда $v\notin p_0^\vee$.

В силу вогнутости антинормы $\alpha(u+v)\geqslant\alpha(u)+\alpha(v)=1$. Предположим, что $\alpha(u+v)>1$, тогда существует число $\lambda\in(0,1)$ такое, что $\alpha(\lambda(u+v))=1$. Кроме того, $\langle p,\lambda(u+v)\rangle=\lambda\langle p,u\rangle>\langle p,u\rangle$, а это противоречит тому, что $u\in p_1^\vee$. Значит, $\alpha(u+v)=1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $p\in\partial_{\mathrm r}(\mathcal C^\vee)$ и $p|_{\mathcal C}\neq 0$, то $p|_{\mathrm{ri}\,\mathcal C}<0$ и существует ненулевой элемент $u\in\partial_{\mathrm r}\mathcal C$ такой, что $\langle p,u\rangle=0$.*

Доказательство. Из леммы 5 следует, что $p|_{\mathrm{ri}\,\mathcal C}<0$. Пусть от противного $p|_{\partial_{\mathrm r}\mathcal C\setminus 0}<0$, тогда $p|_{\mathcal C\setminus 0}<0$. Выберем произвольное $q\in\mathcal C^\vee$. Предположим, что для любого $\varepsilon>0$ существует $v\in\mathcal C$ такое, что $\langle p+\varepsilon(p-q),v\rangle>0$. Значит, для последовательности $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$, существует последовательность $v_n\in\mathcal C\setminus 0$ такая, что

$$\langle p,v_n\rangle>\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\langle q,v_n\rangle. \tag{4}$$

Так как функции p и q линейны, то можно считать, что последовательность v_n ограничена и отделена от нуля. В силу замкнутости конуса $\mathcal C$ из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $v\in\mathcal C\setminus 0$. Тогда из неравенства (4) следует, что $\langle p,v\rangle\geqslant 0$. Но $p|_{\mathcal C\setminus 0}<0$, поэтому для $q\in\mathcal C^\vee$ существует $\varepsilon>0$ такое, что $(p+\varepsilon(p-q))|_{\mathcal C}\leqslant 0$, т.е. $p+\varepsilon(p-q)\in\mathcal C^\vee$. Тогда по определению 1 $p\in\mathrm{ri}\,\mathcal C$, это противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы.

Докажем п. 1. Пусть $\nu=1$. Покажем, что по ковектору $p\in\mathfrak g^*$ можно определить соответствующее ему управление u_p тогда и только тогда, когда $p\in S_1^\vee$ или $p\in S_0^\vee$, $p|_{\mathcal C}\neq 0$, причём тогда u_p времениподобно или светоподобно соответственно.

Рассмотрим случай $p\in\mathrm{ri}(\mathcal C^\vee)$, тогда по лемме 3 $p_0^\vee=0$. Из равенств (3) следует, что $\arg\max_{u\in S_r}H_u^1=\arg\max_{u\in S_r}\langle p,u\rangle=p_r^\vee$. Значит, в силу лемм 3 и 4 соответствующее управление имеет вид

$$u_p=\arg\max_{u\in p^\vee\setminus 0}(\langle p,u\rangle+\alpha(u))=\bar u\arg\max_{\mu>0}\mu(\langle p,\bar u\rangle+1),\quad \bar u\in p_1^\vee. \tag{5}$$

Если $\langle p,\bar u\rangle+1\neq 0$, то максимума по $\mu>0$ не существует. Если $\langle p,\bar u\rangle+1=0$, то из определения 3 следует, что $p\in S_1^\vee$. Тогда μ может быть любым положительным числом и $u_p\in p^\vee\setminus 0\subset\mathrm{ri}\,\mathcal C$. Таким образом, $p\in S_1^\vee$, а соответствующее управление u_p времениподобно.

Рассмотрим теперь случай $p\in\partial_{\mathrm r}(\mathcal C^\vee)$ и $p|_{\mathcal C}\neq 0$. Из леммы 7 следует, что $p_0^\vee\neq 0$. Покажем, что $p^\vee=p_0^\vee$. Если $p^\vee\neq p_0^\vee$, то из леммы 4 вытекает, что $p_1^\vee\neq\varnothing$. Тогда $\alpha^\vee(p)\neq 0$. Но по условию теоремы $\alpha^\vee$ является антинормой, значит, по лемме 2 $\alpha^\vee(p)=0$, получили противоречие. Следовательно, $p^\vee=p_0^\vee$ и управление u_p светоподобно.

Остаётся заметить, что в случае $p\notin\mathcal C^\vee$ или $p|_{\mathcal C}=0$ максимума по переменной $u\in\mathcal C\setminus 0$ выражения H_u^1 не существует.

Таким образом, траектория сопряжённой подсистемы $h(\cdot)$ должна лежать в $S_1^\vee \cup S_0^\vee$, причём если $h(t) \in S_1^\vee$, то касательный вектор экстремальной траектории времениподобен, а если $h(t) \in S_0^\vee$, то светоподобен.

Антинорма $\alpha^\vee$ полунепрерывна сверху, в частности, множество $S_{\geqslant 1}^\vee = \{p \in \mathfrak{g}^*\colon\ \alpha^\vee(p) \geqslant 1\}$ замкнуто. Непрерывная кривая $h(t)$ лежит в одном из двух замкнутых множеств — $S_{\geqslant 1}^\vee$ или $S_0^\vee$, а значит, она лежит либо в $S_1^\vee$, либо в $S_0^\vee$. Отсюда в силу $\alpha^\vee(h(t)) = \mathrm{const}$ следует альтернатива а) или б) из условия теоремы.

Остаётся заметить, что гамильтониан $\langle h(t), u_{h(t)}\rangle + \alpha(u_{h(t)})$ можно заменить на $H_{u_{h(t)}} = \langle h(t), u_{h(t)}\rangle$.

Докажем п. 2. Если $\nu = 0$, то гамильтониан равен $H_u^0(p) = \langle p, u\rangle$, а максимум по $u \in \mathcal{C}\setminus 0$ этого выражения существует тогда и только тогда, когда $p \in \partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$. Если $p \in \partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ и $p|_{\mathcal{C}} \neq 0$, то этот максимум равен нулю и по лемме 7 достигается только в точках множества $p_0^\vee \setminus 0$. Если $p|_{\mathcal{C}} = 0$, то он достигается в любой точке множества $\mathcal{C}\setminus 0$. В первом случае касательный вектор экстремальной траектории светоподобен, а во втором совпадает с касательным вектором субримановой анормальной траектории. Кроме того, $\alpha^\vee(h(t)) \equiv 0$, откуда следует, что каждый касательный вектор анормальной траектории либо светоподобен, либо совпадает с касательным вектором субримановой анормальной траектории. Теорема доказана.

3. СЛЕДСТВИЯ И ПРИМЕРЫ

Приведём некоторые примеры, показывающие существенность условий сформулированной теоремы.

Замечание 5. Если в условиях задачи (1) допустить равное нулю управление, то в условиях теоремы нормальная экстремальная траектория будет времениподобной с точностью до параметризации тогда и только тогда, когда для траектории $h(\cdot)$ сопряжённой подсистемы выполнено условие $\alpha^\vee(h(t)) \geqslant 1$ для всех t. Это легко следует из замкнутости множества $S_{\geqslant 1}^\vee$ и из случая $p \in \mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)$ доказательства п. 1 теоремы, а именно: при $\langle p, \bar{u}\rangle + 1 < 0$ максимум выражения (5) на множестве $\mu \geqslant 0$ достигается при $\mu = 0$.

Замечание 6. Условие остроты конуса $\mathcal{C}$ существенно для теоремы. Действительно, если конус $\mathcal{C}$ содержит некоторое подпространство W, то для любого $p \in \mathcal{C}^\vee$ имеем $p|_W = 0$, иначе существует $w \in W$ такое, что $\langle p, w\rangle < 0$, тогда $\langle p, -w\rangle > 0$, но $-w \in \mathcal{C}$, получили противоречие. Значит, $p_0^\vee \supset W$. Тогда экстремальная траектория с начальным ковектором p может иметь как времениподобные касательные векторы, так и светоподобные.

Определение 7. Назовём ассоциированную с замкнутым выпуклым конусом $\mathcal{C}$ непрерывную антинорму α *линейной на подконусе, примыкающем к границе*, если существует $p \in \partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ такое, что $p|_{\mathcal{C}} \neq 0$ и $\mathrm{ri}(p^\vee) \subset \mathrm{ri}\,\mathcal{C}$ (по лемме 6 функция $\alpha|_{p^\vee}$ линейна).

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ конус $\mathcal{C} = \{(x, y)\colon\ y \geqslant |x|\}$ и ассоциированную с ним антинорму

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} y - x, & \text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant |x|, \\ \sqrt{y^2 - x^2}, & \text{если } x < 0,\ y \geqslant |x|, \\ -\infty, & \text{если } y < |x|. \end{cases}$$

Эта антинорма линейна на подконусе $p^\vee = \{(x, y)\colon\ y \geqslant x,\ x \geqslant 0\}$ для $p = (1, -1)$.

Лемма 8. *Если антинорма α линейна на подконусе, примыкающем к границе конуса $\mathcal{C}$, то существует $p \in \partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ такое, что $p|_{\mathcal{C}} \neq 0$, $p_1^\vee \neq \varnothing$ и $\alpha^\vee(p) > 0$.*

Доказательство. Если $p \in \partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ и $p|_{\mathcal{C}} \neq 0$, то в силу леммы 7 существует $u \in \partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)\setminus 0$ такое, что $\langle p, u\rangle = 0$, значит, $0 \neq u \in p_0^\vee \subset p^\vee$, причём по лемме 4 $p^\vee$ — замкнутый выпуклый конус. Так как замыкание относительной внутренности замкнутого выпуклого множества совпадает с самим множеством [17, § 6], существует ненулевое $v \in \mathrm{ri}(p^\vee)$ (действительно, в противном случае $p^\vee = 0$). Если при этом $\mathrm{ri}(p^\vee)\subset \mathrm{ri}\,\mathcal{C}$, то $v\in \mathrm{ri}\,\mathcal{C}$, откуда автоматически следует условие $\alpha(v)>0$. В силу леммы 4 $\bar v = v/\alpha(v)\in p^\vee$ и $\alpha(\bar v)=1$, т.е. $v\in p_1^\vee\neq\varnothing$. Тогда по определению двойственной функции антинормы $\alpha^\vee(p) = -\langle p,\bar v\rangle$, что больше нуля по лемме 7.

Замечание 7. Если антинорма α линейна на подконусе, примыкающем к границе, то нарушается условие теоремы $\alpha^\vee|_{\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)}\neq 0$. В самом деле, по лемме 8 существует $p\in\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ такое, что $\alpha^\vee(p)>0$.

Предложение. *Если непрерывная антинорма α линейна на подконусе, примыкающем к границе конуса $\mathcal{C}$, то существует нормальная экстремальная траектория задачи (1), имеющая как времениподобные, так и светоподобные касательные векторы.*

Доказательство. По лемме 8 существует $p\in\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ такое, что $p_1^\vee\neq\varnothing$. Тогда в силу леммы 6

$$\max_{u\in p^\vee\setminus 0}(\langle p,u\rangle+\alpha(u)) = \max_{\mu\geqslant 0}\mu(\langle p,\bar u\rangle+1),\qquad \bar u\in p_1^\vee.$$

Если $\langle p,\bar u\rangle+1<0$, то максимум достигается при $\mu=0$ и управление u_p светоподобно. Если $\langle p,\bar u\rangle+1=0$, то μ может быть любым неотрицательным числом, а управление u_p может быть светоподобно или времениподобно. Если $\langle p,\bar u\rangle+1>0$, то максимума не существует.

Рассмотрим траекторию сопряжённой подсистемы, проходящую через точку p. Если $u(0)$ времениподобно/светоподобно, то при выборе u_p светоподобным/времениподобным соответствующая экстремальная траектория имеет как времениподобные, так и светоподобные касательные векторы. Предложение доказано.

В следующем примере $\alpha^\vee$ также не является антинормой, но в отличие от ситуации предложения каузальный тип управления определяется однозначно.

Пример 2. Рассмотрим группу Гейзенберга, т.е. пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами a, b, c и законом умножения

$$(a_1,b_1,c_1)\cdot(a_2,b_2,c_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2+a_1b_2-a_2b_1).$$

Её алгебра Ли — пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z. Рассмотрим левоинвариантную сублоренцеву структуру, заданную следующими конусом и антинормой на нём:

$$\mathcal{C}=\{(x,y,z)\colon\ x,y\geqslant 0,\ \ z=0\},\quad \alpha(x,y)=\frac{xy}{x+y},\quad x^2+y^2\neq 0.$$

Тогда функция $\alpha^\vee$ на двойственном конусе имеет вид

$$\mathcal{C}^\vee=\{(h_1,h_2,h_3)\in(\mathbb{R}^3)^*\colon\ h_1,h_2\leqslant 0\},\quad \alpha^\vee(h_1,h_2,h_3)=\bigl(\sqrt{|h_1|}+\sqrt{|h_2|}\bigr)^2.$$

Заметим, что $\alpha^\vee|_{\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)}\neq 0$, следовательно, по лемме 2 условие теоремы не выполняется. Можно проверить, что сопряжённая подсистема нормальной гамильтоновой системы задаётся формулой

$$\begin{cases}\dot h_1=-h_3u_2,\\ \dot h_2=h_3u_1,\\ \dot h_3=0,\end{cases}\qquad u_h=(u_1,u_2)=\begin{cases}\bigl(\sqrt{h_2/h_1}+1,\sqrt{h_1/h_2}+1\bigr), & \text{если } h_1h_2\neq 0,\\ (a,0), & \text{если } h_1=0,\\ (0,b), & \text{если } h_2=0,\end{cases}$$

где u_h — управление, соответствующее ковектору $h=(h_1,h_2,h_3)\neq 0$, числа $a,b>0$. Легко показать, что на любой нормальной экстремальной траектории имеется не более двух переключений между времениподобным и светоподобным управлениями. Например, экстремальная траектория с начальным ковектором $(0,-2,1)$ состоит из объединения светоподобной, времениподобной и светоподобной дуг.

Следующее следствие теоремы позволяет в сублоренцевых задачах, где антинорма определяется квадратичной формой, переходить к "энергии" для вывода уравнений экстремальных траекторий. Будем говорить, что траектории *геометрически совпадают*, если совпадают их образы как функций времени.

Следствие 1. *Пусть антинорма* α *задаётся квадратичной формой* q *сигнатуры* $(1,r)$ *на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$*, т.е.* $\alpha(u)=\sqrt{q(u)}$*, где в некотором базисе* $e_0,e_1,\ldots,e_r,\ldots,e_n$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *имеем* $q(u)=u_0^2-u_1^2-\ldots-u_r^2$*. Тогда нормальные экстремальные траектории задачи (1) геометрически совпадают с нормальными времениподобными или светоподобными экстремальными траекториями той же управляемой системы с квадратичным функционалом*

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{t_1}\left(u_0^2(t)-u_1^2(t)-\ldots-u_r^2(t)\right)\,dt\to\max$$

с фиксированным терминальным временем t_1 *и управлением* $u\in L^\infty([0,t_1],\mathfrak{g}\setminus 0)$.

Доказательство. Обозначим через $h_i=\langle\,\cdot\,,e_i\rangle$, $i=\overline{0,r}$, линейные на $\mathfrak{g}^*$ гамильтонианы. Применив сформулированную теорему к задаче (1), получим

$$\mathcal{C}^\vee=\{h=(h_0,h_1,\ldots,h_n)\in\mathfrak{g}^*\colon\ h_0^2\geqslant h_1^2+\ldots+h_r^2,\ \ h_0\leqslant 0\},$$

$$\alpha^\vee(h)=\sqrt{h_0^2-h_1^2-\ldots-h_r^2},\quad u_h=\mu(-h_0e_0+h_1e_1+\ldots+h_re_r),\quad \mu>0,$$

$$\dot h_i(t)=u_0(t)\{h_0(t),h_i(t)\}+u_1(t)\{h_1(t),h_i(t)\}+\ldots+u_r(t)\{h_r(t),h_i(t)\}.$$

Во времениподобном случае с точностью до параметризации кривой можно положить $\mu=1$, так как функция $\alpha(u_{h(t)})$ отделена от нуля на отрезке $[0,t_1]$.

С другой стороны, экстремали $\lambda(\cdot)$ рассматриваемой управляемой системы с квадратичным функционалом задаются первыми двумя условиями из (2), где

$$H_u^\nu(\lambda(t))=u_0(t)h_0(t)+u_1(t)h_1(t)+\ldots+u_r(t)h_r(t)+\frac{\nu}{2}\left(u_0^2(t)-u_1^2(t)-\ldots-u_r^2(t)\right).$$

Из условия максимума при $\nu=1$ следует, что $u_0(t)=-h_0(t),\ u_1(t)=h_1(t),\ \ldots,\ u_r(t)=h_r(t)$, а максимизированный гамильтониан равен

$$H=-\frac{1}{2}\left(h_0^2-h_1^2-\ldots-h_r^2\right).$$

Соответствующая сопряжённая подсистема имеет вид

$$\dot h_i(t)=\{H,h_i(t)\}=-h_0(t)\{h_0(t),h_i(t)\}+h_1(t)\{h_1(t),h_i(t)\}+\ldots+h_r(t)\{h_r(t),h_i(t)\}.$$

Таким образом, правые части сопряжённых подсистем в обеих задачах совпадают. Для гладкого гамильтониана решение задачи Коши для гамильтоновой системы единственно, поэтому экстремальная траектория определяется своим начальным ковектором, т.е. точкой пространства $\mathfrak{g}^*=T^*_{\mathrm{id}}G$. Остается заметить, что гамильтониан H является первым интегралом сопряжённой подсистемы и ковекторы нормальных натурально параметризованных времениподобных экстремальных траекторий (т.е. таких, что $q(u(t))=1$) лежат на поверхности уровня гамильтониана $H=-1/2,\ h_0<0$, которая совпадает с множеством $S_1^\vee$. Нормальные светоподобные экстремальные траектории имеют ковекторы, лежащие на поверхности уровня гамильтониана $H=0,\ h_0<0$, которая совпадает с множеством $S_0^\vee$. Следствие доказано.

