ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 10

Октябрь 2023

ЖУРНАЛ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДУ

www.sciencejournals.ru

300 лет

Российская Академия Наук

СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 10, 2023

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1299–1317

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ТИПА ДИРАКА $2m$-ГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2023 г. Э. Дж. Ибадов

Рассматривается оператор типа Дирака с матричными коэффициентами. Устанавливаются оценки для корневых вектор-функций, критерии бесселевости и безусловной базисности в пространстве $L_2^{2m}(G)$, $G=(a,b)\subset\mathbb{R}$ – конечный интервал, систем корневых вектор-функций этого оператора.

DOI: 10.31857/S0374064123100011, EDN: OQXSAB

1. Формулировка основных результатов. В настоящей работе с помощью метода, разработанного В.А. Ильиным [1], исследован одномерный оператор типа Дирака $2m$-го порядка с суммируемым потенциалом и установлены антиаприорные оценки для корневых вектор-функций, критерий бесселевости и безусловной базисности в $L_2^{2m}(G)$ систем корневых вектор-функций. Будем понимать эти корневые вектор-функции в обобщённой трактовке, т.е. безотносительно к краевым условиям (см. [1]). Антиаприорные оценки впервые были установлены в статье [2] для обыкновенных дифференциальных операторов порядка n с гладкими коэффициентами. В дальнейшем установлению антиаприорных оценок было посвящено много работ (см., например, [3–8]). Эти оценки использовались при исследовании вопросов сходимости спектральных разложений.

Отметим, что при таком обобщённом понимании корневых функций (в смысле В.А. Ильина) [1] установлены необходимые и достаточные условия безусловной базисности в пространстве $L_2(G)$ систем корневых функций оператора

$$Lu=-u''+q(x)u,$$

где $q(x)\in L_1(G)$. Эти и другие вопросы изучались в [3, 6, 9–13] для обыкновенного дифференциального оператора высокого порядка и были установлены критерии бесселевости, базисности Рисса, безусловной базисности. Для оператора Дирака с потенциалом $P(x)\in L_2(G)$ критерии бесселевости и безусловной базисности сформулированы в работе [14]. Покомпонентная равномерная равносходимость на компакте, равномерная сходимость, базисность Рисса систем корневых вектор-функций, бесселевость, безусловная базисность для оператора типа Дирака изучались в статьях [15–20].

Свойствам базисности и другим спектральным свойствам корневых вектор-функций оператора Дирака (с краевыми условиями) посвящена обширная литература [21–31]. В работе [28], например, установлена базисность Рисса в случае, когда потенциал оператора Дирака принадлежит L_2 и краевые условия разделённые, а в [30] исследован случай с регулярными краевыми условиями и с потенциалом из класса L_2. Оператор Дирака с потенциалом из L_p, $p\geqslant 1$, исследован в статьях [26, 27]; для случая сильно регулярных краевых условий была доказана базисность Рисса, а в случае регулярных (но не сильно регулярных) краевых условий – базисность Рисса из подпространств. В [22, 23] исследована 2×2 система типа Дирака с потенциалами из класса L_1 и сильно регулярными краевыми условиями. Для $2m\times 2m$ системы Дирака с краевыми условиями Дирихле и потенциалом из L_2 базисность Рисса из подпространств доказана в работе [31]. В статье [24] показано, что система корневых векторов общей $n\times n$ системы типа Дирака при определённых граничных условиях образует базис Рисса со скобками.

Пусть $L_p^{2m}(G)$, $p \geqslant 1$, – пространство $2m$-компонентных вектор-функций

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{2m}(x))^{\mathrm{т}}$$

с нормой

$$\|f\|_{p,2m} = \left[\int\limits_G \left(\sum_{j=1}^{2m} |f_j(x)|^2\right)^{p/2} dx\right]^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ норма определяется равенством

$$\|f\|_{\infty,2m} = \sup_{x\in\overline{G}} \operatorname{vrai} |f(x)|.$$

Очевидно, что для произвольных функций $f(x) \in L_p^{2m}(G)$, $g(x) \in L_q^{2m}(G)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определено "скалярное произведение"

$$(f, g) = \int\limits_G \sum_{j=1}^{2m} f_j(x)\overline{g_j(x)}\, dx.$$

Рассмотрим оператор типа Дирака $2m$-го порядка

$$D\psi = B\frac{d\psi}{dx} + \Omega(x)\psi, \quad \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{2m}(x))^{\mathrm{т}},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_m), \quad T_2 = \operatorname{diag}(b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_{2m}),$$

$$(b_1 = b_2 = \ldots = b_m > 0, \quad b_{m+1} = \ldots = b_{2m} < 0),$$

$\Omega(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{2m}(x))$, $p_i(x)$, $i = \overline{1, 2m}$, – комплекснозначные функции, определённые на произвольном конечном интервале $G = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

Следуя работе [1], под *собственной функцией оператора* D, отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую тождественно не равную нулю комплекснозначную вектор-функцию $\overset{\circ}{\psi}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подынтервале интервала G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D\overset{\circ}{\psi} = \lambda\overset{\circ}{\psi}$.

Аналогично под *присоединённой функцией порядка* $l \geqslant 1$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{\psi}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную вектор-функцию $\overset{l}{\psi}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подынтервале интервала G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D\overset{l}{\psi} = \lambda\overset{l}{\psi} + \overset{l-1}{\psi}$.

Теорема 1. *Пусть функции* $p_i(x)$, $i = \overline{1, 2m}$, *принадлежат классу* $L_1^{\mathrm{loc}}(G)$. *Тогда для любого компакта* $K \subset G$ *существуют константы* $C^r(K, l, b_1, b_{m+1})$, $r = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, *не зависящие от* λ *и такие, что справедливы оценки*

$$\|\overset{l-1}{\psi}\|_{L^2_\infty(K)} \leqslant C^1(K, l, b_1, b_{m+1})(1 + |\operatorname{Im}\lambda|)\|\overset{l}{\psi}\|_{L^2_\infty(K)}, \tag{1}$$

$$\|\overset{l}{\psi}\|_{L^2_\infty(K)} \leqslant C^2(K, l, b_1, b_{m+1})(1 + |\operatorname{Im}\lambda|)^{1/p}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^2_p(K)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{2}$$

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – произвольная система, составленная из собственных и присоединённых вектор-функций оператора D, $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – соответствующая ей система собственных значений. Кроме того, функция $\psi_k(x)$ входит в систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ вместе со всеми соответствующими ей присоединёнными функциями меньшего порядка. Это означает, что $D\psi_k = \lambda_k\psi_k + \theta_k\psi_{k-1}$, где θ_k равно либо нулю (в этом случае $\psi_k(x)$ – собственная вектор-функция), либо единице (в этом случае $\psi_k(x)$ – присоединённая вектор-функция, причём $\lambda_k = \lambda_{k-1}$).

Определение 1. Будем говорить, что для заданной системы функций $h_k(x) \in L_2^{2m}(G)$ выполняется *неравенство Бесселя*, если существует постоянная M такая, что для произвольной вектор-функции $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h_k, f)|^2 \leqslant M\|f\|_{2,2m}^2,$$

где M – константа, не зависящая от $f(x)$.

Теорема 2 (критерий бесселевости). *Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены и существует константа C_0 такая, что*

$$|\operatorname{Im}\lambda_k| \leqslant C_0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Тогда для того чтобы система функций $\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^{2m}(G)$ удовлетворяла неравенству Бесселя, необходимо и достаточно существование константы M_1 такой, что

$$\sum_{|\operatorname{Re}\lambda_k - \tau| \leqslant 1} 1 \leqslant M_1, \tag{4}$$

где τ – произвольное действительное число.

Обозначим через D^* формально сопряжённый оператор к оператору D:

$$D^* = -B^*\frac{d}{dx} + \Omega^*(x),$$

где $\Omega^*(x)$ – сопряжённая матрица к матрице $\Omega(x)$. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – биортогонально сопряжённая к $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^{2m}(G)$ система, состоящая из корневых вектор-функций оператора D^* (т.е. $D^*\varphi_k = \overline{\lambda_k}\varphi_k + \theta_{k+1}\varphi_{k+1}$).

Теорема 3 (о безусловной базисности). *Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены, одна из систем $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ или $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2^{2m}(G)$ и выполняется условие (3). Тогда необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2^{2m}(G)$ каждой из этих систем является существование постоянных M_1 и M_2, обеспечивающих справедливость неравенства (4) и*

$$\|\psi_k\|_{2,2m}\|\varphi_k\|_{2,2m} \leqslant M_2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Замечание 1. Отметим, что при условиях теоремы 3 выполнение неравенств (4) и (5) является необходимым и достаточным условием для базисности Рисса каждой из систем

$$\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{\varphi_k(x)\|\varphi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$$

в пространстве $L_2^{2m}(G)$.

Определение 2. Система $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$ называется *квадратично близкой* в $L_2^{2m}(G)$ к системе $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$, если имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\tau_k - \psi_k\|_{2,2m}^2 < \infty.$$

Теорема 4 (об эквивалентной базисности). *Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, выполняются условия (3)–(5) и система $\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ квадратично близка к некоторому базису $\{z_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ пространства $L_2^{2m}(G)$. Тогда системы $\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_k(x)\|\psi_k\|_{2,2m}\}_{k=1}^{\infty}$ являются* *базисами в* $L_2^{2m}(G)$, *причём эквивалентны соответственно базису* $\{z_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и его биортогонально сопряжённой системе.*

2. Вспомогательные леммы. Для доказательств теорем 1–3 необходимы некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (формула сдвига). *Если функции* $p_i(x)$, $i=\overline{1,2m}$, *принадлежат классу* $L_1^{\rm loc}(G)$ *и точки* $x-t$, x, $x+t$ *находятся в области* G, *то справедливы следующие формулы:*

$$\overset{l}{\psi}(x+t)=\left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}tI-\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\overset{l}{\psi}(x)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_x^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi+x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi+x)I\right)[\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)-\overset{l-1}{\psi}(\xi)]\,d\xi, \quad (6)$$

$$\overset{l}{\psi}(x-t)=\left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}tI+\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\overset{l}{\psi}(x)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_{x-t}^{x}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t+\xi-x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t+\xi-x)I\right)[\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)-\overset{l-1}{\psi}(\xi)]\,d\xi, \quad (7)$$

$$\overset{l}{\psi}(x+t)+\overset{l}{\psi}(x-t)=2\overset{l}{\psi}(x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t+B^{-1}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{sign}(\xi-x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I\right)[\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)-\overset{l-1}{\psi}(\xi)]\,d\xi, \quad (8)$$

где I *– единичный оператор в* E^{2m}, *а* E^{2m} *является* $2m$*-мерным евклидовым пространством.*

Доказательство. Для вывода формул (6) и (7) достаточно применить к уравнению

$$D\overset{l}{\psi}(\xi)=\lambda\overset{l}{\psi}(\xi)+\overset{l-1}{\psi}$$

оператор

$$\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I-\operatorname{sign}(\xi-x)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\right)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}$$

и проинтегрировать по параметру ξ от x до $x+t$ (от $x-t$ до x), а затем провести интегрирование по частям в выражении

$$\int\limits_x^{x+t}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi+x)I-\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi+x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)Bd\overset{l}{\psi}(\xi)$$

$$\left(\int\limits_{x-t}^{x}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t+\xi-x)I+\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t+\xi-x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)Bd\overset{l}{\psi}(\xi)\right)$$

и сгруппировать подобные члены. Формула (8) вытекает из формул (6) и (7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $p_i(x)$, $i=\overline{1,2m}$, *– функции из класса* $L_1^{\rm loc}(G)$ *и точки* $x-t$, x, $x+t$ *принадлежат области* G, *то справедлива формула*

$$\frac{2t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\sin\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l-1}{\psi}(x)=2\cos\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)-\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x-t)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I+\operatorname{sign}(\xi-x)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{x-t}^{x+t}(t-|x-\xi|)\times$$

$$\times\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I-\operatorname{sign}(\xi-x)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right](\Omega(\xi)\overset{l-1}{\psi}(\xi)-\overset{l-2}{\psi}(\xi))\,d\xi. \tag{9}$$

Доказательство. Вычитая из (6) равенство (7), будем иметь

$$\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x-t)=-2\sin\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(\operatorname{sign}(\xi-x)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I\right)[\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)-\overset{l-1}{\psi}(\xi)]\,d\xi. \tag{10}$$

Запишем формулу (8) в следующем виде:

$$\overset{l}{\psi}(x+t)+\overset{l}{\psi}(x-t)=2\cos\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\operatorname{sign}(\xi-x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I\right)\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-$$

$$-B^{-1}\int\limits_0^t\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\left\{\overset{l-1}{\psi}(x+r)+\overset{l-1}{\psi}(x-r)\right\}dr+$$

$$+B^{-1}\int\limits_0^t\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)I\left\{\overset{l-1}{\psi}(x+r)-\overset{l-1}{\psi}(x-r)\right\}dr.$$

Подставляя формулы (8) и (10) при $l-1$ в последнее равенство, меняя порядки интегрирования в двойных интегралах и учитывая, что $B^{-1}=-B/|b_1b_{m+1}|$ и $(B^{-1})^2=-I/|b_1b_{m+1}|$, получаем

$$\overset{l}{\psi}(x+t)+\overset{l}{\psi}(x-t)=2\cos\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)+\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sign}(\xi-x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{2}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}r\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)+\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}r\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)\right]dr\overset{l-1}{\psi}(x)-$$

$$-\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{|x-\xi|}^{t}\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(r-|x-\xi|)\frac{I}{|b_1b_{m+1}|}+\right.$$

$$+\operatorname{sign}(\xi-x)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(r-|x-\xi|)\frac{B}{|b_1b_{m+1}|^{3/2}}+$$

$$+\operatorname{sign}(\xi-x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(r-|x-\xi|)\frac{B}{|b_1b_{m+1}|^{3/2}}-$$

$$\left.-\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-r)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(r-|x-\xi|)\frac{I}{|b_1b_{m+1}|}\right](\Omega(\xi)\overset{l-1}{\psi}(\xi)-\overset{l-2}{\psi}(\xi))\,dr.$$

Отсюда следует, что

$$\overset{l}{\psi}(x+t)+\overset{l}{\psi}(x-t)=2\cos\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l}{\psi}(x)-\frac{2t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\sin\frac{\lambda t}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\overset{l-1}{\psi}(x)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)I+\operatorname{sign}(\xi-x)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right]\Omega(\xi)\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x-t}^{x+t}(t-|x-\xi|)\times$$

$$\times\left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{I}{|b_1b_{m+1}|}-\operatorname{sign}(\xi-x)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x-\xi|)\frac{B}{|b_1b_{m+1}|^{3/2}}\right](\Omega(\xi)\overset{l-1}{\psi}(\xi)-\overset{l-2}{\psi}(\xi))\,d\xi.$$

Из последнего равенства вытекает формула (9). Лемма доказана.

Лемма 3. *При условиях леммы 2 справедливы следующие формулы:*

$$\overset{l}{\psi}(x+t)=\overset{l}{\psi}(x)+\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+t}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi,\qquad(11)$$

$$\overset{l}{\psi}(x-t)=\overset{l}{\psi}(x)-\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{x-t}^{x}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{x-t}^{x}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi,\qquad(12)$$

$$2t\overset{l-1}{\psi}(x)=B\{\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x-t)\}+\int\limits_{x-t}^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^t dr\int\limits_{x-r}^{x+r}\operatorname{sign}(\xi-x)\{(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)-\overset{l-2}{\psi}(\xi)\}\,d\xi.\qquad(13)$$

Доказательство. Проинтегрируем уравнение $D\overset{l}{\psi}(\xi) = \lambda\overset{l}{\psi}(\xi) + \overset{l-1}{\psi}(\xi)$ по ξ от x до $x+t$:

$$B\int\limits_x^{x+t} d\overset{l}{\psi}(\xi) + \int\limits_x^{x+t} \Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi = \lambda\int\limits_x^{x+t}\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi + \int\limits_x^{x+t}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi.$$

После интегрирования по частям в первом интеграле в левой части имеем

$$B[\overset{l}{\psi}(x+t) - \overset{l}{\psi}(x)] = -\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi + \int\limits_x^{x+t}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, в свою очередь, следует равенство

$$\overset{l}{\psi}(x+t) - \overset{l}{\psi}(x) = -B^{-1}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi + B^{-1}\int\limits_x^{x+t}\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi,$$

из которого, учитывая, что $B^{-1} = -B/|b_1b_{m+1}|$, получаем равенство (11).

Аналогично доказывается формула (12).

Теперь докажем соотношение (13). Для этого (11) представим в виде

$$\overset{l}{\psi}(x+t) = \overset{l}{\psi}(x) + \frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi - \frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^t\overset{l-1}{\psi}(x+r)\,dr.$$

Учитывая в последнем интеграле значение $\overset{l-1}{\psi}(x+r)$ из (10), получаем

$$\overset{l}{\psi}(x+t) = \overset{l}{\psi}(x) + \frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi - \frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\overset{l-1}{\psi}(x)t -$$
$$-\frac{B^2}{|b_1b_{m+1}|^2}\int\limits_0^t dr\int\limits_x^{x+r}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi + \frac{B^2}{|b_1b_{m+1}|^2}\int\limits_0^t dr\int\limits_x^{x+r}\overset{l-2}{\psi}(\xi)\,d\xi.$$

Так как $B^2 = -|b_1b_{m+1}|I$, из последнего равенства будем иметь

$$\overset{l}{\psi}(x+t) = \overset{l}{\psi}(x) + \frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi - \frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\overset{l-1}{\psi}(x)t +$$
$$+\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^t dr\int\limits_x^{x+r}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi - \frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^t dr\int\limits_x^{x+r}\overset{l-2}{\psi}(\xi)\,d\xi. \quad (14)$$

Аналогично находим, что

$$\overset{l}{\psi}(x-t) = \overset{l}{\psi}(x) - \frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{x-t}^{x}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi +$$
$$+\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\overset{l-1}{\psi}(x)t + \frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^t dr\int\limits_{x-r}^{x}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)\,d\xi - \frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^t dr\int\limits_{x-r}^{x}\overset{l-2}{\psi}(\xi)\,d\xi. \quad (15)$$

Вычитая из (14) равенство (15), получаем

$$\overset{l}{\psi}(x+t)-\overset{l}{\psi}(x-t)=\frac{B}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{x-t}^{x+t}(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l}{\psi}(\xi)\,d\xi-\frac{2B}{|b_1b_{m+1}|}\overset{l-1}{\psi}(x)t+$$

$$+\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_0^t dr\int\limits_{x-r}^{x+r}\operatorname{sign}(\xi-x)\{(\Omega(\xi)-\lambda I)\overset{l-1}{\psi}(\xi)-\overset{l-2}{\psi}(\xi)\}\,d\xi.$$

Из последнего соотношения следует формула (13). Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $K=[a',b']\subset G$. Докажем оценку (1) методом математической индукции.

Так как $\overset{-1}{\psi}\equiv 0$, то оценка (1) при $l=0$ будет справедливой с константой

$$C^1(K,0,b_1,b_{m+1})=1.$$

Предположим, что неравенство (1) справедливо при $l=k$. Так как функции $p_i(x)\in L_1(K)$, $i=\overline{1,2m}$, то можно выбрать число R_m таким, чтобы для любого множества $E_{2m}\subset K$, $\operatorname{mes}E_{2m}\leqslant 2\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}R_m$, выполнялось неравенство

$$\max\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\int\limits_{E_{2m}}\left[\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\right]d\xi,\ \frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{E_{2m}}\left[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)|+\sum_{i=m+1}^{2m}|b_1p_i(\xi)|\right]d\xi\right\}\leqslant\frac{1}{240}. \quad (16)$$

Выберем числа h_m и $h_{k+1,m}$ следующим образом:

$$0<h_m\leqslant\frac{1}{\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}}\min\left\{\frac{b'-a'}{4},R_m,\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right\},$$

$$0<h_{k+1,m}=\frac{1}{\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}}\times$$

$$\times\min\left\{\frac{1}{120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)}\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right)^{-1},\frac{b'-a'}{4},R_m,\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right\}$$

и обозначим $h_m\sqrt{|b_1b_{m+1}|}=\delta_m$, $h_{k+1,m}\sqrt{|b_1b_{m+1}|}=\delta_{k+1,m}$.

Записав формулу (8) при $l=k$ в точках x, $x+t$, $x+2t$, где $t=\delta_m$, $x\in[a',(a'+b')/2]$, в силу неравенств

$$|\sin z|\leqslant 2,\quad |\cos z|\leqslant 2,\quad |\operatorname{Im}z|\leqslant 1 \quad (17)$$

находим, что

$$|\overset{k}{\psi}(x)|\leqslant 5\max_{x\in[a'+\delta_m,b'-\delta_m]}|\overset{k}{\psi}(x)|+2\left\{\frac{1}{\sqrt{b_1b_{m+1}}}\int\limits_x^{x+2\delta_m}\left[\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+2\delta_m}\left[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)|+\sum_{i=m+1}^{2m}|b_1p_i(\xi)|\right]d\xi\right\}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}+$$

$$+4\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Отсюда в силу неравенства (16) для любого $x \in [a', (a'+b')/2]$ имеем оценку

$$|\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant 5 \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)| + \frac{1}{2}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} +$$

$$+ 4\delta_m\bigg\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\bigg\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}. \tag{18}$$

Из формулы (8) аналогично получается неравенство (18) при $x \in [(a'+b')/2, b']$. Таким образом, при $x \in K$ справедливо

$$\frac{1}{2}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} - 4\delta_m\bigg\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\bigg\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} \leqslant 5 \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)|.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{10}\bigg[\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} - 8\delta_m\bigg\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\bigg\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\bigg] \leqslant \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)|. \tag{19}$$

В силу неравенств (17) из формулы (9) при $t = \delta_m$, $x \in [a'+\delta_m, b'-\delta_m]$, $l = k+1$ будем иметь

$$2\delta_m|\sin(\lambda\delta_m)||\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant 6\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} + 2\bigg\{\frac{1}{\sqrt{b_1 b_{m+1}}}\int\limits_{x-\delta_m}^{x+\delta_m}\bigg[\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\bigg]d\xi +$$

$$+ \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{x-\delta_m}^{x+\delta_m}\bigg[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m}|b_1 p_i(\xi)|\bigg]d\xi\bigg\}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} +$$

$$+ 2\delta_m\bigg\{\frac{1}{\sqrt{b_1 b_{m+1}}}\int\limits_{x-\delta_m}^{x+\delta_m}\bigg[\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\bigg]d\xi + \frac{1}{|b_1 b_{m+1}|}\int\limits_{x-\delta_m}^{x+\delta_m}\bigg[\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)| + \sum_{i=m+1}^{2m}|b_1 p_i(\xi)|\bigg]d\xi\bigg\} \times$$

$$\times \|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} + \delta_m^2\bigg\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\bigg\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

Отсюда в силу неравенства (16) и произвольности точки $x \in [a'+\delta_m, b'-\delta_m]$ находим, что

$$\delta_m|\sin(\lambda\delta_m)| \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant 7\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} +$$

$$+ \frac{\delta_m}{60}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} + 4\delta_m^2\bigg\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\bigg\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}$$

или

$$|\sin(\lambda\delta_m)| \max_{x\in[a'+\delta_m, b'-\delta_m]} |\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant \frac{4}{\delta_m}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} +$$

$$+ \frac{1}{120}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} + 2\delta_m\bigg\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\bigg\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

Объединив последнее неравенство с неравенством (19), получим

$$\frac{|\sin(\lambda\delta_m)|}{10}\bigg[\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)} - 8\delta_m\bigg\{\frac{1}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\bigg\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\bigg] -$$

$$-\frac{1}{120}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}-2\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right\}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\leqslant\frac{4}{\delta_m}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

В силу предположения справедливости оценки (1) при $l=k$

$$\left\{\frac{|\sin(\lambda\delta_m)|}{10}\left[1-8\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right\}C^1(K,k,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{120}-2\delta_m\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right\}C^1(K,k,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\right\}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4}{\delta_m}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}. \tag{20}$$

Рассмотрим случай

$$|\lambda|\geqslant 2\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}\times$$
$$\times\max\left\{\frac{4}{b'-a'},\frac{1}{R_m},120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right)\right\}(1+|\operatorname{Im}\lambda|).$$

Тогда из определения числа $\delta_{k+1,m}$ имеем $|\delta_{k+1,m}\lambda|\geqslant 2$, $|\delta_{k+1,m}\operatorname{Im}\lambda|\leqslant 1$. Нам понадобится следующее элементарное неравенство: $\sup\limits_{\alpha\in(1/2,1)}|\sin(\alpha z)|>1/3$ при $|\operatorname{Im}z|\leqslant 1$ и $|z|\geqslant 2$. Выбираем число $\alpha\in(1/2,1)$ таким, чтобы выполнялось $|\sin(\alpha\lambda\delta_{k+1,m})|\geqslant 1/3$. Тогда из неравенства (20), $\delta_m=\alpha\delta_{k+1,m}$, получим

$$\left\{\frac{1}{30}\left[1-\frac{8}{120}\right]-\frac{1}{120}-\frac{1}{60}\right\}\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\leqslant\frac{4}{\delta_m}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

Следовательно,

$$\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\leqslant\frac{1400}{\delta_{k+1,m}}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

С учётом определения числа $\delta_{k+1,m}$ имеем оценку

$$\|\overset{k}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\leqslant 1400\max\left\{\frac{4}{b'-a'},\frac{1}{R_m},120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right)\right\}\times$$
$$\times(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}. \tag{21}$$

Рассмотрим случай

$$|\lambda|<2\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}\times$$
$$\times\max\left\{\frac{4}{b'-a'},\frac{1}{R_m},120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right)\right\}(1+|\operatorname{Im}\lambda|).$$

Выберем число

$$S_k\geqslant 2\max\{1,\sqrt{|b_1b_{m+1}|}\}\max\left\{\frac{4}{b'-a'},\frac{1}{R_m},120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right)\right\}$$

таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_{E_{2m}}\left\{\left[\sum_{i=1}^m|b_{m+1}p_i(\xi)|+\sum_{i=m+1}^{2m}|b_1p_i(\xi)|\right]+m|\lambda|(|b_1|+|b_{m+1}|)\right\}d\xi<\frac{1}{8}$$

для любого $E_{2m} \subset K$, $\operatorname{mes} E_{2m} \leqslant 1/(S_k(1+|\operatorname{Im}\lambda|))$. Это возможно в силу суммируемости функций $p_i(\xi)$, $i=\overline{1,2m}$, на компакте K. Определим число

$$\delta_m^{k+1} = \frac{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}{2S_k(1+|\operatorname{Im}\lambda|)}.$$

Тогда из формул (11) и (12) при $l=k$ находим, что

$$\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant 2 \max_{x\in[a'+\delta_m^{k+1}, b'-\delta_m^{k+1}]} |\overset{k}{\psi}(x)| + \frac{1}{8}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + 2m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\delta_m^{k+1}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Следовательно,

$$\frac{7}{16}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} - m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\delta_m^{k+1}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant \max_{x\in[a'+\delta_m^{k+1}, b'-\delta_m^{k+1}]} |\overset{k}{\psi}(x)|. \qquad (22)$$

Из формулы (13) при $t=\delta_m^{k+1}$ и $l=k+1$ следует оценка

$$2\delta_m^{k+1} \max_{x\in[a'+\delta_m^{k+1}, b'-\delta_m^{k+1}]} |\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant 2m(|b_1|+|b_{m+1}|)\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} +$$

$$+\frac{1}{8}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \frac{1}{8}\delta_m^{k+1}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}(\delta_m^{k+1})^2\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает неравенство

$$\max_{x\in[a'+\delta_m^{k+1}, b'-\delta_m^{k+1}]} |\overset{k}{\psi}(x)| \leqslant \frac{m(|b_1|+|b_{m+1}|)+1/16}{\delta_m^{k+1}}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} +$$

$$+\frac{1}{16}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \frac{m}{2}\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\delta_m^{k+1}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

Учитывая (22), из последнего соотношения имеем

$$\frac{3}{8}\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant \frac{3m}{2}\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\delta_m^{k+1}\|\overset{k-1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} + \left(m(|b_1|+|b_{m+1}|)+\frac{1}{16}\right)\frac{1}{\delta_m^{k+1}}\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}.$$

В силу определений чисел δ_m^{k+1} и S_k получим оценку

$$\|\overset{k}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)} \leqslant 16S_k\left[m(|b_1|+|b_{m+1}|)+\frac{1}{16}\right]\left(3\sqrt{|b_1 b_{m+1}|} - 6m(|b_1|+|b_{m+1}|)\frac{1}{S_k}C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\right)^{-1} \times$$

$$\times (1+|\operatorname{Im}\lambda|)\|\overset{k+1}{\psi}\|_{L_\infty^{2m}(K)}. \qquad (23)$$

Из неравенств (21) и (23) следует оценка (1) при $l=k+1$.

Теперь докажем оценку (2). Запишем формулу (7) в точках x, $x+t$, $x\in[a',(a'+b')/2]$, $t\in[0,\delta_{l+1,m}]$, в виде

$$\overset{l}{\psi}(x) = \left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}tI + \sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}t\frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}\right]\overset{l}{\psi}(x+t) +$$

$$+B^{-1}\int\limits_x^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(\xi-x)\frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(\xi-x)I\right)(\Omega(\xi)\overset{l}{\psi}(\xi) - \overset{l-1}{\psi}(\xi))\,d\xi.$$

Проинтегрировав последнее равенство по t от 0 до $\delta_{l+1,m}$ и использовав неравенство (17), найдём

$$\delta_{l+1,m}|\overset{l}{\psi}(x)| \leqslant \left(2+\frac{2m(|b_1|+|b_{m+1}|)}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\int\limits_0^{\delta_{l+1,m}}|\overset{l}{\psi}(x+t)|\,dt + 2\delta_{l+1,m}\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_x^{x+\delta_{l+1,m}}\left(\sum_{i=1}^{2m}|p_i(\xi)|\right)d\xi+\frac{1}{|b_1b_{m+1}|}\int\limits_x^{x+\delta_{l+1,m}}\left(\sum_{i=1}^{m}|b_{m+1}p_i(\xi)|+\sum_{i=m+1}^{2m}|b_1p_i(\xi)|\right)d\xi\right\}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\delta^2_{l+1,m}\|\overset{l-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}+2m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\delta^2_{l+1,m}\|\overset{l-1}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

С помощью неравенства Гёльдера и оценки (1) из этого соотношения в силу (16) получим

$$\delta_{l+1,m}|\overset{l}{\psi}(x)| \leqslant \left(2+2m\frac{(|b_1|+|b_{m+1}|)}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\delta^{1-1/p}_{l+1,m}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_p(K)}+\frac{1}{60}\delta_{l+1,m}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}+$$

$$+2\delta^2_{l+1,m}\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right\}C^1(K,l,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$|\overset{l}{\psi}(x)| \leqslant 2\left(1+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\delta^{-1/p}_{l+1,m}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_p(K)}+\left[\frac{1}{60}+2\delta_{l+1,m}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right\}C^1(K,l,b_1,b_{m+1})(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\right]\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\delta^{-1/p}_{l+1,m}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_p(K)}+\frac{1}{30}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}.$$

С учётом формулы (6) такое же неравенство получаем и при $x\in[(a'+b')/2,b']$. Следовательно,

$$\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_\infty(K)}\leqslant 3\left(1+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\left[\max\left\{\frac{4}{b'-a'},\frac{1}{R_m},120C^1(K,k,b_1,b_{m+1})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{1}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}+m\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1b_{m+1}|}\right)\right\}\right]^{1/p}(1+|\operatorname{Im}\lambda|)^{1/p}\|\overset{l}{\psi}\|_{L^{2m}_p(K)}.$$

Справедливость оценки (2) установлена. Теорема 1 доказана.