Замечание 8. В условиях следствия 1 иногда удобно рассматривать базис, в котором квадратичная форма имеет вид

$$q(u)=c_0u_0^2-c_1u_1^2-\ldots-c_ru_r^2,\quad c_0,c_1,\ldots,c_r>0.$$

Выбор такого базиса объясняется его согласованностью с другой квадратичной формой, например, с формой Киллинга. В таком случае

$$H=-\frac{1}{2}\left(\frac{h_0^2}{c_0}-\frac{h_1^2}{c_1}-\ldots-\frac{h_r^2}{c_r}\right),$$

причём начальные ковекторы нормальных времениподобных (с натуральной параметризацией) и светоподобных экстремальных траекторий лежат на поверхностях уровня $H=-1/2$ и $H=0$ (при условии $h_0<0$) соответственно.

Вообще говоря, поведение анормальных траекторий может быть сложным. Соответствующие траектории сопряжённой подсистемы лежат на относительной границе двойственного конуса $\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ и характер их пересечения с аннулятором пространства $\operatorname{span}\mathcal{C}$ априори не ясен. Однако в некоторых случаях анормальные траектории могут быть описаны.

Следствие 2. *В лоренцевом случае, т.е. при* $\operatorname{span}\mathcal{C}=\mathfrak{g}$*, анормальные экстремальные траектории светоподобны, в частности, нестрого анормальны.*

Таким образом, анормальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии, в отличие от римановой геометрии, где нет анормальных траекторий.

Определение 8. Распределение плоскостей Δ на трёхмерном гладком многообразии M называется *контактным*, если существует 1-форма ω такая, что $\Delta_m=\operatorname{Ker}\omega_m$ для любой точки $m\in M$ и $\omega\wedge d\omega\neq 0$.

Следствие 3. *Если распределение плоскостей* $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C}$ *контактно, то все анормальные траектории сублоренцевой задачи (1) светоподобны и, в частности, нестрого анормальны.*

Доказательство следствий 2, 3. Понятно, что субримановы анормали лежат в аннуляторе распределения Δ. В лоренцевом случае распределение Δ совпадает с касательным расслоением, что доказывает следствие 2.

Известно [8, § 4.3], что для распределения вида $\Delta=\operatorname{Ker}\omega$ субримановы анормали лежат в множестве Мартине $\{m\in M\colon (\omega\wedge d\omega)_m=0\}$, которое в нашем случае пусто. Это доказывает следствие 3.

Приведём пример неконтактной сублоренцевой структуры глубины, большей двух.

Пример 3. Рассмотрим сублоренцеву структуру на свободной группе Карно G ранга 2 глубины 4. Это связная и односвязная группа Ли, алгебра Ли которой линейно порождена элементами

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3=[X_1,X_2],\quad X_4=[X_1,X_3],\quad X_5=[X_2,X_3],$$

$$X_6=[X_1,X_4],\quad X_7=[X_1,X_5]=[X_2,X_4],\quad X_8=[X_2,X_5],$$

остальные коммутаторы этих векторов равны нулю. Пусть $\Delta_g=L_{g*}\operatorname{span}\{X_1,X_2\}\subset T_gG$ — двумерное распределение, множество управлений $U=\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2\colon u_1^2-u_2^2\geqslant 0,\ u_1>0\}$, а динамика задаётся неавтономным дифференциальным уравнением $\dot g(t)=L_{g(t)*}(u_1X_1+u_2X_2)$.

Анормальные кривые распределения Δ на группе G описаны в работе [18], причём это простейшая свободная группа Карно, в которой имеются строго анормальные траектории для распределения, порождённого первым слоем соответствующей алгебры Ли.

Имеем следующую гамильтонову систему в координатах $h_i=\langle\,\cdot\,,X_i\rangle$, $i=\overline{1,8}$:

$$\dot h_1=-u_2h_3,\quad \dot h_3=u_1h_4+u_2h_5,\quad \dot h_4=u_1h_6+u_2h_7,$$

$$\dot h_2=u_1h_3,\quad \dot h_6=\dot h_7=\dot h_8=0,\quad \dot h_5=u_1h_7+u_2h_8.$$

Рассмотрим случай $h_4=h_5=h_6=h_7=h_8=0$, тогда $\dot h_1=-u_2h_3$, $\dot h_2=u_1h_3$, $\dot h_3=0$, следовательно, соответствующие светоподобные экстремальные траектории имеют вид (пусть для определённости $h_3\leqslant 0$)

$$g(t)=\begin{cases}\exp\bigl\{t\alpha(t)(X_1+X_2)\bigr\} & \text{при } t\leqslant\bar t,\\ \exp\bigl\{\bar t(X_1+X_2)\bigr\}\exp\bigl\{(t-\bar t)k(t)(X_1-X_2)\bigr\} & \text{при } t>\bar t,\end{cases}\tag{6}$$

где $\bar t\in[0,T]$ и функция $k\in L^\infty([0,T],\mathbb{R}_+)$ произвольны. Проекции таких экстремальных траекторий на плоскость $\operatorname{span}\{X_1,X_2\}$, вообще говоря, выглядят как углы. Эти нормальные светоподобные экстремальные траектории в то же время анормальны и, следовательно, нестрого анормальны.

Более того, существуют анормальные сублоренцевы экстремальные траектории, являющиеся анормальными кривыми распределения Δ, иначе говоря, субримановыми анормальными траекториями. Конечно, не любые дуги анормальных кривых распределения Δ являются дугами анормальных сублоренцевых экстремальных траекторий, так как скорости таких кривых должны быть допустимы в сублоренцевом смысле. Как показано в [18], субримановы анормальные траектории проектируются в прямые, углы или кривые второго порядка на плоскости $\operatorname{span}\{X_1,X_2\}$. В частности, субримановы анормальные траектории, проектирующиеся в эллипсы или параболы, не могут быть допустимыми в сублоренцевом смысле.

С другой стороны, даже если строго анормальная субриманова траектория является сублоренцевой анормальной траекторией, она может быть нестрого анормальной в сублоренцевом смысле. Например, углы (6) строго анормальны для распределения (см. [18]), но в то же время являются светоподобными нормальными сублоренцевыми экстремальными траекториями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены экстремальные траектории для левоинвариантных сублоренцевых задач, определяемых произвольной непрерывной антинормой на остром конусе. Получены условия, при которых нормальные экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип. Установлено, что касательные векторы анормальных экстремальных траекторий, вообще говоря, либо светоподобны, либо являются касательными векторами некоторых субримановых анормальных траекторий. Если антинорма задаётся квадратичной формой своей сигнатуры, то для вывода уравнений экстремальных траекторий можно избавиться от квадратного корня в функционале сублоренцевой длины и использовать квадратичный гамильтониан.

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00877).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grochowski, M. On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$ / M. Grochowski // Geometric Singularity Theory. Banach Center Publications. — Warszawa : Institute of Mathematics. Polish Academy of Sciences, 2004. — V. 65. — P. 57–65.

2. Grochowski, M. Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function / M. Grochowski // J. Dyn. Control Syst. — 2006. — V. 12, № 2. — P. 145–160.
3. Сачков, Ю.Л. Сублоренцева задача на группе Гейзенберга / Ю.Л. Сачков, Е.Ф. Сачкова // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 1. — С. 154–157.
4. Sachkov, Yu.L. Sub-Lorentzian distance and spheres on the Heisenberg group / Yu.L. Sachkov, E.F. Sachkova // J. Dyn. Control Syst. — 2023. — V. 29. — P. 1129–1159.
5. Grong, E. Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover / E. Grong, A. Vasil'ev // J. Geom. Mech. — 2011. — V. 3, № 2. — P. 225–260.
6. Сачков, Ю.Л. Лоренцева геометрия на плоскости Лобачевского / Ю.Л. Сачков // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 1. — С. 154–157.
7. Sachkov, Yu.L. Lorentzian distance on the Lobachevsky plane / Yu.L. Sachkov // arXiv:2307.07706. — 2023.
8. Agrachev, A. A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry / A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. — Cambridge; New York : Cambridge University Press, 2019. — 745 p.
9. Сачков, Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления / Ю.Л. Сачков. — М. : Ленанд, 2021. — 160 с.
10. Локуциевский, Л.В. Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии / Л.В. Локуциевский // Мат. сборник. — 2019. – Т. 210, № 8. — С. 120–148.
11. Ардентов, А.А. Решение серии задач оптимального управления с 2-мерным управлением на основе выпуклой тригонометрии / А.А. Ардентов, Л.В. Локуциевский, Ю.Л. Сачков // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 494. — С. 86–92.
12. Ardentov, A.A. Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2-dimensional control via convex trigonometry / A.A. Ardentov, L.V. Lokutsievskiy, Yu.L. Sachkov // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. — 2021. — V. 27, № 32. — P. 32–52.
13. Lokutsievskiy, L.V. Explicit formulae for geodesics in left-invariant sub-Finsler problems on Heisenberg groups via convex trigonometry / L.V. Lokutsievskiy // J. Dyn. Control Syst. — 2021. — V. 27. — P. 661–681.
14. Protasov, V.Yu. Antinorms on cones: duality and applications / V.Yu. Protasov // Linear and Multilinear Algebra. — 2021. — V. 70, № 22. — P. 7387–7413.
15. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — 4-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1983. — 393 с.
16. Аграчев, А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. — М. : Физматлит, 2004. — 392 с.
17. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар ; пер. с англ. А.Д. Иоффе и В.М. Тихомирова. — М. : Мир, 1973. — 469 с.
18. Сачков, Ю.Л. Структура анормальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста $(2,3,5,8)$ / Ю.Л. Сачков, Е.Ф. Сачкова // Мат. сб. — 2020. — Т. 211, № 10. — С. 112–138.

SUB-LORETZIAN EXTREMALS DEFINED BY AN ANTINORM

A. V. Podobryaev

A.K. Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalesskiy, Russia
e-mail: alex@alex.botik.ru

We consider a left-invariant sub-Lorentzian structure on a Lie group. We assume that this structure is defined by a closed convex salient cone in the corresponding Lie algebra and a continuous antinorm associated with this cone. We derive the Hamiltonian system for sub-Lorentzian extremals and give conditions under that normal extremal trajectories keep their causal type. Tangent vectors of abnormal extremal trajectories are either light-like or tangent vectors of sub-Riemannian extremal trajectories for the sub-Riemannian distribution spanned by the cone.

Keywords: Lorentzian manifold, sub-Lorentzian manifold, antinorm, extremal, extremal, extremal trajectory, causal type.

FUNDING

The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00877).

REFERENCES

1. Grochowski, M., On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$, in *Geometric singularity theory. Banach Center publications*, Warszawa: Institute of Mathematics. Polish Academy of Sciences, 2004, vol. 65, pp. 57–65.
2. Grochowski, M., Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function, *J. Dyn. Control Syst.*, 2006, vol. 12, no. 2, pp. 145–160.
3. Sachkov, Yu.L. and Sachkova, E.F., Sub-Lorentzian problem on the Heisenberg group, *Math. Notes*, 2023, vol. 113, pp. 159–162.
4. Sachkov, Yu.L. and Sachkova, E.F., Sub-Lorentzian distance and spheres on the Heisenberg group, *J. Dyn. Control Syst.*, 2023, vol. 29, pp. 1129–1159.
5. Grong, E. and Vasil'ev, A., Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover, *J. Geom. Mech.*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 225–260.
6. Sachkov, Yu.L., Lorentzian geometry on the Lobachevsky plane, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, pp. 127–130.
7. Sachkov, Yu.L., Lorentzian distance on the Lobachevsky plane, 2023, arXiv:2307.07706.
8. Agrachev, A., Barilari, D., and Boscain, U., *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*, Cambridge–New York: Cambridge University Press, 2019.
9. Sachkov, Yu.L., *Introduction to Geometric Control*, Cham: Springer, 2021.
10. Lokutsievskiy, L.V., Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry, *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 8, pp. 1179–1205.
11. Ardentov, A.A., Lokutsievskiy, L.V., and Sachkov, Y.L., Explicit solutions for a series of optimization problems with 2-dimensional control via convex trigonometry, *Dokl. Math.*, 2020, vol. 210, pp. 427–432.
12. Ardentov, A.A., Lokutsievskiy, L.V., and Sachkov, Yu.L., Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2-dimensional control via convex trigonometry, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 2021, vol. 27, no. 32, pp. 32–52.
13. Lokutsievskiy, L.V., Explicit formulae for geodesics in left-invariant sub-Finsler problems on Heisenberg groups via convex trigonometry, *J. Dyn. Control Syst.*, 2021, vol. 27, pp. 661–681.
14. Protasov, V.Yu., Antinorms on cones: duality and applications, *Linear and Multilinear Algebra*, 2021, vol. 70, no. 22, pp. 7387–7413.
15. Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Oxford: Pergamon Press, 1964.
16. Agrachev, A.A. and Sachkov, Yu.L., *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2004.
17. Rockafellar, R., *Convex Analysis*, Princeton: Princeton University Press, 1970.
18. Sachkov, Yu.L. and Sachkova, E.F., The structure of abnormal extremals in a sub-Riemannian problem with growth vector $(2,3,5,8)$, *Sb. Math.*, 2020, vol. 211, no. 10, pp. 1460–1485.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 399–417

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.988.8

О ТОЧНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Чернов

Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

e-mail: chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 26.10.2023 г., после доработки 18.12.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением с необязательно ограниченным оператором в гильбертовом пространстве, получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени. При этом использованы теорема Минти–Браудера и цепочечная технология последовательного продолжения решения управляемой системы до промежуточных состояний. В качестве примеров рассмотрены полулинейное псевдопараболическое уравнение и полулинейное волновое уравнение.

Ключевые слова: полулинейное эволюционное уравнение, гильбертово пространство, необязательно ограниченный оператор, точная глобальная управляемость.

DOI: 10.31857/S0374064124030093, EDN: PJHBRB

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управляемости распределённых систем является достаточно актуальной ввиду её практической значимости и потому активно изучается (см. обзоры в [1–3]). Исследуемые задачи управляемости в последнее время концентрировались, как правило, вокруг задач граничного управления или случая, когда распределённое управление сосредоточено на части области.

Нелокальные достаточные условия точной управляемости доказывались при тех или иных условиях на величину промежутка времени [3–5] и/или при специальных условиях на операторы правой части (равномерная ограниченность, дифференцируемость по Фреше и равномерная ограниченность производной, глобальная липшицевость и т.д.) и при условии точной управляемости (и иногда наблюдаемости) соответствующей линейной системы [1, § 3; 4–7].

В работе [3] для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением с неограниченным максимальным монотонным оператором в гильбертовом пространстве, были получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние. Точная управляемость устанавливалась при условии достаточной малости промежутка времени $[0,T]$ и (фактически) требовании о подлинейном росте нелинейной составляющей правой части по фазовой переменной в окрестности бесконечности. При этом использовались обобщение теоремы Минти–Браудера и результаты о тотально глобальной разрешимости упомянутого уравнения, полученные автором ранее. В качестве примера рассматривалось полулинейное волновое уравнение.

Данная статья явилась итогом существенного переосмысления работы [3] и соответственно обобщения и развития полученных в ней результатов. Подобно [3], рассматривается задача

Коши, связанная с управляемым полулинейным эволюционным уравнением (несколько более общего за счёт наличия $B(t)$) вида

$$y'(t)=Gy(t)+f(t,y(t))+B(t)u(t),\quad t\in[0,T];\quad y(0)=y_0 \tag{1}$$

с необязательно ограниченным оператором G в гильбертовом пространстве X, семейством линейных ограниченных операторов $\{B(t)\colon X\to X,\ t\in[0,T]\}$, $B(\cdot)u(\cdot)\in L_2(0,T;X)$, управлением $u\in L_2(0,T;X)$. Для задачи (1) получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени. Как и в [3], результат удаётся доказать за счёт предположения об оценке снизу нормы $\|S(t)x\|$, $x\in X$, в окрестности T и заданных точек разбиения отрезка $[0,T]$, где X — фазовое пространство, $S(t)$ — полугруппа оператора G линейной неуправляемой части уравнения. Отдельно устанавливаются простые достаточные условия выполнения этого предположения.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пусть X — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\,\cdot\,,\cdot\,]_X$, $G\colon X\to X$ — инфинитезимальный генератор (производящий оператор) сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t\in[0,T]$, с областью определения $D(G)\subset X$, $z\in Z=L_2(0,T;X)$, $x_0\in X$. Следуя [8, § 4.8], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X)

$$x'(t)=Gx(t)+z(t),\quad t\in[0,T];\quad x(0)=x_0. \tag{2}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 [8, теорема 4.8.3]. *Для любых $z\in Z$, $x_0\in X$ существует единственная функция $x\colon [0,T]\to X$ такая, что для всех $y\in D(G^*)$ функция $\big[x(t),y\big]_X$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$,*

$$\frac{d}{dt}[x(t),y]_X=[x(t),G^*y]_X+[z(t),y]_X\quad \textit{п.в.}\quad t\in[0,T],\quad \lim_{t\to 0}[x(t),y]_X=[x_0,y],\quad y\in D(G^*).$$

Более того, справедлива формула

$$x(t)=S(t)x_0+\int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds,\quad t\in[0,T]. \tag{3}$$

Лемма 2 [8, следствие 4.8.1]. *Для любых $z\in Z$, $x_0\in X$ существует единственная слабо непрерывная функция $x\colon [0,T]\to X$ такая, что для всех $y\in D(G^*)$ имеем*

$$[x(t),y]_X=[x_0,y]_X+\int\limits_0^t[x(s),G^*y]_X\,ds+\int\limits_0^t[z(s),y]_X\,ds,$$

и, более того, эта функция представляется формулой (3).

Напомним (см., например, [9, с. 72; 10, с. 96], что функция $x\colon [0;T]\to X$ (для, вообще говоря, линейного нормированного пространства X) называется *слабо непрерывной* (иногда говорят *деминепрерывной*), если для любого $y\in X^*$ функция $y[x(t)]$ непрерывна на отрезке $[0,T]$. Множество всех слабо непрерывных функций $x\colon [0,T]\to X$ будем обозначать $\mathbb{C}_w(0,T;X)$. Для дальнейшего важно, что норма $\|x(t)\|_X$ всякой функции $x\in\mathbb{C}_w(0,T;X)$ ограничена на $[0,T]$. С другой стороны (см., например, [11, с. 154]), всякая функция $x\in\mathbb{C}_w(0,T;X)$ интегрируема по Бохнеру, следовательно, измерима по Бохнеру. Тогда $\mathbb{C}_w(0,T;X)\subset L_\infty(0,T;X)$.

Функцию $x(t)$, существование и единственность которой в множестве $\mathbb{C}_w(0,T;X)$ утверждается в леммах 1, 2, будем называть *слабым решением* задачи (2).

Далее будем предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию:

G_1) Полугруппа $S(\cdot)$ равномерно ограничена, т.е. $\|S(t)\|\leqslant M$ для всех $t\in[0;T]$.

Замечание 1. Для любой сильно непрерывной полугруппы $S(t)$ существуют константы $\omega\geqslant 0$, $R\geqslant 1$ такие, что выполняется условие на порядок роста: $\|S(t)\|\leqslant Re^{\omega t}$ для любого $t\geqslant 0$ (см. [12, § 1.2, теорема 2.2]). Поэтому условие G_1) заведомо выполнено на любом конечном промежутке $[0,T_0]$ с константой $M=M(T_0)=Re^{\omega T_0}$.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 3. *Пусть выполнено предположение* G_1*),*

$$A[z](t)=\int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds,\quad t\in[0,T],$$

— слабое решение задачи (2) при $x_0=0$, $z\in Z$*. Тогда для п.в.* $t\in[0,T]$ *справедлива оценка*

$$\|A[z](t)\|_X\leqslant M\int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds. \tag{4}$$

Далее, в контексте исследования проблемы управляемости системы (1) (в том числе и в линейном случае $f\equiv 0$), везде будем предполагать, что семейство линейных ограниченных операторов $\{B(t)\colon X\to X,\ t\in[0,T]\}$ таково, что

$$B(\cdot)u(\cdot)\in L_2(0,T;X),\quad B^*(\cdot)u(\cdot)\in L_2(0,T;X),\quad u\in L_2(0,T;X),\quad \|B(\cdot)\|\in L_2[0,T],$$

где во избежание излишней громоздкости обозначение $B^*(t)$ понимается как $[B(t)]^*$. Здесь следует пояснить, что в соответствии с теоремой Рисса [11, с. 159, замечание 1.10] сопряжённое пространство отождествляется с лебеговым:

$$(L_2(0,T;X))^*=L_2(0,T;X^*=X).$$

При этом будем считать выполненным также следующее предположение.

G_2) Существуют $t_*=t^*(T)\in(0,T)$, $a\in L_2^+[t_*,T]$, $a\neq 0$, такие, что

$$\|B^*(t)S^*(T-t)x\|_X\geqslant a(t)\|x\|_X\quad \text{для п.в. } t\in(t_*,T] \text{ и для любых } x\in X.$$

В п. 2 представлены простые достаточные условия выполнения предположений G_1), G_2).

2. КОНКРЕТИЗАЦИЯ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ G_1), G_2)

Рассмотрим следующие два случая.

Случай I. Линейный оператор G ограничен. Тогда порождаемая оператором G полугруппа определяется однозначно и является равномерно непрерывной [12, § 1.1, теоремы 1.2, 1.3]. Последнее означает выполнение следующих трёх условий [12, определение 1.1]:

Ia) $S(0)=I$.

Ib) $S(t+s)=S(t)S(s)$ для всех $t,s\geqslant 0$ (*полугрупповое свойство*).

Ic) $\lim_{t\to+0}\|S(t)-I\|=0$.

Отсюда вытекает [12, формула (1.4)], что

$$\lim_{s\to t}\|S(s)-S(t)\|=0.$$

В частности, также следует, что функция $\|S(t)\|$ непрерывна на $[0,T]$, а значит, по теореме Вейерштрасса равномерно ограничена, т.е. выполнено условие G$_1$). Кроме того, можно оценить

$$\|S^*(T-t)x\|_X = \|(S(T-t)-I)^*x + x\| \geqslant \|x\|_X - \|(S(T-t)-I)^*\|\,\|x\|_X \geqslant \frac{1}{2}\|x\|_X$$

для п.в. $t\in[t_*,T]$ и для любых $x\in X$, где [13, с. 231]

$$\|(S(T-t)-I)^*\| = \|S(T-t)-I\| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{для п.в. } t\in[t_*,T],$$

при некотором $t_*\in(0,T)$ в силу Ic).

Таким образом, для выполнения условия G$_2$) достаточно, чтобы при некотором $a\in \in L_2^+[t_*;T]$, $a\neq 0$, и, соответственно, $a_1=2a$, было выполнено условие

B$_1$) $\|B^*(t)x\|_X \geqslant a_1(t)\|x\|_X$ для п.в. $t\in[t_*,T]$ и для любых $x\in X$.

Пример. Пусть $X=\mathbb{R}^n$, A — матрица размера $n\times n$, $B(t)$ — непрерывная $n\times r$-матрица (матричная функция), $u\in L_2^r[0,T]$ — управление. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot y = Ay + B(t)u, \quad t\in[0,T]; \quad y(0)=y_0.$$

Решение этой системы даётся формулой Коши

$$y(t) = W(t,0)y_0 + \int\limits_0^t W(t,s)B(s)u(s)\,ds,$$

где $W(t,s)=e^{(t-s)A}=S(t-s)$ — матрица Коши, $S(t)=e^{tA}$ — экспоненциал матрицы A, а фактически равномерно непрерывная полугруппа, порождаемая оператором A. Обозначим через $h_i(t)$ i-й столбец матрицы $B^*(t)W^*(T,t)$, $i=\overline{1,n}$. Согласно [14, с. 189] данная система является (точно) вполне управляемой на отрезке $[0,T]$ тогда и только тогда, когда столбцы $h_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, линейно независимы на $[0,T]$ как функции из пространства $L_2^r[0;T]$. Иначе говоря, линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^n x_i h_i(t) = B^*(t)S^*(T-t)x = 0_r \quad \text{для п.в. } t\in[0,T]$$

тогда и только тогда, когда столбец $x=0_n$. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы при каждом t из некоторого промежутка $[t_1,t_2]\subset[0,T]$ система

$$B^*(t)S^*(T-t)x = 0_r, \quad x\in X,$$

имела лишь тривиальное решение. Последнее, с учётом непрерывности матрицы и теоремы Вейерштрасса, означает, что

$$a(t) = \min_{x\in S_1(0_n)} \|B^*(t)S^*(T-t)x\| = \min_{\substack{x\in X,\\ x\neq 0_n}} \frac{\|B^*(t)S^*(T-t)x\|}{\|x\|} > 0, \quad t\in[t_1,t_2].$$

Таким образом, достаточное условие (точной) полной управляемости можно переписать в виде

$$\|B^*(t)S^*(T-t)x\| \geqslant a(t)\|x\| \quad \text{для любых } t\in[t_1;t_2] \text{ и } x\in X.$$

Но это и есть условие G$_2$). Отсюда видно, что условие G$_2$) отнюдь не является надуманным при исследовании проблем управляемости, поскольку по крайней мере в случае конечномерного пространства X оно в указанном смысле близко к необходимому условию вполне управляемости. Более того, как видно из доказательства [14, теорема 1.1, с. 189], решение задачи управления можно искать в виде линейной комбинации столбцов $h_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, т.е. в виде $u(t)=B^*(t)S^*(T-t)x$, $x\in X$.

Случай II. Оператор $-G$ является максимальным монотонным, т.е. $[-Gx,x]_X\geqslant 0$ для всех $x\in D(G)$ (монотонность) и множество значений $\{(I-G)[x]\colon x\in D(G)\}=X$ (максимальность). Этот случай уже подробно анализировался в статье [3]. В частности, пояснялось [3, замечание 1.1], что при данном условии $S(\cdot)$ будет полугруппой сжатий: $\|S(t)\|\leqslant 1$ для всех $t\in[0,T]$. Это означает, что при $M=1$ выполнено предположение G_1). Для выполнения предположения G_2) достаточно, очевидно, выполнения при некоторых $t_*=t^*(T)\in(0,T)$, $a_1\in L_2^+[t_*,T]$, $a_1\neq 0$, условия B_1) в совокупности со следующим условием:

G') Существует функция $a_2\in L_2^+[t_*,T]$, $a_1a_2\neq 0$, такая, что $\|S(T-t)^*x\|_X\geqslant a_2(t)\|x\|_X$ для любых $x\in X$ и п.в. $t\in[t_*,T]$.

Как показано в [3], для выполнения условия G') достаточно следующего:

G^*) $[Gx,x]=0$ для всех $x\in D(G)$; $[G^*x,x]=0$ для всех $x\in D(G^*)$.

3. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

Предполагая, что выполнены условия G_1), G_2), $y_0\in X$, рассмотрим задачу Коши для управляемого линейного эволюционного уравнения

$$y'(t)=Gy(t)+B(t)u(t),\quad t\in[0;T];\quad y(0)=y_0, \tag{5}$$

где $u(t)$ — управляющая функция из класса $L_2(0,T;X)$. Обозначим через $y(t;u)$ слабое решение задачи (5), отвечающее управлению u. Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1\in X$ найти управление $u\in L_2(0,T;X)$ такое, что

$$\lim_{t\to T-0}[y(t;u),z]_X=[y_1,z],\quad z\in D(G^*).$$

Поскольку функция $[y(t;u),z]_X$ абсолютно непрерывна, данное условие равносильно следующему:

$$[y(T;u),z]_X=[y_1,z],\quad z\in D(G^*),$$

и будет заведомо выполнено, если $y(T;u)=y_1$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4 [8, § 4.3]. *Пусть G — инфинитезимальный производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t\geqslant 0$. Тогда $S(t)^*$ — тоже сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным производящим оператором G^*.*

Отметим, что уже из того факта, что линейный оператор является инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, следует его замкнутость и плотность вложения его области определения в X (см. [8, с. 210, 213]).

Напомним следующие известные определения.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ (действие функционала из $\mathcal{X}^*$ на элемент из $\mathcal{X}$), $\Omega\subset\mathcal{X}$ — заданное множество. Оператор $F\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ называется *хеминепрерывным* на Ω, если для всех $x,y\in\mathcal{X}$, $z\in\Omega$ и $t\in\mathbb{R}$ таких, что $z+t\,y\in\Omega$, имеет место равенство $\lim_{t\to 0}\langle F[z+t\,y]-F[z],x\rangle=0$. Ясно, что из непрерывности оператора F следует его хеминепрерывность.

Оператор $F\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ называется *монотонным*, если $\langle F[y]-F[z],y-z\rangle\geqslant 0$ для любых $y,z\in\mathcal{X}$.

Оператор $F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ называется *строго монотонным*, если $\langle F[y]-F[z],y-z\rangle>0$ для любых $y,z\in\mathcal{X}$, $y\neq z$.

Наконец, если существует константа $\beta>0$ такая, что $\langle F[y]-F[z],y-z\rangle\geqslant\beta\|y-z\|_{\mathcal{X}}^2$ для любых $y,z\in\mathcal{X}$, то говорят, что оператор F *сильно монотонный*.

Следующее утверждение известно как теорема Минти–Браудера [15, теорема 2.1].

Лемма 5. *Пусть во всём рефлексивном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задан хеминепрерывный монотонный оператор $F\colon \mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$, удовлетворяющий условию коэрцитивности:*

$$\langle F(x),x\rangle \geqslant \gamma(\|x\|_{\mathcal{X}})\|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(t)$ — вещественная функция при $t\geqslant 0$, $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$. Тогда оператор F осуществляет сюръективное отображение пространства $\mathcal{X}$ на (всё) пространство $\mathcal{X}^*$. Иными словами, для каждого $y\in\mathcal{X}^*$ уравнение $F[x]=y$ имеет решение $x\in\mathcal{X}$.

Как известно [16, с. 236], гильбертово пространство X является рефлексивным, причём в качестве скобки двойственности можно взять скалярное произведение $[\cdot,\cdot]_X$, если (в соответствии с теоремой Рисса) отождествить X и X^*. Очевидно, что для выполнения условия коэрцитивности оператора $F\colon X\to X$ достаточно его сильной монотонности:

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X\geqslant\alpha\|\xi_1-\xi_2\|_X^2 \quad \text{для любых } \xi_1,\xi_2\in X;\quad \alpha>0.$$

Для произвольного $x\in X$ положим

$$u(t)=B^*(t)S(T-t)^*x. \tag{6}$$

Фактически, $S(T-t)^*x=z(T-t)$, где $z(t)$ — слабое решение задачи

$$z'(t)=G^*z(t),\quad t\in[0,T];\quad z(0)=x.$$

Поэтому $S(T-t)^*x$ есть элемент пространства $\mathbb{C}_w(0,T;X)\subset L_\infty(0,T;X)$. И соответственно, $u\in L_2(0,T;X)$. Определим оператор $F=F_T:X\to X$ формулой

$$F[x]=\int\limits_0^T S(T-t)B(t)B^*(t)S^*(T-t)x\,dt,\quad x\in X.$$

В силу условия G_1) F — линейный ограниченный оператор, причём

$$\|F\|\leqslant M^2\int\limits_0^T\|B(t)\|^2\,dt.$$

Отсюда следует, что оператор F непрерывен, а стало быть, и хеминепрерывен.

Лемма 6. *Оператор F сильно монотонный.*

Доказательство. Для всех $\xi_1,\xi_2\in X$ и, соответственно, $\xi=\xi_1-\xi_2$ получаем

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X=[F(\xi),\xi]_X=\int\limits_0^T[S(T-s)B(s)B^*(s)S(T-s)^*\xi,\xi]_X\,ds=$$

$$=\int\limits_0^T[B^*(s)S(T-s)^*\xi,B^*(s)S(T-s)^*\xi]_X\,ds=\int\limits_0^T\|B^*(s)S(T-s)^*\xi\|_X^2\,ds,$$

и в силу условия G_2)

$$[F(\xi),\xi]_X\geqslant\int\limits_{t_*(T)}^T\|B^*(s)S(T-s)^*\xi\|_X^2\,ds\geqslant\alpha\|\xi\|_X^2,\quad \alpha=\alpha(T)=\int\limits_{t_*(T)}^T a^2(t)\,dt>0.$$

Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 5, 6 вытекает, что уравнение $F[x]=y$ имеет решение $x\in X$ для любого $y\in X$. А за счёт сильной монотонности (для этого достаточно было бы строгой) решение определяется однозначно, т.е. определён обратный линейный оператор $F^{-1}\colon X\to X$. Более того, пользуясь оценкой из доказательства леммы 6, можем оценить норму решения:

$$[y=F(x),x]_X\geqslant\alpha(T)\|x\|_X^2,$$

откуда с учётом неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\|x\|_X\leqslant\frac{1}{\alpha(T)}\|y\|_X.$$

Таким образом, F^{-1} — линейный ограниченный оператор (ЛОО), причём

$$\|F^{-1}\|=\|F_T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha(T)}.$$

Решение поставленной задачи управления определяется как $u(t)=B^*(t)S(T-t)^*x$, где $x\in X$ — решение уравнения

$$y_1=y(T;u)=S(T)y_0+F[x],$$

т.е. $x=F^{-1}[y_1-S(T)y_0]$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения G_1), G_2). Тогда для любого $y_1\in X$ поставленная задача управления имеет решение вида (6), где $x\in X$, $x=F^{-1}[y_1-S(T)y_0]$, $F^{-1}\colon X\to X$ — линейный ограниченный оператор.*

4. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ НА МАЛОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Прежде всего рассмотрим в качестве вспомогательной задачу (2). Как уже пояснялось выше, для любых $x_0\in X$, $z\in Z$ в множестве $\mathbb{C}_w(0,T;X)$ существует единственное слабое решение задачи (2) и это решение даётся формулой (3). Решение, отвечающее $x_0\in X$ при $z=0$, будем обозначать $x=\Theta[x_0](t)=S(t)x_0$. Решение, отвечающее $z\in Z$ при $x_0=0$, будем обозначать $x=A[z](t)$. Далее, считая элемент $x_0\in X$ фиксированным, положим $\theta(t)=\Theta[x_0](t)$. Как видно из представления (3), слабое решение задачи (2) можно записать в виде

$$x(t)=\theta(t)+A[z](t),\quad t\in[0,T].$$

Пусть $E=E(T)=L_\infty(0,T;X)$, $u\in L_2(0,T;X)$ — управляющая функция. Предположим, кроме того, что задана функция (оператор) $f\colon [0,T]\times X\to X$, удовлетворяющая условиям.

F_1) Для всех $x\in E$ отображение $[0,T]\ni t\to f(t,x(t))$ принадлежит классу $Z=L_2(0,T;X)$.

F_2) Существует функция $\mathcal{N}=\mathcal{N}(t,M)\colon [0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$, такая, что для всех $x,y\in X$, $\|x\|_X,\|y\|_X\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$ имеем

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|_X\leqslant\mathcal{N}(t,M)\|x-y\|_X.$$

F_3) Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r)\colon [0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\|f(t,\xi)\|_X\leqslant\mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M>0$, $\xi\in X$, $\|\xi\|_X\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$.

Замечание 2. Условие F_3) можно заменить следующим условием.

F_3') Существует функция $\mathcal{N}_2=\mathcal{N}_2(t)\colon [0,T]\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и такая, что для п.в. $t\in[0,T]$ имеем $\|f(t,0)\|_X\leqslant\mathcal{N}_2(t)$.

Действительно, предположим, что выполнены условия F_2), F_3'). Оценим

$$\|f(t,\xi)\|_X\leqslant\|f(t,\xi)-f(t,0)\|_X+\|f(t,0)\|_X\leqslant\mathcal{N}(t,M)\|\xi\|_X+\mathcal{N}_2(t)\leqslant\mathcal{N}_1(t,M),$$

где $\mathcal{N}_1(t,M)\equiv\mathcal{N}(t,M)M+\mathcal{N}_2(t)$.

Будем рассматривать управляемое полулинейное эволюционное уравнение вида (1), понимая его (слабое) решение как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$y(t)=\theta(t)+A[f(\cdot,y(\cdot))+B(\cdot)u(\cdot)](t),\quad t\in[0,T];\quad y\in E, \tag{7}$$

при $\theta(t)=S(t)y_0$, $\theta\in\mathbb{C}_w(0,T;X)\subset E$. Понятно, что всякое решение $y\in E$ в соответствии со свойствами оператора правой части принадлежит также и пространству $\mathbb{C}_w(0,T;X)$.

Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1\in X$ найти управление $u\in L_2(0,T;X)$, которому отвечает хотя бы одно*) решение $y=y(t;u)$ уравнения (1) (или, что то же самое, уравнения (7)) такое, что

$$\lim_{t\to T-0}[y(t;u),z]_X=[y_1,z]\quad \text{для любых } z\in D(G^*).$$

Предполагая, что управление u имеет вид (6), будем использовать ЛОО F и F^{-1}, определённые в п. 3. Соответственно определим оператор $\mathcal{F}=\mathcal{F}_T$: $E\to E$ формулой

$$\mathcal{F}[y](t)=S(t)y_0+\int\limits_0^t S(t-s)f(s,y(s))\,ds+\int\limits_0^t S(t-s)B(s)B^*(s)S(T-s)^*F^{-1}[\omega(y)]\,ds,$$

где

$$\omega(y)=\omega_T(y)\equiv y_1-S(T)y_0-\int\limits_0^T S(T-\xi)f(\xi,y(\xi))\,d\xi.$$

Прежде всего исследуем разрешимость уравнения

$$y=\mathcal{F}_T[y],\quad y\in E=E(T). \tag{8}$$

Рассмотрим случай, когда произвольно фиксировано некоторое число $T_0>0$, а число $T\in(0,T_0]$ подбирается достаточно малым. Кроме того, будем предполагать выполненными следующие условия.