Отметим, что оценки (1) и (2) в работе [14] ранее были получены для случая $m=1$, $b_1=-b_2=1$.

4. Доказательство критерия бесселевости. Необходимость. Пусть $G=(0,2\pi)$ и τ – произвольное действительное число. Введём множество индексов

$$I_\tau=\{k:|\operatorname{Re}\lambda_k-\tau|\leqslant 1,\quad |\operatorname{Im}\lambda_k|\leqslant C_0\},$$

где C_0 – постоянная из условия (3). Выберем положительные числа R^* и R такие, что $R\leqslant R^*$ и для любого множества $E\subset\overline{G}$, $\operatorname{mes}E\leqslant 2R^*$, выполняется неравенство

$$\omega(R)=\sup_{E\subset\overline{G}}\{\|\Omega\|_{1,E}\}\leqslant L^{-1},$$

где $\|\Omega\|_{1,E}=\int_E(\sum_{i=1}^{2m}|p_i(x)|)\,dx$, L – положительное число, выбор значения которого будет определён позже.

Пусть $k\in I_\tau$ и $x\in[0,\pi]$. Запишем формулу среднего значения (8) для точек x, $x+t$, $x+2t$ при $t\in[0,R]$:

$$\psi_k(x)=2\psi_k(x+t)\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t-\psi_k(x+2t)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_x^{x+2t}\left\{\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\operatorname{sign}(\xi-x-t)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)I\right\}[\Omega(\xi)\psi_k(\xi)-\theta_k\psi_{k-1}(\xi)]\,d\xi.$$

Добавляя и вычитая $2\psi_k(x+t)\cos(\tau t/\sqrt{|b_1b_{m+1}|})$ в правой части этого равенства, проинтегрируем полученное соотношение по t от 0 до R и получим

$$\psi_k(x)=2R^{-1}\int\limits_0^R\psi_k(x+t)\cos\frac{\tau}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt-R^{-1}\int\limits_0^R\psi_k(x+2t)\,dt+$$

$$+4R^{-1}\int\limits_0^R\psi_k(x+t)\sin\frac{\lambda_k+\tau}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\sin\frac{\tau-\lambda_k}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt+$$

$$+R^{-1}B^{-1}\int\limits_0^R\int\limits_x^{x+2t}\left\{\sin\left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)\right)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{sign}(\xi-x-t)\cos\left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)\right)I\right\}[\Omega(\xi)\psi_k(\xi)-\theta_k\psi_{k-1}(\xi)]\,d\xi\,dt.$$

Применив формулу (6) в третьем слагаемом, будем иметь

$$\psi_k(x)=R^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(t)\chi(t)\,dt+$$

$$+4R^{-1}\int\limits_0^R\left(\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}tI-\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}\right)\sin\frac{\lambda_k+\tau}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\times$$

$$\times\sin\frac{\tau-\lambda_k}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt\,\psi_k(x)+4R^{-1}B^{-1}\int\limits_0^R\int\limits_x^{x+t}\left\{\left(\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|\xi-x|)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{B}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}-\left(\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|\xi-x|)I\right)\right\}[\Omega(\xi)\psi_k(\xi)-\theta_k\psi_{k-1}(\xi)]\,d\xi\times$$

$$\times\sin\frac{\tau+\lambda_k}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\sin\frac{\tau-\lambda_k}{2\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt+R^{-1}B^{-1}\int\limits_0^R\int\limits_x^{x+2t}\left\{\left(\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-|x+t-\xi|)\right)\times\right.$$

$$\times \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \left(\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}(t - |x+t-\xi|)\right) I\Biggr\}[\Omega(\xi)\psi_k(\xi) - \theta_k\psi_{k-1}(\xi)]\,d\xi\,dt =$$

$$= R^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(t)\chi(t)\,dt + J_1 + J_2 + J_3, \tag{24}$$

где $\chi(t) = 2\cos(\tau(x-t)/\sqrt{b_1 b_{m+1}}) - 1/2$ при $x \leqslant t \leqslant x+R$, $\chi(t) = -1/2$ при $x+R < t \leqslant x+2R$ и $\chi(t) = 0$ при $t \notin [x, x+2R]$.

Учитывая $k \in I_\tau$ и используя неравенства $|\sin z| \leqslant 2$, $|\cos z| \leqslant 2$ и $|\sin z| \leqslant 2|z|$ при $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant 1$, получаем для слагаемых J_1, J_2, J_3 оценки

$$|J_1| \leqslant 8Rm\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)|\tau - \lambda_k||\psi_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 8Rm\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)(1 + |\mathrm{Im}\,\lambda_k|)|\psi_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 8Rm\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)(1 + C_0)\|\psi_k\|_{\infty,2m},$$

$$|J_2| \leqslant 32m\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)\left(\omega(R)\|\psi_k\|_{\infty,2m} + \frac{R}{2}\|\theta_k\psi_{k-1}\|_{\infty,2m}\right),$$

$$|J_3| \leqslant 2m\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)(\omega(R)\|\psi_k\|_{\infty,2m} + R\|\theta_k\psi_{k-1}\|_{\infty,2m}),$$

с учётом которых в равенстве (24) приходим к неравенству

$$|\psi_k(x)| \leqslant R^{-1}\left|\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(t)\chi(t)\,dt\right| + 8m\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)(R(1 + C_0) + 5\omega(R))\|\psi_k\|_{\infty,2m} +$$

$$+ 18Rm\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)\|\theta_k\psi_{k-1}\|_{\infty,2m}. \tag{25}$$

Аналогично доказывается (25) в случае $x \in [\pi, 2\pi]$. При этом функция $\chi(t)$ определяется следующим образом: $\chi(t) = -1/2$ при $x - 2R \leqslant t < x - R$, $\chi(t) = 2\cos(\tau(x-t)/\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}) - 1/2$ при $x - R \leqslant t \leqslant x$, $\chi(t) = 0$ при $t \notin [x - 2R, x]$. Следовательно, неравенство (25) верно при любом $x \in [0, 2\pi]$.

Применив оценки (1) и (2), с учётом $1 + |\mathrm{Im}\,\lambda_k| \leqslant 1 + C_0$ из (25) получим

$$|\psi_k(x)| \leqslant R^{-1}\left|\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(t)\chi(t)\,dt\right| + m\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right) \times$$

$$\times \{40\omega(R)C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1})(1 + C_0)^{1/2} + 8RC^2(G, n_k, b_1, b_{m+1})(1 + C_0)^{3/2} +$$

$$+ 18RC^1(G, n_k, b_1, b_{m+1})C^2(n_k, G, b_1, b_{m+1})\theta_k(1 + C_0)^{3/2}\}\|\psi_k\|_{2,2m}.$$

В силу равномерной ограниченности длин цепочек корневых вектор-функций выполняются неравенства

$$\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)C^2(G, n_k, b_1, b_{m+1}) \leqslant \gamma_1 = \mathrm{const},$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}+\frac{|b_1|+|b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|}\right)C^1(G,n_k,b_1,b_{m+1})C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})\leqslant\gamma_2=\mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$|\psi_k(x)|\leqslant R^{-1}\bigg|\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(t)\chi(t)\,dt\bigg|+\{40m\omega(R)\gamma_1(1+C_0)^{1/2}+$$

$$+8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2}+18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}\|\psi_k\|_{2,2m}.$$

Умножим обе части этого неравенства на $\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}$, возведём в квадрат и применим неравенство $|\sum_{j=1}^p a_j|^2\leqslant p\sum_{j=1}^p|a_j|^2$. В результате получим

$$|\psi_k(x)|^2\|\psi_k\|_{2,2m}^{-2}\leqslant(2m+1)R^{-2}\bigg\{\sum_{i=1}^{2m}\bigg|\int\limits_0^{2\pi}\psi_k^i(t)\chi(t)\,dt\bigg|^2\|\psi_k\|_{2,2m}^{-2}\bigg\}+$$

$$+(2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2}+8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2}+18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2,$$

где $\psi_k(t)=(\psi_k^1(t),\psi_k^2(t),\ldots,\psi_k^{2m}(t))^{\mathrm{т}}$.

Ввиду неравенства Бесселя для любого конечного множества $J\subset I_\tau$ выполняется соотношение

$$\sum_{k\in J}|\psi_k(x)|\|\psi_k\|_2^{-2}\leqslant 2m(2m+1)MR^{-2}\|\chi\|_{2m}^2+(2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2}+$$

$$+8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2}+18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2\sum_{k\in J}1. \tag{26}$$

Сначала учитываем здесь равенство $\|\chi\|_2^2=O(R)$, а затем выбираем число R настолько малым (соответственно и число L^{-1}), чтобы выполнялось условие

$$(2m+1)\{40L^{-1}m\gamma_1(1+C_0)^{1/2}+8Rm\gamma_1(1+C_0)^{3/2}+18Rm\gamma_2\theta_k(1+C_0)^{3/2}\}^2\leqslant\frac{1}{4\pi}.$$

Проинтегрировав неравенство (26), получим

$$\sum_{k\in J}1\leqslant\mathrm{const}R^{-1}=\mathrm{const}.$$

Отсюда, в силу произвольности множества $J\subset I_\tau$, следует (4). Необходимость неравенства (4) доказана.

Достаточность. Для определённости возьмём интервал $G=(0,2\pi)$. Записав формулу (6) для $\psi_k(x+t)$ при $x=0$ и умножив затем скалярно на вектор-функцию

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_{2m}(t))^{\mathrm{т}}\in L_2^{2m}(0,2\pi),$$

придём к выводу, что для выполнения неравенства Бесселя для системы

$$\varphi_k(t)=\psi_k(t)\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1},\quad k\in\mathbb{N},$$

достаточно установить справедливость следующих неравенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigg|\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}t\,dt\bigg|^2|\varphi_k^i(0)|^2\leqslant C\|f\|_{2,2m}^2,\quad i=\overline{1,2m}, \tag{27}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt\Big|^2|\varphi_k^{2m+1-i}(0)|^2\leqslant C\|f\|^2_{2,2m},\quad i=\overline{1,2m},\tag{28}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int\limits_0^{t}p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi)\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\Big|^2\leqslant C\|f\|^2_{2,2m},\quad i=\overline{1,2m},\tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int\limits_0^{t}p_{2m+1-i}(\xi)\varphi_k^{2m+1-i}(\xi)\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\Big|^2\leqslant C\|f\|^2_{2,2m},\quad i=\overline{1,2m},\tag{30}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\theta_k\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int\limits_0^{t}\frac{\psi_{k-1}^i(\xi)}{\|\psi_k\|_{2,2m}}\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\Big|^2\leqslant C\|f\|^2_{2,2m},\quad i=\overline{1,2m},\tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\theta_k\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int\limits_0^{t}\frac{\psi_{k-1}^{2m+1-i}(\xi)}{\|\psi_k\|_{2,2m}}\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\Big|^2\leqslant C\|f\|^2_{2,2m},\quad i=\overline{1,2m},\tag{32}$$

где $\varphi_k^i(\xi)=\psi_k^i(\xi)\|\psi_k\|^{-1}_{2,2m}$.

Докажем оценку (27). В силу (2) и условий (3), (4)

$$|\varphi_k^i(0)|=|\psi_k^i(0)|\|\psi_k\|^{-1}_{2,2m}\leqslant\|\psi_k\|_{\infty,2m}\|\psi_k\|^{-1}_{2,2m}\leqslant C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})(1+C_0)^{1/2}\times$$

$$\times\|\psi_k\|_{2,2m}\|\psi_k\|^{-1}_{2,2m}\leqslant C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})(1+C_0)^{1/2}\leqslant\mathrm{const},$$

так как последовательность $C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})$ ограничена. Поэтому для справедливости (27) достаточно выполнения неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\cos\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}t\,dt\Big|^2\leqslant C\|f_i\|^2_2,\quad i=\overline{1,2m}.\tag{33}$$

При выполнении условий (3) и (4), $\tau\geqslant1$, справедливость неравенства (33) установлена в работе [1]. Отсюда следует неравенство (33) при $\operatorname{Re}\lambda_k\in(-\infty,+\infty)$, $|\operatorname{Im}\lambda_k|\leqslant C_0$, так как по условию теоремы 2 выполняется условие (4) при любом $\tau\in(-\infty,+\infty)$. Точно также доказывается неравенство (28).

Убедимся в справедливости неравенства (29). Неравенство (30) доказывается аналогично. Обозначим

$$g_i(t,\xi)=\begin{cases}f_i(t+\xi), & 0\leqslant t\leqslant2\pi-\xi,\\ 0, & 2\pi-\xi<t\leqslant2\pi,\end{cases}$$

где $\xi\in[0,2\pi]$, $i=\overline{1,2m}$. Тогда в силу оценки (2) и условий (3), (4) получим

$$J_k=\Big|\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int\limits_0^{t}p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi)\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\Big|^2=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\overline{f_i(t)}\int\limits_0^{t}p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi)\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)\,d\xi\,dt\int\limits_0^{2\pi}f_i(t)\int\limits_0^{t}\overline{p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi)\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1b_{m+1}|}}(t-\xi)}\,d\xi\,dt=$$

$$= \int_0^{2\pi} p_i(\xi)\varphi_k^i(\xi) \int_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\, dt\, d\xi \int_0^{2\pi} \overline{p_i(\tau)\varphi_k^i(\tau)} \int_0^{2\pi} g_i(r,\tau) \overline{\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}} r\, dr\, d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} p_i(\xi)\overline{p_i(\tau)}\varphi_k^i(\xi)\overline{\varphi_k^i(\tau)} \int_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\, dt\, \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} g_i(r,\tau) \overline{\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}} r\, dr\, d\xi\, d\tau \leqslant [C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})]^2(1+C_0) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |p_i(\xi)||p_i(\tau)| \left|\int_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\, dt\right| \left|\int_0^{2\pi} g_i(r,t) \overline{\sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}} r\, dr\right| d\xi\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |p_i(\xi)||p_i(\tau)| \left|\int_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\, dt\right| \left|\int_0^{2\pi} \overline{g_i(r,\tau)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r\, dr\right| d\xi\, d\tau,$$

где $i=\overline{1,2m}$. Отсюда для произвольного натурального числа N имеем

$$\sum_{k=1}^N J_k \leqslant \mathrm{const} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |p_i(\xi)||p_i(\tau)| \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^N \left|\int_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\, dt\right| \left|\int_0^{2\pi} \overline{g_i(r,\tau)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} r\, dr\right|\right) d\xi\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |p_i(\xi)||p_i(\tau)| \|g_i(\,\cdot\,,\xi)\|_2 \|g_i(\,\cdot\,,\tau)\|_2\, d\xi\, d\tau, \quad i=\overline{1,2m}.$$

Учитывая, что для любого фиксированного $\xi\in[0,2\pi]$ имеет место неравенство $\|g_i(\,\cdot\,,\xi)\|_2 \leqslant$ $\leqslant |f_i\|_2$, получаем

$$\sum_{k=1}^N J_k \leqslant \mathrm{const}\|p_i\|_1^2\|f_i\|_2^2 \leqslant \mathrm{const}\|f\|_{2,2m}^2, \quad i=\overline{1,2m}.$$

Отсюда, в силу произвольности числа N, следует справедливость неравенства (28).

Теперь докажем неравенство (31). В силу оценок (1), (2) и условий (3), (4)

$$\theta_k|\psi_{k-1}^i(\xi)|\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} \leqslant \theta_k C^1(G,n_k,b_1,b_{m+1}) C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})(1+C_0)^{3/2}\|\psi_k\|_{2,2m}\|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} =$$

$$= \theta_k C^1(G,n_k,b_1,b_{m+1}) C^2(G,n_k,b_1,b_{m+1})(1+C_0)^{3/2} \leqslant C = \mathrm{const}, \quad i=\overline{1,2m}.$$

После изменения порядка интегрирования левые части неравенства (31) мажорируются рядом

$$C\sum_{k=1}^\infty \int_0^{2\pi} \left|\int_0^{2\pi} \overline{g_i(t,\xi)} \sin\frac{\lambda_k}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} t\, dt\right|^2 d\xi.$$

Этот ряд сходится в силу бесселевости системы $\{\sin(\lambda_k t/\sqrt{|b_1 b_{m+1|}})\}_{k=1}^{\infty}$, и его сумма ограничена сверху величиной $\mathrm{const}\|f\|_{2,2m}^2$. Неравенство (31) доказано. Неравенство (32) устанавливается аналогично. Теорема 2 доказана.

Теоремы 3 и 4 доказываются аналогично соответствующим теоремам в статьях [15, 20].

Автор выражает глубокую благодарность проф. В.М. Курбанову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединённых функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1048–1053.
2. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 771–794.
3. *Будаев В.Д.* Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов. I // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2033–2044.
4. *Ломов И.С.* Оценки собственных и присоединённых функций обыкновенных дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 903–906.
5. *Керимов Н.Б.* Некоторые свойства собственных и присоединённых функций обыкновенных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1986. Т. 201. № 5. С. 1054–1056.
6. *Курбанов В.М.* О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. I //Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 4. С. 464–478.
7. *Крицков Л.В.* Равномерная оценка порядка присоединённых функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шрёдингера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1121–1129.
8. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шрёдингера со спектральным параметром // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 807–810.
9. *Будаев В.Д.* Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов. II //Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 23–33.
10. *Ломов И.С.* Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 5. С. 42–52.
11. *Керимов Н.Б.* О безусловной базисности системы собственных и присоединённых функций дифференциального оператора четвёртого порядка // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 803–806.
12. *Курбанов В.М.* О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 623–631.
13. *Kritskov L.V., Sersenbi A.M.* Basicity in of root functions for differential equations with involution // Electron J. Differ. Equat. 2015. V. 278. P. 1–9.
14. *Курбанов В.М.* О бесселевости и безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 12. С. 1608–1617.
15. *Курбанов В.М., Гаджиева Г.Р.* Неравенство Бесселя и базисность для $2m\times 2m$ системы типа Дирака с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 584–594.
16. *Курбанов В.М., Исмайлова А.И.* Покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака с тригонометрическим разложением // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 648–662.
17. *Курбанов В.М., Исмайлова А.И.* Абсолютная и равномерная сходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 4. С. 380–383.
18. *Курбанов В.М., Исмайлова А.И.* Неравенство Рисса для систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 334–340.
19. *Курбанов В.М., Исмайлова А.И.* Двусторонние оценки для корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 487–497.
20. *Kurbanov V.M., Abdullayeva A.M.* Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // Operators and Matrices. 2018. V. 12. № 4. P. 943–954.
21. *Хасси С., Оридорога Л.Л.* Полнота и базисность Рисса ССПФ операторов Дирака с граничными условиями, зависящими от спектрального параметра // Мат. заметки. 2006. Т. 79. Вып. 4. С. 636–640.

22. *Лунев А.А., Маламуд М.М.* О базисном свойстве системы корневых векторов Рисса для системы типа 2×2 Дирака // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 3. Р. 255–260.
23. *Lunyov A.A., Malamud M.M.* On the Riesz basis property of the root vector system for Dirac-type systems // J. Math. Anal. and Appl. 2016. V. 441. № 1. P. 57–103.
24. *Lunyov A.A., Malamud M.M.* On the completeness and Riesz basis property of root supspaces of boundary value problems for first order systems and applications // J. Spectr. Theory. 2015. V. 5. P. 17–70.
25. *Лунев А.А., Маламуд М.М.* О характеристических определителях граничных задач для системы типа Дирака // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2022. Т. 516. С. 69–120.
26. *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. V. 96. № 5. P. 777–810.
27. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Соврем. математика. Фундам. направления. 2015. Т. 58. С. 128–152.
28. *Trooshin I., Yamamota M.* Riesz basis of root vector of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems // Appl. Anal. 2001. V. 80. № 1–2. P. 19–51.
29. *Djakov P., Mityagin B.* Criteria for existence of Riesz bazis consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators // J. Funct. Anal. 2012. V. 263. P. 2300–2332.
30. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergense of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // Indiana Univ. Math. J. 2012. V. 61. № 1. P. 359–398.
31. *Mykytnyk Ya.V., Puyda D.V.* Bari–Markus property of Dirac operators // Matematychni Studii. 2013. V. 40. № 2. P. 165–171.

Азербайджанский государственный
педагогический университет, г. Баку

Поступила в редакцию 24.05.2023 г.
После доработки 22.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1318–1334

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+517.929

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2023 г. Р. И. Кадиев

Исследованы вопросы моментной устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последействием модифицированным методом регуляризации, основанным на выборе вспомогательного уравнения и применении теории неотрицательно обратимых матриц. Для упомянутых систем получены достаточные условия устойчивости в терминах неотрицательной обратимости матриц, построенных по параметрам этих систем. Проверена выполнимость этих условий для конкретных классов систем линейных уравнений Ито с последействием.

DOI: 10.31857/S0374064123100023, EDN: OOKKIZ

Введение. Стохастические дифференциальные уравнения описывают многие реальные практически важные процессы современной физики, биологии, иммунологии, экономики, кибернетики и т.д. Изучение таких процессов привело к необходимости исследований вопросов устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, т.е. к созданию соответствующего направления в теории устойчивости.

Математические модели многих реальных процессов, учитывающие состояния не только в текущий, но и в предшествующие моменты времени, описывают развитие процессов более точно. В этом случае поведение процесса, подверженного случайным воздействиям, описывается стохастическими дифференциальными уравнениями с последействием. Примеры показывают, что поведение решений уравнений без учёта запаздывания, даже при малой его величине, может существенно отличаться от поведения решений тех же уравнений с запаздывающим аргументом. Это обстоятельство подчёркивает необходимость и принципиальную важность изучения уравнений с запаздываниями.

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных математиков. Достаточно полный их список приведён в монографиях [1–4]. Исследования устойчивости в этих и многих других работах проводятся методом функционалов Ляпунова–Красовского–Разумихина. Этот метод предполагает существование подходящей функции Ляпунова (функционала Ляпунова–Красовского), которая обеспечивает желаемое свойство устойчивости (асимптотического поведения) решений исследуемых уравнений. Однако, как отмечается в монографии [5], применение этого метода для функционально-дифференциальных уравнений, частным случаем которых являются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, во многих случаях встречает серьёзные трудности. В теории устойчивости решений для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений широкое применение и высокую эффективность показал метод регуляризации, основанный на выборе вспомогательных или "модельных" уравнений – "W-метод" Н.В. Азбелева [5].

Исследованиям проблем устойчивости по части переменных решений для детерминированных динамических систем и их приложениям посвящено много работ, обширный перечень которых можно найти в [6]. В статьях [7–10] методом вспомогательных или "модельных" уравнений исследованы вопросы устойчивости по части переменных для стохастических функционально-дифференциальных уравнений. В работах [11, 12] исследованы вопросы частичной устойчивости нелинейных стохастических систем методом функций Ляпунова. Главной целью настоящего исследования является развитие метода вспомогательных уравнений на основе теории неотрицательно обратимых матриц и покомпонентных оценок решений применительно к исследованию вопросов моментной устойчивости решений по части переменных для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последействием относительно начальных данных. Этот подход ранее показал свою эффективность при исследовании вопросов устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последействием [13, 14] и, как будет показано в статье, позволяет получить новые конструктивные результаты устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для детерминированных и стохастических систем с запаздыванием и без него.

1. Постановка задачи исследования. Будем использовать следующие обозначения: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, P)$ – стохастический базис, здесь Ω – множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра событий на Ω, $(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$ – непрерывный справа неубывающий поток σ-подалгебр алгебры $\mathcal{F}$, P – вероятностная мера на $\mathcal{F}$ (все σ-алгебры являются полными относительно этой меры); k^n – линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин; $\mathcal{B}_i$, $i=\overline{2,m}$, – скалярные независимые стандартные винеровские процессы; E – символ математического ожидания; $\bar{E}$ – единичная $k\times k$-матрица; $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{R}^n$; $\|\cdot\|$ – норма $k\times n$-матрицы, согласованная с нормой в $\mathbb{R}^n$; μ – мера Лебега на $[0,\infty)$.

В статье используются следующие константы: $n\in\mathbb{N}$ – размерность фазового пространства уравнения, т.е. размер вектора решения уравнения; p – фиксированная вещественная константа, $1\leqslant p<\infty$; q – фиксированная вещественная константа, $1\leqslant q<\infty$; l – фиксированное натуральное число такое, что $1\leqslant l<n$.

Исследуем вопросы моментной устойчивости решений по части переменным для системы линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями вида

$$dx(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t))\,dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))\,d\mathcal{B}_i(t), \quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

относительно начальных данных

$$x(t)=\varphi(t), \quad t<0, \tag{1a}$$

$$x(0)=\upsilon, \tag{1b}$$

где:

1) $x=\operatorname{col}(x^1,\ldots,x^n)$ – n-мерный неизвестный случайный процесс;

2) $A_{ij}=(a_{sl}^{ij})_{s,l=1}^n$ – $n\times n$-матрица при $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, элементами матриц A_{1j}, $j=\overline{1,m_1}$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых почти наверно (п.н.) локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij}, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п.н. локально суммируемы с квадратом;

3) h_{ij} – измеримая по Борелю функция, заданная на множестве $[0,\infty)$, такая, что $h_{ij}(t)\leqslant t$, $t\in[0,\infty)$, μ-почти всюду при $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$;

4) $\varphi=\operatorname{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ – $\mathcal{F}_0$-измеримый n-мерный случайный процесс, заданный на полуоси $(-\infty,0)$;

5) $\upsilon=\operatorname{col}(\upsilon_1,..,\upsilon_n)$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая n-мерная случайная величина, т.е. $\upsilon\in k^n$.

Определение 1. Под *решением системы* (1), удовлетворяющим начальным условиям (1a) и (1b), понимается случайный процесс

$$x(t)=\operatorname{col}(x^1(t),\ldots,x^n(t)), \quad t\in(-\infty,\infty),$$

прогрессивно измеримый при $t\geqslant 0$, удовлетворяющий условиям $x(\varsigma)=\varphi(\varsigma)$, $\varsigma<0$, $x(0)=\upsilon$ и системе

$$x(t)=\upsilon-\sum_{j=1}^{m_1}\int_0^t A_{1j}(\varsigma)x(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\int_0^t A_{ij}(\varsigma)x(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma), \quad t\geqslant 0,$$

P-почти всюду, где первый интеграл – интеграл Лебега, а второй – интеграл Ито.

Систему (1) с условиями (1a) и (1b) называют *начальной задачей*, а условия (1a), (1b) – *начальными условиями.* Если $h_{ij}(t) = t,\ t \geqslant 0,\ \mu$-почти всюду при $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m_i},$ то условие (1a) лишнее. В этом случае (1), (1b) называют *задачей Коши* для системы линейных дифференциальных уравнений Ито.

Пусть в дальнейшем D^n – линейное пространство n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0,\infty),$ траектории которых п.н. непрерывны; L^n – линейное пространство n-мерных случайных процессов на $(-\infty,0),$ которые не зависят от винеровских процессов $\mathcal{B}_i,\ i = \overline{2,m},$ и имеют п.н. ограниченные в существенном траектории; $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$ – положительная непрерывная функция.

Отметим, что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение [15]. Обозначим через $x(t,\upsilon,\varphi),\ t \in (-\infty,\infty),$ решение системы (1), удовлетворяющее условиям (1a) и (1b), т.е. $x(t,\upsilon,\varphi) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $x(0,\upsilon,\varphi) = \upsilon.$ Очевидно, что при $t \geqslant 0$ имеем $x(\cdot,\upsilon,\varphi) \in D^n.$ Заметим также, что при нулевых начальных условиях (1a), (1b) задача (1), (1a), (1b) имеет только тривиальное решение.

Для любого $x = \operatorname{col}(x^1,\ldots,x^n)$ введём обозначения

$$y = \operatorname{col}(x^1,\ldots,x^l) \quad \text{и} \quad \xi = \operatorname{col}(x^{l+1},\ldots,x^n).$$

Введём также обозначения для следующих линейных нормированных подпространств пространств $D^l,\ k^n,\ L^n$:

$$M_q^\gamma = \{x : x \in D^l,\ \ \|x\|_{M_q^\gamma} \overset{\text{def}}{=} \sup_{t\geqslant 0}(E|\gamma(t)x(t)|^q)^{1/q} < \infty\}, \quad M_q^1 = M_q;$$

$$k_q^n = \{\alpha : \alpha \in k^n,\ \ \|\alpha\|_{k_q^n} \overset{\text{def}}{=} (E|\alpha|^q)^{1/q} < \infty\};$$

$$L_q^n = \{\varphi : \varphi \in L^n,\ \ \|\varphi\|_{L_q^n} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{vrai}\sup_{\varsigma<0}(E|\varphi(\varsigma)|^q)^{1/q} < \infty\}.$$

Определение 2. Тривиальное решение $x(t,0,0) \equiv 0$ системы (1) (или систему (1)) назовём:

– *q-устойчивым* относительно первых l компонент, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0,$ что при любых $\upsilon \in k_q^n,\ \varphi \in L_q^n$ и $\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство

$$(E|y(t,\upsilon,\varphi)|^q)^{1/q} \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant 0;$$

– *асимптотически q-устойчивым* относительно первых l компонент, если оно q-устойчиво и, кроме того, для любых $\upsilon \in k_q^n,\ \varphi \in L_q^n$ и $\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\varepsilon)$ будет

$$\lim_{t\to+\infty}(E|y(t,\upsilon,\varphi)|^q)^{1/q} = 0;$$

– *экспоненциально q-устойчивым* относительно первых l компонент, если существуют некоторые положительные числа $\bar{c},\ \beta$ такие, что для любых $\upsilon \in k_q^n,\ \varphi \in L_q^n$ справедливо неравенство

$$(E|y(t,\upsilon,\varphi)|^q)^{1/q} \leqslant \bar{c}(\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})\exp\{-\beta t\}, \quad t \geqslant 0.$$

Следующее определение объединяет все виды устойчивости из определения 2.

Определение 3. Систему (1) назовём *$M_q^\gamma y$-устойчивой*, если для любых $\upsilon \in k_q^n,\ \varphi \in L_q^n$ для решения задачи (1), (1a), (1b) $x(t,\upsilon,\varphi),\ t \in (-\infty,+\infty),$ выполняются соотношение $y(\cdot,\upsilon,\varphi)|_{[0,\infty)} \in M_q^\gamma$ и неравенство

$$\|y(\cdot,\upsilon,\varphi)|_{[0,\infty)}\|_{M_q^\gamma} \leqslant \bar{c}(\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \tag{2}$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}.$

Очевидно, что:

– из $M_q y$-устойчивости системы (1) следует q-устойчивость этой же системы относительно первых l компонент;

– из $M_q^\gamma y$-устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$, $t \geqslant 0$, и $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty$) следует асимптотическая q-устойчивость этой же системы относительно первых l компонент;

– из $M_q^\gamma y$-устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, β – некоторое положительное число) следует экспоненциальная q-устойчивость этой же системы относительно первых l компонент.

Для установления $M_q^\gamma y$-устойчивости системы (1) необходимо проверить принадлежность вектора $y(\cdot, \upsilon, \varphi)|_{[0,\infty)}$, составленного из первых l компонент решения задачи (1), (1a), (1b) $x(t, \upsilon, \varphi)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, пространству M_q^γ при любых $\upsilon \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и выполнимость для него неравенства (2). Для этого будет использована модификация метода вспомогательных или модельных уравнений, известная также как W-метод [5], основанный на теории положительно обратимых матриц и покомпонентных оценках решений.

2. Метод исследования. Как было отмечено ранее, устойчивость системы (1) относительно первых l компонент будем проверять преобразованием этой системы с помощью вспомогательной (модельной) системы в другую, более простую систему, для которой условия, обеспечивающие устойчивость системы (1) относительно первых l компонент, можно проверить непосредственно.

В дальнейшем будем пользоваться следующим представлением для решения задачи (1), (1a), (1b): $x(t) = \bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t)$, где $\bar{x}(t)$ – неизвестный n-мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{x}(t) = 0$ при $t < 0$ и $\bar{x}(t) = x(t)$ при $t \geqslant 0$, а $\bar{\varphi}(t)$ – известный n-мерный случайный процесс на $(-\infty, \infty)$ такой, что $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $\bar{\varphi}(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Тогда задача (1), (1a), (1b) эквивалентна следующей задаче:

$$d\bar{x}(t) = ((V\bar{x})(t) + f(t))\, dZ(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\bar{x}(0) = \upsilon, \tag{3b}$$

где

$$(V\bar{x})(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)\bar{x}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} A_{2j}(t)\bar{x}(h_{2j}(t)), \ldots, \sum_{j=1}^{m_m} A_{mj}(t)\bar{x}(h_{mj}(t))\biggr),$$

$$f(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)\bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2} A_{2j}(t)\bar{\varphi}(h_{2j}(t)), \ldots, \sum_{j=1}^{m_m} A_{mj}(t)\bar{\varphi}(h_{mj}(t))\biggr),$$

$$Z(t) = \operatorname{col}(t, \mathcal{B}_2(t), \ldots, \mathcal{B}_m(t)).$$

Замечание 1. Аналог уравнения (3) в детерминированном случае является частным случаем функционально-дифференциального уравнения (см. [5]), которое записывается с использованием линейных операторов внутренней суперпозиции.

Решение задачи (3), (3b) обозначим через $\bar{x}(t, \upsilon, \varphi)$. Очевидно, что при $t \geqslant 0$ имеем $x(t, \upsilon, \varphi) = \bar{x}(t, b, \varphi)$.

Пусть:

– $I^n(Z)$ – линейное пространство $n \times m$-матриц на $[0, +\infty)$, строки которых – m-мерные прогрессивно измеримые случайные процессы, локально интегрируемые по Z;

– $\bar{D}^n$ – линейное пространство n-мерных случайных процессов на $(-\infty, +\infty)$, равных нулю при $t < 0$, прогрессивно измеримых при $t \geqslant 0$ и имеющих п.н. непрерывные траектории на $[0, \infty)$;

– $\bar{M}_q^\gamma = \{x : x \in \bar{D}^l,\ \|x\|_{\bar{M}_q^\gamma} \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{t\in(-\infty,\infty)} (E|\gamma(t)x(t)|^q)^{1/q} < \infty\}$, $\bar{M}_q^1 = \bar{M}_q$.

Очевидно, что для уравнения (3) V – линейный оператор, действующий из пространства $\bar{D}^n$ в пространство $I^n(Z)$ и $f \in I^n(Z)$.

Справедлива следующая

Лемма. *При любых* $\upsilon \in k^n$, $\varphi \in L^n$ *для решения* $\bar{x}(t,\upsilon,\varphi)$ *задачи (3), (3b) имеет место представление*

$$\bar{x}(t,\upsilon,\varphi) = X(t)\upsilon + (\hat{C}f)(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

где $X(t)$ – $n\times n$*-матрица, столбцами которой являются решения однородного уравнения (3) (т.е. в случае* $f\equiv 0$*) (фундаментальная матрица),* $X(0)=\bar{E}$*, а* $\hat{C}: I^n(Z)\to D^n$ *– линейный оператор (оператор Коши) такой, что* $\hat{C}f$ *– решение уравнения (3), удовлетворяющее условию* $(\hat{C}f)(0)=0$.

Справедливость леммы следует из аналогичного утверждения для более общего уравнения, доказанного в работе [16].

Замечание 2. Формула (4) имеет место для решения задачи (3), (3b) и в случае любой функции $f\in I^n(Z)$. Кроме того, из леммы также следует, что при любых $\upsilon\in k^n$, $\varphi\in L^n$ для решения $x(t,\upsilon,\varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) при $t\geqslant 0$ имеет место представление (4), где f определена в уравнении (3).

Представление (4) является центральным результатом в теории устойчивости решений уравнения (1). В силу этого представления асимптотические свойства решений системы (1), в том числе и компонент решений системы (1), определяются фундаментальной матрицей и оператором Коши для уравнения (3).

В дальнейшем если B – $n\times n$-матрица, то B^1 – $l\times l$-матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием $n-l$ последних столбцов и строк, B^2 – $l\times(n-l)$-матрица, полученная из B зачёркиванием l первых столбцов и $n-l$ последних строк, B^3 – $(n-l)\times l$-матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием первых l строк и $n-l$ последних столбцов, B^4 – $(n-l)\times(n-l)$-матрица, полученная из B зачёркиванием l первых строк и столбцов, B^5 – $l\times n$-матрица, полученная из B зачёркиванием $n-l$ последних строк, B^6 – $(n-l)\times n$-матрица, полученная из матрицы B зачёркиванием l первых строк. Тогда с учётом этих обозначений и так как $\bar{x}=\operatorname{col}(\bar{y},\bar{\xi})$, в силу введённых ранее обозначений, уравнение (3) можно записать в виде следующей системы:

$$d\bar{y}(t) = [(V_1\bar{y})(t)+(V_2\bar{\xi})(t)+f^y(t)]\,dZ(t), \quad d\bar{\xi}(t) = [(V_3\bar{y})(t)+(V_4\bar{\xi})(t)+f^\xi(t)]\,dZ(t), \quad t\geqslant 0, \tag{5}$$

где

$$(V_i\bar{y})(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^i\bar{y}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t))^i\bar{y}(h_{2j}(t)),\ldots,\sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^i\bar{y}(h_{mj}(t))\biggr), \quad i=1,3,$$

$$(V_i\bar{\xi})(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^i\bar{\xi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t)^i)\bar{\xi}(h_{2j}(t)),\ldots,\sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^i\bar{\xi}(h_{mj}(t))\biggr), \quad i=2,4,$$

$$f^y(t)(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^5\bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t))^5\bar{\varphi}(h_{2j}(t)),\ldots,\sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^5\bar{\varphi}(h_{mj}(t))\biggr),$$

$$f^\xi(t)(t) = \biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^6\bar{\varphi}(h_{1j}(t)), \sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t))^6\bar{\varphi}(h_{2j}(t)),\ldots,\sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^6\bar{\varphi}(h_{mj}(t))\biggr).$$

В дальнейшем если $\zeta(t)$ – случайный процесс на промежутке $[0,\infty)$, то $\bar{\zeta}(t)$ также является случайным процессом на $(-\infty,\infty)$, значения которого совпадают с значениями процесса $\zeta(t)$ на $[0,\infty)$ и с нулём на $(-\infty,0)$.

Как как через любое $\bar{x}(0)\in k^n$ проходит единственное решение уравнения (3), каждое из уравнений системы (5) в отдельности будет иметь единственное решение при любых фиксированных $\bar{y}(0)$, $\bar{\xi}$ и $\bar{\xi}(0)$, $\bar{y}$ соответственно. Тогда в силу леммы второе уравнение системы (5) эквивалентно уравнению

$$\bar{\xi}(t) = H(t)\bar{\xi}(0) + (C_1(f^\xi+V_3\bar{y}))(t), \quad t\geqslant 0,$$

где H – фундаментальная матрица, а C_1 – оператор Коши для второго уравнения системы (5).

Следовательно, из первого уравнения системы (5) получим

$$d\bar{y}(t) = [(V_5\bar{y})(t) + (V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (V_2\bar{C}_1 f^{\xi})(t) + f^y(t)]\, dZ(t), \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

где $(V_5\bar{y})(t) = (V_1\bar{y})(t) + (V_2\bar{C}_1V_3\bar{y})(t)$.

Отсюда следует, что система (1) $M_q^{\gamma}y$-устойчива тогда и только тогда, когда при любых $\bar{x}(0) = \upsilon \in k_q^n$ и $\varphi \in L_q^n$ для решения $\bar{y}(t,\upsilon,\varphi)$ уравнения (6) выполняются соотношение $\bar{y}(\cdot,\upsilon,\varphi) \in \bar{M}_q^{\gamma}$ и неравенство

$$\|\bar{y}(\cdot,\upsilon,\varphi)\|_{\bar{M}_q^{\gamma}} \leqslant \bar{c}(\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \tag{7}$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$.

Для установления отмеченных фактов воспользуемся W-преобразованием, т.е. эквивалентным преобразованием уравнения (6). Для описания W-преобразования уравнения (6) рассмотрим модельное уравнение, асимптотические свойства решений которого известны. Пусть модельное уравнение имеет вид

$$d\bar{y}(t) = [(Q\bar{y})(t) + g(t)]\, dZ(t), \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

где $Q : \bar{D}^l \to I^l(Z)$ – линейный оператор, Z определён ранее, $g \in I^l(Z)$. Предполагается, что через любое значение $\bar{y}(0) \in k^l$ проходит единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение $\bar{y}$ уравнения (8). Тогда, в силу леммы, для решения $\bar{y}$ этого уравнения имеет место представление

$$\bar{y}(t) = U(t)\bar{y}(0) + (Wg)(t), \quad t \geqslant 0,$$

где U – фундаментальная матрица, W – оператор Коши для уравнения (8).

Уравнение (6) при помощью модельного уравнения (8) запишем в виде

$$d\bar{y}(t) = [(Q\bar{y})(t) + ((V_5 - Q)\bar{y})(t) + (V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (V_2\bar{C}_1 f^{\xi})(t) + f^y(t)]\, dZ(t), \quad t \geqslant 0,$$

или

$$\bar{y}(t) = U(t)\bar{y}(0) + (W(V_5 - Q)\bar{y})(t) + (WV_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (W(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y))(t), \quad t \geqslant 0.$$

Обозначив $W(V_5 - Q) = \Theta$, получим

$$((I - \Theta)\bar{y})(t) = U(t)\bar{y}(0) + (WV_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)))(t) + (W(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y))(t), \quad t \geqslant 0.$$

Теорема 1. *Пусть* $\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y) \in \bar{M}_q^{\gamma}$ *для любых* $\bar{x}(0) \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ *и выполняется неравенство*

$$\|\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y)\|_{\bar{M}_q^{\gamma}} \leqslant \bar{c}(\|\bar{x}(0)\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$, *а оператор* Θ *действует в пространстве* $\bar{M}_q^{\gamma}$. *Тогда если оператор* $(I - \Theta) : \bar{M}_q^{\gamma} \to \bar{M}_q^{\gamma}$ *непрерывно обратим, то система (1)* $M_q^{\gamma}y$-*устойчива.*

Доказательство. Ввиду непрерывной обратимости оператора $(I - \Theta) : \bar{M}_q^{\gamma} \to \bar{M}_q^{\gamma}$ уравнение $(I - \Theta)\bar{y} = g$, где $g \in \bar{M}_q^{\gamma}$, имеет единственное решение из $\bar{M}_q^{\gamma}$, т.е. $\bar{y} = (I - \Theta)^{-1}g \in \bar{M}_q^{\gamma}$ и $\|\bar{y}\|_{\bar{M}_q^{\gamma}} \leqslant \|(I - \Theta)^{-1}\|_{\bar{M}_q^{\gamma}}\|g\|_{\bar{M}_q^{\gamma}}$. Отсюда и из условий теоремы получим, что

$$(I - \Theta)^{-1}(\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y)) \in \bar{M}_q^{\gamma}$$

для любых $\bar{x}(0) \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и справедливо неравенство

$$\|(I - \Theta)^{-1}(\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0)) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^y))\|_{\bar{M}_q^{\gamma}} \leqslant \bar{c}(\|\bar{x}(0)\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})$$

для некоторого положительного числа $\bar{c}$. Но, с другой стороны,

$$\bar{y}(\cdot, \bar{x}(0), \varphi) = (I - \Theta)^{-1}(\bar{U}\bar{y}(0) + \bar{W}V_2(\bar{H}\bar{\xi}(0))) + \bar{W}(V_2\bar{C}_1 f^{\xi} + f^{y}).$$

Следовательно, $\bar{y}(\cdot, \bar{x}(0), \varphi) \in \bar{M}_q^{\gamma}$ для любых $\bar{x}(0) \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и для него выполнено неравенство (7), а это и означает $M_q^{\gamma}y$-устойчивость системы (1). Теорема доказана.

Теорему 1 можно использовать для получения достаточных условий устойчивости системы (1) по части переменных в терминах параметров этой системы, как это делается в классической версии W-метода [7–10]. Однако, как показано в статьях [13, 14], такие условия получаются более точными, если использовать покомпонентные оценки решений. Поэтому ниже предлагается улучшенный метод регуляризации для исследования вопросов устойчивости по части переменных для системы (1).

Определение 4. Обратимая матрица $\Phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^m$ называется *неотрицательно обратимой*, если все элементы матрицы Φ^{-1} неотрицательны.

Согласно [17, с. 338] матрица Φ неотрицательно обратима, если $\phi_{ij} \leqslant 0$ при $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, и выполнено одно из следующих условий:

– все диагональные миноры матрицы Φ положительны;

– существуют $\varsigma_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, такие, что

$$\varsigma_i \phi_{ii} > \sum_{j=1}^{m} \varsigma_j |\phi_{ij}|, \quad i = \overline{1, m};$$

– существуют $\varsigma_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, такие, что

$$\varsigma_j \phi_{jj} > \sum_{i=1}^{m} \varsigma_i |\phi_{ij}|, \quad j = \overline{1, m}.$$

В частности, если положить $\varsigma_i = 1$, $i = \overline{1, m}$, то мы получим класс матриц со строгим диагональным преобладанием и неположительными внедиагональными элементами.

Для случайного процесса $\bar{y}(t) = \operatorname{col}(\bar{y}^1(t), \ldots, \bar{y}^l(t))$ введём обозначение

$$\bar{y}^{\gamma}(q) = \operatorname{col}(\bar{y}^{1\gamma}(q), \ldots, \bar{y}^{l\gamma}(q)),$$

где $\bar{y}^{i\gamma}(q) = \sup\limits_{t \geqslant 0}(E|\gamma(t)\bar{y}^i(t)|^q)^{1/q}$ при $i = \overline{1, l}$.

Пусть при некоторых $1 \leqslant q < \infty$ и положительной непрерывной функции $\gamma : [0, \infty) \to \to \mathbb{R}^1$ для решения $\bar{y}(t, \upsilon, \varphi) = \bar{y}(t)$ системы (6) нам удалось получить матричное неравенство следующего вида:

$$\bar{E}\bar{y}^{\gamma}(q) \leqslant C\bar{y}^{\gamma}(q) + \bar{c}\|\upsilon\|_{k_q^n} + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n}, \tag{9}$$

где C – некоторая неотрицательная матрица размерности $l \times l$, а $\bar{c}$ и $\hat{c}$ – некоторые l-мерные вектор-столбцы, элементы которых неотрицательные числа. Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть в матричном неравенстве (9) матрица $\bar{E} - C$ является неотрицательно обратимой. Тогда система (1) $M_q^{\gamma}y$-устойчива.*

Доказательство. Пользуясь неотрицательной обратимостью матрицы $\bar{E} - C$, запишем неравенство (9) в следующем виде:

$$\bar{E}\bar{y}^{\gamma}(q) \leqslant (\bar{E} - C)^{-1}(\bar{c}\|\upsilon\|_{k_q^n} + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n}),$$

откуда получим

$$|\bar{y}^{\gamma}(q)| \leqslant c(\|\upsilon\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}), \tag{10}$$

где $c = \|(\bar{E} - C)^{-1}\| \max\{|\bar{c}|, |\hat{c}|\}$. Поскольку $\bar{y}(t, \upsilon, \varphi) = \bar{y}(t)$ при $t \geqslant 0$ и $\|\bar{y}(\cdot, \upsilon, \varphi)\|_{\bar{M}_q^{\gamma}} \leqslant \leqslant |\bar{y}^{\gamma}(q)|$, то из неравенства (10) следует, что при любых $\upsilon \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ для решений $\bar{y}(t, \upsilon, \varphi)$ $(t \in (-\infty, \infty))$ задачи (3), (3b) выполняются соотношение $\bar{y}(\cdot, \upsilon, \varphi) \in \bar{M}_q^{\gamma}$ и неравенство

$$\|\bar{y}(\cdot, \upsilon, \varphi)\|_{\bar{M}_q^{\gamma}} \leqslant c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}),$$

где c – некоторое положительное число. Следовательно, система (1) $M_q^\gamma y$-устойчива. Теорема доказана.

На основе теоремы 2 в п. 3 будут получены достаточные условия экспоненциальной моментной устойчивости системы (1) по части компонент относительно начальных данных в терминах параметров этой системы.

3. Экспоненциальная устойчивость. Как было отмечено в п. 2, из $M_q^\gamma y$-устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, β – некоторое положительное число) следует экспоненциальная q-устойчивость этой же системы относительно первых l компонент. Также было указано, что система (1) $M_q^\gamma y$-устойчива тогда и только тогда, когда при любых $\bar{x}(0) = \upsilon \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ решение $\bar{y}(\cdot, \upsilon, \varphi)$ уравнения (6) принадлежит пространству $\bar{M}_q^\gamma$ и для него выполнено неравенство (7).

В дальнейшем будем считать: $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, где β – некоторое нефиксированное положительное число; $q = 2p$; f^{si}, $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, – компоненты функции $f \in I^l(Z)$.

Примеры показывают, что экспоненциальная устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений с последействием по начальным данным наблюдается, как правило, только в случае ограниченного последействия. Поэтому $M_q^\gamma y$-устойчивость системы (1) будет изучена при дополнительных ограничениях на параметры этой системы.

Предположим, что для системы (1) также выполнено:

– существуют неотрицательные числа τ_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, такие, что

$$0 \leqslant t - h_{ij}(t) \leqslant \tau_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m_i}, \quad t \geqslant 0,$$

μ-почти всюду;

– существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1, \ldots, m_1\}$, $s = \overline{1,l}$, положительные числа λ_s, $s = \overline{1,l}$, и неотрицательные числа $\bar{a}_{si}^j$, $j = \overline{1,m_1}$, $s,i = \overline{1,l}$, такие, что

$$\sum_{j \in I_s} a_{ss}^{1j}(t) \geqslant \lambda_s, \quad s = \overline{1,l}, \quad |a_{si}^{1j}(t)| \leqslant \bar{a}_{si}^j, \quad j = \overline{1,m_1}, \quad s,i = \overline{1,l}, \quad t \geqslant 0,$$

$P \times \mu$-почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{si}^j(\beta)$, $d_{s\nu}^j(\beta)$, $s,j = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{2,m}$, такие, что для любых $u = \operatorname{col}(u^1, \ldots, u^l) \in \bar{D}^l$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1,l}\}$ имеют место неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2 \bar{C}_1 V_3 u)(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \sum_{j=1}^{l} b_{si}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)},$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_1 u)(\varsigma))^{s\nu}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \sum_{j=1}^{l} d_{s\nu}^j(\beta) \sup_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma) u^j(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}$$

при $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{2,m}$;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b_{si}(\beta)$, $\bar{b}_{si}(\beta)$, $\hat{b}_{si}(\beta)$, $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$, такие, что для любых $\varphi \in L_{2p}^n$, $\bar{x}(0) \in k_{2p}^n$ и $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s = \overline{1,l}\}$ выполняются неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2 \bar{C}_1 f^h)(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant b_{si}(\beta) \|\varphi\|_{L_{2p}^n},$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)(f^y(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \bar{b}_{si}(\beta) \|\varphi\|_{L_{2p}^n},$$

$$\sup_{\varsigma \geqslant 0} (E|\gamma(\varsigma)((V_2(\bar{H}\bar{h}(0)))(\varsigma))^{si}|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \hat{b}_{si}(\beta) \|\bar{x}(0)\|_{k_{2p}^n}$$

при $s = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,m}$.

В дальнейшем нам также понадобятся следующие соотношения:

$$\bigg(E\bigg|\int\limits_0^t f(\varsigma)\,d\mathcal{B}(\varsigma)\bigg|^{2p}\bigg)^{1/(2p)} \leqslant c_p\bigg(E\bigg(\int\limits_0^t |f(\varsigma)|^2\,d\varsigma\bigg)^p\bigg)^{1/(2p)}, \tag{11}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\bigg(E\bigg|\int\limits_0^t g(\varsigma)\hat f(\varsigma)\,d\varsigma\bigg|^{2p}\bigg)^{1/(2p)} \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\bigg(\int\limits_0^t |g(\varsigma)|\,d\varsigma\bigg)\sup_{\varsigma\geqslant 0}(E|\hat f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}, \tag{12}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\bigg(E|\int\limits_0^t g(\varsigma)^2\hat f(\varsigma)^2\,d\varsigma|^{p}\bigg)^{1/(2p)} \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\bigg(\int\limits_0^t g(\varsigma)^2\,d\varsigma\bigg)^{1/2}\sup_{\varsigma\geqslant 0}(E|\hat f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}, \tag{13}$$

где $f(\varsigma)$ – скалярный прогрессивно измеримый случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $\mathcal{B}(\varsigma)$ на $[0,t]$; c_p – некоторое число, зависящее от $p\geqslant 1$, но не зависящее от $f(\varsigma)$ и t; $g(\varsigma)$ – скалярная функция на $[0,\infty)$, квадрат которой локально суммируем; $\hat f(\varsigma)$ – скалярный случайный процесс такой, что

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}(E|\hat f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)} < \infty.$$

Неравенства (12) и (13) доказаны в работе [18], а справедливость неравенства (11) следует из неравенства (4) монографии [19, с. 65]. Оценки на константу c_p также можно найти в монографии [19], где $c_p = 2\sqrt{12}p$, однако они не всегда оптимальны. Например, для $p=1$ в (11) можно взять $c_p=1$.

Условия устойчивости, приведённые ниже в теореме 3, основном результате этого пункта, сформулированы в терминах $l\times l$-матрицы C, элементы которой вычисляются по формулам

$$c_{ss} = \frac{1}{\lambda_s}\bigg[\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\bigg(\tau_{1j}\bigg(\sum_{i=1}^{m_1}\bar a^i_{ss}\gamma(\tau_{1i}) + b^s_{s1}(0)\bigg) + c_p\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=2}^{m}(d^s_{si}(0)+b^s_{si}(0))\bigg) +$$

$$+\sum_{j\in 1,\ldots,m_1/I_s}\bar a^j_{ss} + b^s_{s1}(0)\bigg] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\sum_{i=2}^{m}(b^s_{si}(0)+d^s_{si}(0)),\quad s=\overline{1,l},$$

$$c_{s\nu} = \frac{1}{\lambda_s}\bigg[\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\bigg(\tau_{1j}\bigg(\sum_{i=1}^{m_1}\bar a^i_{s\nu} + b^\nu_{s1}(0)\bigg) + c_p\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=2}^{m}(d^\nu_{si}(0)+b^\nu_{si}(0))\bigg) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m_1}\bar a^j_{s\nu} + b^\nu_{s1}(0)\bigg] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\sum_{i=2}^{m}(b^\nu_{si}(0)+d^\nu_{si}(0)),\quad s,\nu=\overline{1,l},\quad s\neq\nu.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar E - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет $M^\gamma_{2p}y$-устойчивой при $\gamma(t)=\exp\{\beta t\}$ для некоторого $0<\beta<\min\{\lambda_s, s=\overline{1,l}\}$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2, где $q=2p$, а $\gamma(t)=\exp\{\beta t\}$, $t\geqslant 0$, $0 < \beta < \min\{\lambda_s, s=\overline{1,l}\}$.

В качестве вспомогательного уравнения (8) возьмём систему

$$d\bar y(t) = (-B(t)\bar y(t) + g_1(t))\,dt + \sum_{i=2}^{m} g_i(t)\,d\mathcal{B}_i(t),\quad t\geqslant 0, \tag{14}$$

где $B(t)$ – диагональная матрица размерности $l\times l$ с диагональными элементами $\sum_{j\in I_s} a^j_{ss}(t)$, $s=\overline{1,l}$, а $g_1(t)$, $g_i(t)$, $i=\overline{2,m}$, – l-мерные прогрессивно измеримые случайные процессы на $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми и локально суммируемыми с квадратом траекториями соответственно. В этом случае для решения $\bar y(t)$ уравнения (14) имеет место представление

$$\bar y(t)=U(t,0)\bar y(0)+\sum_{i=1}^m\int_0^t U(t,\varsigma)g(\varsigma)\,dZ(\varsigma),\quad t\geqslant 0,$$

где $U(t,\varsigma)$, $t\geqslant 0$, $0\leqslant\varsigma\leqslant t$, – диагональная матрица с диагональными элементами

$$\hat y_s(t,\varsigma)=\exp\biggl\{-\int_\varsigma^t\sum_{j\in I_s}a^j_{ss}(\varsigma)\,d\varsigma\biggr\},\quad t\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varsigma\leqslant t,\quad s=\overline{1,l},$$

g – $l\times l$-матрица, столбцами которой являются случайные процессы g_i, $i=\overline{1,m}$, соответственно. Тогда систему (6) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\bar y^s(t)=\hat y_s(t,0)\bar y^s(0)+\sum_{j\in I_s}\int_0^t\hat y_s(t,\varsigma)a^{1j}_{ss}(\varsigma)\int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}d\bar y^s(\zeta)-\sum_{j\in\{1,\ldots,m_1\}/I_s}\int_0^t\hat y_s(t,\varsigma)a^{1j}_{ss}(\varsigma)\bar y^s(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma-$$

$$-\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{l}\int_0^t\hat y_s(t,\varsigma)a^{1j}_{s\nu}(\varsigma)\bar y^\nu(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{i=2}^m\int_0^t\hat y_s(t,\varsigma)((V_1\bar y)(\varsigma))^{si}\,d\mathcal B_i(\varsigma)+$$

$$+\int_0^t\hat y_s(t,\varsigma)(G(\varsigma))^{s1}\,d\varsigma+\sum_{i=2}^m\int_0^t\hat y_s(t,\varsigma)(G(\varsigma))^{si}\,d\mathcal B_i(\varsigma),\quad s=\overline{1,l},\tag{15}$$

где

$$(G(\varsigma))^{si}=((V_2\bar C_1V_3\bar y)(\varsigma))^{si}+((V_2(\bar H\bar\xi(0)))(\varsigma))^{si}+((V_2\bar C_1f^\xi)(\varsigma))^{si}+(f^y(\varsigma))^{si},\quad s=\overline{1,l},\quad i=\overline{1,m}.$$

Учитывая обозначение $\bar y^{s\gamma}(2p)$, использованное в теореме 2, неравенства (11)–(13), предположения относительно системы (1), соотношения (15), равенства

$$d\bar y^s(\zeta)=-\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{l}a^{1i}_{s\nu}(\zeta)\bar y^k(h_{1i}(\zeta)\,d\zeta+\sum_{i=2}^m((V_1\bar y)(\zeta))^{si}\,d\mathcal B_i(\zeta)+$$

$$+(G(\varsigma))^{s1}\,d\zeta+\sum_{i=2}^m(G(\varsigma))^{si}\,d\mathcal B_i(\zeta),\quad s=\overline{1,l},$$

которые имеют место в силу системы (6), а также для $\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,n}\}$ очевидные оценки

$$(E|\upsilon_s|^{2p})^{1/(2p)}\leqslant\|\upsilon\|_{k^n_{2p}}\quad\text{при}\quad s=\overline{1,n},$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\,d\varsigma\leqslant\frac{1}{\lambda_s-\beta}\quad\text{при}\quad s=\overline{1,l},$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\biggl(\int_0^t(\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1})^2\,d\varsigma\biggr)^{1/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\quad\text{при}\quad s=\overline{1,l},$$

$$\gamma(t)\gamma(\bar h_{ij}(t))^{-1} \leqslant \gamma(\tau_{ij}), \quad t \geqslant 0, \quad \text{при} \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m_i},$$

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(\gamma(\varsigma)\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\gamma(\zeta)^{-1}\,d\zeta\biggr) \leqslant \gamma(\tau_{1j})\tau_{1j} \quad \text{при} \quad j = \overline{1,m_1},$$

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(\gamma(\varsigma)\biggl(\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\gamma(\zeta)^{-2}\,d\zeta\biggr)^{1/2}\biggr) \leqslant \gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}} \quad \text{при} \quad j = \overline{1,m_1},$$

для решения $\bar y(t,\upsilon,\varphi) = \bar y(t)$ системы (6) получаем

$$\bar y^{s\gamma}(2p) \leqslant \|\upsilon\|_{k^n_{2p}} + \frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar y^s(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} +$$

$$+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in\{1,\ldots,m_1\}/I_s}\bar a^j_{ss}\gamma(\tau_{1j})\hat y^{s\gamma}(2p) + \frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{l}\bar a^j_{s\nu}\gamma(\tau_{1j})\hat y^{\nu\gamma}(2p) +$$

$$+c_p\sum_{i=2}^{m}\sup_{t\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\int\limits_0^t(\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\gamma(\varsigma)((V_1\bar y)(\varsigma))^{si})^2\,d\varsigma\biggr|^{p}\biggr)^{1/(2p)} +$$

$$+\sup_{t\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\int\limits_0^t\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\gamma(\varsigma)(G(\varsigma))^{s1}\,d\varsigma\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} +$$

$$+c_p\sum_{i=2}^{m}\sup_{t\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\int\limits_0^t(\hat y_s(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\gamma(\varsigma)(G(\varsigma))^{si})^2 d\varsigma\biggr|^{p}\biggr)^{1/(2p)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\upsilon\|_{k^n_{2p}} + \frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar y^s(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} +$$

$$+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in\{1,\ldots,m_1\}/I_s}\bar a^j_{ss}\gamma(\tau_{1j})\hat y^{s\gamma}(2p) + \frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{l}\bar a^j_{s\nu}\gamma(\tau_{1j})\hat y^{\nu\gamma}(2p) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\biggl[\sum_{\nu=1}^{l}b^\nu_{s1}(\beta)\bar y^{s\gamma}(2p) + \hat b_{s1}(\beta)\|\upsilon\|_{k_{2p}} + (b_{s1}(\beta)+\bar b_{s1}(\beta))\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\biggr] + \frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\times$$

$$\times\sum_{i=2}^{m}\biggl[\sum_{\nu=1}^{l}(b^\nu_{si}(\beta)+d^\nu_{si}(\beta))\bar y^{s\gamma}(2p) + \hat b_{si}(\beta)\|\upsilon\|_{k_{2p}} + (b_{si}(\beta)+\bar b_{si}(\beta))\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\biggr], \quad s = \overline{1,l}, \qquad (16)$$

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar y^s(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} \leqslant \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{\nu=1}^{l}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} a^{1i}_{s\nu}(\zeta)\bar y^\nu(h_{1j}(\zeta))\,d\zeta\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} +$$

$$+c_p\sum_{i=2}^{m}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl(\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}(\gamma(\varsigma)((V_1)\bar y)(\zeta)^{si})^2\,d\zeta\biggr)^{p}\biggr)^{1/(2p)} + \sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}(G(\zeta))^{s1}\,d\zeta\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} +$$

$$+\,c_p\sum_{i=2}^{m}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl(\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}(\gamma(\varsigma)(G(\zeta))^{si})^2\,d\zeta\biggr)^p\biggr)^{1/(2p)}\leqslant$$

$$\leqslant\biggl(\sum_{\nu=1}^{l}\biggl[\sum_{i=1}^{m_1}\gamma(\tau_{1i})\bar a^i_{s\nu}+b^\nu_{s1}(\beta)\biggr]\bar y^{\nu\gamma}(2p)+\hat b_{s1}(\beta)\|\upsilon\|_{k^n_{2p}}+(b_{s1}(\beta)+\bar b_{s1}(\beta))\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\biggr)\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}+$$

$$+c_p\biggl(\sum_{i=2}^{m}\biggl[\sum_{\nu=1}^{l}\Bigl(d^\nu_{si}(\beta)+b^\nu_{si}(\beta)\Bigr)\bar y^{\nu\gamma}(2p)+\hat b_{si}(\beta)\|\upsilon\|_{k^n_{2p}}+(b_{si}(\beta)+\bar b_{si}(\beta))\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\biggr]\biggr)\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}},\quad(17)$$

где $s=\overline{1,l}$.