G_3) Для всех достаточно малых $T>0$ выполнено условие G_2) с одной и той же функцией $a(t)$, в котором $a(T)\geqslant\kappa T$, $\kappa>0$.

G_4) Существует всюду плотное подмножество $X'\subset X$ такое, что для каждого $x_0\in X'$ найдётся константа $K(x_0)$, обеспечивающая оценку

$$\varlimsup_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)x_0-x_0}{t}\right\|_X\leqslant K(x_0).$$

F_4) Существуют неубывающие функции K_i: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $i=1,2$, такие, что для любого $\sigma>0$ справедливы оценки

$$\int\limits_h\mathcal{N}(s,\sigma)\,ds\leqslant K_1(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h,\quad \int\limits_h\mathcal{N}_1(s,\sigma)\,ds\leqslant K_2(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h.$$

B_2) Существует число $\beta>0$ такое, что $\|B(t)\|\leqslant\beta$ для всех $t\in[0,T_0]$.

Отметим, что данные условия являются достаточно естественными. Поясним этот факт подробнее. Для случаев I, II, рассмотренных в п. 2, считаем, что $t_*(T)=T-\kappa_0T$, $\kappa_0\in$ $\in(0,1)$, поскольку при $T\to+0$ точка $t_*(T)$ оказывается всё в более малой окрестности T. После этого для выполнения условия G_3) достаточно непрерывности функции $a(t)>0$ или

*) Относительно теоремы единственности для уравнения (1) см. работу [3].

хотя бы возможности ограничить её снизу положительной константой. Для выполнения условия F_4) достаточно существенной ограниченности функций $\mathcal{N}(\cdot,\sigma)$, $\mathcal{N}_1(\cdot,\sigma)$ на некотором фиксированном объемлющем промежутке, например, $[0,1]$. По поводу условия G_4) заметим, что согласно [12, теорема 2.4] для всех $x\in D(G)$: $S(t)x\in D(G)$ и при этом существует

$$\frac{d}{dt}S(t)x=GS(t)x=S(t)Gx,$$

т.е.

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{S(t+\tau)x-S(t)x}{\tau}-S(t)G(x)\right\|_X=0.$$

В частности, отсюда вытекает, что существует

$$\lim_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)x-x}{t}\right\|_X=\|Gx\|_X.$$

Более того, согласно [12, следствие 2.5] область определения $D(G)$ всюду плотна в X (а оператор G является замкнутым линейным оператором). Таким образом, условие G_4) заведомо выполнено при $X'=D(G)$, $K(x_0)=\|Gx_0\|_X$. В случае ограниченности оператора G, как видно из доказательства теоремы 1.2 в [12], имеет место оценка

$$\left\|\frac{S(t)-I}{t}-G\right\|\leqslant\|G\|\max_{0\leqslant s\leqslant t}\|S(s)-I\|\to 0$$

при $t\to+0$, откуда следует, что

$$\lim_{t\to+0}\left\|\frac{S(t)-I}{t}\right\|=\|G\|.$$

Значит, в случае ограниченного оператора G условие G_4) выполняется при $X'=X$, $K(x_0)=\|G\|\,\|x_0\|_X$.

При заданных $y_0,y_1\in X$ положим

$$\sigma=\sigma(y_0,y_1)=M\|y_0\|_X+\kappa^{-1}M^2\beta^2\|y_1-y_0\|_X+1,\quad \Omega(T)=\{y\in E(T)\colon\ \|y\|_{E(T)}\leqslant\sigma\}.$$

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения G_1), G_3), G_4), F_1)–F_4). Тогда для любых $y_0\in X'$, $y_1\in X$ найдётся число $\delta_1=\delta_1(y_0)>0$ такое, что для всех $T\in(0,\delta_1)$ и $y\in\Omega(T)$ справедливы оценки*

$$\kappa\|F_T^{-1}[\omega_T(y)]\|_X\leqslant\frac{\|y_1-y_0\|_X}{T}+K(y_0)+1+MK_2(\sigma),$$

$$\kappa\|F_T^{-1}\|\int\limits_0^T\mathcal{N}(t,\sigma)\,dt\leqslant K_1(\sigma).$$

Доказательство. Вторая оценка следует непосредственно из оценки нормы $\|F_T^{-1}\|\leqslant 1/\alpha(T)$ и условий G_3), F_4). В силу предположения G_4) найдётся $\delta_1(y_0)>0$ такое, что

$$\left\|\frac{S(T)y_0-y_0}{T}\right\|_X\leqslant K(y_0)+1\quad\text{для любого } T\in(0,\delta_1).$$

Отсюда, а также из представления $y_1-S(T)y_0=(y_1-y_0)-(S(T)y_0-y_0)$ и предположений G_1), G_3), F_4) сразу же получаем первую оценку. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения G_1), G_3), G_4), F_1)–F_4), B_2). Тогда для любых $y_0 \in X'$, $y_1 \in X$ существует число $\delta = \delta(y_0, y_1) > 0$ такое, что для произвольно фиксированного $T \in (0,\delta)$ уравнение (8) однозначно разрешимо на множестве $\Omega(T)$.*

Доказательство. Определим число $\delta = \delta(y_0, y_1) > 0$, исходя из условий

$$\gamma_1(y_0,y_1)\delta < 1, \quad \gamma_1(y_0,y_1) \equiv \{MK_2(\sigma) + M^2\beta^2\kappa^{-1}(K(y_0) + 1 + MK_2(\sigma))\},$$
$$\gamma_2(y_0,y_1)\delta < 1/2, \quad \gamma_2(y_0,y_1) \equiv MK_1(\sigma)(1 + M^2\beta^2\kappa^{-1}), \quad \delta \leqslant \delta_1(y_0),$$

где $\sigma = \sigma(y_0, y_1)$. Зафиксируем произвольно $T \in (0,\delta)$. Воспользуемся принципом сжимающих отображений. Прежде всего докажем, что $\mathcal{F}_T$ не выводит из области $\Omega(T)$. Выберем произвольно $y \in \Omega(T)$ и, пользуясь сделанными предположениями и леммой 7, при $t \in [0,T]$ оценим

$$\|\mathcal{F}_T[y](t)\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \|S(t)y_0\|_X + \int\limits_0^t \|S(t-s)B(s)B^*(s)S(T-s)^*\|\,\|F_T^{-1}[\omega_T(y)]\|_X\,ds + \int\limits_0^t \|S(t-s)\|\,\|f(s,y(s))\|_X\,ds \leqslant$$
$$\leqslant M\|y_0\|_X + T\kappa^{-1}M^2\beta^2\left(\frac{\|y_1-y_0\|_X}{T} + K(y_0) + 1 + MK_2(\sigma)\right) + M\int\limits_0^T \mathcal{N}_1(s,\sigma)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant M\|y_0\|_X + \kappa^{-1}M^2\beta^2\|y_1-y_0\|_X + \delta\gamma_1(y_0,y_1) \leqslant \sigma.$$

Таким образом, $\mathcal{F}_T[y] \in \Omega(T)$.

Установим сжимаемость оператора $\mathcal{F}_T$ на $\Omega(T)$. Выберем произвольно $z_1, z_2 \in \Omega(T)$ и, пользуясь сделанными предположениями и леммой 7, при $t \in [0,T]$ оценим

$$\|\mathcal{F}_T[z_1](t) - \mathcal{F}_T[z_2](t)\|_X \leqslant$$
$$\leqslant tM^3\beta^2\|F_T^{-1}\| \int\limits_0^T \|f(s,z_1(s)) - f(s,z_2(s))\|_X\,ds + M\int\limits_0^t \|f(s,z_1(s)) - f(s,z_2(s))\|_X\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \left(M\int\limits_0^t \mathcal{N}(s,\sigma)\,ds + tM^3\beta^2\|F_T^{-1}\|\int\limits_0^T \mathcal{N}(s,\sigma)\,ds\right)\|z_1 - z_2\| \leqslant$$
$$\leqslant (MK_1(\sigma) + M^3\beta^2\kappa^{-1}K_1(\sigma))\delta\,\|z_1-z_2\|_{E(T)} = \gamma_2(y_0,y_1)\delta\,\|z_1-z_2\|_{E(T)} \leqslant \|z_1-z_2\|_{E(T)}/2.$$

Таким образом, $\|\mathcal{F}_T[z_1] - \mathcal{F}_T[z_2]\|_{E(T)} \leqslant \|z_1 - z_2\|_{E(T)}/2$, т.е. оператор F_T является сжимающим на $\Omega(T)$. Очевидно, что множество $\Omega(T)$ замкнуто в $E(T)$. Согласно принципу сжимающих отображений Каччопполи–Банаха [16, гл. XVI, § 1, теорема 1], уравнение (8) имеет единственное решение на $\Omega(T)$. Теорема доказана.

Допустим, что $y \in \Omega(T)$ — решение уравнения (8). Положим

$$x = F_T^{-1}\left[y_1 - S(T)y_0 - \int\limits_0^T S(T-s)f(s,y(s))\,ds\right] = F_T^{-1}[\omega_T(y)], \tag{9}$$

$u(t) = B^*(t)S^*(T-t)x$. Учитывая, что y — решение (8), имеем

$$y(t) = S(t)y_0 + \int\limits_0^t S(t-s)f(s,y(s))\,ds + \int\limits_0^t S(t-s)B(s)u(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Тогда y — решение уравнения (7). Иначе говоря, $y \in \mathbf{C}_w(0,T;X)$ и является решением задачи Коши (1), отвечающим управлению u, т.е. $y = y(t;u)$. При этом согласно определению элемента x

$$y_1 = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-s)f(s,y(s))\,ds + F_T[x] =$$

$$= S(T)y_0 + \int_0^T S(T-s)f(s,y(s))\,ds + \int_0^T S(T-s)B(s)u(s)\,ds = y(T;u).$$

Таким образом, u является решением исследуемой задачи управления. Из проведённых рассуждений и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* G_1), G_3), G_4), F_1)–F_4), B_2). *Тогда для любых* $y_0 \in X'$, $y_1 \in X$ *существует число* $\delta = \delta(y_0,y_1) > 0$ *такое, что для произвольно фиксированного* $T \in (0,\delta)$ *задача управления имеет решение вида (6) при некотором* $x \in X$ *вида (9),* $y = y(t;u) \in \Omega(T)$.

Замечание 3. Теорема 3 позволяет получить оценку нормы для u и $y(t;u)$ в зависимости от y_0, y_1. Для практических приложений это имеет важное значение.

5. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ НА ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Получим теперь достаточные условия глобальной по времени управляемости, т.е. на отрезке $[0,T]$ при произвольно фиксированном $T > 0$. Будем предполагать выполненными условия G_1), G_4), F_1)–F_4), а также B_2), при $T_0 = T$. Условие G_3) заменим следующим.

G_3') Существуют функция $a(\cdot) \in L_2^+[0,T]$ и числа $\varkappa_0, \varkappa \in (0,1)$ такие, что для любого конечного разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ выполняются оценки

$$\|B^*(t)S^*(t_i - t)x\|_X \geqslant a(t)\|x\|_X \quad \text{для п.в. } t \in (t_i^*; t_i] \text{ и для любых } x \in X,$$

$$\alpha_i = \int_{t_i^*}^{t_i} a^2(t)\,dt \geqslant \varkappa(t_i - t_{i-1}), \quad t_i^* = t_{i-1} + \varkappa_0(t_i - t_{i-1}), \quad i = \overline{1,k}.$$

Отметим, что если функция $a(t)$ равномерно ограничена снизу (допустим $a(t) \geqslant 1$), то

$$\alpha_i \geqslant t_i - t_i^* = (1-\varkappa_0)(t_i - t_{i-1}), \quad i = \overline{1,k}, \quad \text{т.е.} \quad \varkappa = 1 - \varkappa_0.$$

При заданных $y_0, y_1 \in X'$ и $\lambda \in [0,1]$ определим элементы

$$y_\lambda = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_0.$$

Заметим, что

$$\|y_\lambda\|_X \leqslant \lambda\|y_1\|_X + (1-\lambda)\|y_0\|_X \leqslant \gamma(y_0,y_1) = \max\{\|y_0\|_X, \|y_1\|_X\},$$

$$\|y_\lambda - y_\mu\|_X = |\lambda - \mu|\,\|y_1 - y_0\|_X \leqslant \|y_1 - y_0\|_X.$$

Соответственно константу $\sigma(y_0,y_1)$, в отличие от п. 4, определим как

$$\sigma(y_0,y_1) = M\gamma(y_0,y_1) + \varkappa^{-1}M^2\beta^2\|y_1 - y_0\|_X + 1.$$

Рассмотрим
$$\frac{S(t)y_\lambda - y_\lambda}{t} = \lambda\frac{S(t)y_1 - y_1}{t} + (1-\lambda)\frac{S(t)y_0 - y_0}{t}. \tag{10}$$

Хотя y_λ могут и не принадлежать X', тем не менее из условия G_4) получаем, что его аналог выполнен и для y_λ при $K(y_\lambda) = K(y_0, y_1) = \max\{K(y_0), K(y_1)\}$. С учётом представления (10) совершенно аналогично доказательству леммы 7 устанавливается существование числа $\delta_1(y_0, y_1) > 0$ такого, что
$$\left\|\frac{S(t)y_\lambda - y_\lambda}{t}\right\|_X \leqslant K(y_0, y_1) + 1, \quad t \in (0, \delta_1), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Аналогично тому как это было сделано при доказательстве теоремы 2, определим число $\delta = \delta(y_0, y_1) > 0$, исходя из условий
$$\gamma_1(y_0, y_1)\delta < 1, \quad \gamma_1(y_0, y_1) \equiv \{MK_2(\sigma) + M^2\beta^2\kappa^{-1}(K(y_0, y_1) + 1 + MK_2(\sigma))\},$$
$$\gamma_2(y_0, y_1)\delta < 1/2, \quad \gamma_2(y_0, y_1) \equiv MK_1(\sigma)(1 + M^2\beta^2\kappa^{-1}), \quad \delta \leqslant \delta_1(y_0, y_1),$$
где $\sigma = \sigma(y_0, y_1)$.

Теперь зафиксируем произвольное разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ с $\max_{i=\overline{1,k}}(t_i - t_{i-1}) < \delta$. Будем рассматривать локальные аналоги уравнения (7):
$$y(t) = S(t)y_0 + \int\limits_0^t S(t-s)f(s, y(s))\,ds + \int\limits_0^t S(t-s)B(s)u(s)\,ds, \quad t \in [0, t_i], \quad y \in E_i, \tag{$\mathcal{E}_i$}$$
$E_i = L_\infty(0, t_i; X)$, $i = \overline{1,k}$. Выберем числа $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = \overline{1, k-1}$, $\lambda_k = 1$.

Рассмотрим локальную по времени задачу управления при $i = 1$: найти управление $u_1 \in L_2(0, t_1; X)$ такое, что существует соответствующее решение уравнения $(\mathcal{E}_1)$, удовлетворяющее условию $y(t_1; u_1) = y_{\lambda_1}$. Согласно теореме 3 эта задача управления имеет решение вида
$$u_1(t) = B^*(t)S(t_1 - t)^*x_1, \quad x_1 \in X.$$

Считая, что управление $u(t)$ на $[0, t_1]$ уже определено как $u_1(t)$, уравнение $(\mathcal{E}_2)$ достаточно рассмотреть лишь на $[t_1, t_2]$. На этом промежутке оно может быть переписано в виде
$$y(t) = S(t - t_1)y_{\lambda_1} + \int\limits_{t_1}^t S(t-s)[f(s, y(s)) + B(s)u(s)]\,ds, \quad t \in [t_1, t_2], \quad y \in E_2', \tag{$\mathcal{E}_2'$}$$
$E_{i=2}' = L_\infty(t_1, t_2; X)$. Действительно, это следует из соотношений
$$S(t - t_1)S(t_1) = S(t), \quad S(t - t_1)S(t_1 - s) = S(t - s),$$
которые вытекают непосредственно из полугруппового свойства.

Если сделать замену $\tau = t - t_1 \in [0, t_2 - t_1]$, то уравнение $(\mathcal{E}_2')$ преобразуется к виду
$$y(t_1 + \tau) = S(\tau)y_{\lambda_1} + \int\limits_{t_1}^{\tau + t_1} S(\tau + t_1 - s)[f(s, y(s)) + B(s)u(s)]\,ds$$
или, после замены $s - t_1 = \xi$,
$$y(t_1 + \tau) = S(\tau)y_{\lambda_1} + \int\limits_0^\tau S(\tau - \xi)[f(\cdot, y(\cdot)) + B(\cdot)u(\cdot)](\xi + t_1)\,d\xi, \quad \tau \in [0, t_2 - t_1], \tag{$\mathcal{E}_2''$}$$

$\overline{y}(\tau) = y(t_1+\tau)$, $\overline{y} \in E_2''$, $E_{i=2}'' = L_\infty(0, t_2-t_1; X)$. Уравнение $(\mathcal{E}_2'')$ имеет вид уравнения (7) при $T=t_2-t_1$ (или уравнения $(\mathcal{E}_1)$ при замене t_1 на t_2-t_1). Поэтому к нему опять применимо утверждение теоремы 3. Таким образом, на $[t_1,t_2]$ существует управление вида $u_2(t)=B^*(t)S(t_2-t)x_2$, $x_2\in X$, для которого уравнение $(\mathcal{E}_2')$ имеет решение $y(t;u_2)$, удовлетворяющее условиям $y(t_2;u_2)=y_{\lambda_2}$, $\|y(t;u_2)\|_X\leqslant\sigma(y_0,y_1)$. Тогда на отрезке $[0,t_2]$ существует управление вида

$$u(t)=\begin{cases}B^*(t)S(t_1-t)x_1, & t\in[0,t_1],\ x_1\in X,\\ B^*(t)S(t_2-t)x_2, & t\in[t_1,t_2],\ x_2\in X,\end{cases}$$

для которого уравнение $(\mathcal{E}_2)$ имеет решение $y(t;u)$, удовлетворяющее условиям

$$y(t_1;u)=y_{\lambda_1},\quad y(t_2;u)=y_{\lambda_2},\quad \|y(t;u)\|_X\leqslant\sigma(y_0,y_1),\quad t\in[0,t_2].$$

Продолжив эти рассуждения по индукции, получим, что справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения G_1), G_3'), G_4), F_1)–F_4), B_2) (при $T_0=T$). Тогда для любых $y_0,y_1\in X'$ существует число $\delta=\delta(y_0,y_1)>0$ такое, что для всякого разбиения $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$ мелкости, меньшей δ, и любого набора чисел $\lambda_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,k-1}$, существует управление $u\in L_2(0,T;X)$ вида*

$$u(t)=B^*(t)S(t_i-t)^*x_i,\quad t\in(t_{i-1},t_i],\quad x_i\in X,\quad i=\overline{1,k},$$

для которого уравнение (7) (или, равносильно, задача (1)) имеет решение $y(t;u)$, удовлетворяющее условиям

$$y(t_i;u)=y_{\lambda_i},\quad i=\overline{1,k-1},\quad y(T;u)=y_1,\quad \|y(t;u)\|_X\leqslant\sigma(y_0,y_1),\quad t\in[0,T].$$

Замечание 4. Утверждения теорем 2–4 останутся справедливыми и без предположения G_4) при замене X' на X, если соответствующие константы определить следующим образом:

$$\sigma(y_0,y_1)=M\gamma(y_0,y_1)+\kappa^{-1}M^2\beta^2(1+M)\gamma(y_0,y_1)+1,$$
$$\gamma_1(y_0,y_1)\equiv\{MK_2(\sigma)+M^3\beta^2\kappa^{-1}K_2(\sigma)\}.$$

Изменение в доказательствах весьма незначительно: вместо первой оценки из леммы 7 будет использоваться очевидная оценка

$$\kappa\,\|F_T^{-1}[\omega_T(y)]\|_X\leqslant\frac{\|y_1\|_X+M\|y_0\|_X}{T}+MK_2(\sigma),$$

справедливая вне зависимости от величины $T>0$ (т.е. определение δ_1 на этот раз не требуется). Однако соответствующие оценки норм $y(t;u)$ и $u(t)$ оказываются более грубыми.