Из неравенств (16) и (17) следует, что

$$\bar y^{s\gamma}(2p)\leqslant N_s(\beta)\|\upsilon\|_{k^n_{2p}}+\sum_{\nu=1}^{l}c_{s\nu}(\beta)\bar y^{\nu\gamma}(2p)+M_s(\beta)\|\varphi\|_{L^n_{2p}},\quad s=\overline{1,l},\qquad(18)$$

где

$$N_s(\beta)=1+\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\biggl(\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}\hat b_{s1}(\beta)+c_p\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=1}^{m}\hat b_{si}(\beta)\biggr)+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\sum_{i=1}^{m}\hat b_{si}(\beta),$$

$$c_{ss}(\beta)=\frac{1}{\lambda_s-\beta}\biggl[\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\biggl(\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}\biggl(\sum_{i=1}^{m_1}\bar a^i_{ss}\gamma(\tau_{1i})+b^s_{s1}(\beta)\biggr)+c_p\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=1}^{m}(d^s_{si}(\beta)+b^s_{si}(\beta))\biggr)+$$

$$+\sum_{j\in 1,\dots,m_1/I_s}\bar a^j_{ss}\gamma(\tau_{1j})+b^s_{s1}(\beta)\biggr]+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\sum_{i=1}^{m}(b^s_{si}(\beta)+d^s_{si}(\beta)),$$

$$c_{s\nu}(\lambda)=\frac{1}{\lambda_s-\beta}\biggl[\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\biggl(\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}\biggl(\sum_{i=1}^{m_1}\bar a^i_{s\nu}\gamma(\tau_{1i})+b^\nu_{s1}(\beta)\biggr)+c_p\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=1}^{m}(d^\nu_{si}(\beta)+b^\nu_{si}(\beta))\biggr)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m_1}\bar a^j_{s\nu}\gamma(\tau_{1j})+b^\nu_{s1}(\beta)\biggr]+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\sum_{i=1}^{m}(b^\nu_{si}(\beta)+d^\nu_{si}(\beta)),\quad s,\nu=\overline{1,l},\quad s\neq\nu,$$

$$M_s(\beta)=\frac{1}{\lambda_s-\beta}\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\biggl[\gamma(\tau_{1j})\tau_{1j}(b_{s1}(\beta)+\bar b_{s1}(\beta))+c_p\gamma(\tau_{1j})\sqrt{\tau_{1j}}\sum_{i=1}^{m}(b_{si}(\beta)+\bar b_{si}(\beta))\biggr]+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s-\beta}(b_{s1}(\beta)+\bar b_{s1}(\beta))+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_s-\beta)}}\sum_{i=1}^{m}(b_{si}(\beta)+\bar b_{si}(\beta)),\quad s=\overline{1,l}.$$

Систему (18) запишем в матричной форме

$$\bar E\bar y^{\gamma}(2p)\leqslant C(\beta)\bar y^{\gamma}(2p)+\bar c(\beta)\|\upsilon\|_{k^n_{2p}}+\hat c(\beta)\|\varphi\|_{L^n_{2p}},$$

где $C(\beta)=(c_{ij}(\beta))^l_{i,j=1}$ – $l\times l$-матрица, а $\bar c(\beta)=\operatorname{col}(N_1(\beta),\dots,M_l(\beta))$, $\hat c(\beta)=\operatorname{col}(M_1(\beta),\dots$ $\dots,M_l(\beta))$ – l-мерные векторы-столбцы.

Очевидно, что $C(0)=C$, где C – матрица из условия теоремы 3. Поскольку $\bar E-C$ является положительно обратимой матрицей, а это свойство устойчиво относительно малых возмущений, то при достаточно малых $\beta>0$ матрица $\bar E-C(\beta)$ также будет неотрицательно обратимой. Следовательно, в силу теоремы 2 система (1) будет M^γ_{2p}-устойчивой для некоторого $0<\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,l}\}$. Теорема доказана.

4. Достаточные условия устойчивости. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями из предыдущих пунктов и на основе теоремы 3 получим достаточные условия устойчивости по части переменных решений для некоторых классов систем вида (1) в терминах их параметров.

Будем считать $\gamma(t)=\exp\{\beta t\}$, где β – некоторое нефиксированное положительное число.

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{1j}, $j=\overline{2,m_1}$, A_{ij}, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, равны нулю $P\times\mu$-почти всюду, а элементы матрицы A_{11} являются локально суммируемыми функциями, $h_{11}(t)=t$, $t\geqslant 0$, μ-почти всюду. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае условие (1a) лишнее и в условии (1b) υ_i, $i=\overline{1,n}$, – действительные числа. Кроме того, $f^y\equiv 0$, $f^\xi\equiv 0$.

Рассмотрим случай $l=n-1$. Тогда $y=\mathrm{col}\,(x^1,\ldots,x^{n-1})$, $\xi=x^n$, $(A_{11}(t))^1$ есть $(n-1)\times(n-1)$-матрица, полученная из матрицы $A_{11}(t)$ зачёркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{11}(t))^2=\mathrm{col}\,(a^{11}_{1n}(t),\ldots,a^{11}_{n-1n}(t)),\quad (A_{11}(t))^3=(a^{11}_{n1}(t),\ldots,a^{11}_{n-1n-1}(t)),\quad (A_{11}(t))^4=a^{11}_{nn}(t),$$

$$H(t)=\exp\biggl\{-\int\limits_0^t a^{11}_{nn}(\zeta)\,d\zeta\biggr\},\quad (C_1g)(t)=\int\limits_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1}g(\zeta)\,d\zeta.$$

Пусть:

– существуют положительные числа λ_s, $s=\overline{1,l}$, и неотрицательные числа $\bar a^1_{si}$, $s,i=\overline{1,l}$, такие, что

$$a^{11}_{ss}(t)\geqslant\lambda_s,\quad s=\overline{1,l},\quad |a^{11}_{si}(t)|\leqslant\bar a^1_{si},\quad s,i=\overline{1,l},\quad t\geqslant 0,$$

μ-почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b^j_{s1}(\beta)$, $s,j=\overline{1,l}$, такие, что для любой непрерывной функции $u(\varsigma)=\mathrm{col}\,(u^1(\varsigma),\ldots,u^l(\varsigma))$, $\varsigma\geqslant 0$, и любого β, $0<\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,l}\}$, имеют место неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}\biggl|\gamma(\varsigma)a^{11}_{sn}(\varsigma)\int\limits_0^\varsigma H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1}\sum_{j=1}^l a^{11}_{nj}(\zeta)u^j(\zeta)\,d\zeta\biggr|\leqslant\sum_{j=1}^l b^j_{s1}(\beta)\sup_{\varsigma\geqslant 0}|\gamma(\varsigma)u^j(\varsigma)|,\quad s=\overline{1,l};$$

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat b_{s1}(\beta)$, $s=\overline{1,l}$, такие, что для любых $x(0)=(x^1(0),\ldots,x^n(0))\in\mathbb{R}^n$ и $0<\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,l}\}$ выполняются неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}|\gamma(\varsigma)a^{11}_{sn}(\varsigma)H(\varsigma)x^n(0)|\leqslant\hat b_{s1}(\beta)|x(0)|,\quad s=\overline{1,l};$$

– элементы $l\times l$-матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss}=\frac{b^s_{s1}(0)}{\lambda_s},\quad s=\overline{1,l},\quad c_{s\nu}=\frac{\bar a^1_{s\nu}+b^\nu_{s1}(0)}{\lambda_s},\quad s,\nu=\overline{1,l},\quad s\neq\nu.$$

В силу теоремы 3 справедливо

Утверждение 1. *Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar E-C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально устойчивой относительно первых $n-1$ компонент.*

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{ij}, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, равны нулю $P\times\mu$-почти всюду, а элементами матриц A_{1j}, $j=\overline{1,m_1}$, являются локально суммируемые функции. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Рассмотрим случай $l = n-1$. Тогда $y = \mathrm{col}\,(x^1,\ldots,x^{n-1})$, $\xi = x^n$, $(A_{1j}(t))^1$ является $(n-1)\times(n-1)$-матрицей, полученной из матрицы $A_{1j}(t)$ зачёркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{1j}(t))^2 = \mathrm{col}\,(a^{1j}_{1n}(t),\ldots,a^{1j}_{n-1n}(t)),\quad (A_{1j}(t))^3 = (a^{1j}_{n1}(t),\ldots,a^{1j}_{n-1n-1}(t)),\quad (A_{1j}(t))^4 = a^{1j}_{nn}(t)$$

при $j=\overline{1,m_1}$. Предположим, что $h_{11}(t)=t$, $t\geqslant 0$, μ-почти всюду и элементы матриц $(A_{1j}(t))^2$, $(A_{1j}(t))^3$, $(A_{1j}(t))^4$, $t\geqslant 0$, равны нулю μ-почти всюду при $j=\overline{2,m_1}$. Тогда

$$H(t)=\exp\biggl\{-\int\limits_0^t a^{11}_{nn}(\zeta)\,d\zeta\biggr\},\quad (C_1g)(t)=\int\limits_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1}g(\zeta)\,d\zeta.$$

Пусть:

– существуют неотрицательные числа τ_{1j}, $j=\overline{2,m_1}$, такие, что

$$0\leqslant t-h_{1j}(t)\leqslant\tau_{1j},\quad j=\overline{2,m_1},\quad t\geqslant 0,$$

μ-почти всюду;

– существуют подмножества индексов $I_s\subset\{1,\ldots,m_1\}$, $s=\overline{1,l}$, положительные числа λ_s, $s=\overline{1,l}$, и неотрицательные числа $\bar a^j_{si}$, $j=\overline{1,m_1}$, $s,i=\overline{1,l}$, такие, что

$$\sum_{j\in I_s}a^{1j}_{ss}(t)\geqslant\lambda_s,\quad s=\overline{1,l},\quad |a^{1j}_{si}(t)|\leqslant\bar a^j_{si},\quad j=\overline{1,m_1},\quad s,i=\overline{1,l},\quad t\geqslant 0,$$

$P\times\mu$-почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b^j_{s1}(\beta)$, $s,j=\overline{1,l}$, такие, что для любой непрерывной функции $u(\varsigma)=\mathrm{col}\,(u^1(\varsigma),\ldots,u^l(\varsigma))$, $\varsigma\geqslant 0$, и любого β, $0<\beta<$ $<\min\{\lambda_s, s=\overline{1,l}\}$, имеют место неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}\biggl|\gamma(\varsigma)a^{11}_{sn}(\varsigma)\int\limits_0^\varsigma H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1}\sum_{j=1}^l a^{11}_{nj}(\zeta)u^j(\zeta)\,d\zeta\biggr|\leqslant\sum_{j=1}^l b^j_{s1}(\beta)\sup_{\varsigma\geqslant 0}|\gamma(\varsigma)u^j(\varsigma)|,\quad s=\overline{1,l};$$

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat b_{s1}(\beta)$, $s=\overline{1,l}$, такие, что для любых $x(0)=(x^1(0),\ldots,x^n(0))\in\mathbb{R}^n$ и $0<\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,l}\}$ выполняются неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}|\gamma(\varsigma)a^{11}_{sn}(\varsigma)H(\varsigma)x^n(0)|\leqslant\hat b_{s1}(\beta)|x(0)|,\quad s=\overline{1,l};$$

– элементы $l\times l$-матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss}=\frac{1}{\lambda_s}\biggl[\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\tau_{1j}\biggl(\sum_{i=1}^{m_1}\bar a^i_{ss}\gamma(\tau_{1i})+b^s_{s1}(0)\biggr)+\sum_{j\in 1,\ldots,m_1/I_s}\bar a^j_{ss}+b^s_{s1}(0)\biggr],\quad s=\overline{1,l},$$

$$c_{s\nu}=\frac{1}{\lambda_s}\biggl[\sum_{j\in I_s}\bar a^j_{ss}\tau_{1j}\biggl(\sum_{i=1}^{m_1}\bar a^i_{s\nu}+b^\nu_{s1}(0)\biggr)+\sum_{j=1}^{m_1}\biggr],\quad s,\nu=\overline{1,l},\quad s\neq\mu,$$

где $\tau_{11}=0$.

Утверждение 2. *Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar E-C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально устойчивой относительно первых $n-1$ компонент.*

Справедливость утверждения 2 также следует из теоремы 3. При проверке выполнения всех условий теоремы 3 нужно учесть, что $f^{\xi} \equiv 0$, а в выполнении условий для f^y можно убедиться непосредственной проверкой.

Пусть в системе (1) элементы матриц A_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{2,m_i}$, равны нулю $P\times\mu$-почти всюду, $h_{i1}(t)=t$, $i=\overline{1,m}$, $t\geqslant 0$, μ-почти всюду. Тогда система (1) является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Ито. В этом случае условие (1а) лишнее. Кроме того, $f^y\equiv 0$, $f^{\xi}\equiv 0$.

Рассмотрим случай $l=n-1$. Тогда $y=\operatorname{col}(x^1,\ldots,x^{n-1})$, $\xi=x^n$, $(A_{i1}(t))^1$ является $(n-1)\times(n-1)$-матрицей, полученной из матрицы $A_{i1}(t)$ зачёркиванием последней строки и последнего столбца,

$$(A_{i1}(t))^2=\operatorname{col}(a^{i1}_{1n}(t),\ldots,a^{i1}_{n-1n}(t)),\quad (A_{i1}(t))^3=(a^{i1}_{n1}(t),\ldots,a^{i1}_{n-1n-1}(t)),\quad (A_{i1}(t))^4=a^{i1}_{nn}(t)$$

при $i=\overline{1,m}$. Тогда

$$H(t)=\exp\biggl\{-\int\limits_0^t\biggl[a^{11}_{nn}(\zeta)+(1/2)\sum_{i=2}^m(a^{i1}_{nn}(\zeta))^2\biggr]d\zeta+\sum_{i=2}^m\int\limits_0^t a^{i1}_{nn}(\zeta)\,d\mathcal{B}_i(\zeta)\biggr\},$$

$$(C_1g)(t)=\int\limits_0^t H(t)(H(\zeta))^{-1}g(\zeta)\,dZ(\zeta).$$

Пусть:

– существуют положительные числа λ_s, $s=\overline{1,l}$, и неотрицательные числа $\bar a^1_{si}$, $s,i=\overline{1,l}$, такие, что

$$a^{11}_{ss}(t)\geqslant\lambda_s,\quad s=\overline{1,l},\quad |a^{11}_{si}(t)|\leqslant\bar a^1_{si},\quad s,i=\overline{1,l},\quad t\geqslant 0,$$

$P\times\mu$-почти всюду;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $b^j_{si}(\beta)$, $d^j_{s\nu}(\beta)$, $s,j=\overline{1,l}$, $i=\overline{1,m}$, $\nu=\overline{2,m}$, такие, что для любых $u=\operatorname{col}(u^1,\ldots,u^l)\in\bar D^l$ и $0<\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,l}\}$ имеют место неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\gamma(\varsigma)a^{i1}_{sn}(\varsigma)\int\limits_0^{\varsigma}H(\varsigma)(H(\zeta))^{-1}\biggl(\sum_{j=1}^l a^{11}_{nj}(\zeta)u^j(\zeta),\ldots$$

$$\ldots,\sum_{j=1}^l a^{m1}_{nj}(\zeta)u^j(\zeta)\biggr)\,dZ(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)}\leqslant\sum_{j=1}^l b^j_{si}(\beta)\sup_{\varsigma\geqslant 0}\Bigl(E|\gamma(\varsigma)u^j(\varsigma)|^{2p}\Bigr)^{1/(2p)},$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\sum_{j=1}^l a^{\nu1}_{sj}(\zeta)u^j(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)}\leqslant\sum_{j=1}^l d^j_{s\nu}(\beta)\sup_{\varsigma\geqslant 0}\Bigl(E|\gamma(\varsigma)u^j(\varsigma)|^{2p}\Bigr)^{1/(2p)}$$

при $s=\overline{1,l}$, $i=\overline{1,m}$, $\nu=\overline{2,m}$;

– существуют неотрицательные непрерывные функции $\hat b_{si}(\beta)$, $s=\overline{1,l}$, $i=\overline{1,m}$, такие, что для любых $0<\beta<\min\{\lambda_s,s=\overline{1,l}\}$, $\bar x(0)\in k^n_{2p}$ выполняются неравенства

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\Bigl(E|\gamma(\varsigma)a^{i1}_{sn}(\varsigma)H(\varsigma)\bar h(0)|^{2p}\Bigr)^{1/(2p)}\leqslant\hat b_{si}(\beta)\|\bar x(0)\|_{k^n_{2p}}$$

при $s=\overline{1,l}$, $i=\overline{1,m}$;

– элементы $l \times l$-матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{b^s_{s1}(0)}{\lambda_s} + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}} \sum_{i=1}^{m} (b^s_{si}(0) + d^s_{si}(0)), \quad s = \overline{1, l},$$

$$c_{s\nu} = \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}^j_{s\nu} + b^\nu_{s1}(0) \right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}} \sum_{i=1}^{m} (b^\nu_{si}(0) + d^\nu_{si}(0)), \quad s, \nu = \overline{1, l}, \quad s \neq \nu.$$

Утверждение 3. *Пусть для системы (1) выполнены все предыдущие предположения. Тогда если при этом матрица $\bar{E} - C$ является положительно обратимой, то система (1) будет экспоненциально $2p$-устойчивой относительно первых $n-1$ компонент.*

Справедливость утверждения 3 также следует из теоремы 3.

Замечание 3. В предыдущих утверждениях признаки устойчивости сформулированы в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам уравнений. В случае конкретных значений параметров положительная обратимость матрицы проверяется прямым вычислением обратной матрицы.

Заключение. В статье получены признаки моментной экспоненциальной устойчивости решений по части переменных линейных уравнений Ито с запаздыванием и приведены конкретные примеры, иллюстрирующие эффективность этих признаков. Основная схема доказательств, использованная в статье, основана на стохастической разновидности метода вспомогательных уравнений (W-метода) в комбинации с теорией неотрицательно обратимых матриц и методом покомпонентных оценок решений.

В дальнейшем автор планирует распространить этот подход на другие виды устойчивости (например, асимптотическую устойчивость), а также рассмотреть другие классы уравнений Ито с последействием, особенно те, где метод функционалов Ляпунова не работает или работает недостаточно эффективно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.
2. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига, 1989.
3. *Mao X.* Stochastic Differential Equations and Applications. Chichester, 1997.
4. *Mohammed S.-E.F.* Stochastic functional differential equations with memory. Theory, examples and applications // Proc. of the Sixth on Stochastic Analysis. Geilo, 1996. P. 1–91.
5. *Azbelev N.V., Simonov P.M.* Stability of Differential Equations with Aftereffect. London, 2002.
6. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М., 2001.
7. *Кадиев Р.И.* Достаточные условия устойчивости по части переменных линейных стохастических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С. 75–79.
8. *Кадиев Р.И.* Допустимость пар пространств по части переменных для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1994. № 4. С. 1–9.
9. *Kadiev R.I., Ponosov A.V.* Partial Lyapunov stability of linear stochastic functional differential equations with to initial values // Int. J. of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Anal. 2008. V. 15. № 5. P. 727–754.
10. *Kadiev R., Ponosov A.* Partial stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Int. J. of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Anal. 2014. V. 21. № 1. P. 1–35.
11. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2019. № 5. С. 86–98.
12. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2021. № 9. С. 116–132.
13. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 53. № 5. С. 579–590.

14. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и экспоненциальная устойчивость импульсных систем линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2020. № 10. С. 3–8.
15. *Кадиев Р.И.* Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 35–40.
16. *Кадиев Р.И.* Исследование вопросов устойчивости для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений методом вспомогательных уравнений // Дагестанские электрон. мат. изв. 2014. Вып. 2. С. 45–67.
17. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
18. *Kadiev R., Ponosov A.* The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Math. Analysis and Appl. 2012. V. 389. № 2. P. 1239–1250.
19. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М., 1986.

Дагестанский федеральный исследовательский
центр РАН, г. Махачкала,
Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала

Поступила в редакцию 23.03.2023 г.
После доработки 27.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1335–1356

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ИОНИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННЫХ СКОРОСТЕЙ АТОМОВ И ИОНОВ

© 2023 г. **М. Б. Гавриков, А. А. Таюрский**

Рассмотрены основные начально-краевые (смешанные) задачи для нелинейной системы уравнений одномерной ионизации газа в случае постоянных скоростей атомов газа и возникающих в результате ионизации ионов. Неизвестными в этой системе являются концентрации атомов и ионов. Найдена общая формула достаточно гладкого решения системы. Показано, что смешанные задачи для системы уравнений одномерной ионизации допускают интеграцию в виде явных аналитических выражений. В случае смешанной задачи для конечного отрезка аналитическое решение строится посредством рекуррентных формул, каждая из которых определена в треугольнике, принадлежащем некоторой указанной в работе триангуляции области определения неизвестных функций.

DOI: 10.31857/S0374064123100035, EDN: ONCTCE

Введение. В работе рассмотрено аналитическое решение основных начально-краевых задач для системы уравнений одномерной ионизации [1, с. 304; 2]

$$\frac{\partial n_{\mathrm{a}}}{\partial t}+\frac{\partial v_{\mathrm{a}}n_{\mathrm{a}}}{\partial z}=-k_I n_{\mathrm{a}}n_{\mathrm{i}},\quad \frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t}+\frac{\partial v_{\mathrm{i}}n_{\mathrm{i}}}{\partial z}=k_I n_{\mathrm{a}}n_{\mathrm{i}}, \tag{1}$$

где $t\in\mathbb{R}$ – время, $z\in\mathbb{R}$ – пространственная координата, n_{a}, n_{i} – подлежащие нахождению концентрации атомов и ионов, v_{a}, v_{i} – заданные скорости движения атомов и ионов, $k_I>0$ – известный коэффициент ионизации. Ниже система уравнений ионизации решается аналитически в случае $v_{\mathrm{a}}=\mathrm{const}$, $v_{\mathrm{i}}=\mathrm{const}$. Система (1) относится к полулинейным гиперболическим системам [3, с. 17], а в случае $v_{\mathrm{a}}=\mathrm{const}$, $v_{\mathrm{i}}=\mathrm{const}$ она записана в инвариантах [3, с. 28]. При $v_{\mathrm{i}}=v_{\mathrm{a}}=\mathrm{const}$ характеристики системы (1) совпадают, и она легко по ним интегрируется (см. п. 1). В случае $v_{\mathrm{i}}\neq v_{\mathrm{a}}$ характеристические векторы $(1,v_{\mathrm{a}})$, $(1,v_{\mathrm{i}})$ линейно независимы и, разлагая вектор (t,z) по базису из характеристических векторов и принимая координаты разложения за новые независимые переменные в (1), эта система, как показано в п. 1, сводится к виду, когда в новых переменных дифференциальный оператор левой части (1) расщепляется на два независимых оператора, что позволяет проинтегрировать систему уравнений ионизации. Указанный приём позволяет решать и некоторые другие задачи, например, задачу о поглощении (сорбции) газа поглощающим веществом [4, с. 165].

В п. 1 поставлены основные начально-краевые задачи для системы (1) в случае постоянных скоростей в неограниченных областях переменной z и на отрезке $[0,L]$, $L>0$. Предложенное в работе решение смешанных задач, основанное на формулах, выведенных в п. 1, намного проще и принципиально отличается от известных приёмов решения преимущественно линейных начально-краевых задач, базирующихся либо на методе Фурье, либо на применении преобразования Лапласа к неизвестным функциям. На основе результатов, полученных в п. 1, в пп. 2–4 дано аналитическое решение поставленных краевых задач в неограниченных областях переменной z, а в п. 5 на их основе решена начально-краевая задача на отрезке $[0,L]$. Приведенные в пп. 2–5 формулы доказывают, в частности, существование и единственность решений начально-краевых задач для системы (1). С другой стороны, они позволяют искать различные асимптотики решений рассмотренных задач (например, при $t\to+\infty$ или при неограниченном удалении от границы области ионизации). Однако в настоящей работе эти результаты не рассматриваются.

Представляет значительный интерес обобщение предложенного в работе метода решения системы (1) для постоянных скоростей v_{a}, v_{i} на практически важный случай [5], когда $v_{\mathrm{a}} = \mathrm{const} > 0$, $v_{\mathrm{i}} = v_{\mathrm{i}}(z)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция, имеющая положительную производную и единственный нуль внутри заданного отрезка $[0, L]$ (обычно полагают $v_{\mathrm{i}}(z) = a(z - z_0)$, $a > 0$, $z_0 \in (0, L)$ [6]). Начально-краевая задача для таких $v_{\mathrm{i}}(z)$ сводится к задаче Гурса [3, с. 96], когда краевые условия ставятся на характеристике $z = z_0$ системы (1). Численное решение показывает [7, 8], что в этом случае система (1) допускает периодические по времени решения, которые применительно к стационарному плазменному двигателю [1, с. 316; 9; 10] длины L описывают низкочастотные ионизационные колебания, наблюдаемые в эксперименте и называемые *бривинг модами* [11, 12]. Тем самым проведённые в настоящей работе исследования являются первым важным шагом в математическом анализе бривинг мод.

1. Решения уравнений ионизации в случае постоянных скоростей. Решим систему (1) в случае, когда $v_{\mathrm{a}} = \mathrm{const}$, $v_{\mathrm{i}} = \mathrm{const}$.

Рассмотрим основной случай $v_{\mathrm{a}} \neq v_{\mathrm{i}}$. Проведём замену $(t, z) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$ независимых переменных:

$$(t, z) = \alpha(1, v_{\mathrm{a}}) + \beta(1, v_{\mathrm{i}}),$$

или в координатном виде

$$t = \alpha + \beta, \quad z = \alpha v_{\mathrm{a}} + \beta v_{\mathrm{i}},$$

$$\alpha = (t v_{\mathrm{i}} - z)(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})^{-1}, \quad \beta = (z - t v_{\mathrm{a}})(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})^{-1}, \quad (\alpha, \beta) = \phi(t, z). \tag{2}$$

Отсюда для дифференциальных операторов получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{v_{\mathrm{a}}}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}} \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Подставив эти выражения в систему (1), сведём её к эквивалентному виду

$$\frac{\partial n_{\mathrm{a}}}{\partial \alpha} = -k_I n_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{i}}, \quad \frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial \beta} = k_I n_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{i}}. \tag{3}$$

Итак, задача нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (1) в области D переменных (t, z) равносильна задаче нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (3) в области $\phi(D)$ переменных (α, β). Отображение ϕ линейное, невырожденное, с определителем $\det \phi = 1/(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}) \neq 0$. В частности, оно переводит прямые в прямые, многоугольники – в многоугольники, выпуклые множества – в выпуклые множества и т.д. Построим сначала элементарную теорию решений системы (3) в прямоугольнике $\Pi = [\alpha_0, \alpha_1] \times [\beta_0, \beta_1]$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $\beta_0 < \beta_1$.

Теорема 1. *1. Пусть $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезках $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно, причём $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$. Тогда функции*

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha, \beta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad n_{\mathrm{i}}(\alpha, \beta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} \tag{4}$$

составляют непрерывно дифференцируемое решение системы (3) в прямоугольнике Π.

2. Если непрерывно дифференцируемые решения n_{a}, n_{i} систем (3) таковы, что множество нулей каждой из этих функций в Π имеет пустую внутренность и $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ – ещё пара функций на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно, удовлетворяющих условиям части 1 теоремы и восстанавливающих по формулам (4) те же самые функции n_{a}, n_{i} в Π, то найдутся константы $R \neq 0$ и C, для которых справедливы равенства

$$\bar{A}(\alpha) = RA(\alpha) + C, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad \bar{B}(\beta) = RB(\beta) + C, \quad \beta \in [\beta_0, \beta_1]. \tag{5}$$

Обратно, если функции $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ *вычисляются по* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *посредством формул (5) для некоторых констант* $R \neq 0$ *и* C, *то они удовлетворяют условиям части 1 теоремы и по формулам (4) восстанавливают те же функции* n_{a}, n_{i}, *что и для* $A(\alpha)$, $B(\beta)$.

3. В условиях части 1 теоремы функции n_{a}, n_{i}, *вычисляемые по формулам (4), удовлетворяют всюду в* Π *неравенствам* $n_{\mathrm{a}} \geqslant 0$, $n_{\mathrm{i}} \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не убывают на отрезках* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ *соответственно и*

$$\inf_{\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]} A(\alpha) > \sup_{\beta\in[\beta_0,\beta_1]} B(\beta)$$

(что равносильно $A(\alpha_0) > B(\beta_1)$*), либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не возрастают соответственно на* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ *и*

$$\sup_{\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]} A(\alpha) < \inf_{\beta\in[\beta_0,\beta_1]} B(\beta)$$

(что равносильно $A(\alpha_0) < B(\beta_1)$*).*

Доказательство. Поскольку $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$, то правые части равенств (4) определены корректно в Π и, очевидно, являются непрерывно дифференцируемыми в прямоугольнике Π функциями. По правилам дифференцирования находим

$$\frac{\partial n_{\mathrm{a}}}{\partial\alpha} = -\frac{B'(\beta)A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))^2}, \quad \frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial\beta} = \frac{A'(\alpha)B'(\beta)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))^2}.$$

Отсюда и из (4) следует тождественная справедливость равенств (3).

2. Пусть $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ – ещё пара функций, удовлетворяющих части 1 теоремы. Тогда всюду в Π выполнены тождества

$$B'(\beta)k_I^{-1}(A(\alpha)-B(\beta))^{-1} = n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta) = \bar{B}'(\beta)k_I^{-1}(\bar{A}(\alpha)-\bar{B}(\beta))^{-1},$$
$$A'(\alpha)k_I^{-1}(A(\alpha)-B(\beta))^{-1} = n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta) = \bar{A}'(\alpha)k_I^{-1}(\bar{A}(\alpha)-\bar{B}(\beta))^{-1}. \tag{6}$$

Обозначим

$$R(\alpha,\beta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\bar{A}(\alpha)-\bar{B}(\beta))(A(\alpha)-B(\beta))^{-1}.$$

Тогда функция R непрерывна и отлична от нуля всюду в Π и $\bar{B}'(\beta) = B'(\beta)R(\alpha,\beta)$, $\bar{A}'(\alpha) = A'(\alpha)R(\alpha,\beta)$ для всех $(\alpha,\beta) \in \Pi$. Отсюда следует, что множества нулей функций $\bar{B}'(\beta)$ и $B'(\beta)$ совпадают и, по условию, имеют пустую внутренность. Аналогично множества нулей функций $\bar{A}'(\alpha)$ и $A'(\alpha)$ совпадают и имеют пустую внутренность. Кроме того, указанные множества замкнуты и нигде не плотны в соответствующих отрезках $[\beta_0, \beta_1]$ и $[\alpha_1, \alpha_1]$. Пусть $U \subseteq [\beta_0, \beta_1]$, $V \subseteq [\alpha_0, \alpha_1]$ – дополнения указанных множеств, тогда $\bar{U} = [\beta_0, \beta_1]$, $\bar{V} = [\alpha_0, \alpha_1]$, и для любой точки $(\alpha,\beta) \in V \times U$ имеем

$$\bar{B}'(\beta)/B'(\beta) = R(\alpha,\beta) = \bar{A}'(\alpha)/A'(\alpha) \Rightarrow R(\alpha,\beta) \equiv R = \mathrm{const} \quad \text{на} \quad V \times U.$$

Поскольку R – непрерывная функция и $\overline{V \times U} = \bar{V} \times \bar{U} = \Pi$, то $R(\alpha,\beta) \equiv R$ всюду в Π. Но тогда $(\bar{B}(\beta) - RB(\beta))' = 0$, $(\bar{A}(\alpha) - RA(\alpha))' = 0$ и, значит, найдутся константы C и D, для которых $\bar{B}(\beta) - RB(\beta) \equiv C$, $\bar{A}(\alpha) - RA(\alpha) \equiv D$ всюду на отрезках $[\beta_0, \beta_1]$, $[\alpha_1, \alpha_1]$ соответственно. Подставляя равенства $\bar{B} = RB + C$, $\bar{A} = RA + D$ в соотношения (6) и учитывая $R \neq 0$, получаем

$$B'(\beta)(D-C)/R = B'(\beta), \quad A'(\alpha)(D-C)/R = A'(\alpha).$$

Поскольку по условию $A'(\alpha)$ и $B'(\beta)$ не равны тождественно нулю, то $D - C = 0$, что доказывает прямое утверждение. Обратное утверждение очевидно.

3. Пусть $n_{\mathrm{a}} \geqslant 0$, $n_{\mathrm{i}} \geqslant 0$ в Π и выполнены условия части 1 теоремы, в частности, имеют место равенства (4). Из непрерывности ненулевой функции двух переменных $A(\alpha) - B(\beta)$ в

Π и связности Π следует, что либо $A(\alpha)-B(\beta)>0$ всюду в Π, либо $A(\alpha)-B(\beta)<0$ всюду в Π. Поэтому из равенств (4) вытекает, что либо $A(\alpha)-B(\beta)>0$ всюду в Π и $A'(\alpha)\geqslant 0$, $B'(\beta)\geqslant 0$ всюду на $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$ соответственно, либо $A(\alpha)-B(\beta)<0$ всюду в Π и $A'(\alpha)\leqslant 0$, $B'(\beta)\leqslant 0$ всюду на $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$ соответственно. В первом случае функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно не убывают в своих областях определения и $\inf A(\alpha)>\sup B(\beta)$. Во втором случае $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно не возрастают в своих областях определения и $\sup A(\alpha)<\inf B(\beta)$, где инфимум и супремум по α берутся на отрезке $[\alpha_0,\alpha_1]$, а по β – на $[\beta_0,\beta_1]$. Остальные утверждения очевидны. Теорема доказана.

Если $A(\alpha)$, $B(\beta)$ удовлетворяют условиям части 1 теоремы 1, то n_{a}, n_{i}, вычисляемые по формулам (4), непрерывно дифференцируемы в Π и существуют непрерывные в Π смешанные производные $\partial^2 n_{\mathrm{a}}/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 n_{\mathrm{a}}/(\partial\beta\,\partial\alpha)$ и $\partial^2 n_{\mathrm{i}}/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 n_{\mathrm{i}}/(\partial\beta\,\partial\alpha)$. Это обстоятельство позволяет сформулировать обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n_{\mathrm{a}}>0$, $n_{\mathrm{i}}>0$ – непрерывно дифференцируемое решение (3) в прямоугольнике Π, для которого существуют непрерывные в Π смешанные частные производные $\partial^2 n_{\mathrm{a}}/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 n_{\mathrm{a}}/(\partial\beta\,\partial\alpha)$ и $\partial^2 n_{\mathrm{i}}/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 n_{\mathrm{i}}/(\partial\beta\,\partial\alpha)$. Тогда найдутся дважды непрерывно дифференцируемые функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$, определённые на сторонах прямоугольника, соответственно, $[\alpha_0,\alpha_1]$ и $[\beta,\beta_1]$, для которых $A(\alpha)\neq B(\beta)$ при всех $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$, $\beta\in$ $\in[\beta_0,\beta_1]$, и всюду в Π выполнены равенства (4).*

Замечание. Таким образом, для класса положительных непрерывно дифференцируемых решений системы (3), для которых в Π существуют обе непрерывные смешанные частные производные, формулы (4) задают общий вид решений этого класса.

Доказательство теоремы 2. Пусть $X=\ln n_{\mathrm{a}}$, $Y=\ln n_{\mathrm{i}}$. Очевидно, что функции $X(\alpha,\beta)$, $Y(\alpha,\beta)$ непрерывно дифференцируемые в Π и существуют в Π непрерывные смешанные частные производные $\partial^2 X/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 X/(\partial\beta\,\partial\alpha)$ и $\partial^2 Y/(\partial\alpha\,\partial\beta)$, $\partial^2 Y/(\partial\beta\,\partial\alpha)$. Относительно неизвестных X, Y система (3) записывается в виде

$$\frac{\partial X}{\partial\alpha}=-k_I e^Y,\quad \frac{\partial Y}{\partial\beta}=k_I e^X,\quad (\alpha,\beta)\in\Pi.$$

Отсюда следуют равенства

$$\frac{\partial^2 X}{\partial\beta\,\partial\alpha}=-k_I\frac{\partial e^Y}{\partial\beta}=-k_I e^Y\frac{\partial Y}{\partial\beta}=-k_I^2 e^{X+Y},\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial\alpha\,\partial\beta}=k_I\frac{\partial e^X}{\partial\alpha}=k_I e^X\frac{\partial X}{\partial\alpha}=-k_I^2 e^{X+Y}.$$

По теореме Шварца $\partial^2 Y/(\partial\alpha\,\partial\beta)=\partial^2 Y/(\partial\beta\,\partial\alpha)$, поэтому из проведённых вычислений следует тождество $\partial^2(X-Y)/(\partial\beta\,\partial\alpha)\equiv 0$ всюду в Π. Отсюда элементарным интегрированием получается, что $\partial(X-Y)/\partial\alpha=a_0(\alpha)$ – непрерывная на $[\alpha_0,\alpha_1]$ функция и, значит, $X-Y=$ $=\int a_0(\alpha)\,d\alpha+b(\beta)$. Функция $a(\alpha)\overset{\mathrm{def}}{=}\int a_0(\alpha)\,d\alpha$, очевидно, непрерывно дифференцируема, и тогда из равенства $X-Y=a(\alpha)+b(\beta)$ следует непрерывная дифференцируемость $b(\beta)$ на отрезке $[\beta_0,\beta_1]$. Итак, $X-Y=a(\alpha)+b(\beta)$ и $n_{\mathrm{a}}/n_{\mathrm{i}}=e^{a(\alpha)}e^{b(\beta)}=C(\alpha)D(\beta)$, где $C(\alpha)$, $D(\beta)$ – положительные непрерывно дифференцируемые функции соответственно на $[\alpha_0,\alpha_1]$ и $[\beta_0,\beta_1]$.

Подставив выражение $n_{\mathrm{a}}=n_{\mathrm{i}}C(\alpha)D(\beta)$ в первое уравнение системы (3), получим соотношение

$$\frac{\partial(n_{\mathrm{i}}C(\alpha))}{\partial\alpha D(\beta)}=-k_I n_{\mathrm{i}}^2 C(\alpha)D(\beta),$$

равносильное равенству

$$\frac{n_{\mathrm{i}}^{-2}\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial\alpha}+C'(\alpha)C^{-1}(\alpha)n_{\mathrm{i}}^{-1}=-k_I.$$

Пусть $Z=1/n_{\mathrm{i}}$, тогда относительно Z получается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha}-C'(\alpha)C^{-1}(\alpha)Z=k_I. \tag{7}$$

Решим уравнение (7) при каждом фиксированном $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ на отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$ методом вариации произвольной постоянной. Однородное уравнение имеет решение

$$Z_{\text{одн}} = \Gamma(\beta)C(\alpha).$$

Варьируя по α произвольную постоянную $\Gamma(\beta)$, получаем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} C(\alpha) = k_I,$$

откуда

$$\Gamma(\alpha, \beta) = k_I \int C^{-1}(\alpha)\, d\alpha + k_I K(\beta),$$

а решение уравнения (7) имеет вид $Z = \Gamma(\alpha, \beta)C(\alpha) = k_I(A(\alpha) - B(\beta))C(\alpha)$, где $A(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int d\alpha / C(\alpha)$, $B(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} -K(\beta)$. Из равенства $Z = \Gamma(\alpha, \beta)C(\alpha)$ вытекает положительность и непрерывная дифференцируемость $\Gamma(\alpha, \beta)$ в Π. Из равенства $\Gamma(\alpha, \beta) = k_I(A(\alpha) - B(\beta))$ и двукратной непрерывной дифференцируемости $A(\alpha)$ следует непрерывная дифференцируемость функции $B(\beta)$. Из положительности $\Gamma(\alpha, \beta)$ всюду в Π вытекает $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$. Наконец, из равенства $A'(\alpha) = 1/C(\alpha)$ следует тождество

$$n_{\text{i}} = Z^{-1} = \Gamma^{-1}(\alpha, \beta)C^{-1}(\alpha) = A'(\alpha)k_I^{-1}(A(\alpha) - B(\beta))^{-1}, \tag{8}$$

совпадающее со вторым равенством (4). Чтобы получить первое равенство (4) и установить двукратную непрерывную дифференцируемость функции $B(\beta)$ на $[\beta_0, \beta_1]$, подставим соотношение (8) во второе уравнение системы (3):

$$\frac{A'(\alpha)B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))^2} = k_I \frac{(A'(\alpha))^2}{k_I^2(A(\alpha) - B(\beta))^2} C(\alpha)D(\beta),$$

где было использовано равенство $n_{\text{a}} = n_{\text{i}}C(\alpha)D(\beta)$. Учитывая тождества $A'(\alpha)C(\alpha) = 1$ и $A'(\alpha) > 0$, получаем $B'(\beta) = D(\beta)$. Значит, функция $B(\beta)$ дважды непрерывно дифференцируема по β. Кроме того, с учётом (8) имеем

$$n_{\text{a}} = n_{\text{i}}C(\alpha)D(\beta) = \frac{A'(\alpha)C(\alpha)D(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))},$$

что совпадает с первым равенством (4). Итак, мы указали функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$, удовлетворяющие условиям 1 теоремы 1, для которых выполнены равенства (4). Теорема доказана.

Из части 2 теоремы 1 следует, что в формулах (4) всегда можно считать $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно неубывающими функциями на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно. Кроме того, стороны прямоугольника Π могут быть интервалами или полуинтервалами, в том числе полубесконечными или бесконечными. Соответствующие изменения формулировки части 3 теоремы 1 очевидны.

Из теорем 1, 2 следует, что в $\phi^{-1}(\Pi)$ решение системы (1) задаётся формулами

$$n_{\text{a}}(t, z) = \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad n_{\text{i}}(t, z) = \frac{A'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad \alpha = \frac{tv_{\text{i}} - z}{v_{\text{i}} - v_{\text{a}}}, \quad \beta = \frac{z - tv_{\text{a}}}{v_{\text{i}} - v_{\text{a}}}, \tag{9}$$

где $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – произвольные функции, удовлетворяющие части 1 теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 очевидным образом обобщается на случай, когда $\Pi \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(\alpha, \beta)\}$ – замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью $\operatorname{Int} \Pi$, причём $\Pi = \overline{\operatorname{Int} \Pi}$, где черта означает замыкание множества. Тогда $\Pi \subseteq [a_0, \alpha_1] \times [\beta_0, \beta_1]$, где $[\alpha_0, \alpha_1]$ – проекция Π на ось α, а $[\beta_0, \beta_1]$ – на ось β (какие-то из величин α_0, α_1, β_0, β_1 при этом могут быть бесконечными). В этом случае справедливость теоремы 2 (называемой ниже обобщённой) вытекает из следующей легко проверяемой леммы.

Лемма. *Пусть* $\mathrm{I}_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$, $a_\lambda < b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *– непустое семейство интервалов и* $\phi_\lambda(\alpha)$ *– непрерывно дифференцируемые функции на* I_λ, *причём для любых* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *имеем* $\phi_{\lambda_1}|_{\mathrm{I}_{\lambda_1}\bigcap \mathrm{I}_{\lambda_2}} = \phi_{\lambda_2}|_{\mathrm{I}_{\lambda_1}\bigcap \mathrm{I}_{\lambda_2}} + \mathrm{const}$. *Тогда найдётся непрерывно дифференцируемая функция* $\phi(\alpha)$, *заданная на открытом множестве* $\mathrm{I} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}_\lambda$, *для которой* $\phi|_{\mathrm{I}_\lambda} = \phi_\lambda + \mathrm{const}$ *для всех* $\lambda \in \Lambda$, *где* const *зависит от* λ.

Ниже в качестве Π рассматривается либо замкнутая полуплоскость, граница которой непараллельна осям координат (пп. 2, 3), либо замкнутый тупой угол, ограниченный двумя лучами, исходящими из начала координат (п. 4), либо замкнутая полуполоса, ограниченная двумя параллельными прямыми (п. 5).

Формулы (9) справедливы для $v_\mathrm{i} \neq v_\mathrm{a}$, при $v_\mathrm{i} = v_\mathrm{a}$ они теряют смысл. Для $v_\mathrm{i} = v_\mathrm{a} = v$ общее решение системы (1) получается напрямую, без введения новых координат α и β, интегрированием уравнений этой системы вдоль характеристик. Характеристики системы (1) имеют вид $z(t) = vt + \mathrm{const}$ и различаются значениями const. Пусть $n_\mathrm{a}(t) = n_\mathrm{a}(t, z(t))$, $n_\mathrm{i}(t) = n_\mathrm{i}(t, z(t))$ – значения неизвестных функций n_a, n_i вдоль фиксированной характеристики. Тогда из (1) следует, что функции $n_\mathrm{a}(t)$, $n_\mathrm{i}(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{dn_\mathrm{a}}{dt} = -k_I n_\mathrm{a} n_\mathrm{i}, \quad \frac{dn_\mathrm{i}}{dt} = k_I n_\mathrm{a} n_\mathrm{i}. \tag{10}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем первый интеграл системы (10): $d(n_\mathrm{a} + n_\mathrm{i})/dt \equiv 0$, откуда следует $n_\mathrm{a} + n_\mathrm{i} \equiv C = \mathrm{const}$. Поскольку $n_\mathrm{a} \geqslant 0$, $n_\mathrm{i} \geqslant 0$, то $C \geqslant 0$. При $C = 0$ имеем $n_\mathrm{a}(t) \equiv 0$, $n_\mathrm{i}(t) \equiv 0$ – тривиальное решение системы (10), не имеющее смысла. Поэтому ниже считаем $C > 0$. Тогда $n_\mathrm{a} = C - n_\mathrm{i}$, и для нахождения n_i имеем ОДУ

$$\frac{dn_\mathrm{i}}{dt} = k_I n_\mathrm{i}(C - n_\mathrm{i}). \tag{11}$$

Проинтегрировав, получим

$$\int \frac{dn_\mathrm{i}}{n_\mathrm{i}(C - n_\mathrm{i})} = k_I t + \mathrm{const},$$

откуда

$$\frac{1}{C} \ln\left|\frac{n_\mathrm{i}}{C - n_\mathrm{i}}\right| = k_I t + \mathrm{const}.$$

Поскольку $n_\mathrm{i} \geqslant 0$, $n_\mathrm{a} = C - n_\mathrm{i} \geqslant 0$, то $0 \leqslant n_\mathrm{i} \leqslant C$, и в последнем равенстве знак модуля можно снять. В результате имеем

$$n_\mathrm{i} = \frac{CD\exp(Ck_I t)}{1 + D\exp(Ck_I t)}, \quad n_\mathrm{a} = C - n_\mathrm{i} = \frac{C}{1 + D\exp(Ck_I t)}, \quad D \geqslant 0, \quad C > 0. \tag{12}$$

В случае $D = 0$ получим одно из двух особых решений уравнения (11): $n_\mathrm{i} \equiv 0$. Другое особое решение: $n_\mathrm{i} \equiv C$. Формулы (12) задают общее решение системы (10) на произвольной характеристике. Константы C и D определяются значениями n_a, n_i в произвольной точке на рассматриваемой характеристике. В частности, при решении начально-краевых задач для системы (1) значения C и D определяются начальными и граничными условиями (см. ниже).

Применим формулы (9), (12) для решения начально-краевых задач для системы (1), которые представляют основной практический интерес. Ограничимся следующими простейшими задачами.

(I) Начальная задача (задача Коши). В полуплоскости $z \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены начальные условия $n_\mathrm{a}(0, z) = n_\mathrm{a}^0(z)$, $n_\mathrm{i}(0, z) = n_\mathrm{i}^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$, где $n_\mathrm{a}^0(z)$, $n_\mathrm{i}^0(z)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

(II) Краевая задача. Для $v_\mathrm{a}, v_\mathrm{i} \geqslant 0$ в полуплоскости $z \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены краевые условия $n_\mathrm{a}(t, 0) = n_{\mathrm{a}0}(t)$, $n_\mathrm{i}(t, 0) = n_{\mathrm{i}0}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $n_{\mathrm{a}0}(t)$, $n_{\mathrm{i}0}(t)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

(III) Начально-краевая (смешанная) задача. Для $v_{\rm a}, v_{\rm i} \geqslant 0$ в первом квадранте $z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены начальные условия $n_{\rm a}(0,z) = n_{\rm a}^0(z)$, $n_{\rm i}(0,z) = n_{\rm i}^0(z)$, $z \geqslant 0$, и краевые условия $n_{\rm a}(t,0) = n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i}(t,0) = n_{\rm i0}(t)$, $t \geqslant 0$, где $n_{\rm a}^0(z)$, $n_{\rm i}^0(z)$, $z \geqslant 0$, $n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i0}(t)$, $t \geqslant 0$, – заданные непрерывно дифференцируемые функции на полупрямых $z \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$, подчиняющиеся условиям согласования

$$n_{\rm a0}(0) = n_{\rm a}^0(0), \quad n_{\rm i0}(0) = n_{\rm i}^0(0), \quad n_{\rm a0}'(0) + v_{\rm a}(n_{\rm a}^0)'(0) + k_I n_{\rm a0}(0) n_{\rm i0}(0) = 0,$$

$$n_{\rm i0}'(0) + v_{\rm i}(n_{\rm i}^0)'(0) - k_I n_{\rm a0}(0) n_{\rm i0}(0) = 0.$$

(IV) Смешанная задача на отрезке. Для $v_{\rm a} > 0 > v_{\rm i}$ в полуполосе $0 \leqslant z \leqslant L$, $t \geqslant 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям $n_{\rm a}(t,0) = n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i}(t,L) = n_{\rm i0}(t)$, $t \geqslant 0$, и начальным условиям $n_{\rm a}(0,z) = n_{\rm a}^0(z)$, $n_{\rm i}(0,z) = n_{\rm i}^0(z)$, $0 \leqslant z \leqslant L$, где $n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i0}(t)$, $t \geqslant 0$, $n_{\rm a}^0(z)$, $n_{\rm i}^0(z)$, $0 \leqslant z \leqslant L$, – заданные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$n_{\rm a0}(0) = n_{\rm a}^0(0), \quad n_{\rm i0}(0) = n_{\rm i}^0(L),$$

$$n_{\rm a0}'(0) + v_{\rm a}(n_{\rm a}^0)'(0) + k_I n_{\rm a}^0(0) n_{\rm i}^0(0) = 0, \quad n_{\rm i0}'(0) + v_{\rm i}(n_{\rm i}^0)'(L) - k_I n_{\rm a}^0(L) n_{\rm i}^0(L) = 0.$$

Более сложные начально-краевые задачи в этой работе не рассматриваются.

Сначала исследуем случай $v_{\rm i} = v_{\rm a} = v$.

Задача Коши (I). Решим её методом характеристик. Пусть точка (z,t) лежит в полуплоскости $t \geqslant 0$, $z \in \mathbb{R}$. Через эту точку проходит единственная характеристика $(vs + \mathrm{const}, s)$ для значения $\mathrm{const} = z - vt$, и она имеет вид $(z + v(s-t), s)$. На этой характеристике решение системы (1) задаётся формулами (12), в которых t нужно заменить на s. С другой стороны, эта характеристика пересекает ось z при $s = 0$ в единственной точке $z - vt$, где известны значения $n_{\rm a}^0(z - vt)$ и $n_{\rm i}^0(z - vt)$. Поэтому в формулах (12) с s вместо t константы C и D находятся из условий $n_{\rm a}(0) = n_{\rm a}^0(z - vt)$, $n_{\rm i}(0) = n_{\rm i}^0(z - vt)$. В результате получаем

$$C = n_{\rm a}^0(z - vt) + n_{\rm i}^0(z - vt), \quad D = n_{\rm i}^0(z - vt)/n_{\rm a}^0(z - vt),$$

$$n_{\rm i}(z,t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_I t)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad n_{\rm a}(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad y = z - vt.$$

Нетрудно прямой подстановкой в (3) убедиться в том, что полученные формулы задают решение задачи Коши в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Краевая задача (II). Единственная характеристика, проходящая через точку (z,t) полуплоскости $z \geqslant 0$, пересекает ось t в точке $s = t - z/v$, являющейся решением уравнения $z + v(s - t) = 0$, где известны значения $n_{\rm a}$ и $n_{\rm i}$. Поэтому при вычислении констант C и D из формулы (12) с s вместо t нужно в этих формулах положить $s = t - z/v$ и вычислять правые части (12) по формулам $n_{\rm i} = n_{\rm i0}(t - z/v)$, $n_{\rm a} = n_{\rm a0}(t - z/v)$. В итоге получим

$$C = n_{\rm a0}(t - z/v) + n_{\rm i0}(t - z/v), \quad D = \frac{n_{\rm i0}(t - z/v)}{n_{\rm a0}(t - z/v)} \exp(-Ck_I(t - z/v)),$$

$$n_{\rm i}(z,t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_I t)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad n_{\rm a}(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad y = t - z/v.$$

Нетрудно прямой подстановкой в (3) проверить, что полученные формулы задают решение краевой задачи (II) в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Смешанная задача (III). Пусть $z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Единственная характеристика, проходящая через точку (z,t) при $z < tv$, пересекает полуось $t \geqslant 0$ в точке $s = t - z/v$, где $n_{\rm a}$, $n_{\rm i}$ известны и задаются краевыми условиями, но не пересекают полуось $z \geqslant 0$. При $z > tv$ эта характеристика пересекает полуось $z \geqslant 0$ в точке $z - vt$, где $n_{\rm a}$, $n_{\rm i}$ известны и задаются начальными условиями, но не пересекают полуось $t \geqslant 0$. При $z = tv$ указанная характеристика пересекает обе полуоси $z \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ в нулевых точках, где начальные и краевые условия совпадают. Поэтому константы $C = C(y)$, $D = D(y)$ и функции $n_{\rm i}(z,t)$, $n_{\rm a}(z,t)$ находятся по формулам

$$C(y) = \begin{cases} n_{\rm a}^0(z - vt) + n_{\rm i}^0(z - vt), & z \geqslant tv, \\ n_{\rm a0}(t - zv^{-1}) + n_{\rm i0}(t - zv^{-1}), & z \leqslant tv, \end{cases}$$

$$D(y) = \begin{cases} \dfrac{n_{\rm i}^0(z - vt)}{n_{\rm a}^0(z - tv)}, & z \geqslant tv, \\ \dfrac{n_{\rm i0}(t - zv^{-1})}{n_{\rm a0}(t - zv^{-1})} \exp(-Ck_I(t - z/v)), & z \leqslant tv, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} z - vt, & z \geqslant tv, \\ t - zv^{-1}, & z \leqslant tv. \end{cases}$$

Условия согласования в нуле гарантируют, что функции $C(z,t)$, $D(z,t)$ будут непрерывны и непрерывно дифференцируемы в первом квадранте.

В случае $v = 0$ краевая и смешанная задачи теряют смысл, ионизация в различных точках пространства происходит независимо и определяется только временем. Формулы для $n_{\rm a}$ и $n_{\rm i}$ получаются из приведённых выше формул решения задачи Коши (I), если в них положить $v = 0$. Если $v \leqslant 0$, то краевая задача ставится в полуплоскости $z \leqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$, а смешанная задача – во втором квадранте $z \leqslant 0$, $t \geqslant 0$.

2. Решение задачи Коши (I). Рассмотрим задачу Коши (I) в случае $v_{\rm a} \neq v_{\rm i}$. В переменных (α,β) задача состоит в поиске непрерывно дифференцируемого решения системы (3) в полуплоскости $P \stackrel{\rm def}{=} \{\alpha + \beta \geqslant 0\}$, которое на границе $\alpha + \beta = 0$ этой полуплоскости имеет заданные значения

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = n_{\rm a}(-\beta,\beta) = n_{\rm a}^0(\alpha v_{\rm a} + \beta v_{\rm i}) = n_{\rm a}^0(\beta(v_{\rm i} - v_{\rm a})), \quad \alpha + \beta = 0,$$

$$n_{\rm i}(\alpha,\beta) = n_{\rm i}(-\beta,\beta) = n_{\rm i}^0(\alpha v_{\rm a} + \beta v_{\rm i}) = n_{\rm i}^0(\beta(v_{\rm i} - v_{\rm a})) \quad \alpha + \beta = 0.$$

Выше был изложен способ решения системы (3) в произвольном прямоугольнике Π. Построим решение системы (3) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq P$, которое на прямой $\alpha + {}$ ${}+\beta = 0$ совпадает с заданными функциями,

$$n_{\rm a}|_{\alpha+\beta=0} = n_{\rm a}^0(\beta(v_{\rm i} - v_{\rm a})), \quad n_{\rm i}|_{\alpha+\beta=0} = n_{\rm i}^0(\beta(v_{\rm i} - v_{\rm a})).$$

Если такое решение существует, то его сужение на P даёт, очевидно, искомое решение задачи Коши в переменных (α,β). Согласно теореме 1 решение системы (3) в прямоугольнике Π_∞ определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, и вычисляется по этим функциям посредством формул (4). При этом, согласно теореме 1, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять двум условиям:

1) области значений функций $A(\alpha)$, $B(\beta)$ не пересекаются: $A(\mathbb{R}) \bigcap B(\mathbb{R}) = \varnothing$, и тогда, учитывая связность прямой $\mathbb{R}$, либо $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, либо $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$,

2) если $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно невозрастающие на $\mathbb{R}$ функции, если $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно неубывающие на $\mathbb{R}$ функции.

Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ определяются по известным значениям $n_{\rm a}$ и $n_{\rm i}$ на прямой $\alpha+\beta = 0$ (т.е. из начальных условий). Из тождеств (4) получим

$$n_{\rm a}^0(\beta(v_{\rm i} - v_{\rm a})) = n_{\rm a}(-\beta,\beta) = B'(\beta)k_I^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1},$$

$$n_{\rm i}^0(\beta(v_{\rm i} - v_{\rm a})) = n_{\rm i}(-\beta,\beta) = A'(-\beta)k_I^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Обозначим $n_{\rm a}(\beta) = k_I n_{\rm a}^0(\beta(v_{\rm i} - v_{\rm a}))$, $n_{\rm i}(\beta) = k_I n_{\rm i}^0(\beta(v_{\rm i} - v_{\rm a}))$, $A_0(\beta) = A(-\beta)$. Тогда $n_{\rm a}$ и $n_{\rm i}$ – неотрицательные функции, а условия (13) дают линейную систему ОДУ с переменными коэффициентами для нахождения функций $A_0(\beta)$, $B(\beta)$ на прямой $\mathbb{R}$:

$$B' = n_{\rm a}(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -n_{\rm i}(\beta)(A_0 - B). \tag{14}$$

Поскольку $n_{\mathrm{a}}(\beta)$, $n_{\mathrm{i}}(\beta)$ непрерывно дифференцируемы по β, то любое решение системы (14) дважды непрерывно дифференцируемо всюду на прямой. Кроме того, для любых $C, D \in \mathbb{R}$ существует, и притом единственное, решение системы (14), для которого $A_0(0) = C$, $B(0) = D$. Если $C = D$, то из теоремы единственности для системы (14) следует, что решение с такими начальными условиями: $A_0(\beta) \equiv C$, $B(\beta) \equiv D$. Поэтому далее считается, что $C \neq D$. Из теоремы единственности решения задачи Коши для системы (14) следует, что решение (14) с начальными условиями $A_0(0) = C$, $B(0) = D$ имеет вид

$$B(\beta) = D + (C - D)\int\limits_0^\beta n_{\mathrm{a}}(\beta)e^{-N(\beta)}\,d\beta,$$

$$A_0(\beta) = C + (D - C)\int\limits_0^\beta n_{\mathrm{i}}(\beta)e^{-N(\beta)}\,d\beta, \quad N(\beta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^\beta (n_{\mathrm{a}}(\beta) + n_{\mathrm{i}}(\beta))\,d\beta. \tag{15}$$

Действительно, обозначим правые части равенств (15) через $\bar{B}(\beta)$ и $\bar{A}_0(\beta)$. Очевидно, $\bar{B}(0) = D = B(0)$, $\bar{A}_0(0) = C = A_0(0)$. Кроме того, $\bar{B}(\beta)$, $\bar{A}_0(\beta)$ – решение системы (14). Проверим, например, справедливость первого уравнения (14). Левая его часть равна $\bar{B}'(\beta) = (C - D)n_{\mathrm{a}}e^{-N}$, а правая имеет вид

$$n_{\mathrm{a}}(\bar{A}_0 - \bar{B}) = n_{\mathrm{a}}\biggl(C - D + (D - C)\int\limits_0^\beta n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\beta - (C - D)\int\limits_0^\beta n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta\biggr) =$$

$$= n_{\mathrm{a}}(C - D)\biggl(1 - \int\limits_0^\beta n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\beta - \int\limits_0^\beta n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta\biggr) = n_{\mathrm{a}}(C - D)\biggl(1 - \int\limits_0^\beta (n_{\mathrm{i}} + n_{\mathrm{a}})e^{-N}\,d\beta\biggr) =$$

$$= n_{\mathrm{a}}(C-D)\biggl(1-\int\limits_0^\beta N'e^{-N}\,d\beta\biggr) = n_{\mathrm{a}}(C-D)(1+e^{-N}|_0^\beta) = n_{\mathrm{a}}(C-D)(1+e^{-N}-1) = n_{\mathrm{a}}(C-D)e^{-N}.$$

Тем самым справедливость первого уравнения системы (14) установлена. Аналогично доказывается второе равенство (14). Итак, $\bar{A}_0(\beta)$, $\bar{B}(\beta)$ – решение (14), удовлетворяющее начальным условиям $\bar{A}_0(0) = C$, $\bar{B}(0) = D$. Осталось воспользоваться теоремой единственности.