6. ПРИМЕРЫ

Прежде всего необходимо сделать замечание относительно случая ЛОО G: $X\to X$ для задачи (2).

Замечание 5. Как уже пояснялось в п. 2, уже из того факта, что G: $X\to X$ — ЛОО, следует, что он является инфинитезимальным генератором равномерно непрерывной (а следовательно, сильно непрерывной) полугруппы (которая определяется однозначно). При этом G может рассматриваться и как ЛОО $L_2(0,T;X)\to L_2(0,T;X)$. Как показано в [11, гл. V, § 1.3, теорема 1.3], при сделанных предположениях для любых $x_0\in X$, $z\in L_2(0,T;X)$ задача вида (2) с производной, понимаемой в смысле распределений, имеет единственное решение

$x \in \mathbb{C}(0,T;X)$ с производной $x' \in L_2(0,T;X)$. Более того, определённое тем самым соответствие $\{x_0; z\} \to \{x; x'\}$ непрерывно как отображение

$$X \times L_2(0,T;X) \to \mathbb{C}(0,T;X) \times L_2(0,T;X).$$

При этом, как указано в [11, гл. V, § 1.3, замеч. 1.4], если $x \in L_2(0,T;X)$ является решением, то отсюда в силу [11, гл. IV, теоремы 1.6, 1.7] вытекают следующие факты:

1) функция $x\colon [0,T] \to X$ непрерывна и п.в. на $[0,T]$ (сильно) дифференцируема;

2) имеет место тождество $x(t) = x_0 + \int_0^t \{Gx(s) + z(s)\}\, ds$ для любого $t \in [0,T]$;

3) для п.в. $t \in [0,T]$ производная в смысле распределений (по этому поводу см. также [11, с. 169]) $x'(t) = Gx(t) + z(t)$.

Для сильной производной (см. 1)) справедливо тождество [17, доказательство леммы 2.2]

$$\frac{d}{dt}\,[x(t),\omega] = [x'(t),\omega], \quad \omega \in X.$$

Таким образом, в силу 3) получаем

$$\frac{d}{dt}[x(t),\omega] = [Gx(t) + z(t),\omega] = [x(t), G^*\omega] + [z(t),\omega], \quad \omega \in X.$$

Это означает, что x есть решение задачи (2) также и в слабом смысле.

6.1. ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть $n \geqslant 2$ — заданное натуральное число, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и строго липшицева (для этого достаточно выпуклости). Для числа $\gamma > 0$ обозначим через $\mathbb{A}(\gamma)$ класс всех матричных функций $A = A(\cdot) = \{a_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n \in L_\infty^{n\times n}(\Omega)$, удовлетворяющих условию $A(x)\xi\cdot\xi \geqslant \gamma\,|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п.в. $x \in \Omega$ (здесь “ $\cdot$ ” означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$). Для $J, K \in \mathbb{A}(\gamma)$, $w \in H_0^1(\Omega)$, $a, b \in L_\infty^+(\Omega)$, $z \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$, $\overline{Q} \in L_2(0,T;L_2^n(\Omega))$ рассмотрим в цилиндре $\Pi_T = [0;T] \times \Omega$ задачу

$$-\operatorname{div}\left(J\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + a\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(K\nabla\varphi) + b\varphi = z - \operatorname{div}\overline{Q}, \quad (t,x) \in \Pi_T,$$
$$\varphi(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T]; \quad \varphi(0,x) = w(x), \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

Уравнения вида (11) возникают при моделировании процессов теплопереноса [18], фильтрации в пористых средах [19–21], волновых процессов [22], квазистационарных процессов в кристаллических полупроводниках [23] (см. также обзор литературы в [23]).

Обозначим $H = H_0^1(\Omega)$. Решение начально-краевой задачи (11) будем понимать как функцию $\varphi(t,x) \in \mathbb{C}(0,T;H)$, обладающую производной в смысле распределений из класса $L_2(0,T;H)$ и удовлетворяющую начальному условию, а также тождеству

$$D[\partial\varphi/\partial t,\omega] + B[\varphi,\omega] = \psi(t)[\omega], \quad \omega \in H_0^1(\Omega), \quad t \in [0,T],$$

$$D[\chi,\omega] \equiv \int\limits_\Omega [J\nabla\chi\cdot\nabla\omega + a\chi\omega]\,dx, \quad B[\chi,\omega] \equiv \int\limits_\Omega [K\nabla\chi\cdot\nabla\omega + b\chi\omega]\,dx,$$

$$\psi(t)[\omega] \equiv \int\limits_\Omega [z(t,x)\omega(x) + \vec{Q}(t,x)\cdot\nabla\omega(x)]\,dx, \quad \chi,\omega \in H_0^1(\Omega).$$

Поставленная задача уже подробно анализировалась в статье [24]. Там же было показано, что она может быть переписана в виде задачи Коши для операторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt}+R^{-1}S[\varphi(t)]=R^{-1}[Z(t)],\quad t\in[0,T];\quad \varphi(0)=w, \tag{12}$$

где для сопряжения с абстрактной теорией принято обозначение $\varphi(t)=\varphi(t,\cdot)$; $R,S\colon H\to H$ — ЛОО, обратимые на всем пространстве H; $Z\in L_2(0,T;H)$ однозначно определяется из условия $\psi(t)[\omega]=(Z(t),\omega)$ для всех $\omega\in H$; $\|Z(t)\|=\|\psi(t)\|$. Имеет место оценка

$$\|Z(t)\|_H\leqslant\|z(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)}+\|\overline{Q}(t,\cdot)\|_{L_2^n(\Omega)}.$$

Уравнение (12) имеет вид уравнения (2). За счёт ограниченности оператора $G=-R^{-1}S$ для любой правой части указанного вида существует на самом деле сильное решение $\varphi\in\mathbb{C}(0,T;H)$. Но очевидно, что оно совпадает со слабым. Поэтому применимы полученные нами выше результаты (в случае ограниченного оператора G) для соответствующего управляемого уравнения, в том числе полулинейного вида. При замене $z(t,x)$ на $g(t,x,\varphi(t,x))+u_1(t,x)$ и $\overline{Q}(t,x)$ на $\overline{Q}(t,x,\varphi(t,x))+\bar u_2(t,x)$ вместо $Z(t)$ получим сумму $h(t,\varphi(t))+U(t)$, где при соответствующих условиях относительно функций g, u_1, $\bar u_2$:

$$g(t,x,\varphi(t,x))\in L_2(0,T;L_2(\Omega)),\quad \overline{Q}(t,x,\varphi(t,x))\in L_2(0,T;L_2^n(\Omega)),\quad \varphi\in L_\infty(0,T;H);$$
$$u_1\in L_2(0,T;L_2(\Omega)),\quad \bar u_2\in L_2(0,T;L_2^n(\Omega)),$$

имеем $h(t,\varphi)\in H$ для п.в. $t\in[0,T]$, $\varphi\in H$,

$$h(\cdot,\varphi(\cdot))\colon L_\infty(0,T;H)\to L_2(0,T;H),\quad (h(t,\varphi(t)),\omega)=\int\limits_\Omega\{g(t,\cdot,\varphi(t))\omega+\overline{Q}(t,\cdot,\varphi(t))\cdot\nabla\omega\}\,dx,$$
$$U\in L_2(0,T;H),\quad (U(t),\omega)=\int\limits_\Omega\{u_1(t,\cdot)\omega+\bar u_2(t,\cdot)\cdot\nabla\omega\}\,dx,\quad \omega\in H.$$

Тем самым приходим к задаче вида (1) (при замене y на φ, X на H) с функциями $f(t,\varphi)=$ $=R^{-1}h(t,\varphi)$, $u(t)=R^{-1}U(t)$, $B(t)=I$. Условие F_1) будет, очевидно, выполнено. Покажем, во что трансформируются условия F_2), F_3). Для выполнения условия F_2) достаточно обеспечить неравенство

$$\|f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2)\|_H\leqslant\|R^{-1}\|\,\|h(t,\varphi_1)-h(t,\varphi_2)\|_H\leqslant$$
$$\leqslant\|R^{-1}\|\big(\|g(t,\cdot,\varphi_1)-g(t,\cdot,\varphi_2)\|_{L_2(\Omega)}+\|\overline{Q}(t,\cdot,\varphi_1)-\overline{Q}(t,\cdot,\varphi_2)\|_{L_2^n(\Omega)}\big)\leqslant\mathcal{N}(t,M)\,\|\varphi_1-\varphi_2\|_H$$

для п.в. $t\in[0,T]$, $\varphi_i\in H$, $\|\varphi_i\|_H\leqslant M$, $i=1,2$. И аналогично, для выполнения условия F_3) достаточно обеспечить выполнение неравенства

$$\|f(t,\varphi)\|_H\leqslant\|R^{-1}\|\,\|h(t,\varphi)\|_H\leqslant\|R^{-1}\|\,\{\|g(t,\cdot,\varphi)\|_{L_2(\Omega)}+\|\overline{Q}(t,\cdot,\varphi)\|_{L_2^n(\Omega)}\}\leqslant\mathcal{N}_1(t,M)$$

для п.в. $t\in[0,T]$, $\varphi\in H$, $\|\varphi\|_H\leqslant M$. Условие F_4) — это всего лишь условие на оценочные функции $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_1$.

Представление вида $u(t)=R^{-1}U(t)=B^*(t)S(T-t)^*\xi=S(T-t)^*\xi$, $\xi\in H$, трансформируется в $U(t)=RS(T-t)^*\xi$. Управления в исходной задаче определяются из тождества

$$(U(t),\omega)=(RS(T-t)^*\xi,\omega)=\int\limits_\Omega\big(u_1(t,x)\omega(x)+\bar u_2(t,x)\cdot\nabla\omega(x)\big)\,dx$$

для всех $\omega \in H$. Скалярное произведение на H можно понимать как

$$(U(t),\omega)=\int\limits_{\Omega}\big(U(t)(x)\omega(x)+\nabla U(t)(x)\cdot\nabla\omega(x)\big)\,dx.$$

Соответственно, управления $u_1(t,\cdot)=RS(T-t)^*\xi$, $\bar{u}_2(t,\cdot)=\nabla RS(T-t)^*\xi$.

Покажем, что условие G_3') выполняется естественным образом. Действительно, в силу ограниченности оператора G и в соответствии с рассуждениями из п. 2 (случай I) найдётся константа $\delta>0$ такая, что при выполнении условий $0<(t_i-t_i^*)<\delta$ имеет место оценка

$$\|S^*(t_i-t)x\|_X \geqslant \frac{1}{2}\,\|x\|_X \quad \text{для п.в. } t\in(t_i^*,t_i] \text{ и любых } x\in X.$$

Соответственно, для $B(t)=I$ имеем

$$\|B^*(t)S^*(t_i-t)x\|_X=\|S^*(t_i-t)x\|_X\geqslant\frac{1}{2}\|x\|_X$$

при п.в. $t\in(t_i^*,t_i]$ и любых $x\in X$. Тем самым условие G_3') выполняется при $a(t)\equiv 1/2$. Стало быть, теорема 4 применима.

6.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть $T>0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — открытое ограниченное множество с границей Γ. Положим $Q=\Omega\times(0,T]$, $\Sigma=\Gamma\times(0,T]$. В качестве управляемой начально-краевой задачи рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x,t):\overline{\Omega}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=g(x,t,\varphi)+U(x,t),\quad (x,t)\in Q; \tag{13}$$

$$\varphi\,\big|_{\Sigma}=0;\quad \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)=\psi_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{14}$$

Задача (13), (14) уже подробно анализировалась в [3] (см. также [25, разд. 10.3]). Было показано, что она сводится к задаче (1), $B(t)\equiv I$, причём относительно оператора G имеет место ситуация, описанная в п. 2 (случай II), с выполнением условий G_1) $(M=1)$, G^*); $X=\mathbb{H}_0^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[\eta_1,\eta_2]_X=\int\limits_{\Omega}\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2\,dx+\int\limits_{\Omega}\psi_1\psi_2\,dx.$$

Примем $\varphi(t)=\varphi(\cdot,t)$, $g(t,\varphi)=g(\cdot,t,\varphi)$. Условия F_1), F_2), F_3) конкретизируются следующим образом.

F_1) Для всех $\varphi\in E=L_\infty(0,T;X)$ отображение $[0,T]\ni t\to g(t,\varphi(t))$ принадлежит классу $Z=L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

F_2) Существует функция $\mathcal{N}=\mathcal{N}(t,M)$: $[0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\varphi_i\in\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\varphi_i\|\leqslant M$, $i=1,2$, п.в. $t\in[0,T]$ имеем $\|g(t,\varphi_1)-g(t,\varphi_2)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{N}(t,M)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$.

F_3) Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r)$: $[0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\|g(t,\xi)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M>0$, $\xi\in\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\xi\|\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$.

Как показано в [3, лемма 2.2], из выполнения условий G_1) $(M=1)$, G^*) вытекают равенства

$$\|S(t)x\|_X=\|S(t)^*x\|_X=\|x\|_X,\quad x\in X,\quad t\geqslant 0.$$

Таким образом, для $B(t)=I$ имеем

$$\|B^*(t)S^*(t_i-t)x\|_X=\|S^*(t_i-t)x\|_X=\|x\|_X$$

для п.в. $t\in(t_{i-1},t_i]$ и любых $x\in X$. Тем самым условие G_3') выполняется при $a(t)\equiv 1$. Значит, теорема 4 применима.

В [3] точная управляемость задачи (13), (14) устанавливалась при условии достаточной малости промежутка времени $[0,T]$ и (фактически) требовании о подлинейном росте функции $g(x,t,\varphi)$ по φ в окрестности бесконечности. На этот раз установлена точная управляемость в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени $[0,T]$ в предположении локальной липшицевости функции $g(x,t,\varphi)$ по φ.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balachandran, K. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey / K. Balachandran, J.P. Dauer // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — № 1. — P. 7–28.
2. Control Theory of Partial Differential Equations / O. Imanuvilov, G. Leugering, R. Triggiani, Bing-Yu. Zhang. — Boca Raton; London; New York; Singapore : Chapman & Hall/CRC, 2005. — 416 p.
3. Чернов, А.В. О точной управляемости полулинейного эволюционного уравнения с неограниченным оператором / А.В. Чернов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 257–269.
4. Zhang, X. Exact controllability of semilinear evolution systems and its application / X. Zhang // J. Optim. Theory Appl. — 2000. — V. 107, № 2. — P. 415–432.
5. Liu, W. Exact internal controllability for the semilinear heat equation / W. Liu, G.H. Williams // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — V. 211. — P. 258–272.
6. Balachandran, K. Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space / K. Balachandran, J.P. Dauer, P. Balasubramaniam // J. Optim. Theory Appl. — 1995. — V. 84. — P. 83–91.
7. Mahmudov, N.I. Exact null controllability of semilinear evolution systems / N.I. Mahmudov // J. Glob. Optim. — 2013. — V. 56, № 2. — P. 317–326.
8. Балакришнан, А.В. Прикладной функциональный анализ / А.В. Балакришнан ; пер. с англ. В.И. Благодатских. — М. : Наука, 1980. — 383 с.
9. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс ; пер. с англ. Д.А. Василькова ; под ред. В.М. Алексеева и С.В. Фомина. — М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. — 829 с.
10. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М. : Наука, 1972. — 544 с.
11. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас ; пер. с нем. В.Г. Задорожного, А.И. Перова ; под ред. В.И. Соболева. — М. : Мир, 1978. — 336 с.
12. Pazy, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 279 p.
13. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — 4-е изд., перераб. — М. : Наука, 1976. — 543 с.
14. Егоров, А.И. Основы теории управления / А.И. Егоров. — М. : Физматлит, 2004. — 504 с.
15. Качуровский, Р.И. Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах / Р.И. Качуровский // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, Вып. 2 (140). — С. 121–168.
16. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — 3-е изд., перераб. — М. : Наука, 1984. — 752 с.

17. Чернов, А.В. О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации коэффициента уравнения глобальной электрической цепи / А.В. Чернов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 9. — С. 1586–1601.
18. Chen, P.J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. — 1968. — V. 19. — P. 614–627.
19. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 852–864.
20. Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata / G.I. Barenblatt, J. Garcia-Azorero, A. De Pablo, J.L. Vazquez // Appl. Anal. — 1997. — V. 65, № 1–2. — P. 19–45.
21. Helmig, R. Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media / R. Helmig, A. Weiss, B.I. Wohlmuth // Comput. Geosciences. — 2007. — V. 11, № 3. — P. 261–274.
22. Benjamin, T.B. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems / T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Philos. Tranc. Royal Soc. London. Ser. A. — 1972. — V. 272. — P. 47–78.
23. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.
24. Чернов, А.В. О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью / А.В. Чернов // Изв. вузов. Математика. — 2018. — № 11. — С. 60–74.
25. Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations / H. Brezis. — New York; Dordrecht; Heidelberg; London : Springer, 2011. — 599 p.

ON EXACT GLOBAL CONTROLLABILITY OF A SEMILINEAR EVOLUTIONARY EQUATION

A. V. Chernov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
e-mail: chavnn@mail.ru

For a Cauchy problem associated with a controlled semilinear evolutionary equation with optionally bounded operator in a Hilbert space we obtain sufficient conditions for exact controllability to a given final state (and also to given intermediate states at intermediate time moments) on a arbitrarily fixed (without additional conditions) time interval. Here we use the Minty–Browder's theorem and also a chain technology of successive continuation of the solution to a controlled system to intermediate states. As examples we consider a semilinear pseudoparabolic equation and a semilinear wave equation.

Keywords: semilinear evolutionary equation, Hilbert space, optionally bounded operator, exact global controllability.

REFERENCES

1. Balachandran, K. and Dauer, J.P., Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey, *J. Optim. Theory Appl.*, 2002, no. 1, pp. 7–28.
2. Imanuvilov, O., Leugering, G., Triggiani, R., and Zhang, Bing-Yu., *Control Theory of Partial Differential Equations*, Boca Raton; London; New York; Singapore: Chapman & Hall/CRC, 2005.
3. Chernov, A.V., On the exact controllability of a semilinear evolution equation with an unbounded operator, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 265–277.
4. Zhang, X., Exact controllability of semilinear evolution systems and its application, *J. Optim. Theory Appl.*, 2000, vol. 107, no. 2, pp. 415–432.
5. Liu, W. and Williams, G.H., Exact internal controllability for the semilinear heat equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, vol. 211, pp. 258–272.
6. Balachandran, K., Dauer, J.P., and Balasubramaniam, P., Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space, *J. Optim. Theory Appl.*, 1995, vol. 84, pp. 83–91.
7. Mahmudov, N.I., Exact null controllability of semilinear evolution systems, *J. Glob. Optim.*, 2013, vol. 56, no. 2, pp. 317–326.

8. Balakrishnan, A.V., *Applied Functional Analysis*, New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1976.
9. Hille, E. and Phillips, R.S., *Functional Analysis and Semi-Groups*, Providence: Amer. Math. Soc., 1957.
10. *Funktsional'nyi analiz* (Functional Analysis), Ed. Krein S.G., Moscow: Nauka, 1972.
11. Gaewski, H., Gröger, K., Zacharias, K., Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Berlin: Akademie-Verlag, 1974.
12. Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, New York: Springer, 1983.
13. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1976.
14. Egorov, A.I., *Osnovy teorii upravleniya* (Fundamentals of Control Theory), Moscow: Fizmatlit, 2004.
15. Kachurovskii, R.I., Non-linear monotone operators in Banach spaces. *Russ. Math. Surv.*, 1968, vol. 23, no. 2, pp. 121–168.
16. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P., *Functional Analysis*, Oxford: Pergamon, 1982.
17. Chernov, A.V., Differentiation of a functional in the problem of parametric coefficient optimization in the global electric circuit equation, *Comp. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 9, pp. 1565–1579.
18. Chen, P.J. and Gurtin, M.E., On a theory of heat conduction involving two temperatures, *Z. Angew. Math. Phys.*, 1968, vol. 19, pp. 614–627.
19. Barenblatt, G.I., Zheltov, Yu.P., and Kochina, I.N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata), *J. Appl. Math. Mech.*, 1961, vol. 24, pp. 1286–1303.
20. Barenblatt, G.I., Garcia-Azorero, J., De Pablo, A., and Vazquez, J.L., Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata, *Appl. Anal.*, 1997, vol. 65, no. 1–2, pp. 19–45.
21. Helmig, R., Weiss, A., and Wohlmuth, B.I., Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media, *Comput. Geosciences*, 2007, vol. 11, no. 3, pp. 261–274.
22. Benjamin, T.B., Bona, J.L., and Mahony, J.J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Tranc. Royal Soc. London. Ser. A*, 1972, vol. 272, pp. 47–78.
23. Sveshnikov, A.G., Al'shin, A.B., Korpusov, M.O., and Pletner, Yu.D., *Lineynyye i nelineynyye uravneniya sobolevskogo tipa* (Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type), Moscow: Fizmatlit, 2007.
24. Chernov, A.V., The total preservation of unique global solvability of the first kind operator equation with additional controlled nonlinearity, *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 11, pp. 53–66.
25. Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2011.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 418–432

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЁТА ГЕМОДИНАМИКИ В СОСУДЕ С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

В. М. Головизнин[1], В. В. Конопляников[2], П. А. Майоров[3], С. И. Мухин[4]

[1–4]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*
[1,3,4]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*
e-mail: [1]gol@ibrae.ac.ru, [2]vaskonopl@mail.ru, [3]maiorov.peter@gmail.com, [4]vmmus@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 01.11.2023 г., после доработки 01.11.2023 г.; принята к публикации 13.11.2023 г.

Построен численный алгоритм расчёта течения крови в объёмном сосуде. Выведена система дифференциальных уравнений, описывающих динамику жидкости в отдельном сосуде с подвижными стенками в цилиндрических координатах в предположении осевой симметрии в смешанных эйлерово-лагранжевых координатах. Для полученной системы уравнений построена балансно-характеристическая схема по методике КАБАРЕ. Приведены результаты расчётов тестовых задач.

Ключевые слова: гемодинамика, смешанные эйлерово-лагранжевые переменные, слабосжимаемая жидкость, гиперболическое уравнение, балансно-характеристическая схема.

DOI: 10.31857/S0374064124030104, EDN: PHINYP

ВВЕДЕНИЕ

Существует много практически интересных медицинских и физиологических проблем, исследования которых требуют аккуратных и точных расчётов многомерных течений в кровеносных сосудах. Ещё более важным и сложным является расчёт течения крови в выделенном сосуде как в элементе общей системы кровообращения с учётом взаимовлияния общей и локальной гемодинамики. Такая постановка задачи, с одной стороны, является вполне естественной, а с другой — её реализация требует решения по крайней мере трёх сложнейших задач. Первая — это создание эффективного алгоритма численного решения многомерных уравнений, описывающих ток жидкости в объёмном сосуде. Как правило, соответствующий алгоритм базируется на решении многомерных уравнений Навье–Стокса и их модификаций в области различной степени сложности. Вторая задача — создание моделей и численных алгоритмов для воспроизведения кровотока в замкнутой системе кровообращения. В настоящее время глобальный кровоток в основном описывается на базе квазиодномерного приближения. И третья задача — объединение многомерной модели кровотока в выделенном сосуде с квазиодномерной моделью кровообращения во всём организме. Особенности и возможные решения второй задачи (построения квазиодномерных моделей глобального кровотока и методов их решения) приведены в ряде работ (см., например [1–4]). Описание системы сосудов на базе квазиодномерных моделей позволяет предложить вариант решения третьей задачи — совмещение с двух- и трехмерными моделями. Базовые подходы к решению этой проблемы содержатся, например, в работах [5–7].

Первая задача, на первый взгляд, мало отличается от традиционной задачи — численного решения многомерных уравнений Навье–Стокса в области заданного вида. Количество работ на эту тему очень велико, а их обзор не является целью данной статьи. Но численный алгоритм расчёта гемодинамики отдельного сосуда (как элемента системы) должен удовлетворять ряду дополнительных специфических требований в диапазоне от разумной вычислительной сложности и робастности до консервативности, бездиссипативности и воспроизведения свойств характерных течений. Обзор особенностей гемодинамических расчётов и большое количество литературы на эту тему можно найти, например, в [8, 9].

Построению эффективного численного алгоритма расчёта течения крови в объёмном сосуде посвящена и данная работа. На первом этапе рассмотрим течение слабосжимаемой жидкости в отдельном сосуде с подвижными стенками в цилиндрических координатах в предположении осевой симметрии. Полагаем, что осесимметричная подвижность стенок может быть как заданной, так и обуславливаться внутрисосудистым давлением и эластическими свойствами стенок сосуда, и тем самым заранее неизвестна. Построение уравнений для описания такого течения удобно проводить в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) координатах и в общем случае это не является проблемой. Но при численном решении этой задачи возникает необходимость обеспечить корректность подвижной сетки и вычислить якобиан, участвующий в СЭЛ формулировке задачи. Оба процесса являются трудоёмкими. Для того чтобы избежать указанных сложностей в численном решении, в данной работе предлагается заранее учитывать при построении СЭЛ уравнений определённый тип подвижности дискретной сетки и тип вычислительного алгоритма — сеточно-характеристический метод [10]. Учёт суммарного численного алгоритма при получении СЭЛ позволяет значительно упростить построение вычислительного алгоритма, повысить надёжность и эффективность предлагаемой разностной схемы.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. УРАВНЕНИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим осесимметричные течения в трёхмерном пространстве в цилиндрической системе координат (x, r, ϕ) и произвольную односвязную область с гладкой границей в трёхмерном пространстве. Будем считать, что ротор поля скоростей вдоль оси X в среде $\overrightarrow{W} = (W_x, W_r, W_\phi) = (u, v, w)$ равен нулю, т.е. $w = 0$.

Положим, что среда является баротропной, т.е. давление P в ней зависит только от её плотности ρ, $P = P(\rho)$.

Пусть G — элемент области, ∂G — её граница. Уравнения баланса массы и импульса в интегральной форме имеют следующий вид [11]:

$$\oiint\limits_{\partial G} \rho(\overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{n})ds = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}(\rho\overrightarrow{W}) r\,dr\,d\phi\,dx = \iiint\limits_{G}\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v)}{\partial r}\right] r\,dr\,d\phi\,dx,$$

$$\begin{cases} \displaystyle\iiint\limits_{G} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} r\,dr\,d\phi\,dx = -\oiint\limits_{\partial G} \rho u(\overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{n})\,ds - \oiint\limits_{\partial G} P n_x\,ds, \\ \displaystyle\iiint\limits_{G} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} r\,dr\,d\phi\,dx = -\oiint\limits_{\partial G} \rho v(\overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{n})\,ds - \oiint\limits_{\partial G} P n_r\,ds. \end{cases}$$

Уравнения неразрывности и движения в дифференциальном виде записываются как

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v)}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho uv)}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v^2)}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0.$$

Эти уравнения совместно с уравнением состояния баротропной среды $P = P(\rho)$ составляют замкнутую систему уравнений в эйлеровых координатах. Следует отметить, что в неё не входит уравнение баланса энергии, поскольку мы полагаем, что давление не зависит от температуры.

Обычно задачи взаимодействия жидкости и подвижной структуры (в данном случае подвижных или эластичных стенок) задаются в разных системах координат. Параметры течения жидкости заданы в эйлеровой системе координат: скорость и давление жидкости в пространственных точках $(x, r, \phi) \in G$, где G — физическая область, занимаемая жидкостью. Упругие структуры обычно задаются в лагранжевой системе координат: наблюдается смещение u' материальных точек $(x', r', \phi') \in G(t)$ в отсчётной области $G(t)$. Сформулируем задачу взаимодействия жидкости и подвижной границы в общем виде.

1.2. УРАВНЕНИЯ БАРОТРОПНОЙ СРЕДЫ В СМЕШАННЫХ ЭЙЛЕРОВО-ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Объединим задачу взаимодействия жидкости и стенок сосуда за счёт СЭЛ переменных.

В трёхмерном пространстве рассмотрим произвольную односвязную область $G(t)$ с подвижной гладкой границей $\partial G(t)$. Будем считать, что в каждый момент времени известны деформации $\overrightarrow{p} = (x, r, \phi)$ и скорости деформации этой границы $\dot{\overrightarrow{p}} = (\dot{x}, \dot{r}, \dot{\phi})$. В рамках данной работы ограничимся рассмотрением осесимметрических течений, т.е. $\dot{\phi} = 0$. Функции $\overrightarrow{p}$ и $\dot{\overrightarrow{p}}$, описывающие границу $\partial G(t)$, полагаем заданными во всех точках пространства (x, r, ϕ).

В указанных условиях рассмотрим процедуру нахождения уравнения неразрывности в СЭЛ переменных. Изменение массы $M_{G(t)}$, заключённой в объёме $G(t)$, определим как

$$\frac{\partial M_{G(t)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{G(t)} \rho r \, dr \, d\phi \, dx. \tag{1}$$

Область интегрирования зависит от времени, и для того чтобы занести производную по времени под знак интеграла отобразим подвижную область $G(t)$, заданную в пространстве (x, r, ϕ), на неподвижную область Ω в опорных переменных (α, β, γ).

Будем считать, что это отображение не вырождено и его якобиан J всюду больше нуля:

$$J = \frac{\partial(x, r, \phi)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} & \dfrac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial r}{\partial \beta} & \dfrac{\partial r}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \phi}{\partial \beta} & \dfrac{\partial \phi}{\partial \gamma} \end{vmatrix} > 0.$$

Перейдём в интеграле (1) к опорным переменным (к области Ω, не зависящей от времени), внесём производную под знак интеграла и вернёмся к исходным переменным, записав подынтегральное выражение удобным для нас образом:

$$\frac{\partial M_{G(t)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{G(t)} \rho r \, dr \, d\phi \, dx = \frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\Omega} \rho r J \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma =$$

$$= \iiint\limits_{G(t)} \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} \, dr \, d\phi \, dx = \iiint\limits_{G(t)} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} r \, dr \, d\phi \, dx.$$

Изменение массы происходит за счёт потока вещества через границу, и закон сохранения массы имеет вид

$$\iiint\limits_{G(t)} \frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t} r\,dr\,d\phi\,dx = -\oiint\limits_{\partial G(t)} \rho((\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}})\cdot\overrightarrow{n})ds = -\iiint\limits_{G(t)} \operatorname{div}(\rho(\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}}))r\,dr\,d\phi\,dx =$$

$$= -\iiint\limits_{G(t)}\left[\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho(w-\dot{\phi}))}{\partial\phi}\right]r\,dr\,d\phi\,dx =$$

$$= -\iiint\limits_{G(t)}\left[\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}\right]r\,dr\,d\phi\,dx.$$

Здесь $\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}}$ — скорость среды относительно движущейся границы; учтено, что $\dot{\phi}=0$.

Тогда уравнение неразрывности в интегральной форме запишется как

$$\iiint\limits_{G(t)}\left[\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}\right]r\,dr\,d\phi\,dx = 0,$$

и из него следует уравнение в дифференциальной форме

$$\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}=0. \tag{2}$$

В уравнение (2) помимо скоростей $\dot{\overrightarrow{p}}=(\dot{x},\dot{r},\dot{\phi}=0)$, которые будем считать известными, входит якобиан преобразования координат J, вычисление которого обычно вызывает сложности. Способ его нахождения будет определён в дальнейшем.

Интегральная и дифференциальная формы закона сохранения импульса (уравнение движения) в СЭЛ переменных находятся аналогичным образом. Интегральная форма (изменение компонент импульса происходит за счёт конвективного переноса и импульса сил давления) записывается как

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{G(t)} \rho\overrightarrow{W} r\,dr\,d\phi\,dx = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{G(t)} \rho ur\,dr\,d\phi\,dx = \dfrac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Omega} \rho urJ\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{G(t)} \rho vr\,dr\,d\phi\,dx = \dfrac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Omega} \rho vrJ\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\partial(\rho urJ)}{\partial t}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma = \iiint\limits_{G(t)}\dfrac{1}{rJ}\dfrac{\partial(\rho urJ)}{\partial t}r\,dr\,d\phi\,dx \\ \iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\partial(\rho vrJ)}{\partial t}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma = \iiint\limits_{G(t)}\dfrac{1}{rJ}\dfrac{\partial(\rho vrJ)}{\partial t}r\,dr\,d\phi\,dx \end{cases} = \begin{cases} -\oiint\limits_{\partial G(t)}\rho u((\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}})\cdot\overrightarrow{n})\,ds - \oiint\limits_{\partial G(t)} Pn_x\,ds \\ -\oiint\limits_{\partial G(t)}\rho v((\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}})\cdot\overrightarrow{n})\,ds - \oiint\limits_{\partial G(t)} Pn_r\,ds. \end{cases}$$

Ей соответствует дифференциальная форма

$$\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho urJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u(v-\dot{r}))}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial x}=0,$$
$$\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho vrJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v(v-\dot{r}))}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial r}=0. \tag{3}$$

Совместно уравнение неразрывности (2) и уравнения (3) составляют замкнутую систему уравнений динамики баротропной жидкости в СЭЛ переменных для осесимметрического течения в сосуде с подвижными стенками.

Важно отметить, что в принятой нами постановке изменение расчётной области со временем происходит только за счёт движения стенок сосуда в радиальном направлении. Таким образом, $\dot{x}(x,r,t)=0$, что будет дальше учитываться по мере необходимости. Кроме того, поскольку кровь рассматривается как ньютоновская жидкость, то необходимо учесть влияние вязкости и в правой части динамических уравнений (3) должны присутствовать диссипативные члены.

Окончательно рассматриваемая нами система уравнений примет следующий вид:

$$\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}=0,$$

$$\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho urJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u(v-\dot{r}))}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial x}=\big[\overrightarrow{\Delta}(\nu\overrightarrow{W})\big]_x=\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right],$$

$$\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho vrJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v(v-\dot{r}))}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial r}=\big[\overrightarrow{\Delta}(\nu\overrightarrow{W})\big]_r=\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right],$$

$$P=P(\rho). \tag{4}$$

Здесь $\overrightarrow{\Delta}$ — векторный оператор Лапласа, а ν — коэффициент вязкости среды.