Из равенств (15) вытекает справедливость условия 1). Пусть $D > C$, тогда $A_0(\alpha) < B(\beta)$ (что равносильно $A(\alpha) < B(\beta)$) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. В самом деле, это неравенство с учётом тождеств (15) равносильно соотношению

$$\int\limits_0^\alpha n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\alpha + \int\limits_0^\beta n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta < 1. \tag{16}$$

Пусть $\gamma > 0$ – любая верхняя граница чисел α, β. Учитывая неотрицательность функций n_{i}, n_{a}, левая часть (16), очевидно, не превосходит единицы:

$$\int\limits_0^\gamma n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\beta + \int\limits_0^\gamma n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta = \int\limits_0^\gamma (n_{\mathrm{i}} + n_{\mathrm{a}})e^{-N}\,d\beta = \int\limits_0^\gamma N'e^{-N}\,d\beta = -e^{-N}|_0^\gamma = 1 - e^{-N(\gamma)} < 1,$$

что и доказывает (16). Если $C > D$, то $B(\beta) < A_0(\alpha)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Последнее неравенство (его несложно проверить с учётом тождеств (15)), тоже равносильно соотношению (16). Тем самым справедливость условия 1) установлена. Если $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, то правая часть первого равенства (14) неположительна, а второго равенства – неотрицательна. Поэтому $B(\beta)$ монотонно не возрастает, $A_0(\beta)$ монотонно не убывает на $\mathbb{R}$, и значит, функция $A(\beta)=A_0(-\beta)$ тоже монотонно не возрастает на $\mathbb{R}$. Аналогично устанавливается, что при $B(\mathbb{R})<A(\mathbb{R})$ функции $B(\beta)$ и $A(\beta)$ монотонно не убывают на $\mathbb{R}$. Тем самым доказана справедливость условия 2).

Итак, согласно теореме 1, формулы (4) с учётом (15) дают решение задачи Коши в переменных $(\alpha,\beta)\in P$:

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta)=k_I^{-1}n_{\mathrm{a}}(\beta)e^{-N(\beta)}\biggl(1-\int\limits_0^{-\alpha}n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\alpha-\int\limits_0^{\beta}n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta\biggr)^{-1},$$

$$n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta)=k_I^{-1}n_{\mathrm{i}}(\alpha)e^{-N(\alpha)}\biggl(1-\int\limits_0^{-\alpha}n_{\mathrm{i}}e^{-N}\,d\alpha-\int\limits_0^{\beta}n_{\mathrm{a}}e^{-N}\,d\beta\biggr)^{-1}.$$

В переменных (z,t) получаем следующие формулы:

$$n_{\mathrm{a}}(z,t)=n_{\mathrm{a}}^0(z-v_{\mathrm{a}}t)e^{-N(z-v_{\mathrm{a}}t)}\biggl[1-\frac{k_I}{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}\biggl(\int\limits_0^{z-v_{\mathrm{i}}t}n_{\mathrm{i}}^0(p)e^{-N(p)}\,dp+\int\limits_0^{z-v_{\mathrm{a}}t}n_{\mathrm{a}}^0(p)e^{-N(p)}\,dp\biggr)\biggr]^{-1},$$

$$n_{\mathrm{i}}(z,t)=n_{\mathrm{i}}^0(z-v_{\mathrm{i}}t)e^{-N(z-v_{\mathrm{i}}t)}\biggl[1-\frac{k_I}{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}\biggl(\int\limits_0^{z-v_{\mathrm{i}}t}n_{\mathrm{i}}^0(p)e^{-N(p)}\,dp+\int\limits_0^{z-v_{\mathrm{a}}t}n_{\mathrm{a}}^0(p)e^{-N(p)}\,dp\biggr)\biggr]^{-1},$$

$$N(p)=\frac{k_I}{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}\int\limits_0^{p}[n_{\mathrm{a}}^0(q)+n_{\mathrm{i}}^0(q)]\,dq,\quad z\in\mathbb{R},\quad t\geqslant 0,\tag{17}$$

где $n_{\mathrm{i}}^0(p)\geqslant 0$, $n_{\mathrm{a}}^0(p)\geqslant 0$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, и знаменатель в формулах (17) заведомо положителен. Итак, формулы (17) дают аналитическое решение системы (1) при $t\geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$n_{\mathrm{a}}(z,0)=n_{\mathrm{a}}^0(z),\quad n_{\mathrm{i}}(z,0)=n_{\mathrm{i}}^0(z),\quad z\in\mathbb{R}.$$

Итоговые формулы (17) для решения задачи Коши в координатах (α,β) не зависят от констант C и D, $C\ne D$, определявших функции $A_0(\beta)$, $B(\beta)$. Это не случайно. Если $\bar A_0(\beta)$, $\bar B(\beta)$ – другие решения системы (14) с начальными условиями $\bar A_0(0)=\bar C$, $\bar B(0)=\bar D$, $\bar C\ne\bar D$, то однозначно определяются константы $R\ne 0$, S, для которых $\bar C=RC+S$, $\bar D==RD+S$. Рассмотрим функции $RA_0(y)+S$, $RB(y)+S$, которые удовлетворяют системе (14) и начальному условию $\bar C$, $\bar D$, поэтому, по теореме единственности решения задачи Коши для линейной системы (14), $\bar A_0(\beta)\equiv RA_0(\beta)+S$, $\bar B(\beta)\equiv RB(\beta)+S$, в частности, $\bar A(\alpha)==\bar A_0(-\alpha)\equiv RA(\alpha)+S$. Но для таких пар функций $\bar A(\alpha)$, $\bar B(\beta)$ и $A(\alpha)$, $B(\beta)$ формулы (4) дают одни и те же значения n_{a}, n_{i}.

3. Краевая задача (II). Рассмотрим краевую задачу (II) в случае $v_{\mathrm{i}}\ne v_{\mathrm{a}}$. Анализ этого случая проходит по той же схеме, что и решение задачи Коши выше. Выделим основные моменты. В переменных (α,β) ищем непрерывно дифференцируемое решение системы (3) в полуплоскости $P_0=\{\alpha v_{\mathrm{a}}+\beta v_{\mathrm{i}}\geqslant 0\}$, для которого функции n_{a}, n_{i} на границе полуплоскости P_0, $\partial P_0=\{\alpha v_{\mathrm{a}}+\beta v_{\mathrm{i}}=0\}$ принимают заданные значения $n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta)=n_{\mathrm{a}0}(\alpha+\beta)$, $n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta)==n_{\mathrm{i}0}(\alpha+\beta)$, $\alpha v_{\mathrm{a}}+\beta v_{\mathrm{i}}=0$. Построим такое непрерывно дифференцируемое решение системы (3) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\supseteq P_0$, которое на границе полуплоскости P_0, т.е. на прямой $\alpha v_{\mathrm{a}}+\beta v_{\mathrm{i}}=0$, совпадает с заданными функциями $n_{\mathrm{a}0}(\alpha+\beta)$, $n_{\mathrm{i}0}(\alpha+\beta)$. Тогда, очевидно, сужение этого решения на P_0 будет искомым решением краевой задачи в координатах (α,β). Согласно теореме 1 искомое решение определяется двумя непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (4). При этом функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять условиям 1) и 2), сформулированным в п. 2. Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ определяются по известным значениям n_{a}, n_{i} на границе P_0. На этой границе $\beta=-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}}$, и значит, согласно (4) имеем

$$n_{\mathrm{a}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})=B'(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})k_I^{-1}[A(\alpha)-B(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})]^{-1},$$

$$n_{\mathrm{i}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})=A'(\alpha)k_I^{-1}[A(\alpha)-B(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})]^{-1},\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Обозначим

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha)=k_I(v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})n_{\mathrm{a}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}),\quad n_{\mathrm{i}}(\alpha)=k_In_{\mathrm{i}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}),\quad B_0(\alpha)=B(-\alpha v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}}).$$

Тогда краевое условие (18) даёт линейную систему ОДУ на прямой с переменными коэффициентами для нахождения функций $A(\alpha)$, $B_0(\alpha)$:

$$B_0'=-n_{\mathrm{a}}(\alpha)(A-B_0),\quad A'=n_{\mathrm{i}}(\alpha)(A-B_0). \tag{19}$$

Поскольку функции $n_{\mathrm{a}}(\alpha)$, $n_{\mathrm{i}}(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы, то любое решение системы (19) дважды непрерывно дифференцируемо и определено на всей прямой. Рассмотрим решение задачи Коши для системы (19) с начальными условиями $A(0)=C\neq B_0(0)=D$. Несложно проверить, что это решение вычисляется по формулам (см. выше)

$$B_0(\alpha)=D+(D-C)\int\limits_0^\alpha n_{\mathrm{a}}e^N\,d\alpha,\quad A(\alpha)=C+(C-D)\int\limits_0^\alpha n_{\mathrm{i}}e^N\,d\alpha,\quad N(\alpha)\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^\alpha(n_{\mathrm{a}}+n_{\mathrm{i}})\,d\alpha. \tag{20}$$

С помощью формул (20) обосновывается (см. выше) справедливость условий 1) и 2) для функций $A(\alpha)$, $B(\beta)=B_0(-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}})$. Условие (16) при этом заменяется на следующее:

$$1+\int\limits_0^\alpha n_{\mathrm{i}}e^N\,d\alpha+\int\limits_0^\beta n_{\mathrm{a}}e^N\,d\beta>0,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}. \tag{21}$$

И если $C>D$, то $A(\alpha)>B(\beta)$, а при $C<D$ имеем $A(\alpha)<B(\beta)$ для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

По формулам (4) с учётом выражений (20) получим решение краевой задачи в координатах $(\alpha,\beta)\in P_0$:

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta)=\frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{a}}}n_{\mathrm{a}}(-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}})e^{N(-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}})}\frac{1}{k_I}\left[1+\int\limits_0^\alpha n_{\mathrm{i}}e^N\,d\alpha+\int\limits_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}n_{\mathrm{a}}e^N\,d\beta\right]^{-1},$$

$$n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta)=n_{\mathrm{i}}(\alpha)e^{N(\alpha)}\frac{1}{k_I}\left[1+\int\limits_0^\alpha n_{\mathrm{i}}e^N\,d\alpha+\int\limits_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}n_{\mathrm{a}}e^N\,d\beta\right]^{-1}.$$

Подставляя в эти формулы $\alpha=(tv_{\mathrm{i}}-z)/(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})$, $\beta=(z-tv_{\mathrm{a}})/(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})$, получаем после несложных преобразований решение краевой задачи в переменных (z,t):

$$n_{\mathrm{a}}(z,t)=n_{\mathrm{a}0}(t-z/v_{\mathrm{a}})e^{N(t-z/v_{\mathrm{a}})}\left[1+\frac{k_I}{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_{\mathrm{i}}}v_{\mathrm{i}}n_{\mathrm{i}0}(p)e^{N(p)}\,dp+\int\limits_0^{t-z/v_{\mathrm{a}}}v_{\mathrm{a}}n_{\mathrm{a}0}(p)e^{N(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_{\rm i}(z,t)=n_{\rm i0}(t-z/v_{\rm i})e^{N(t-z/v_{\rm i})}\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{N(p)}\,dp+\int\limits_0^{t-z/v_{\rm a}} v_{\rm a}n_{\rm a0}(p)e^{N(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$N(p)=\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\int\limits_0^p[v_{\rm a}n_{\rm a0}(q)+v_{\rm i}n_{\rm i0}(q)]\,dq, \qquad (22)$$

где $n_{\rm a0}(p)\geqslant 0$, $n_{\rm i0}(p)\geqslant 0$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, и знаменатель в (22), согласно неравенству (21), заведомо положителен. Итак, формулы (22) дают аналитическое решение системы (1) в полуплоскости $z\geqslant 0$, удовлетворяющее краевому условию $n_{\rm a}(0,t)=n_{\rm a0}(t)$, $n_{\rm i}(0,t)=n_{\rm i0}(t)$ для всех $t\in\mathbb{R}$.

4. Решение смешанной задачи (III). Рассмотрим смешанную задачу (III) в случае $v_{\rm a}>0$, $v_{\rm i}>0$, $v_{\rm a}\neq v_{\rm i}$. В координатах (α,β) её решение сводится к поиску в тупом угле $\Lambda\overset{\rm def}{=}\{(\alpha,\beta):\alpha+\beta\geqslant 0,\ \alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}\geqslant 0\}$ непрерывно дифференцируемых функций $n_{\rm a}(\alpha,\beta)$, $n_{\rm i}(\alpha,\beta)$, удовлетворяющих системе (3) и имеющих заданные значения на границе угла $\partial\Lambda$. Последнее множество состоит из двух лучей, которые обозначим Λ_t и Λ_z:

$$\partial\Lambda=\Lambda_t\bigcup\Lambda_z,\quad \Lambda_t\bigcap\Lambda_z=\{(0,0)\},\quad \Lambda_t=\phi\{(t,0):t\geqslant 0\},\quad \Lambda_z=\phi\{(0,z):z\geqslant 0\}.$$

В зависимости от $v_{\rm i}$, $v_{\rm a}$ угол Λ и лучи Λ_t, Λ_z показаны на рис. 1.

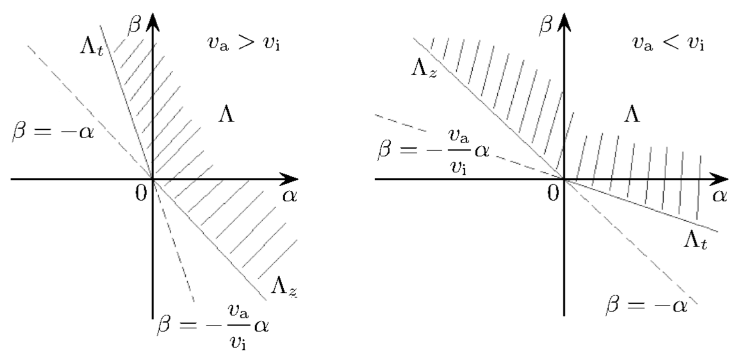

Рис. 1. Угол Λ и лучи Λ_t, Λ_z в зависимости от $v_{\rm i}$, $v_{\rm a}$.

Значения искомого решения на лучах Λ_t, Λ_z определяются равенствами

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta)=n_{\rm a0}(\alpha+\beta),\quad n_{\rm i}(\alpha,\beta)=n_{\rm i0}(\alpha+\beta),\quad (\alpha,\beta)\in\Lambda_t,\quad \alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}=0,\quad \alpha+\beta\geqslant 0;$$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta)=n_{\rm a}^0(\alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}),\quad n_{\rm i}(\alpha,\beta)=n_{\rm i}^0(\alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}),\quad (\alpha,\beta)\in\Lambda_z,\quad \alpha+\beta=0,\quad \alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}\geqslant 0.$$

Проведём построение искомого решения для случая $v_{\rm i}>v_{\rm a}$. Для нахождения решения в угле Λ построим непрерывно дифференцируемое решение системы (3) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\supseteq\Lambda$, которое на лучах Λ_t и Λ_z совпадает с указанными выше значениями. Тогда сужение построенного решения в прямоугольнике Π_∞ на угле Λ даст решение смешанной задачи. Решение системы (3) в Π_∞, согласно теореме 1, определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми в $\mathbb{R}$ функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (4). Покажем, что функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ однозначно определяются значениями искомого решения на лучах Λ_t и Λ_z. На луче Λ_t $(\beta=-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i})$ имеем

$$n_{\rm a0}\left(\alpha\frac{v_{\rm i}-v_{\rm a}}{v_{\rm i}}\right)=n_{\rm a}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))}=\frac{B'(-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i})}{k_I(A(\alpha)-B(-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i}))},\quad \alpha\geqslant 0,$$

$$n_{\rm i0}\left(\alpha\frac{v_{\rm i}-v_{\rm a}}{v_{\rm i}}\right)=n_{\rm i}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))}=\frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i}))},\quad \alpha\geqslant 0,$$

а на луче Λ_z $(\beta = -\alpha)$

$$n_{\mathrm{a}0}(\beta(v_\mathrm{i} - v_\mathrm{a})) = n_\mathrm{a}(\alpha, \beta) \overset{(4)}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{B'(\beta)}{k_I(A(-\beta) - B(\beta))}, \quad \beta \geqslant 0,$$

$$n_{\mathrm{i}0}(\beta(v_\mathrm{i} - v_\mathrm{a})) = n_\mathrm{i}(\alpha, \beta) \overset{(4)}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{A'(-\beta)}{k_I(A(-\beta) - B(\beta))}, \quad \beta \geqslant 0. \tag{23}$$

Рассмотрим функции $B_0(\alpha) \overset{\mathrm{def}}{=} B(-\alpha v_\mathrm{a}/v_\mathrm{i})$, $A_0(\beta) \overset{\mathrm{def}}{=} A(-\beta)$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Тогда на полупрямой $\alpha \geqslant 0$ функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, согласно (23), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$B_0' = -\bar{n}_{\mathrm{a}0}(\alpha)(A - B_0), \quad A' = \bar{n}_{\mathrm{i}0}(\alpha)(A - B_0), \quad \alpha \geqslant 0,$$

$$\bar{n}_{\mathrm{a}0}(\alpha) \overset{\mathrm{def}}{=} k_I \frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}} n_{\mathrm{a}0}\left(\alpha \frac{v_\mathrm{i} - v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\right), \quad \bar{n}_{\mathrm{i}0}(\alpha) \overset{\mathrm{def}}{=} k_I n_{\mathrm{i}0}\left(\alpha \frac{v_\mathrm{i} - v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\right), \tag{24}$$

а на полупрямой $\beta \geqslant 0$ функции $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, согласно (23), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$B' = \bar{n}_\mathrm{a}^0(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -\bar{n}_\mathrm{i}^0(\beta)(A_0 - B), \quad \beta \geqslant 0,$$

$$\bar{n}_\mathrm{a}^0(\beta) \overset{\mathrm{def}}{=} k_I n_\mathrm{a}^0(\beta(v_\mathrm{i} - v_\mathrm{a})), \quad \bar{n}_\mathrm{i}^0(\beta) \overset{\mathrm{def}}{=} k_I n_\mathrm{i}^0(\beta(v_\mathrm{i} - v_\mathrm{a})). \tag{25}$$

Решив системы (24), (25), найдём функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, и $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, $\beta \geqslant 0$, после чего доопределим A и B в областях отрицательных значений аргументов равенствами

$$B(\beta) \overset{\mathrm{def}}{=} B_0(-\beta v_\mathrm{i}/v_\mathrm{a}), \quad \beta \geqslant 0, \quad A(\alpha) = A_0(-\alpha), \quad \alpha \leqslant 0. \tag{26}$$

Полученные функции A и B на прямой являются искомыми, если выбрать решения систем (24) и (25) с одинаковыми начальными условиями $A(0) = C$, $B_0(0) = D$ и $A_0(0) = C$, $B(0) = D$, где $C \neq D$. Тогда функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ будут непрерывны на $\mathbb{R}$, а из (26) следует их непрерывная дифференцируемость в нуле:

$$A'(0+) \overset{(24)}{=} k_I n_{\mathrm{i}0}(0)(A(0) - B_0(0)) = k_I n_{\mathrm{i}0}(0)(C - D),$$

$$A'(0-) \overset{(26)}{=} -A_0'(0) \overset{(25)}{=} k_I n_\mathrm{i}^0(0)(A_0(0) - B(0)) = k_I n_\mathrm{i}^0(0)(C - D),$$

$$B'(0+) \overset{(25)}{=} k_I n_\mathrm{a}^0(0)(A_0(0) - B(0)) = k_I n_\mathrm{a}^0(0)(C - D),$$

$$B'(0-) \overset{(26)}{=} -(v_\mathrm{i}/v_\mathrm{a}) B_0'(0) \overset{(24)}{=} k_I n_{\mathrm{a}0}(0)(A(0) - B_0(0)) = k_I n_{\mathrm{a}0}(0)(C - D).$$

Из этих вычислений и условий согласования $n_{\mathrm{i}0}(0) = n_\mathrm{i}^0(0)$, $n_{\mathrm{a}0}(0) = n_\mathrm{a}^0(0)$ следует, что $A'(0+) = A'(0-)$, $B'(0+) = B'(0-)$, поэтому A и B непрерывно дифференцируемы в нуле и, значит, на $\mathbb{R}$. Покажем, что при выполнении условий согласования

$$n_{\mathrm{a}0}'(0) + v_\mathrm{a}(n_\mathrm{a}^0)'(0) + k_I n_{\mathrm{a}0}(0) n_{\mathrm{i}0}(0) = 0, \quad n_{\mathrm{i}0}'(0) + v_\mathrm{i}(n_\mathrm{i}^0)'(0) - k_I n_{\mathrm{a}0}(0) n_{\mathrm{i}0}(0) = 0 \tag{27}$$

вторые производные в нуле для A и B слева и справа совпадают: $A''(0+) = A''(0-)$, $B''(0+) = B''(0-)$. Тогда из (24), (25) следует двукратная непрерывная дифференцируемость функций A и B на $\mathbb{R}$. Например, покажем равенство $A''(0+) = A''(0-)$; $B''(0+) = B''(0-)$ проверяется аналогично. Имеем

$$A''(0+) \overset{(24)}{=} \bar{n}_{\mathrm{i}0}'(0)(A(0) - B_0(0)) + \bar{n}_{\mathrm{i}0}(0)(A'(0) - B_0'(0)) \overset{(24)}{=}$$

$$\overset{(24)}{=} n'_{\mathrm{i}0}(0)k_I((v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})(C-D)+n_{\mathrm{i}0}(0)k_I(n_{\mathrm{i}0}k_I(C-D)+n_{\mathrm{a}0}(0)k_I(v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})(C-D))=$$

$$=k_I(C-D)\{n'_{\mathrm{i}0}(0)(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}+k_I n_{\mathrm{i}0}(0)(n_{\mathrm{i}0}(0)+n_{\mathrm{a}0}(0)v_{\mathrm{a}}/v_{\mathrm{i}})\},$$

$$A''(0-)\overset{(26)}{=}A''_0(0)\overset{(25)}{=}-(\bar n_{\mathrm{i}}^0)'(0)(A_0(0)-B(0))-\bar n_{\mathrm{i}}^0(0)(A'_0(0)-B'(0))\overset{(25)}{=}$$

$$\overset{(25)}{=}-(n_{\mathrm{i}}^0)'(0)(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})k_I(C-D)-n_{\mathrm{i}}^0(0)k_I(-n_{\mathrm{i}}^0(0)k_I(C-D)-n_{\mathrm{a}}^0(0)k_I(C-D))=$$

$$=k_I(C-D)\{-(n_{\mathrm{i}}^0)'(0)(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})+k_I n_{\mathrm{i}}^0(0)(n_{\mathrm{i}}^0(0)+n_{\mathrm{a}}^0(0))\}.$$

Учитывая условия согласования $n_{\mathrm{i}0}(0)=n_{\mathrm{i}}^0(0)$, $n_{\mathrm{a}0}(0)=n_{\mathrm{a}}^0(0)$ и второе равенство (27), заключаем, что $A''(0+)=A''(0-)$.

Чтобы проверить условия 1) и 2) и преобразовать к удобному для анализа виду формулы (4), воспользуемся явными выражениями решений задач Коши для систем (25), (24). Несложно проверить (см. аналогичное рассуждение выше), что для этих решений справедливы тождества

$$B(\beta)=D+(C-D)\int\limits_0^{\beta}\bar n_{\mathrm{a}}^0 e^{-N}\,d\beta,\quad A_0(\beta)=C+(D-C)\int\limits_0^{\beta}\bar n_{\mathrm{i}}^0 e^{-N}\,d\beta,\quad \beta\geqslant 0, \tag{28}$$

$$B_0(\alpha)=D+(D-C)\int\limits_0^{\alpha}\bar n_{\mathrm{a}0} e^{M}\,d\alpha,\quad A(\alpha)=C+(C-D)\int\limits_0^{\alpha}\bar n_{\mathrm{i}0} e^{M}\,d\alpha,\quad \alpha\geqslant 0, \tag{29}$$

$$N(\beta)=\int\limits_0^{\beta}(\bar n_{\mathrm{a}}^0+\bar n_{\mathrm{a}}^0)\,d\beta,\quad M(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}(\bar n_{\mathrm{a}0}+\bar n_{\mathrm{i}0})\,d\alpha.$$

Значит, согласно (26), функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ вычисляются по формулам

$$A(\alpha)=\begin{cases} C+(D-C)\displaystyle\int\limits_0^{-\alpha}\bar n_{\mathrm{i}}^0 e^{-N}\,d\alpha, & \alpha\leqslant 0,\\ C+(C-D)\displaystyle\int\limits_0^{\alpha}\bar n_{\mathrm{i}0} e^{M}\,d\alpha, & \alpha\geqslant 0,\end{cases}\qquad B(\beta)=\begin{cases} D+(D-C)\displaystyle\int\limits_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}\bar n_{\mathrm{a}0} e^{M}\,d\beta, & \beta\leqslant 0,\\ D+(C-D)\displaystyle\int\limits_0^{\beta}\bar n_{\mathrm{a}}^0 e^{-N}\,d\beta, & \beta\geqslant 0.\end{cases} \tag{30}$$

Пусть $D>C$, тогда выполнено неравенство $A(\alpha)<B(\beta)$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Действительно, указанное неравенство, с учётом (30), сводится к следующему эквивалентному виду в каждом из четырёх логически возможных случаев:

$$\int\limits_0^{-\alpha}\bar n_{\mathrm{i}}^0 e^{-N}\,d\alpha+\int\limits_0^{\beta}\bar n_{\mathrm{a}}^0 e^{-N}\,d\beta<1,\quad \alpha\leqslant 0,\quad \beta\geqslant 0,$$

$$\int\limits_0^{-\alpha}\bar n_{\mathrm{i}}^0 e^{-N}\,d\alpha-\int\limits_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}\bar n_{\mathrm{a}0} e^{M}\,d\beta<1,\quad \alpha\leqslant 0,\quad \beta\leqslant 0,$$

$$-\int\limits_0^{\alpha}\bar n_{\mathrm{i}0} e^{M}\,d\alpha+\int\limits_0^{\beta}\bar n_{\mathrm{a}}^0 e^{-N}\,d\beta<1,\quad \alpha\geqslant 0,\quad \beta\geqslant 0,$$

$$-\int_0^\alpha \bar n_{\mathrm{i}0}e^M\,d\alpha-\int_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}\bar n_{\mathrm{a}0}e^M\,d\beta<1,\quad \alpha\geqslant 0,\quad \beta\leqslant 0. \tag{31}$$

Справедливость неравенств (31) в случаях $\alpha\leqslant 0,\ \beta\geqslant 0$ (см. (16)) и $\alpha\geqslant 0,\ \beta\leqslant 0$ (см. (21)) была установлена выше. В случае $\alpha\leqslant 0,\ \beta\leqslant 0,$ учитывая неотрицательность всех подынтегральных функций, имеем цепочку оценок:

$$\int_0^{-\alpha}\bar n_{\mathrm{i}}^0e^{-N}\,d\alpha-\int_0^{-\beta v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{a}}}\bar n_{\mathrm{a}0}e^M\,d\beta\leqslant\int_0^{-\alpha}\bar n_{\mathrm{i}}^0e^{-N}\,d\alpha\leqslant\int_0^{-\alpha}(\bar n_{\mathrm{i}}^0+\bar n_{\mathrm{a}}^0)e^{-N}\,d\alpha=\int_0^{-\alpha}N'e^{-N}\,d\alpha=$$

$$=-e^{-N}\big|_0^{N(-\alpha)}<1.$$

Аналогично в случае $\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0$ имеем оценки

$$-\int_0^{\alpha}\bar n_{\mathrm{i}0}e^{M}\,d\alpha+\int_0^{\beta}\bar n_{\mathrm{a}}^0e^{-N}\,d\beta\leqslant\int_0^{\beta}\bar n_{\mathrm{a}}^0e^{-N}\,d\beta\leqslant\int_0^{\beta}(\bar n_{\mathrm{a}}^0+\bar n_{\mathrm{i}}^0)e^{-N}\,d\beta=\int_0^{\beta}N'e^{-N}\,d\beta=$$

$$=-e^{-N}\big|_0^{N(\beta)}<1.$$

Итак, соотношения (31) установлены и, значит, установлена справедливость неравенства $A(\alpha)<B(\beta)$ для всех $\alpha,\ \beta.$ Если $D<C,$ то точно так же проверяется неравенство $B(\beta)<$ $<A(\alpha)$ для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$ Далее, если $A(\alpha)<B(\beta)$ для всех $\alpha,\ \beta,$ то из второго уравнения (24) и равенств (26) следует, что $A'(\alpha)\leqslant 0$ для $\alpha\geqslant 0,$ а из второго уравнения (25) и равенств (26) следует $A_0'(\beta)\geqslant 0$ для $\beta\geqslant 0,$ но тогда из (26) вытекает неравенство $A'(\alpha)\leqslant 0$ для $\alpha\leqslant 0.$ Итак, при всех $\alpha\in\mathbb{R}$ имеем $A'(\alpha)\leqslant 0.$ Аналогично устанавливается, что $B'(\beta)\leqslant 0$ для всех $\beta\in\mathbb{R}.$ Если $A(\alpha)>B(\beta)$ для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R},$ то точно так же проверяется, что $A'(\alpha)\geqslant 0,\ \ B'(\beta)\geqslant 0$ для всех $\alpha,\ \beta.$ Тем самым условие 2) установлено.