1.3. ПРИВЕДЕНИЕ К ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМУ ВИДУ

Запишем систему уравнений (2), (3) в так называемой “простой” форме. В уравнении неразрывности

$$\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}=0$$

преобразуем первый член:

$$\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}=\rho\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r)}{\partial t}=\rho\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\rho\dot{r}}{r}. \tag{5}$$

Первое слагаемое в (5) можно представить как

$$\rho\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial t}=\rho\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(x,r,\phi)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}=\rho\frac{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial(x,r,\phi)}\left[\frac{\partial(\dot{x},r,\phi)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}+\frac{\partial(x,\dot{r},\phi)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}+\frac{\partial(x,r,\dot{\phi})}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}\right]=$$

$$=\rho\left[\frac{\partial(\dot{x},r,\phi)}{\partial(x,r,\phi)}+\frac{\partial(x,\dot{r},\phi)}{\partial(x,r,\phi)}+\frac{\partial(x,r,\dot{\phi})}{\partial(x,r,\phi)}\right]=\rho\left[\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{r}}{\partial r}\right]. \tag{6}$$

Теперь преобразуем дивергентные члены: компонента вдоль оси X имеет вид

$$\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}=(u-\dot{x})\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial(u-\dot{x})}{\partial x}, \tag{7}$$

вдоль оси R —

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}=\rho\frac{\partial(v-\dot{r})}{\partial r}+(v-\dot{r})\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho)}{\partial r}=\rho\frac{\partial(v-\dot{r})}{\partial r}+(v-\dot{r})\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{\rho(v-\dot{r})}{r}. \tag{8}$$

Подставив в (5) формулы (6)–(8), придём к соотношению

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u-\dot{x})\frac{\partial\rho}{\partial x}+(v-\dot{r})\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\right]=0. \tag{9}$$

Первое уравнение системы (3) представим в виде

$$\left(u\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\left(u\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}+\rho(u-\dot{x})\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(u\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}+\rho(v-\dot{r})\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial P}{\partial x}=0.$$

Соберём в одну скобку все члены, пропорциональные скорости u:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho(u-\dot{x})\frac{\partial u}{\partial x}+\rho(v-\dot{r})\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial x}+u\left[\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r}\right]=0.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой левую часть уравнения неразрывности, которая равна нулю. В результате остаётся

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho(u-\dot{x})\frac{\partial u}{\partial x}+\rho(v-\dot{r})\frac{\partial u}{\partial r}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{\rho}{x}=0. \tag{10}$$

Второе уравнение системы (3) аналогичным образом преобразуется к виду

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho(u-\dot{x})\frac{\partial v}{\partial x}+\rho(v-\dot{r})\frac{\partial v}{\partial r}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{\rho}{r}=0. \tag{11}$$

Уравнения (9)–(11) составляют систему исходных уравнений в “простой” форме, которую удобно записать в векторно-матричном виде:

$$\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial t}+\boldsymbol{A_x}\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial x}+\boldsymbol{A_r}\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial r}=\overrightarrow{h}, \tag{12}$$

$$\overrightarrow{z}=(\rho,u,v)^T,\quad \overrightarrow{h}=\left(-\frac{\rho v}{r},0,0\right)^T,$$

$$\boldsymbol{A_x}=\begin{pmatrix}(u-\dot{x}) & \rho & 0\\ (c^2/\rho) & (u-\dot{x}) & 0\\ 0 & 0 & (u-\dot{x})\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{A_r}=\begin{pmatrix}(v-\dot{r}) & 0 & \rho\\ 0 & (v-\dot{r}) & 0\\ (c^2/\rho) & 0 & (v-\dot{r})\end{pmatrix};\quad c^2=\frac{\partial P}{\partial\rho}.$$

Собственные числа этих матриц определяются по формулам

$$\lambda_1^x=(u-\dot{x})+c,\quad \lambda_2^x=(u-\dot{x})-c,\quad \lambda_3^x=(u-\dot{x}),$$
$$\lambda_1^r=(v-\dot{r})+c,\quad \lambda_2^r=(v-\dot{r})-c,\quad \lambda_3^r=(v-\dot{r}),$$

левые собственные векторы — по формулам

$$\overrightarrow{l_1^x}=(c/\rho,1,0),\quad \overrightarrow{l_2^x}=(-c/\rho,1,0),\quad \overrightarrow{l_3^x}=(0,0,1),$$
$$\overrightarrow{l_1^r}=(c/\rho,0,1),\quad \overrightarrow{l_2^r}=(-c/\rho,0,1),\quad \overrightarrow{l_3^r}=(0,1,0).$$

Представим систему (12) в виде

$$\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial t}+\boldsymbol{A_x}\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial x}=\overrightarrow{G_x}=\overrightarrow{h}-\boldsymbol{A_r}\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial r}.$$

Система характеристических уравнений в направлении оси X:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+[(u-\dot{x})+c]\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)=F_1^x=\overrightarrow{l_1^x}\cdot\left(\overrightarrow{h}-\boldsymbol{A_r}\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial r}\right),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+[(u-\dot{x})-c]\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)=F_2^x=\overrightarrow{l_2^x}\cdot\left(\overrightarrow{h}-\boldsymbol{A_r}\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial r}\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+(u-\dot{x})\frac{\partial v}{\partial x}=F_3^x=\overrightarrow{l_3^x}\cdot\left(\overrightarrow{h}-\boldsymbol{A_r}\frac{\partial\overrightarrow{z}}{\partial r}\right). \tag{13}$$

Отметим, что конкретный вид правых частей характеристических уравнений нам в дальнейшем не понадобится.

Аналогично получаем систему характеристических уравнений вдоль направления R:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)+[(v-\dot r)+c]\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)=F_1^r=\overrightarrow{l_1^r}\cdot\left(\overrightarrow{h}-\boldsymbol{A_x}\frac{\partial \overrightarrow{z}}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)+[(v-\dot r)-c]\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)=F_2^r=\overrightarrow{l_2^r}\cdot\left(\overrightarrow{h}-\boldsymbol{A_x}\frac{\partial \overrightarrow{z}}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(v-\dot r)\frac{\partial u}{\partial r}=F_3^r=\overrightarrow{l_3^r}\cdot\left(\overrightarrow{h}-\boldsymbol{A_x}\frac{\partial \overrightarrow{z}}{\partial x}\right). \tag{14}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема, на которую мы будем опираться при построении вычислительного алгоритма.

Теорема. *Вдоль произвольного направления, задаваемого единичным вектором $\overrightarrow{n}$, характеристическая форма системы уравнений в СЭЛ переменных (2), (3) в терминах инвариантов Римана будет иметь следующий вид:*

$$\frac{\partial \vec I}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial \vec I}{\partial \vec n}=\vec F, \tag{15}$$

$$\vec I=\left(\overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{n}+c\cdot ln\rho,\ \overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{n}-c\cdot ln\rho,\ \overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{\tau}\right)^T,$$

$$\Lambda^x=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,)=\operatorname{diag}((\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}})\cdot\overrightarrow{n}+c,\ (\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}})\cdot\overrightarrow{n}-c,\ (\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}})\cdot\overrightarrow{n}),$$

$$\vec F=\left[\vec{F^x},\vec{F^r}\right]\cdot\vec n,\quad \|\overrightarrow{\tau}\|=1,\quad \overrightarrow{\tau}\cdot\overrightarrow{n}=0, \tag{16}$$

где $\vec I$ — вектор инвариантов Римана, λ_m — собственные значения по соответствующим направлениям, $\vec F$ — вектор правых частей.

2. БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СХЕМА

Введём в пространстве (x,r) фиксированную по x и подвижную по r пространственную сетку $\omega_h=\{(x_i,r_{i,j})\colon\ i=\overline{0,N_x},\ \ j=\overline{0,N_r}\}$ и неравномерную сетку по времени

$$\omega_\tau=\left\{t_n=\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i,\ \ n\in\{0\ldots K\}\right\}.$$

Кроме слоёв по времени с целыми индексами t_n будем рассматривать также промежуточные — $t_{n+1/2}=t_n+\tau_n/2$.

В центрах ячеек пространственной сетки зададим полный набор консервативных переменных $\vec\varphi=\{\rho,u,v\}$. Центры ячеек пронумеруем полуцелыми нижними индексами. Дополнительно в центрах граней сетки зададим второй полный набор переменных (потоковых) $\vec\Psi=\{\rho,u,v\}$, которые, в зависимости от того на какой грани — вертикальной или горизонтальной — определены, имеют один целый и один полуцелый индекс. В случае если какая-либо величина (в основном геометрические параметры) относится к узлу сетки, она будет снабжена двумя целыми индексами.

Консервативные переменные будем рассматривать как на целых, так и на промежуточных слоях по времени t_n, $t_{n+1/2}$ и t_{n+1}, а потоковые — только на целых слоях по t_n и t_{n+1}.

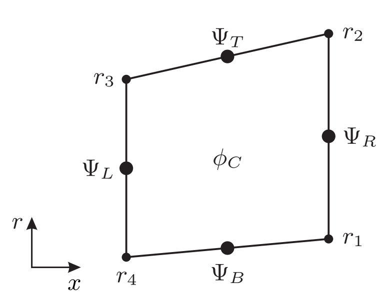

Рис. 1. Локальные обозначения переменных в расчётной ячейке.

Для сокращения записи введём локальные обозначения. На рис. 1 приведена одна ячейка сетки (Ψ_T, Ψ_B, Ψ_L, Ψ_R — потоковые величины на верхней, нижней, левой и правой гранях ячейки соответственно, ϕ_C — консервативная переменная). Особо отметим, что расчётная ячейка представляет собой не трапецию, а тор, получающийся путём вращения этой трапеции вокруг оси X.

Построение схемы будем проводить по методике КАБАРЕ [12]. Численная схема состоит из трёх фаз: фаза 1 и фаза 3 — балансные, в этих фазах вычисляются консервативные переменные $\vec{\phi}$ на промежуточном слое по времени $t_{n+1/2}$ и на новом слое по времени t_{n+1} соответственно; фаза 2 — характеристическая, определяющая алгоритм вычисления потоковых переменных $\vec{\Psi}^{n+1}$.

2.1. БАЛАНСНЫЕ ФАЗЫ СХЕМЫ

Для аппроксимации пространственных производных в системе уравнений (4) воспользуемся методом конечного объёма. Рассмотрим однородные уравнения (2), (3) без вязких слагаемых, учтём их позже. Проинтегрируем каждое из этих уравнений по расчётной ячейке:

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\left(\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}+\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot r))}{\partial r}\right]\right)r\,dr\,d\phi\,dx=0,$$

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\left(\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho urJ)}{\partial t}+\left[\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u(v-\dot r))}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial x}\right]\right)r\,dr\,d\phi\,dx=0,$$

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\left(\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho vrJ)}{\partial t}+\left[\frac{\partial(\rho vu)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v(v-\dot r))}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial r}\right]\right)r\,dr\,d\phi\,dx=0. \tag{17}$$

Рассмотрим вначале член, содержащий производную по времени в первом уравнении:

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}r\,dr\,d\phi\,dx=\iiint\limits_{\Delta\Omega}\frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Delta\Omega}\rho rJ\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Delta G(t)}\rho r\,dr\,d\phi\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\rho^*V,$$

где V — объём расчётной ячейки, ρ^* — плотность в некоторой точке расчётной ячейки. При выводе этой цепочки равенств использовалась теорема о среднем.

Для двух оставшихся уравнений аналогично получаем

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho urJ)}{\partial t}r\,dr\,d\phi\,dx=\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)^*V,\quad \iiint\limits_{\Delta G(t)}\frac{1}{rJ}\frac{\partial(\rho vrJ)}{\partial t}r\,dr\,d\phi\,dx=\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)^*V.$$

Интегралы от квадратных скобок в уравнениях системы (17) преобразуем по формуле Остроградского–Гаусса в поверхностные интегралы:

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho(v-\dot r))}{\partial r}\right]r\,dr\,d\phi\,dx=\oiint\limits_{\partial\Delta G(t)}\rho\big((\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}})\cdot\overrightarrow{n}\big)dS,$$

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\left[\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u(v-\dot r))}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial x}\right]r\,dr\,d\phi\,dx=\oiint\limits_{\partial\Delta G(t)}\big([\rho u(\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}})+\overrightarrow{P_x}]\cdot\overrightarrow{n}\big)dS,$$

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\left[\frac{\partial(\rho vu)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v(v-\dot r))}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial r}\right]r\,dr\,d\phi\,dx=$$

$$=\iiint\limits_{\Delta G(t)}\left[\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v(v-\dot r))}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial rP}{\partial r}-\frac{P}{r}\right]r\,dr\,d\phi\,dx=$$

$$=\oiint\limits_{\partial\Delta G(t)}\left(\left[\rho v\left(\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}}\right)+\overrightarrow{P_r}\right]\cdot\overrightarrow{n}\right)dS-\iiint\limits_{\Delta G(t)}\frac{P}{r}r\,dr\,d\phi\,dx, \tag{18}$$

где $\overrightarrow{P_x}=(P,0,0)$, а $\overrightarrow{P_r}=(0,P,0)$. Здесь в третьем уравнении системы учитываем тождество

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rP)}{\partial r}-\frac{P}{r}.$$

Поверхностные интегралы аппроксимируем по формуле средних прямоугольников. Для уравнения неразрывности имеем

$$\oiint\limits_{\partial\Delta G(t)}\rho\left(\left(\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}}\right)\cdot\overrightarrow{n}\right)dS\approx$$

$$\approx(\rho u)_R\pi(r_2^2-r_1^2)+(\rho u)_T\pi(r_3^2-r_2^2)+(\rho u)_L\pi(r_4^2-r_3^2)+(\rho u)_B\pi(r_1^2-r_4^2)+$$

$$+[\rho(v-\dot r)]_T\pi(r_3+r_2)(x_2-x_3)+[\rho(v-\dot r)]_B\pi(r_4+r_1)(x_4-x_1), \tag{19}$$

для второго уравнения в (18)

$$\oiint\limits_{\partial\Delta G(t)}\left(\left[\rho u\left(\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}}\right)+\overrightarrow{P_x}\right]\cdot\overrightarrow{n}\right)dS\approx$$

$$\approx(\rho u^2+P)_R\pi(r_2^2-r_1^2)+(\rho u^2+P)_T\pi(r_3^2-r_2^2)+(\rho u^2+P)_L\pi(r_4^2-r_3^2)+(\rho u^2+P)_B\pi(r_1^2-r_4^2)+$$

$$+[\rho u(v-\dot r)]_T\pi(r_3+r_2)(x_2-x_3)+[\rho u(v-\dot r)]_B\pi(r_4+r_1)(x_4-x_1), \tag{20}$$

для третьего —

$$\oiint\limits_{\partial\Delta G(t)}\left(\left[\rho v\left(\overrightarrow{W}-\dot{\overrightarrow{p}}\right)+\overrightarrow{P_r}\right]\cdot\overrightarrow{n}\right)dS\approx$$

$$\approx(\rho uv)_R\pi(r_2^2-r_1^2)+(\rho uv)_T\pi(r_3^2-r_2^2)+(\rho uv)_L\pi(r_4^2-r_3^2)+(\rho uv)_B\pi(r_1^2-r_4^2)+$$

$$+[\rho v(v-\dot r)+P]_T\pi(r_3+r_2)(x_2-x_3)+[\rho v(v-\dot r)+P]_B\pi(r_4+r_1)(x_4-x_1);$$

$$\iiint\limits_{\Delta G(t)}\frac{P}{r}r\,dr\,d\phi\,dx\approx\left(\frac{P}{r}\right)^*V. \tag{21}$$

Все потоковые сеточные величины определены в серединах граней расчётных ячеек, поэтому формула прямоугольников является естественной.

В сеточные уравнения (19)–(21) входят скорости перемещения узлов расчётной сетки в вертикальном направлении. В нашем случае они определяются изменением формы внешней границы области, которая считается заданной:

$$(R_T)_i^n=(f_1)_i^n.$$

На текущем слое по времени узлы вдоль вертикальных отрезков распределены равномерно:

$$r_{i,j}^n=\Delta r_i^n(j-1),\quad j=\overline{1,N_r};\quad \Delta r_i^n=\frac{(f_1)_i^n}{N_r-1}.$$

Потребуем равномерное распределение и на слое t^{n+1}:

$$r_{i,j}^{n+1} = \Delta r_i^{n+1}(j-1), \quad j=\overline{1,N_r}; \quad \Delta r_i^{n+1} = \frac{(f_1)_i^{n+1}}{N_r-1}.$$

Уравнение движения узла аппроксимируем со вторым порядком:

$$\frac{r_{i,j}^{n+1}-r_{i,j}^n}{\tau} = \frac{1}{2}\cdot(\dot r_{i,j}^{n+1}+\dot r_{i,j}^n) \quad \Longrightarrow \quad \dot r_{i,j}^{n+1} = 2\cdot\frac{r_{i,j}^{n+1}-r_{i,j}^n}{\tau} - \dot r_{i,j}^n.$$

Начальное значение скорости узлов определим как

$$\frac{r_{i,j}^2-r_{i,j}^1}{\tau} = \dot r_{i,j}^1.$$

Скорости перемещения узлов сетки $\dot r$ в вертикальном направлении относятся, естественно, к узлам. Положим скорости движения середин граней равными полусумме скоростей, образующих эту грань узлов.

Собирая аппроксимации пространственных производных (19)–(21) в линейные разностные (сеточные) операторы L_ρ, $L_{\rho u}$, $L_{\rho v}$, получаем систему дифференциальных по времени и разностных по пространству уравнений, которую в операторном виде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho^* V] + L_\rho(\rho,u,v,\dot r) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}[(\rho u)^* V] + L_{\rho u}(\rho,u,v,\dot r) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho v)^* V] + L_{\rho v}(\rho,u,v,\dot r) - \left(\frac{P}{r}\right)^* V = 0.$$

Эти операторы в общем случае аппроксимируют дифференциальную задачу с первым порядком по пространственным переменным. Можно показать, что если сеточное отображение обладает свойством локальной гладкости, то порядок аппроксимации увеличивается до второго.

Для аппроксимации по времени используется метод «предиктор–корректор». Для учёта вязких членов системы (4) воспользуемся методом расщепления по физическим процессам. Балансные фазы рассмотрим в два этапа: на первом этапе учтём конвективные члены, на втором — вязкие. На первом этапе фазы 1 вычисляются промежуточные значения консервативных переменных на промежуточном шаге по времени:

$$\frac{(\rho V)_c^{n+1/2}-(\rho V)_c^n}{\tau/2} + L_\rho(\rho^n,u^n,v^n,\dot r^n) = 0, \quad \frac{(\rho \hat u V)_c^{n+1/2}-(\rho u V)_c^n}{\tau/2} + L_{\rho u}(\rho^n,u^n,v^n,\dot r^n) = 0,$$
$$\frac{(\rho \hat v V)_c^{n+1/2}-(\rho v V)_c^n}{\tau/2} + L_{\rho v}(\rho^n,u^n,v^n,\dot r^n) - \left(\frac{P}{r}V\right)_c^n = 0.$$

На втором этапе фазы 1 учитывается вязкость:

$$\frac{u_c^{n+1/2}-\hat u_c^{n+1/2}}{\tau/2} = \nu\left[\frac{\hat u_{cR}^{n+1/2}-2\hat u_c^{n+1/2}+\hat u_{cL}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{\hat u_{cT}^{n+1/2}-2\hat u_c^{n+1/2}+\hat u_{cB}^{n+1/2}}{h_r} + \frac{\hat u_{cT}^{n+1/2}-\hat u_{cB}^{n+1/2}}{r_c 2h_r}\right],$$
$$\frac{v_c^{n+1/2}-\hat v_c^{n+1/2}}{\tau/2} = \nu\left[\frac{\hat v_{cR}^{n+1/2}-2\hat v_c^{n+1/2}+\hat v_{cL}^{n+1/2}}{h_x} + \right.$$
$$\left. + \frac{\hat v_{cT}^{n+1/2}-2\hat v_c^{n+1/2}+\hat v_{cB}^{n+1/2}}{h_r} + \frac{\hat v_{cT}^{n+1/2}-\hat v_{cB}^{n+1/2}}{r_c 2h_r} - \frac{\hat v_c^{n+1/2}}{r_c^2}\right]. \tag{22}$$

Здесь индексами cL, cR, cT, cB обозначаются консервативные величины из ячеек слева, справа, сверху, снизу относительно рассматриваемой ячейки соответственно.

Третью фазу — корректор — также рассмотрим в два этапа. Первый этап:

$$\frac{(\rho V)_c^{n+1}-(\rho V)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+L_\rho(\rho^{n+1},u^{n+1},v^{n+1},\dot r^{n+1})=0,$$

$$\frac{(\rho\hat u V)_c^{n+1}-(\rho u V)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+L_{\rho u}(\rho^{n+1},u^{n+1},v^{n+1},\dot r^{n+1})=0,$$

$$\frac{(\rho\hat v V)_c^{n+1}-(\rho v V)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+L_{\rho v}(\rho^{n+1},u^{n+1},v^{n+1},\dot r^{n+1})-\left(\frac{P}{r}V\right)_c^{n+1}=0.$$

На втором этапе фазы 3 тоже учитываем вязкость (по формулам, аналогичным (22)).

2.2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФАЗА 2

Для вычисления потоковых переменных на новом слое по времени рассмотрим характеристическую форму уравнений (15). Присутствие логарифма в инвариантах Римана (16) порождает существенную нелинейность, но при условии слабосжимаемости можно рассмотреть приближение локальных инвариант Римана в каждой пространственно-временной расчётной ячейке:

$$\vec I=\left(\overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{n}+\left\langle\frac{c}{\rho}\right\rangle\cdot\rho,\ \overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{n}-\left\langle\frac{c}{\rho}\right\rangle\cdot\rho,\ \overrightarrow{W}\cdot\overrightarrow{\tau}\right)^T, \tag{23}$$

где угловые скобки означают, что данные значения берутся из центра ячейки.

Характеристическая фаза схемы КАБАРЕ представляет собой линейную экстраполяцию локальных инвариантов Римана (23) по направлениям, определяемым собственными значениями системы (16) на полуцелом слое. Так, для направления OX, $\vec n=(1,\ 0)^T$, экстраполяция имеет следующий вид:

$$(I_m^x)_{i,j+1/2}^{n+1}=\begin{cases}2(I_m^x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}-(I_m^x)_{i+1,j+1/2}^{n}, & \text{если } \tilde\lambda_m>0,\\ 2(I_m^x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}-(I_m^x)_{i-1,j+1/2}^{n}, & \text{если } \tilde\lambda_m<0,\ \ m=\overline{1,3},\\ 0.5\big[(I_m^x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}+(I_m^x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}\big], & \text{иначе;}\end{cases}$$

$$\tilde\lambda_m=0.5\big[(\lambda_m^x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}+(\lambda_m^x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}\big].$$

Аналогичная процедура экстраполяции для нахождения локальных инвариантов Римана на новом временно́м слое проводится для направления OR, $\vec n=(0,\ 1)^T$.

Для сохранения монотонности к вычисленным значениям инвариантов на новом слое по времени применяется стандартная для схемы КАБАРЕ процедура монотонизации на основе принципа максимума [13].

По найденным локальным инвариантам Римана на новом слое по времени вычисляются новые потоковые значения $\vec\Psi^{n+1}$ на каждой грани расчётной сетки.

3. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЁТЫ

Ниже приведём результаты расчётов стандартных тестов.

3.1. КЛАССИЧЕСКИЙ ТЕСТ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе $\{(x,r)\colon\ 0\leqslant x\leqslant L=4\pi,\ \ 0\leqslant r\leqslant R_0=1\}$ с жёсткими неподвижными стенками при постоянной разности давлений P_L и P_R на левом и правом концах трубы соответственно. Формирующееся течение называется *течением Пуазейля* и имеет следующий профиль скорости:

$$u_p(x,r) = \frac{P_R - P_L}{4\nu L}(R^2 - r^2). \tag{24}$$

Считаем среду вязкой ($\nu = 0.63$) и слабосжимаемой с уравнением состояния $P(\rho) = c^2(\rho - \rho_0)$, где $c = 10$ и $\rho_0 = 1$. Расчёты выполнены при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(x,r,t_0) = 0, \quad v(x,r,t_0) = 0, \quad \rho(x,r,t_0) = \rho_0;$$

$$\rho(0,r,t) = \rho_L = 1.0, \quad \rho(4\pi,r,t) = \rho_R = 0.99;$$

$$v(x,0,t) = 0, \quad v(x,R_0,t) = 0,$$

$$u(x,R_0,t) = 0.$$

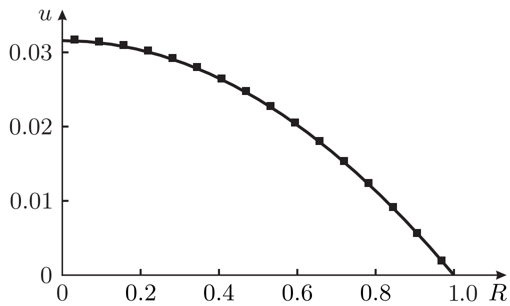

Рис. 2. Графики зависимости скорости от радиальной координаты.

На рис. 2 приведены зависимости компоненты скорости u от радиальной координаты для аналитического решения (24) (кривая) и для численного решения (точки). Расчёт проводился на сетке $(N_x \times N_r) = (200 \times 16)$. Для построения графика использовались данные о скоростях, взятые в центральном сечении трубы. Максимальная погрешность $\max|u_h - u_p| = 1.6 \cdot 10^{-4}$, т.е. имеет место практически точное совпадение.

3.2. КАНАЛ С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

Покажем работоспособность вычислительного алгоритма, собственно, при подвижных границах. Рассмотрим течение жидкости в вытянутом вдоль оси $x \in (0, 4\pi)$ цилиндре с симметрично изменяющимися относительно оси стенками. Динамика стенок цилиндра описывается выражением

$$R(x,t) = R_0 + \Delta R \sin(u_0 t - x), \quad u_0 = 0.1, \quad R_0 = 1, \quad \Delta R = 0.1.$$

Это соответствует бегущей волне с фазовая скоростью, равной величине u_0, и с периодом $T_0 = 2\pi/u_0 = 20\pi$.

Как и прежде, будем считать жидкость невязкой и слабосжимаемой. Уравнение состояния для неё запишем как $P(\rho) = c^2(\rho - \rho_0)$, где $c = 10$ и $\rho_0 = 1$. В начальный момент времени жидкость находилась в состоянии покоя (нулевые скорости) и $\rho(x,r,t_0) = \rho_0 = 1$. На боковых сечениях цилиндра задавались периодические условия для скорости и плотности, на стенках цилиндра — условие прилипания.

Под действием движущейся поверхности в области образуется периодическое течение жидкости с периодом T_0.

В расчётах использовались подвижные с равномерным распределением по вертикали узлы

$$r_{i,j}^n = \Delta r_i^n (j-1), \quad j = \overline{1, N_r}; \quad \Delta r_i^n = \frac{R(x_i,t_n)}{N_r - 1};$$

$$\dot{r}_{ij}^n = \lambda \frac{\partial R}{\partial t}\Big|_{(x_i,t_n)}, \quad \lambda = \frac{r_{ij}^n}{R(x_i,t_n)} \in [0,1].$$

Таким образом, узлы с индексами $j = N_r$ находились на поверхности R и двигались со скоростью, равной скорости поверхности.

На рис. 3 приведено векторное поле скоростей в расчёте на сетке $(N_x \times N_r)=(200\times 16)$ на момент времени t, равный половине периода колебания поверхности T_0.

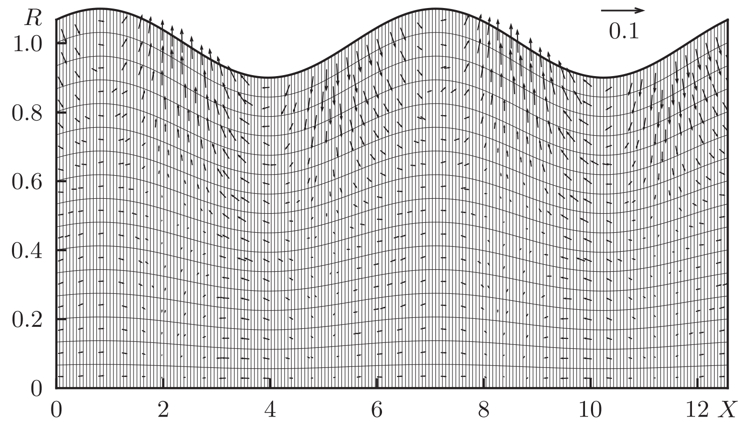

Рис. 3. Поле скоростей при $t = T_0/2$

Расчёты подтвердили консервативность схемы: полная масса жидкости $M = \sum_{ij} V_{i,j}\rho_{ij}$ сохраняется с машинной точностью. На рис. 4 представлены графики полных импульсов по оси OX (p_u) и в радиальном направлении OR (p_v), $t^* = t/T_0$. Они подтверждают установление T_0-периодичного течения в канале и малую диссипативность построенной схемы.

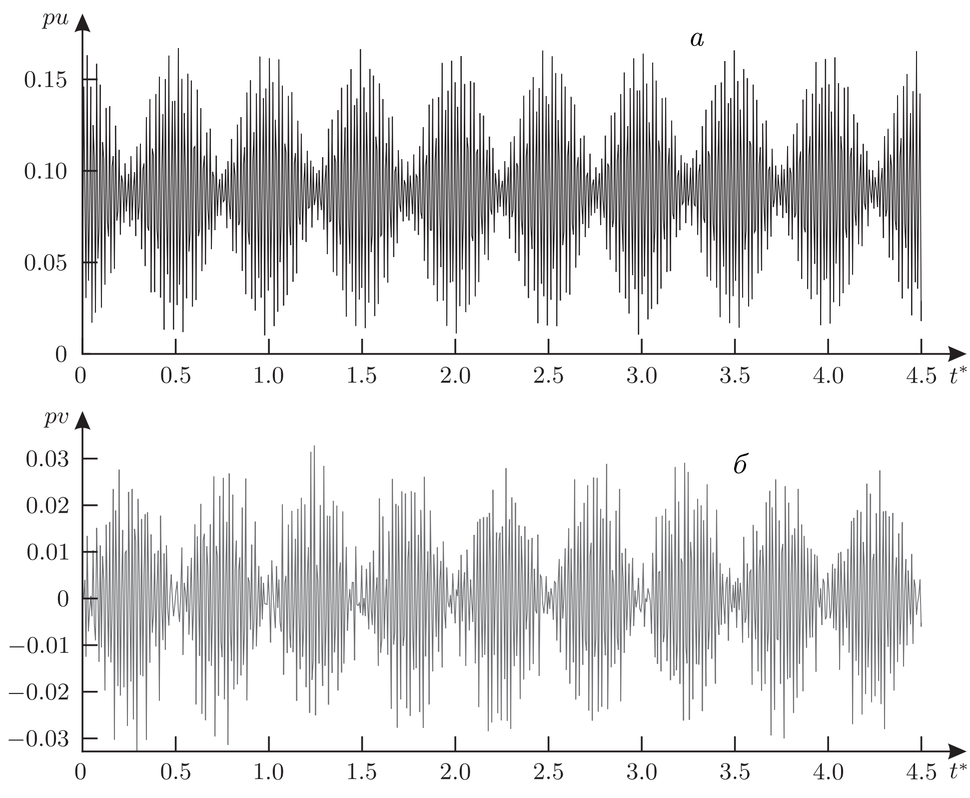

Рис. 4. Графики полного импульса: *а* — по оси OX, *б* — по оси OR.

Представленные результаты показывают работоспособность предложенного алгоритма. Полное описание валидации и верификации построенной схемы не входит в задачи данной работы и является предметом отдельных публикаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выведена система дифференциальных уравнений, описывающих течение крови как вязкой слабосжимаемой жидкости в отдельном сосуде с подвижными стенками в цилиндрических координатах в предположении осевой симметрии в смешанных эйлерово-лагранжевых координатах. Уравнения в СЭЛ переменных построены с учётом указанной особенности рассматриваемого течения и в привязке к характеру дискретной сетки для предполагаемого вычислительного алгоритма. Для полученной системы уравнений построена балансно-характеристическая схема на основе методики КАБАРЕ.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sherwin, S.J. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables / S.J. Sherwin, V. Franke, J. Peiro, K. Parker // J. of Engineering Math. — 2003. — V. 47. — P. 217–250.
2. Formaggia, L. One-dimensional models for blood flow in arteries / L. Formaggia, D. Lamponi, A. Quarteroni // J. of Engineering Math. — 2003. — V. 47. — P. 251–276.
3. Симаков, С.С. Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей / С.С. Симаков // Компьют. исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 5. — С. 581–604.
4. Вычислительный эксперимент в гемодинамике / А.Я. Буничева, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 7. — С. 920–935.
5. Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis / L. Formaggia, F. Nobile, A. Quarteroni, A. Veneziani // Comput. Visual. Sci. — 1999. — V. 2. — P. 75–83.
6. On the coupling of 3D and ID Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels / L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile, A. Quarteroni // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 2001. — V. 191, № 6–7. — P. 561–582.
7. Dobroserdova, T. Multiscale coupling of compliant and rigid walls blood flow models / T. Dobroserdova, M. Olshanskii, S. Simakov // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. — 2016. — V. 82, № 12. — P. 799–817.
8. Quarteroni, A. Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods / A. Quarteroni, M. Tuveri, A. Veneziani // Comput. Visualisation Sci. — 2000. — V. 2. — P. 163–197.
9. Personalized Computational Hemodynamics: Models, Methods, and Applications for Vascular Surgery and Antitumor Therapy / Y. Vassilevski, M. Olshanskii, S. Simakov [et al.]. — Academic Press, 2020. — 280 p.
10. A finite element method for the Navier–Stokes equations in moving domain with application to hemodynamics of the left ventricle / A. Danilov, A. Lozovskiy, M. Olshanskii, Yu. Vassilevski // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2017. — V. 32, № 4. — P. 225–236.
11. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука, 1986. — 736 с.
12. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В.М. Головизнин, М.А. Зайцев, С.А. Карабасов, И.А. Короткин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2013. — 467 с.
13. Головизнин, В.М. Нелинейная коррекция схемы Кабаре / В.М. Головизнин, С.А. Карабасов // Мат. моделирование. — 1998. — Т. 10, № 12. — С. 107–123.

BALANCE-CHARACTERISTIC METHOD FOR CALCULATING HEMODYNAMICS OF A SINGLE VESSEL

V. M. Goloviznin[1], V. V. Konoplianikov[2], P. A. Maiorov[3], S. I. Mukhin[4]

[1–4]*Lomonosov Moscow State University, Russia*
[1,3,4]*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Russia*
e-mail: [1]*gol@ibrae.ac.ru,* [2]*vaskonopl@mail.ru,* [3]*maiorov.peter@gmail.com,* [4]*vmmus@cs.msu.ru*

The paper is devoted to the construction of a numerical algorithm for calculating the blood flow in a volume vessel. The derivation of the system of differential equations describing the dynamics of fluid in a single vessel with moving walls in cylindrical coordinates assuming axial symmetry in arbitrary eulerian-lagrangian variables is given. Balance-characteristic scheme based on the CABARET methodology is constructed for the obtained system of equations. The results of calculations of test problems are given.

Keywords: hemodynamics, eulerian–lagrangian coordinates, weakly compressible fluid, hyperbolic equation, conservative-characteristic schemes.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation of the program for the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics within the framework agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Sherwin, S.J., Franke, V., Peiro, J., and Parker, K., One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables, *J. Engineer. Math.*, 2003, vol. 47, pp. 217–250.
2. Formaggia, L., Lamponi, D., and Quarteroni, A., One-dimensional models for blood flow in arteries, *J. Engineer. Math.*, 2003, vol. 47, pp. 251–276.
3. Simakov, S.S., Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods, *Comp. Research Model.*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 581–604.
4. Bunicheva, A.Ya., Mukhin, S.I., Sosnin, N.V., and Favorskii, A.P., Numerical experiment in hemodynamics, *Differ. Equat.*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 984–999.
5. Formaggia, L., Nobile, F., Quarteroni, A., and Veneziani, A., Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis, *Comput. Visual. Sci.*, 1999, vol. 2, pp. 75–83.
6. Formaggia, L., Gerbeau, J.-F., Nobile, F., and Quarteroni, A., On the coupling of 3D and ID Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2001, vol. 191, no. 6–7, pp. 561–582.
7. Dobroserdova, T., Olshanskii, M., and Simakov S., Multiscale coupling of compliant and rigid walls blood flow models, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 2016, vol. 82, no. 12, pp. 799–817.
8. Quarteroni, A., Tuveri, M., and Veneziani, A., Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods, *Comput. Visualisation Sci.*, 2000, vol. 2, pp. 163–197.
9. Vassilevski, Y., Olshanskii, M., Simakov, S., Kolobov, A., and Danilov, A., *Personalized Computational Hemodynamics: Models, Methods, and Applications for Vascular Surgery and Antitumor Therapy*, Academic Press, 2020.
10. Danilov, A., Lozovskiy, A., Olshanskii, M., and Vassilevski, Yu., A finite element method for the Navier–Stokes equations in moving domain with application to hemodynamics of the left ventricle, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2017, vol. 32, no. 4, pp. 225–236.
11. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika* (Course of Theoretical Physics. Vol. VI. Hydrodynamics), Moscow: Nauka, 1986.
12. Goloviznin, V.M., Zaitsev, M.A., Karabasov, S.A., and Korotkin, I.A., *Novyye algoritmy vychislitel'noy gidrodinamiki dlya mnogoprotsessornykh vychislitel'nykh kompleksov* (New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems), Moscow: MSU Press, 2013.
13. Goloviznin, V.M. and Karabasov, S.A., Nonlinear correction of Cabaret scheme, *Mat. Model.* 1998, vol. 10, no. 12, pp. 107–123.