Наконец, преобразуем формулы (4), задающие решение системы (3) в прямоугольнике $\Pi_\infty\supseteq\Lambda,$ в каждом из четырёх квадрантов плоскости $(\alpha,\beta).$ При этом ограничимся только квадрантами I, II, IV, квадрант III $(\alpha\leqslant 0,\ \ \beta\leqslant 0),$ исключим из рассмотрения, поскольку тупой угол $\Lambda,$ согласно рис. 1, лежит в объединении квадрантов I, II, IV, а с квадрантом III пересекается только по нулевой точке. Для удобства введём в рассмотрение функции

$$N_*(p)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{k_I}{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}\int_0^p(n_{\mathrm{a}}^0(q)+n_{\mathrm{i}}^0(q))\,dq,\quad M_*(p)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{k_I}{v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}}\int_0^p(v_{\mathrm{a}}n_{\mathrm{a}0}(q)+v_{\mathrm{i}}n_{\mathrm{i}0}(q))\,dq. \tag{32}$$

Тогда $N(\beta)=N_*(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})),\ \ M(\alpha)=M_*(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

Для $\alpha\geqslant 0,\ \ \beta\geqslant 0$ имеем

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta)\overset{(4)}{=}\frac{B'(\beta)}{k_I[A(\alpha)-B(\beta)]}\overset{(30)}{=}$$

$$\overset{(30)}{=}(C-D)\bar n_{\mathrm{a}}^0(\beta)e^{-N(\beta)}\frac{1}{k_I}\biggl[(C-D)+(C-D)\int_0^\alpha\bar n_{\mathrm{i}0}(\alpha)e^{M(\alpha)}\,d\alpha-(C-D)\int_0^\beta\bar n_{\mathrm{a}}^0(\beta)e^{-N(\beta)}\,d\beta\biggr]^{-1}=$$

$$=n_{\mathrm{a}}^0(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))e^{-N_*(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))}\times$$

$$\times\biggl[1+k_I\int_0^\alpha n_{\mathrm{i}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})e^{M_*(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})}\,d\alpha-k_I\int_0^\beta n_{\mathrm{a}}^0(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))e^{-N_*(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))}\,d\beta\biggr]^{-1}=$$

$$= n_{\mathrm{a}}^0(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}))e^{-N_*(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{k_I}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}}\Bigg(\int\limits_0^{\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}} v_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}0}(p)e^{M_*(p)}\,dp - \int\limits_0^{\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})} n_{\mathrm{a}}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\Bigg)\right]^{-1}.$$

Аналогично

$$n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta) \overset{(4)}{=} \frac{A'(\beta)}{k_I[A(\alpha) - B(\beta)]} \overset{(30)}{=}$$

$$\overset{(30)}{=} (C-D)\bar n_{\mathrm{i}0}(\alpha)e^{M(\alpha)}\frac{1}{k_I}\left[(C-D) + (C-D)\int\limits_0^{\alpha} \bar n_{\mathrm{i}0}(\alpha)e^{M(\alpha)}\,d\alpha - (C-D)\int\limits_0^{\beta} \bar n_{\mathrm{a}}^0(\beta)e^{-N(\beta)}\,d\beta\right]^{-1} =$$

$$= n_{\mathrm{i}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})e^{M_*(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{k_I}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}}\Bigg(\int\limits_0^{\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}} v_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}0}(p)e^{M_*(p)}\,dp - \int\limits_0^{\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})} n_{\mathrm{a}}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\Bigg)\right]^{-1}.$$

Для двух других квадрантов аналогичные подсчёты с использованием формул (4), (30) дают для $\alpha \geqslant 0,\ \ \beta \leqslant 0$

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta) = n_{\mathrm{i}0}(-\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})e^{M_*(-\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{a}})} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{k_I}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}}\Bigg(\int\limits_0^{\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}} v_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}0}(p)e^{M_*(p)}\,dp + \int\limits_0^{-\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{a}}} v_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{a}0}(p)e^{M_*(p)}\,dp\Bigg)\right]^{-1},$$

$$n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta) = n_{\mathrm{i}0}(\alpha(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})e^{M_*(\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}})} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{k_I}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}}\Bigg(\int\limits_0^{\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}}} v_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}0}(p)e^{M_*(p)}\,dp + \int\limits_0^{-\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{a}}} v_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{a}0}(p)e^{M_*(p)}\,dp\Bigg)\right]^{-1};$$

для $\alpha \leqslant 0,\ \ \beta \geqslant 0$

$$n_{\mathrm{a}}(\alpha,\beta) = n_{\mathrm{a}}^0(\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}))e^{-N_*(\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{k_I}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}}\Bigg(\int\limits_0^{-\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})} n_{\mathrm{i}}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp + \int\limits_0^{\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})} n_{\mathrm{a}}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\Bigg)\right]^{-1},$$

$$n_{\mathrm{i}}(\alpha,\beta) = n_{\mathrm{i}}^0(-\alpha(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}))e^{-N_*(-\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}}))} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{k_I}{v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}}\Bigg(\int\limits_0^{-\alpha(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})} n_{\mathrm{i}}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp + \int\limits_0^{\beta(v_{\mathrm{i}}-v_{\mathrm{a}})} n_{\mathrm{a}}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\Bigg)\right]^{-1}.$$

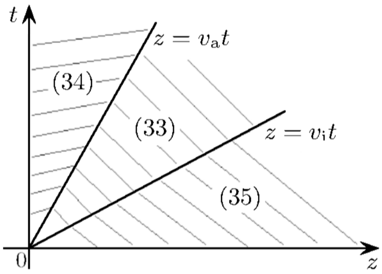

Рис. 2. Области нахождения решения смешанной задачи.

Осталось перейти в полученных формулах от координат (α,β) к координатам (z,t), учитывая преобразование (2). При этом $\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}) = z - v_{\mathrm{a}}t$, $-\alpha(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}}) = z - v_{\mathrm{i}}t$, $\alpha(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{i}} = t - z/v_{\mathrm{i}}$, $-\beta(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{a}})/v_{\mathrm{a}} = t - z/v_{\mathrm{a}}$. В итоге первый квадрант плоскости (z,t), где ищется решение смешанной задачи для системы (1), прямыми $z = v_{\mathrm{a}}t$, $z = v_{\mathrm{i}}t$ делится на три области (показаны на рис. 2), в каждой из которых решение задаётся одной из групп формул:

$$n_{\mathrm{a}}(z,t) = n_{\mathrm{a}}^0(z - v_{\mathrm{a}}t)e^{-N_*(z-v_{\mathrm{a}}t)} \times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp-\int\limits_0^{z-v_{\rm a}t} n_{\rm a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_{\rm i}(z,t)=n_{\rm i0}(t-z/v_{\rm i})e^{M_*(t-z/v_{\rm i})}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp-\int\limits_0^{z-v_{\rm a}t} n_{\rm a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1};\qquad(33)$$

$$n_{\rm a}(z,t)=\frac{n_{\rm a0}(t-z/v_{\rm a})e^{M_*(t-z/v_{\rm a})}}{\times}$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{t-z/v_{\rm a}} v_{\rm a}n_{\rm a0}(p)e^{M_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_{\rm i}(z,t)=n_{\rm i0}(t-z/v_{\rm i})e^{M_*(t-z/v_{\rm i})}\times$$

$$\times\left[1+\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{t-z/v_{\rm i}} v_{\rm i}n_{\rm i0}(p)e^{M_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{t-z/v_{\rm a}} v_{\rm a}n_{\rm a0}(p)e^{M_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1};\qquad(34)$$

$$n_{\rm a}(z,t)=n_{\rm a}^0(z-v_{\rm a}t)e^{-N_*(z-v_{\rm a}t)}\times$$

$$\times\left[1-\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{z-v_{\rm i}t} n_{\rm i}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{z-v_{\rm a}t} n_{\rm a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1},$$

$$n_{\rm i}(z,t)=n_{\rm i}^0(z-v_{\rm i}t)e^{-N_*(z-v_{\rm i}t)}\times$$

$$\times\left[1-\frac{k_I}{v_{\rm i}-v_{\rm a}}\left(\int\limits_0^{z-v_{\rm i}t} n_{\rm i}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp+\int\limits_0^{z-v_{\rm a}t} n_{\rm a}^0(p)e^{-N_*(p)}\,dp\right)\right]^{-1}.\qquad(35)$$

Формулы (33) и (34) на луче $z=v_{\rm a}t,\ \ t\geqslant 0,$ и формулы (33) и (35) на луче $z=v_{\rm i}t,\ \ t\geqslant 0,$ очевидно, совпадают. При $z=0$ формула (34) даёт краевые условия $n_{\rm a0}(t),\ \ n_{\rm i0}(t),\ \ t\geqslant 0,$ а при $t=0$ формула (35) даёт начальные условия $n_{\rm a}^0(z),\ \ n_{\rm i}^0(z),\ \ z\geqslant 0.$ Итак, формулы (33)–(35), с учётом выражений (32), полностью определяют решение смешанной задачи для системы (1) по известным граничным $n_{\rm a0}(t),\ \ n_{\rm i0}(t),\ \ t\geqslant 0,$ и начальным $n_{\rm a}^0(z),\ \ n_{\rm i}^0(z),\ \ z\geqslant 0$ условиям.

5. Начально-краевая задача на отрезке (IV). Решение задачи (IV) в переменных (α,β) сводится к решению системы (3) в полуполосе

$$\Pi=\{(\alpha,\beta):\alpha+\beta\geqslant 0,\quad 0\leqslant\alpha v_{\rm a}+\beta v_{\rm i}\leqslant L\}.$$

Множество Π является замкнутым выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^2$, причём $\Pi=\overline{\operatorname{Int}\Pi}$, а проекции Π на координатные оси α и β равны, соответственно, $[0,+\infty)$ и $[\beta_0,+\infty)$, где $\beta_0=L/\Delta,\ \ \Delta=v_{\rm i}-v_{\rm a}<0.$ Согласно обобщённой теореме 2 решение системы (3) в замкнутой области Π определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0,\ \ B(\beta),\ \ \beta\geqslant\beta_0,$ для которых $A(\alpha)\neq B(\beta),\ \ \alpha,\beta\in\Pi,$ и оно задаётся формулами (4). Эти функции определяются однозначно начальными и граничными условиями задачи (IV), которые в переменных (α,β) примут вид

$$n_{\rm a}(\alpha,-\alpha)=n_{\rm a}^0(-\alpha\Delta),\quad n_{\rm i}(\alpha,-\alpha)=n_{\rm i}^0(-\alpha\Delta),\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0=-\beta_0,\qquad(36)$$

$$n_{\rm a}(\alpha,-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i})=n_{\rm a0}(\alpha\Delta/v_{\rm i}),\quad \alpha\geqslant 0,$$
$$n_{\rm a}(\alpha,-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i}+L/v_{\rm i})=n_{\rm a0}(\alpha\Delta/v_{\rm i}+L/v_{\rm i}),\quad \alpha\geqslant\alpha_0. \tag{37}$$

Граница $\partial\Pi$ множества Π состоит из замкнутого отрезка $[a,b]$, $a=(0,0)$, $b=(\alpha_0,\beta_0)$, и двух замкнутых параллельных лучей $[a,\infty)$ и $[b,\infty)$, являющихся графиками функций $\alpha(\beta)=-\beta v_{\rm i}/v_{\rm a}$ и $\beta(\alpha)=-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i}+L/v_{\rm i}$ соответственно. Условия (36), (37) означают, что известны значения функции $n_{\rm a}$ на части границы $\partial\Pi$, состоящей из объединения $[a,b]\bigcup[a,\infty)$, а функции $n_{\rm i}$ – на границе $[a,b]\bigcup[b,\infty)$. Для определения функций $A(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, $B(\beta)$, $\beta\geqslant\beta_0$, построим рекуррентно их сужения на отрезках $[0,\alpha_0]$, $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\alpha_1,\alpha_2]$, ... (для $A(\alpha)$) и отрезках $[\beta_0,\beta_1]$, $[\beta_1,\beta_2]$, $[\beta_2,\beta_3]$, ... (для $B(\beta)$), имеющие непересекающиеся внутренности и дающие разбиение областей определения этих функций: $[0,+\infty]=[0,\alpha_0]\bigcup(\bigcup_{k=1}^{\infty}[\alpha_{k-1},\alpha_k])$, $[\beta_0,+\infty]=\bigcup_{k=1}^{\infty}[\beta_{k-1},\beta_k]$. Здесь $\beta_k=L/\Delta-kL/v_{\rm i}$, $\alpha_k=kL/v_{\rm a}-L/\Delta$, $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Обозначим $A_0=A|_{[0,\alpha_0]}$, $A_k=A|_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}$, $k\geqslant 1$, $B_k=B|_{[\beta_{k-1},\beta_k]}$, $k\geqslant 1$, $B_0=B|_{[\beta_0,0]}=B_1|_{[\beta_0,0]}$, $B_*=B|_{[0,\beta_1]}=B_1|_{[0,\beta_1]}$.

Из формул (4) и начальных условий (36) следует, что функции $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$ являются решениями задачи Коши для линейной системы уравнений

$$A_0'(\alpha)=k_I\bar n_{\rm i}(\alpha)[A_0(\alpha)-B_0(-\alpha)],\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0,$$
$$B_0'(\beta)=k_I\bar n_{\rm a}(\alpha)[A_0(-\beta)-B_0(\beta)],\quad \beta_0\leqslant\beta\leqslant 0,$$
$$A_0(0)=C,\quad B_0(0)=D,\quad \bar n_{\rm i}(\alpha)=n_{\rm i}^0(-\alpha\Delta),\quad \bar n_{\rm a}(\beta)=n_{\rm a}^0(\beta\Delta), \tag{38}$$

где C и D, $C\neq D$, – произвольные константы. Нетрудно указать явный вид решения системы (38):

$$A_0(\alpha)=C+(C-D)\int\limits_0^{\alpha}k_I\bar n_{\rm i}(\alpha)e^{N(\alpha)}\,d\alpha,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0,$$

$$B_0(\beta)=D+(D-C)\int\limits_0^{-\beta}k_I\bar n_{\rm a}(-\alpha)e^{N(\alpha)}\,d\alpha,\quad \beta_0\leqslant\beta\leqslant 0,$$

$$N(\alpha)=k_I\int\limits_0^{\alpha}[\bar n_{\rm i}(\alpha)+\bar n_{\rm a}(-\alpha)]\,d\alpha,\quad \alpha\geqslant 0.$$

Функция $B_*(\beta)$, $0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$, в силу (4) и граничного условия (37) ищется как решение задачи Коши для линейного уравнения

$$B_*'(\beta)=k_In_{\rm a}(\beta)[A_0(\alpha(\beta))-B_*(\beta)],\quad B_*(0)=D,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\beta_1, \tag{39}$$

где $\alpha(\beta)$ определена выше, $n_{\rm a}(\beta)=n_{\rm a0}(\beta+\alpha(\beta))=n_{\rm a0}(-\beta\Delta/v_{\rm a})$.

Теперь B_1 однозначно определяется из условий $B_1|_{[\beta_0,0]}=B_0$, $B_1|_{[0,\beta_1]}=B_*$. Зная функцию B_1 на $[\beta_0,\beta_1]$, последовательно находим функции $B_1\to A_1\to B_2\to A_2\to B_3\to\ldots$ $\ldots\to B_k\to A_k\to B_{k+1}\to\ldots$ на основании формулы (4) и граничного условия (37) следующим способом.

По $B_k(\beta)$ функция $A_k(\alpha)$, $k\geqslant 1$, находится из решения задачи Коши для линейного уравнения на отрезке $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$:

$$A'(\alpha)=k_In_{\rm i}(\alpha)[A(\alpha)-B_k(\beta(\alpha))],\quad A(\alpha_{k-1})=A_{k-1}(\alpha_{k-1}), \tag{40}$$

где $\beta(\alpha)=-\alpha v_{\rm a}/v_{\rm i}+L/v_{\rm i}$, $n_{\rm i}(\alpha)=n_{\rm i0}(\alpha+\beta(\alpha))=n_{\rm i0}(\alpha\Delta/v_{\rm i}+L/v_{\rm i})$.

По $A_k(\alpha)$ функция $B_{k+1}(\beta)$, $k\geqslant 1$, определяется из решения задачи Коши для линейного уравнения на отрезке $[\beta_k,\beta_{k+1}]$:

$$B'(\beta)=k_In_{\rm a}(\beta)[A_k(\alpha(\beta))-B(\beta)],\quad B(\beta_k)=B_k(\beta_k), \tag{41}$$

где $\alpha(\beta) = -\beta v_{\rm i}/v_{\rm a}$, $n_{\rm a}(\beta) = n_{\rm a0}(\alpha(\beta)+\beta) = n_{\rm a0}(-\beta\Delta/v_{\rm a})$. В этом построении используются очевидные равенства $\alpha(\beta_{k+1}) = \alpha_k$, $\beta(\alpha_k) = \beta_k$, $k \geqslant 0$.

Используя соотношения (38)–(41) и формулы (4), можно построить решение системы (3) в полуполосе Π, удовлетворяющее начальным и граничным условиям (36), (37). Для этого разобьём полуполосу Π на треугольники T_k, S_k, $k \geqslant 0$, как указано на рис. 3. Формально имеем

$$T_k = \{(\alpha,\beta) : \alpha_{k-1} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k, \ \ \beta(\alpha) \leqslant \beta \leqslant \beta_k\}, \quad k \geqslant 1,$$

$$S_k = \{(\alpha,\beta) : \beta_k \leqslant \beta \leqslant \beta_{k+1}, \ \ \alpha(\beta) \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k\}, \quad k \geqslant 1,$$

$$T_0 = \{(\alpha,\beta) : 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0, \ \ -\alpha \leqslant \beta \leqslant 0\}, \quad S_0 = \{(\alpha,\beta) : 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1, \ \ \alpha(\beta) \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0\}.$$

Нетрудно проверить, что внутренности всех треугольников попарно не пересекаются, а в сумме треугольники дают полуполосу Π.

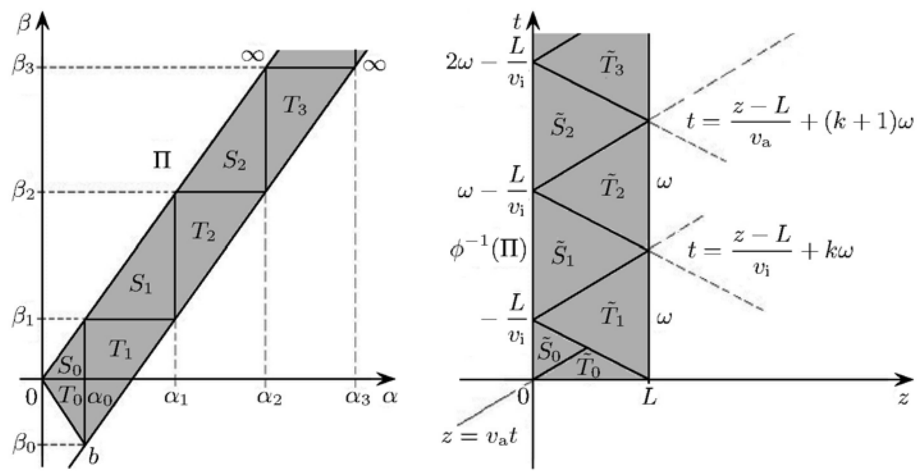

Рис. 3. Триангуляции полуполос Π и $\phi^{-1}(\Pi)$ в переменных (α,β) и (z,t).

Тогда для точки $(\alpha,\beta)\in\Pi$ имеем

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = n_{\rm a}(\beta)\frac{A_{k-1}(\alpha(\beta)) - B_k(\beta)}{A_k(\alpha) - B_k(\beta)}, \quad n_{\rm i}(\alpha,\beta) = n_{\rm i}(\alpha)\frac{A_k(\alpha) - B_k(\beta(\alpha))}{A_k(\alpha) - B_k(\beta)}, \quad (\alpha,\beta)\in T_k, \quad k \geqslant 2,$$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = n_{\rm a}(\beta)\frac{A_k(\alpha(\beta)) - B_{k+1}(\beta)}{A_k(\alpha) - B_{k+1}(\beta)}, \quad n_{\rm i}(\alpha,\beta) = n_{\rm i}(\alpha)\frac{A_k(\alpha) - B_k(\beta(\alpha))}{A_k(\alpha) - B_{k+1}(\beta)}, \quad (\alpha,\beta)\in S_k, \quad k \geqslant 1,$$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = \bar n_{\rm a}(\beta)\frac{A_0(-\beta) - B_0(\beta)}{A_0(\alpha) - B_0(\beta)}, \quad n_{\rm i}(\alpha,\beta) = \bar n_{\rm i}(\alpha)\frac{A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)}{A_0(\alpha) - B_0(\beta)}, \quad (\alpha,\beta)\in T_0,$$

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = n_{\rm a}(\beta)\frac{A_0(\alpha(\beta)) - B_1(\beta)}{A_0(\alpha) - B_1(\beta)}, \quad n_{\rm i}(\alpha,\beta) = \bar n_{\rm i}(\alpha)\frac{A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)}{A_0(\alpha) - B_1(\beta)}, \quad (\alpha,\beta)\in S_0. \qquad (42)$$

Если $(\alpha,\beta)\in T_1$, то формула для $n_{\rm i}(\alpha,\beta)$ справедлива, а для $n_{\rm a}(\alpha,\beta)$ верна только при $\beta \geqslant 0$. Для $\beta \leqslant 0$ она видоизменяется:

$$n_{\rm a}(\alpha,\beta) = \bar n_{\rm a}(\beta)\frac{A_0(-\beta) - B_0(\beta)}{A_1(\alpha) - B_1(\beta)}.$$

Это следствие того, что B_1 вычисляется по-разному для $\beta \geqslant 0$ и $\beta \leqslant 0$. Легко проверить, что в пересечении любых двух треугольников приведённые формулы (42) дают одни и те же значения. Прямой подстановкой с учётом формул (38)–(41) легко проверить, что функции (42) являются решением системы (3).

Решив уравнения (40), (41) методом вариации произвольной постоянной, приходим к следующим рекуррентным соотношениям, позволяющим вычислить функции $A_k(\alpha)$, $k \geqslant 1$, $B_k(\beta)$, $k \geqslant 2$:

$$B_{k+1}(\beta) = A_k(\alpha(\beta)) + e^{f(\beta_k)-f(\beta)}\left[B_k(\beta_k) - A_k(\alpha_{k+1}) + \frac{v_\mathrm{i}}{v_\mathrm{a}}\int\limits_{\beta_k}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\beta_k)}A_k'(\alpha(\beta))\,d\beta\right] =$$

$$= A_k(\beta)+e^{f(\beta_k)-f(\beta)}\left[B_k(\beta_k)-A_k(\alpha_{k+1})+\frac{v_\mathrm{i}}{v_\mathrm{a}}\int\limits_{\beta_k}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\beta_k)}k_I n_\mathrm{i}(\alpha(\beta))\left[A_k(\alpha(\beta))-B_k\left(\beta+\frac{L}{v_\mathrm{i}}\right)\right]d\beta\right],$$

$$f(\beta) = \int\limits_0^{\beta} k_I n_\mathrm{a}(\beta)\,d\beta, \quad \alpha(\beta) = -\frac{v_\mathrm{i}}{v_\mathrm{a}}\beta, \quad \beta_k \leqslant \beta \leqslant \beta_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{43}$$

$$A_k(\alpha) = B_k(\beta(\alpha)) + e^{g(a)-g(\alpha_{k-1})}\left[A_{k-1}(\alpha_{k-1}) - B_k(\beta_{k-1}) + \frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha} e^{g(\alpha_{k-1})-g(\alpha)}B_k'(\beta(\alpha))\,d\beta\right] =$$

$$= B_k(\beta(\alpha)) + e^{g(\alpha)-g(\alpha_{k-1})}\Bigg[A_{k-1}(\alpha_{k-1}) - B_k(\beta_{k-1}) + \frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha} e^{g(\alpha_{k-1})-g(\alpha)}k_I n_\mathrm{a}(\beta(\alpha)) \times$$

$$\times \left[A_{k-1}\left(\alpha - \frac{L}{v_\mathrm{a}}\right) - B_k(\beta(\alpha))\right] d\alpha\Bigg],$$

$$g(\beta) = \int\limits_0^{\alpha} k_I n_\mathrm{i}(\beta)\,d\alpha, \quad \beta(\alpha) = -\frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\alpha + \frac{L}{v_\mathrm{i}}, \quad \alpha_{k-1} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{44}$$

При $k = 1$ первое равенство в (44) справедливо, а второе верно, если интегральное слагаемое в фигурной скобке скорректировать в зависимости от α следующим образом. При $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant$ $\leqslant L/v_\mathrm{a}$ интегральное слагаемое в фигурной скобке нужно заменить на $I(\alpha)$, где

$$I(\alpha) = \frac{v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{i}}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} e^{g(\alpha_0)-g(\alpha)}k_\mathrm{I}\bar{n}_\mathrm{a}(\beta(\alpha))[A_0(-\beta(\alpha)) - B_0(\beta(\alpha))]\,d\alpha.$$

При $L/v_\mathrm{a} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ интегральное слагаемое заменяется на выражение

$$I(L/v_\mathrm{a}) + (v_\mathrm{a}/v_\mathrm{i})\int\limits_{L/v_\mathrm{a}}^{\alpha} e^{g(\alpha_0)-g(\alpha)}k_\mathrm{I}n_\mathrm{a}(\beta(\alpha))[A_0(\alpha - L/v_\mathrm{a}) - B_1(\beta(\alpha))]\,d\alpha.$$

Итак, зная $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$ и $B_1(\beta)$ (при $\beta \leqslant 0$ $B_1(\beta) = B_0(\beta)$, а при $\beta \geqslant 0$ $B_1(\beta)$ является решением уравнения (39):

$$B_1(\beta) = A_0(\alpha(\beta)) + e^{-f(\beta)}(D - C) + e^{-f(\beta)}\frac{v_\mathrm{i}}{v_\mathrm{a}}\int\limits_0^{\beta} e^{f(\beta)}k_I\bar{n}_\mathrm{i}(\alpha(\beta))[A_0(\alpha(\beta)) - B_0(-\alpha(\beta))]\,d\beta,$$

где $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$), по формулам (43), (44) последовательно находим функции A_1, B_2, A_2, B_3, $\ldots$, а затем по формулам (42) вычисляем n_a, n_i в полуполосе Π в переменных (α, β).

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1. Проведённое построение зависит от констант C и D, но итоговые формулы (42) от C и D не зависят (зависимости от C и D числителя и знаменателя в этих формулах взаимно уничтожаются).

2. При $C > D$ из (43), (44) индукцией по k нетрудно вывести, что функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ монотонно возрастают и $A(\alpha) > B(\beta)$ для $(\alpha,\beta) \in \Pi$, а при $C < D$ функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ монотонно убывают и $A(\alpha) < B(\beta)$ для $(\alpha,\beta) \in \Pi$. В частности, числитель и знаменатель формул (42) имеют одинаковые знаки и все знаменатели отличны от нуля.

3. По построению функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ непрерывны. Если начальные и граничные условия непрерывно дифференцируемы, то с учётом условий согласования нетрудно установить двукратную непрерывную дифференцируемость функций $A(\alpha)$ и $B(\beta)$.

4. Переходя в формулах (42) к переменным $t = \alpha + \beta$, $z = \alpha v_\mathrm{a} + \beta v_\mathrm{i}$, получаем решение начально-краевой задачи на отрезке $[0, L]$ в полуполосе $\phi^{-1}(\Pi):\ t \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant L$. Поскольку преобразование независимых переменных $(\alpha,\beta) = \phi(z,t)$ линейное и невырожденное, то полные прообразы $\tilde{S}_k = \phi^{-1}(S_k)$, $\tilde{T}_k = \phi^{-1}(T_k)$, $k \geqslant 0$, являются также треугольниками с непересекающимися внутренностями, дающими разбиение полуполосы $\phi^{-1}(\Pi) = \{(z,t),\ 0 \leqslant z \leqslant L,\ t \geqslant 0\}$, как это показано на рис. 3. Нетрудно проверить, что границы треугольников $\tilde{T}_k$, $\tilde{S}_k$, $k \geqslant 1$, задаются прямыми $t = (z - L)/v_\mathrm{i} + k\omega$, $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $t = (z - L)/v_\mathrm{a} + k\omega$, $k \in \mathbb{N}$, где $\omega = L\Delta/(v_\mathrm{i} v_\mathrm{a})$, и прямыми $z = 0$, $z = L$. Треугольники $\tilde{S}_0$, $\tilde{T}_0$ пересекаются по границе $t = z/v_\mathrm{a}$. Явные формулы (42) для решения в переменных (z,t) получаются после подстановки в них выражений $\alpha = (tv_\mathrm{i} - z)/\Delta$, $\beta = (z - tv_\mathrm{a})/\Delta$ с учётом равенств $\alpha(\beta) = (tv_\mathrm{i} - zv_\mathrm{i}/v_\mathrm{a})/\Delta$, $\beta(\alpha) = v_\mathrm{a}(z - tv_\mathrm{i})/(v_\mathrm{i}\Delta) + L/v_\mathrm{i}$. Например, для $(z,t) \in \tilde{T}_k$, $k \geqslant 2$, получим

$$n_\mathrm{a}(z,t) = n_{\mathrm{a}0}(zv_\mathrm{a}^{-1} - t)[A_{k-1}((tv_\mathrm{i} - v_\mathrm{i}v_\mathrm{a}^{-1}z)/\Delta) - B_k((z - tv_\mathrm{a})/\Delta)] \times$$
$$\times [A_{k-1}((tv_\mathrm{i} - z)/\Delta) - B_k((z - tv_\mathrm{a})/\Delta)]^{-1},$$
$$n_\mathrm{i}(z,t) = n_{\mathrm{i}0}(t - zv_\mathrm{i}^{-1} + Lv_\mathrm{i}^{-1})[A_k((tv_\mathrm{i} - z)/\Delta) - B_k(Lv_\mathrm{i}^{-1} + v_\mathrm{a}v_\mathrm{i}^{-1}\Delta^{-1}(z - tv_\mathrm{a}))] \times$$
$$\times [A_{k-1}((tv_\mathrm{i} - z)/\Delta) - B_k((z - tv_\mathrm{a})/\Delta)]^{-1}.$$

Аналогично преобразуются и другие формулы (42).

Заключение. В работе рассмотрены основные начально-краевые (смешанные) задачи для нелинейной системы уравнений одномерной ионизации газа в случае постоянных скоростей атомов и ионов и указан общий вид решений этой системы.

Показано, что смешанные задачи для системы уравнений одномерной ионизации допускают интеграцию в виде явных аналитических выражений. Особый интерес представляет смешанная задача для конечного отрезка. В этом случае аналитическое решение строится посредством рекуррентных формул, каждая из которых определена в треугольнике, принадлежащем некоторой триангуляции области определения неизвестных функций. Формулы для решения краевой задачи на отрезке получены для случая $v_\mathrm{a} > 0 > v_\mathrm{i}$. Для остальных случаев $(v_\mathrm{a} < 0 < v_\mathrm{i};\ v_\mathrm{a} > 0,\ v_\mathrm{i} > 0;\ v_\mathrm{a} < 0,\ v_\mathrm{i} < 0;\ v_\mathrm{a} = 0,\ v_\mathrm{i} \neq 0;\ v_\mathrm{a} \neq 0,\ v_\mathrm{i} = 0)$ решение строится аналогично. В случае $v_\mathrm{a} = v_\mathrm{i}$ построение решения сильно упрощается интегрированием системы (1) по общим характеристикам (подробности см. в [13]).

Полученные результаты доказывают существование и единственность решения поставленных начально-краевых задач и могут использоваться для построения различных асимптотических формул для полученных решений.

Для исследования ионизационных колебаний представляет значительный интерес обобщение предложенного в работе метода решения смешанной задачи на отрезке на практически важный случай, когда скорость атомов постоянна и положительна, а скорость ионов линейна, имеет положительную производную и обращается в нуль внутри рассматриваемого отрезка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. М., 2006.
2. *Baranov V.I., Nazarenko Y.S., Petrosov V.A., Vasin A.I., Yashnov Y.M.* Theory of oscillations and conductivity for Hall thrusters // 32nd Joint Propulsion Conf. 1996. AIAA 96-3192.
3. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1978.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.
5. *Бишаев А.М., Ким В.* Исследование локальных параметров плазмы в ускорителе с замкнутым дрейфом электронов и протяжённой зоной ускорения // Журн. техн. физики. 1978. Т. 48. № 9. С. 1853–1857.
6. *Chapurin O., Smolyakov A.I., Hagelaar G., Raitses Y.* On the mechanism of ionization oscillations in Hall thrusters // J. Appl. Phys. 2021. V. 129. P. 233307.
7. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Некоторые математические вопросы ионизации плазмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 94.
8. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Стационарные и осциллирующие решения уравнений ионизации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 7. С. 1158–1179.
9. *Fife J., Martinez-Sanchez M., Szabo J.* A numerical study of low-frequency discharge oscillations in Hall thrusters // 33rd Joint Propulsion Conf. 1997. AIAA 97–3052.
10. *Barral S., Ahedo E.* On the origin of low frequency oscillations in Hall thrusters // AIP Conf. Proc. 2008. V. 993. P. 439–442.
11. *Dale E., Jorns B.* Two-zone Hall thruster breathing mode mechanism. Part I: Theory // 36th Intern. Electric Propulsion Conf. Vienna, 2019.
12. *Boeuf J., Garrigues L.* Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster // J. Appl. Phys. 1998. V. 84. P. 3541–3554.
13. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Аналитическое решение смешанных задач для уравнений одномерной ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 30.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва,
Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 25.05.2023 г.
После доработки 25.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1357–1372

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ, СОДЕРЖАЩЕГО СТЕПЕНИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

 А. В. Глушак

Рассмотрено абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора, который является генератором операторной функции Бесселя. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле на полуоси. Исследован вопрос о стремлении решения к нулю на бесконечности. Приведены примеры.

DOI: 10.31857/S0374064123100047, EDN: ONFNCQ

Введение. Исследование дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, действующими в банаховом пространстве E, стимулирует развитие теории разрешающих операторов соответствующих начальных задач. В результате исследований эволюционных уравнений первого порядка $u'(t) = Au(t)$ возникли полугруппы линейных операторов $T(t)$, а при изучении уравнения второго порядка (абстрактного волнового уравнения) $u''(t) = Au(t)$ – операторные косинус-функции $C(t)$. Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятиям проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной косинус оператор-функции. Терминологию и литературные источники см. в монографиях [1, 2] и обзорных работах [3, 4].

Операторная функция Бесселя (ОФБ) была введена в рассмотрение в статьях [5, 6] как разрешающий оператор задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД). Но, также как и в теории полугрупп и операторных косинус-функций, семейство операторных функций Бесселя можно ввести (см. [7]) независимо от дифференциального уравнения ЭПД, с которым в итоге оно связано. Далее напомним процесс построения ОФБ.

Важную роль в построении семейства играет зависящий от параметра $k > 0$ оператор обобщённого сдвига T_s^t, определяемый равенством (см. [8])

$$T_s^t Y(s) = \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)} \int\limits_0^\pi Y(\sqrt{s^2 + t^2 - 2st\cos\varphi}) \sin^{k-1}\varphi \, d\varphi, \quad s, t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Оператор обобщённого сдвига зависит от параметра $k > 0$, но, следуя [8], этот факт в его записи отмечать не будем.

Укажем также, что в настоящей работе будем обходиться понятием интеграла от непрерывной функции, но в случае необходимости можно использовать интеграл Бохнера от функции со значением в банаховом пространстве.

Пусть E – банахово пространство, параметр $k > 0$ и $Y_k(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$ – операторная функция, действующая в пространство линейных ограниченных операторов $B(E)$.

Определение 1. Сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов $Y_k(t) : [0, \infty) \to B(E)$, зависящее от параметра $k > 0$, называется *операторной функцией Бесселя*, если

$$Y_k(0) = I, \quad Y_k(t)Y_k(s) = T_s^t Y_k(s), \quad s, t \geqslant 0,$$

и существуют постоянные $\Upsilon \geqslant 1,\ \omega \geqslant 0$ такие, что

$$\|Y_k(t)\| \leqslant \Upsilon e^{\omega t}, \quad t \geqslant 0.$$

С семейством ОФБ связан дифференциальный оператор Бесселя

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{d}{dt},$$

который часто встречается в дифференциальных уравнениях с осевой симметрией.

Определение 2. *Генератором ОФБ* $Y_k(t)$ называется оператор A с областью определения $D(A)$, состоящей из тех $x \in E$, для которых функция $Y_k(t)x$ дважды дифференцируема в точке $t=0$, и который определяется равенством

$$Ax = \lim_{t\to+0}\left(\frac{d^2Y_k(t)x}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{dY_k(t)x}{dt}\right).$$

В работе [7] доказаны следующие утверждения.

1. Если оператор A является генератором ОФБ $Y_k(t)$, то он замкнут и его область определения $D(A)$ плотна в E; более того, в E плотно множество элементов, на которых определены все степени оператора A.

2. Для любых $t, s \geqslant 0$ и $x \in D(A)$ справедливы равенства

$$Y_k(t)Y_k(s) = Y_k(s)Y_k(t), \quad AY_k(t)x = Y_k(t)Ax.$$

3. Пусть $x \in D(A)$ и $t > 0$, тогда $Y_k(t)x \in D(A)$ и

$$AY_k(t)x = \frac{d^2Y_k(t)x}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{dY_k(t)x}{dt}.$$

4. Если $u_0 \in D(A)$, то функция $Y_k(t)u_0$ является решением следующей задачи Коши для уравнения ЭПД:

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t>0, \quad u(0)=u_0, \quad u'(0)=0;$$

в дальнейшем удобно символом $Y_0(t)$ обозначать операторную косинус-функцию $C(t)$ с генератором A.

5. Пусть $0 \leqslant k < m$ и оператор A – генератор ОФБ $Y_k(t)$; тогда A будет и генератором $Y_m(t)$, при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t)$ имеет вид

$$Y_m(t) = \frac{2\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(m/2-k/2)}\int\limits_0^1 s^k(1-s^2)^{(m-k)/2-1}Y_k(ts)\,ds; \tag{2}$$

равенство (2) называется *формулой сдвига* ОФБ по параметру.

Если оператор A – генератор операторной косинус-функции $Y_0(t) = C(t)$, то из (2) при $k=0$ следует, что ОФБ $Y_m(t)$ представляет собой проинтегрированную специальным образом операторную косинус-функцию (подробнее об этом см. статью [9]).

1. Задача Дирихле. В банаховом пространстве E на полуоси $t \geqslant 0$ при значении параметра $k<1$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащего степени неограниченного оператора A:

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = -P_m(A)u(t), \quad t>0, \tag{3}$$

$$u(0)=u_0, \quad \sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| \leqslant M, \tag{4}$$

где $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1}B_mA^mu(t) + \sum_{n=0}^{m-1} B_nA^nu(t)$, B_n, $n = \overline{0,m}$, – ограниченные операторы, действующие в E, A – генератор ОФБ $Y_q(t)$ при некотором $q \geqslant 0$.

Будем предполагать, что ограниченные операторные коэффициенты B_n и генератор A удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Область определения $D(A)$ инвариантна относительно ограниченных операторов B_n, $n = \overline{0,m}$, $AB_nx = B_nAx$, $x \in D(A)$, и спектр $\sigma(B_m)$ оператора B_m расположен правее вертикальной прямой $\operatorname{Re}\lambda = \delta > 0$ (условие параболичности).

Рассматриваемый нами случай назовём эллиптическим. *Решением задачи Дирихле* (3), (4) будем называть абстрактную функцию $u(t)$ со значением в области $D(A^m)$, дважды непрерывно дифференцируемую при $t > 0$, непрерывную при $t \geqslant 0$, удовлетворяющую уравнению (3) и условиям (4).

Абстрактные параболические уравнения с оператором $P_m(A)$ исследовались ранее в [10]. В гиперболическом случае начальная задача для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащего степени генератора ОФБ, изучалась в статьях [11, 12].

Укажем также, что решению эллиптических задач для дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих по одной или нескольким переменным оператор Бесселя, посвящены работы [13–17], в которых также имеется и обширный обзор соответствующих публикаций.

В настоящей работе рассмотрена задача (3), (4) в эллиптическом случае, при этом использовано построенное в [10] фундаментальное решение $G(t,s)$ уравнения

$$\frac{\partial v(t,s)}{\partial t} = (-1)^{m+1}B_m\frac{\partial^{2m}v(t,s)}{\partial s^{2m}} + \sum_{n=0}^{m-1} B_n\frac{\partial^{2n}v(t,s)}{\partial s^{2n}}, \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

которое имеет вид

$$G(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma}Q(t,\sigma)\,d\sigma, \tag{6}$$

где

$$Q(t,\sigma) = \exp\biggl(-t\sigma^{2m}B_m - t\sum_{n=0}^{m-1}\sigma^{2n}B_n\biggr).$$

При этом для функции $G(t,s)$ справедлива формула свёртки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-t_1, s-s_1)G(t_1-\tau, s_1-\xi)\,ds_1 = G(t-\tau, s-\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t_1 < t. \tag{7}$$

Наряду с уравнением (5), в области $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t} = (-1)^m B_m\frac{\partial^{2m}w(t,s)}{\partial s^{2m}} - \sum_{n=0}^{m-1} B_n\frac{\partial^{2n}w(t,s)}{\partial s^{2n}}, \quad w(0,s) = \delta(s), \tag{8}$$

где $\delta(s)$ – дельта-функция Дирака.

Применив к задаче (8) преобразование Фурье по переменной $s \in \mathbb{R}$ с учётом формулы связи решения задачи Дирихле для уравнения ЭПД с решением задачи Коши для параболического уравнения (см. [18, теорема 3]), введём в рассмотрение следующую операторную функцию, являющуюся решением задачи (8):

$$Z_k(t,s) = \frac{t^{1-k}}{2^k\pi\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{is\sigma}\int\limits_0^{\infty}\tau^{k/2-3/2}\exp\biggl(-\frac{t^2}{4\tau}\biggr)Q(\tau,\sigma)\,d\tau d\sigma = \int\limits_0^{\infty} h_k(t,\tau)G(\tau,s)\,d\tau, \tag{9}$$

где фундаментальное решение $G(\tau,s)$ определено равенством (6),

$$h_k(t,\tau)=\frac{t^{1-k}\tau^{k/2-3/2}}{2^{1-k}\Gamma(1/2-k/2)}\exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right),\quad t\geqslant 0,\quad \tau>0.$$

Для обоснования существования решения задачи Дирихле (3), (4) нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $t\geqslant 0$, $b>0$, $\beta>0$, $\gamma>1$. *Тогда для функции вида*

$$f(t)=\int\limits_0^\infty s^{-\gamma}\exp\left(-\frac{b}{s}-\frac{t}{s^\beta}\right)ds$$

существуют постоянные $M_1,M_2>0$ *такие, что справедлива оценка*

$$f(t)\leqslant\frac{M_1}{M_2+t^{(\gamma-1)/\beta}}.\tag{10}$$

Доказательство. При $t>0$ после замены получим

$$f(t)=t^{(1-\gamma)/\beta}\int\limits_0^\infty \xi^{-\gamma}\exp\left(-\frac{b}{\xi t^{1/\beta}}-\frac{1}{\xi^\beta}\right)d\xi<M_4t^{(1-\gamma)/\beta},$$

что вместе с очевидным неравенством $f(t)\leqslant f(0)=M_3$ приводит к требуемому соотношению (10). Лемма доказана.

В зависимости от вида и свойств операторов A и $P(A)$ дальнейшее исследование будет разбито на два случая.

2. Задача Дирихле в случае $k<1$ с оператором вида $P_m(A)u(t)=(-1)^{m+1}\times\times B_mA^mu(t)$. Для определяемого равенством (6) фундаментального решения $G(t,s)$ в статье [10] для этого случая установлена оценка

$$\left\|\frac{\partial^jG(t,s)}{\partial s^j}\right\|\leqslant M_jt^{-(j+1)/(2m)}\exp(-at^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}),\quad a>0,\tag{11}$$

доказательство которой проводится методами, развитыми в [19, гл. 1] для случая матричных коэффициентов B_j. Кроме того, при равномерной ограниченности $Y_0(s)$ определена аналитическая полугруппа

$$U(t;P_m(A))x=2\int\limits_0^\infty G(t,s)Y_0(s)x\,ds$$

с генератором $P_m(A)$, областью определения которого является $D(A^m)$. Отметим, что полугрупповое свойство для $U(t;P_m(A))$ справедливо в силу формулы свёртки (7).

Оценим теперь производные операторной функции $Z_k(t,s)$.

Лемма 2. *Для определяемой равенством (9) операторной функции* $Z_k(t,s)$ *и её производных до порядка* $j=\overline{0,2m}$ *при* $t>0$ *справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial^jZ_k(t,s)}{\partial s^j}\right\|\leqslant\frac{M_{k,j}t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m}+|s|^{m(1-k)+j+1}},\quad M_{k,j}>0.\tag{12}$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (9) и воспользуемся оценкой (11). После замены переменных будем иметь

$$\left\|\frac{\partial^jZ_k(t,s)}{\partial s^j}\right\|\leqslant M_j\int\limits_0^\infty h_k(t,\tau)\tau^{-(j+1)/(2m)}\exp(-a\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)})\,d\tau=$$

$$= \frac{M_j t^{1-k}}{2^{1-k}\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau} - a\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}\right) d\tau =$$

$$= \frac{M_j t^{-(j+1)/m}}{2^{1-k}\Gamma(1/2-k/2)} \int\limits_0^\infty \xi^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp\left(-\frac{1}{4\xi} - \frac{a(|s|^m/t)^{2/(2m-1)}}{\xi^{1/(2m-1)}}\right) d\xi.$$

Оценив последний интеграл с помощью неравенства (10) из леммы 1 при значениях

$$b = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2m-1}, \quad \gamma = \frac{j+1-m(k-3)}{2m},$$

получим требуемое неравенство (12):

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant \frac{M_j t^{-(j+1)/m}}{2^{1-k}\Gamma(1/2-k/2)} \frac{M_1}{M_2 + (1/4(|s|^m/t)^{2/(2m-1)})^{(j+1+m-mk)(2m-1)/(2m)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_{k,j} t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам также понадобятся оценки производных с весом операторной функции $Z_k(t,s)$. Для этого сначала установим следующую лемму, которая доказывается по индукции.

Лемма 3. *Пусть функция* $Z(s) \in C^n(0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^n Z(s) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,n} s^{j-2n} Z^{(j)}(s), \tag{13}$$

где

$$\theta_{j,n} = \frac{(2n-j-1)!}{(-2)^{n-j}(n-j)!(j-1)!}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть равенство (13) выполнено при каком-то n. Тогда

$$\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^{n+1} Z(s) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,n}(j-2n) s^{j-2n-2} Z^{(j)}(s) + \sum_{j=2}^{n+1} \theta_{j-1,n} s^{j-2n-2} Z^{(j)}(s)$$

и для доказательства справедливости формулы (13) при $n+1$ осталось установить равенства

$$\theta_{1,n+1} = (1-2n)\theta_{1,n}, \quad \theta_{n+1,n+1} = \theta_{n,n} = 1, \quad \theta_{j,n+1} = (j-2n)\theta_{j,n} + \theta_{j-1,n}, \quad 2 \leqslant j \leqslant n,$$

которые непосредственно проверяются, учитывая определение чисел $\theta_{j,n}$ по формуле (14). Лемма доказана.

Следующая лемма является следствием лемм 2 и 3.

Лемма 4. *Для определяемой равенством (9) операторной функции* $Z_k(t,s)$ *при* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\|\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)\right\| \leqslant \sum_{j=1}^n \frac{|\theta_{j,n}| M_{k,j} t^{1-k} s^{j-2n}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j} > 0. \tag{15}$$

Предполагая равномерную ограниченность ОФБ $Y_q(s)$, $q \geqslant 0$, генератором которой является оператор A, далее выберем наименьшее $n \in \mathbb{N}$, $2n \geqslant q$, и введём в рассмотрение операторную функцию

$$W_k(t)x = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s) s^{2n} Y_{2n}(s) x \, ds, \quad x \in E,$$

где ОФБ $Y_{2n}(s)$ выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Сходимость интеграла и возможность его дифференцирования по t обусловлены равенством (8) и оценкой (15). Ограниченная в пространстве E операторная функция $W_k(t)$ будет использована при установлении однозначной разрешимости задачи Дирихле (3), (4).

Отметим, что если оператор A – генератор ограниченной операторной косинус-функции $C(t)$, то, как следует из [20, гл. 9, п. 11], операторная функция

$$W_0(t) = 2\int\limits_0^\infty Z_0(t,s)C(s)\,ds = \int\limits_0^\infty h_0(t,\tau)U(\tau;P(A))\,d\tau,$$

где

$$h_0(t,\tau) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}\exp\biggl(-\frac{t^2}{4\tau}\biggr), \quad t \geqslant 0, \quad \tau > 0,$$

является полугруппой, а псевдодифференциальный оператор $P_{1/2}(A) = -\sqrt{-P_m(A)}$ – генератор этой полугруппы $W_0(t)$.

Теорема 1. *Пусть оператор A при некотором $q \geqslant 0$ является генератором равномерно ограниченной ОФБ $Y_q(s)$, $u_0 \in D(A^m)$ и выполнено условие 1. Тогда задача Дирихле (3), (4) имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{(-1)^n\cdot 2}{(2n-1)!!}\int\limits_0^\infty \biggl(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\biggr)^n Z_k(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds, \qquad (16)$$

где $Z_k(t,s)$ определена равенством (9), а ОФБ $Y_{2n}(s)$ выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Доказательство. Предположим вначале, что $u_0 \in D(A^{m+[n/2]+2})$ и $q > 0$. Тогда после n-кратного интегрирования по частям получим

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{2}{(2n-1)!!}\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\biggl(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\biggr)^n(s^{2n-1}Y_{2n}(s)u_0)ds = 2\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds. \qquad (17)$$

Записанная с помощью операторов движения решения уравнения ЭПД по параметру (подробнее см. [21, 22]) функция

$$\tilde{Y}_0(s)u_0 = \frac{1}{(2n-1)!!}\biggl(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\biggr)^n(s^{2n-1}Y_{2n}(s)u_0) \qquad (18)$$

уже не будет ОФБ, но она определяет решение задачи Коши

$$u''(s) = Au(s), \quad s > 0, \quad u(0) = u_0 \in D(A^{[n/2]+2}), \quad u'(0) = 0.$$

Поскольку функция $Z_k(t,s)u_0$ удовлетворяет задаче (8), то непосредственно проверяется, что определяемая равенством (17) функция $u(t) = W_k(t)u_0$ является решением задачи Дирихле (3), (4). Действительно, очевидно, $u(0) = u_0$, а после интегрирования по частям внеинтегральные слагаемые обратятся в нуль и мы получим

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = 2\int\limits_0^\infty \biggl(\frac{\partial^2 Z_k(t,s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial Z_k(t,s)}{\partial t}\biggr)\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty (-1)^m B_m\frac{\partial^{2m}Z_k(t,s)}{\partial s^{2m}}\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds = \int\limits_0^\infty (-1)^m B_m Z_k(t,s)\frac{d^{2m}\tilde{Y}_0(s)u_0}{ds^{2m}}\,ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty (-1)^m B_m Z_k(t,s) A^m \tilde{Y}_0(s) u_0 ds = -P_m(A)u(t). \tag{19}$$

Таким образом, равенство (19) установлено на плотном в $D(A^m)$ множестве $D(A^{m+[n/2]+2})$ элементов u_0. В силу ограниченности в пространстве E операторной функции $W_k(t)$ оно будет справедливо и для $u_0 \in D(A^m)$.

Случай $q = 0$ рассматривается аналогично, причём со значительными упрощениями.

Доказательство единственности решения задачи (3), (4) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения этой задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t,y) = f(W_k(y)(u_1(t) - u_2(t))),$$

где $f \in E^*$ (E^* – сопряжённое пространство), $t, y \geqslant 0$, которая, очевидно, удовлетворяет следующим уравнению и условиям:

$$\frac{\partial^2 w(t,y)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial w(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,y)}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial w(t,y)}{\partial y}, \quad t, y > 0, \tag{20}$$

$$w(0,y) = 0, \quad \sup_{t,y \geqslant 0} \|w(t,y)\| < M. \tag{21}$$

Интерпретируем функцию $w(t,y)$ как обобщённую функцию и по переменной y применим I-преобразование. Для обычных экспоненциально убывающих при $y \to +\infty$ функций I-преобразование определяется равенством

$$\hat{w}(t,\lambda) = \int\limits_0^\infty \sqrt{\lambda y}\, I_p(\lambda y) w(t,y)\, dy,$$

где $p = (k-1)/2$, $I_p(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя. Распространение этого преобразования на обобщённые функции изложено в [23; 24, с. 63], при этом пространством основных функций также являются экспоненциально убывающие при $y \to +\infty$ функции, на которых и обеспечивается корректное определение I-преобразования обобщённой функции $w(t,y)$.

Из условий (20), (21) для образа $\hat{w}(t,\lambda)$ в пространстве регулярных обобщённых функций получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}(t,\lambda)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial \hat{w}(t,\lambda)}{\partial t} = \lambda^2 \hat{w}(t,\lambda), \quad t > 0, \tag{22}$$

$$\hat{w}(0,\lambda) = 0, \quad \sup_{\substack{t \geqslant 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \|\hat{w}(t,\lambda)\| < M. \tag{23}$$

Общее решение уравнения (22) имеет вид

$$\hat{w}(t,\lambda) = t^{(1-k)/2}(d_1(\lambda) I_{(k-1)/2}(\lambda t) + d_2(\lambda) K_{(k-1)/2}(\lambda t)),$$

где $I_{(k-1)/2}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя, $K_{(k-1)/2}(\cdot)$ – функция Макдональда.

Из второго условия в (23) вытекает $d_1(\lambda) = 0$, а из первого условия в (23) следует $d_2(\lambda) = 0$, поэтому $\hat{w}(t,\lambda) = w(t,y) = 0$ для любого $y \geqslant 0$. В силу произвольности функционала $f \in E^*$ при $y = 0$ получим равенство $u_1(t) \equiv u_2(t)$, и единственность решения задачи Дирихле (3), (4) установлена. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть параметр $k < 1$, $B_m = I$, $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1} A^m u(t)$. Тогда, учитывая формулу (6), получаем

$$Q(t,\sigma) = e^{-t\sigma^{2m}}, \quad G(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma - t\sigma^{2m}}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(s\sigma) e^{-t\sigma^{2m}}\, d\sigma.$$

Последний интеграл только при $m=1$ вычисляется в элементарных функциях и определяет фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$G(t,s)|_{m=1}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right).$$

При $m\geqslant 2$ выражение для интеграла весьма громоздкое и содержит специальные функции. Например, при $m=2$ оно имеет вид

$$G(t,s)=\frac{\Gamma(5/4)}{\pi t^{1/4}}{}_0F_2\left(\frac12,\frac34;\frac{s^4}{256t}\right)-\frac{\Gamma(3/4)s^2}{8\pi t^{3/4}}{}_0F_2\left(\frac54,\frac32;\frac{s^4}{256t}\right),$$

где ${}_0F_2(\cdot)$ – гипергеометрическая функция.

Подставив фундаментальное решение в (9) с учётом интеграла 2.3.3.1 из [25], определим

$$Z_k(t,s)|_{m=1}=\frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty \tau^{k/2-2}\exp\left(-\frac{t^2+s^2}{4\tau}\right)d\tau=$$

$$=\frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty \xi^{-k/2}\exp\left(-\frac{t^2+s^2}{4}\xi\right)d\xi=\frac{\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)}(t^2+s^2)^{k/2-1}.$$

Наконец, по формуле (16) запишем решение задачи Дирихле (3), (4) при $m=1$ в виде

$$u(t)=W_k(t)u_0=\frac{(-1)^n\cdot 2}{(2n-1)!!}\int\limits_0^\infty\left(\frac1s\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot 2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty\left(\frac1s\frac{\partial}{\partial s}\right)^n(t^2+s^2)^{k/2-1}s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot 2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty(k-2)(k-4)\cdots(k-2n)(t^2+s^2)^{k/2-n-1}s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds=$$

$$=\frac{2\Gamma(n+1-k/2)t^{1-k}}{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty\frac{s^{2n}Y_{2n}(s)u_0}{(t^2+s^2)^{n+1-k/2}}\,ds.$$

Приведём далее примеры представлений решения задачи Дирихле (3), (4) при $k<1$, $m==1$ в конкретных банаховых пространствах.

а) Пусть $E=L_p(-\infty,\infty)$, $p>1$, $Y_0(s)u_0(x)=(u_0(x+s)+u_0(x-s))/2$ – операторная косинус-функция с генератором $A=d^2/dx^2$, $B_1=I$. Тогда при $k<1$, $m=1$ решение задачи (3), (4) имеет вид

$$u(t,x)=\frac{\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty\frac{u_0(x+s)+u_0(x-s)}{(t^2+s^2)^{1-k/2}}\,ds.$$

б) Пусть $E=L_p(0,\infty)$, $p>1$, $B_1=I$. Если $0<q\leqslant 2$, то определяемый равенством (1) (после замены параметра k на q) оператор обобщённого сдвига $T_x^s u_0(x)$ является ОФБ $Y_q u_0(x)=T_x^s u_0(x)$ с генератором

$$A=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{q}{x}\frac{d}{dx}.$$

Тогда $n=1$ и в этом случае при $k<1$, $m=1$ решение задачи Дирихле (3), (4) имеет вид

$$u(t,x)=W_k(t)u_0=\frac{-2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(t^2+s^2)^{k/2-1}s^2Y_2(s)u_0(x)\,ds=$$

$$=\frac{4\Gamma(2-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty \frac{s^2Y_2(s)u_0(x)}{(t^2+s^2)^{2-k/2}}\,ds,$$

где при $q=2$

$$Y_2(s)u_0(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi u_0(\sqrt{x^2+s^2-2xs\cos\varphi})\sin\varphi\,d\varphi,\quad x,s\geqslant 0,$$

а при $0<q<2$ ОФБ $Y_q(s)$ определяется по формуле (2):

$$Y_2(s)u_0(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(q/2+1/2)\Gamma(1-q/2)}\int\limits_0^1 \tau^q(1-\tau^2)^{-q/2}Y_q(\tau s)u_0(x)\,d\tau,$$

$$Y_q(s)u_0(x)=\frac{\Gamma(q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q/2)}\int\limits_0^\pi u_0(\sqrt{x^2+s^2-2xs\cos\varphi})\sin^{q-1}\varphi\,d\varphi,\quad x,s\geqslant 0.$$

в) Пусть $E=\mathbb{R}$, $A=-A_0^2$, $A_0>0$, $B_1=1$. Тогда проще всего считать $n=0$, $Y_0(s)=$ $=\cos(A_0s)$, и при $k<1$, $m=1$ решение задачи Дирихле (3), (4) имеет вид

$$u(t)=W_k(t)u_0=\frac{2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}u_0}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty \frac{\cos(A_0s)}{(t^2+s^2)^{1-k/2}}\,ds.$$

Вычислив интеграл по формуле 2.5.6.4 из [25], получим

$$u(t)=\frac{2^{k/2+1/2}(A_0t)^{1/2-k/2}}{\Gamma(1/2-k/2)}K_{1/2-k/2}(A_0t)u_0,$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда.

К такому же результату мы придём, если возьмём $q=2n$:

$$Y_{2n}(s)=\Gamma(n+1/2)(A_0s/2)^{1/2-n}J_{n-1/2}(A_0s),$$

где $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода. Тогда

$$u(t)=\frac{2^{n+1/2}\Gamma(n+1-k/2)A_0^{1/2-n}t^{1-k}u_0}{\Gamma(1/2-k/2)}\int\limits_0^\infty (t^2+s^2)^{k/2-n-1}s^{n+1/2}J_{n-1/2}(A_0s)\,ds.$$

Вычислив интеграл по формуле 2.12.4.28 из [26], будем иметь

$$u(t)=\frac{2^{k/2+1/2}(A_0t)^{1/2-k/2}}{\Gamma(1/2-k/2)}K_{1/2-k/2}(A_0t)u_0.$$

Отметим, что в силу экспоненциального убывания функции Макдональда при $t\to\infty$ в последнем примере решение $u(t)=W_k(t)u_0$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Но в общем случае из оценки (15) стремление решения $u(t) = W_k(t)u_0$ к нулю при $t \to \infty$ не вытекает. Приведём достаточное условие, обеспечивающее это стремление.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно при* $s > 0$

$$\left\| \int_0^s Y_q(\tau)u_0\,d\tau \right\| < \infty. \tag{24}$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} W_k(t)u_0 = 0.$

Доказательство. Проинтегрировав по частям, запишем решение задачи Дирихле в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(s^{2n}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)\right) \int_0^s Y_{2n}(\tau)u_0\,d\tau ds. \tag{25}$$

С учётом равенства (13) дифференцированием получим

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(s^{2n}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)\right) = \sum_{j=1}^n j\theta_{j,n}s^{j-1}\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j} + \sum_{j=1}^n \theta_{j,n}s^j\frac{\partial^{j+1}Z_k(t,s)}{\partial s^{j+1}},$$

и, применив в (25) оценки (12), (24), будем иметь

$$\|W_k(t)u_0\| \leqslant \Upsilon_1\|u_0\|t^{1-k}\sum_{j=1}^n j|\theta_{j,n}|M_{k,j}\int_0^\infty \frac{s^{j-1}\,ds}{t^{1-k+(j+1)/m} + s^{m(1-k)+j+1}} +$$

$$+\Upsilon_1\|u_0\|t^{1-k}\sum_{j=1}^n |\theta_{j,n}|M_{k,j+1}\int_0^\infty \frac{s^j\,ds}{t^{1-k+(j+2)/m} + s^{m(1-k)+j+2}} = \Phi(t) + \Psi(t).$$

В этом равенстве первое слагаемое $\Phi(t)$ после замен

$$s = t^\alpha\xi, \quad \alpha = \frac{1-k+(j+1)/m}{m(1-k)+j+1}, \quad \beta = \frac{-m(1-k)-j-1}{m(m(1-k)+j+1)}$$

превратится в

$$\Phi(t) = \Upsilon_1\|u_0\|t^\beta\sum_{j=1}^n j\theta_{j,n}M_{k,j}\int_0^\infty \frac{\xi^{j-1}\,ds}{1+\xi^{m(1-k)+j+1}},$$

и поскольку $\beta < 0,$ то $\Phi(t) \to 0$ при $t \to \infty.$

Второе слагаемое $\Psi(t)$ рассматривается аналогично с заменой j на $j+1,$ откуда и вытекает нужное нам утверждение теоремы. Теорема доказана.

Например, если в условиях теоремы 1 оператор A является генератором равномерно ограниченной операторной косинус-функции $Y_0(s) = C(s),$ то, как следует из теоремы 2, помимо этого для стремления решения $u(t) = W_k(t)u_0$ к нулю при $t \to \infty$ следует дополнительно потребовать ограниченность операторной синус-функции

$$S(s) = \int_0^t C(\tau)\,d\tau.$$

В этом случае условие (24) выполнено, если, например, $A = A_1^2$, где оператор A_1 – генератор равномерно ограниченной группы $T(s; A_1)$ и, кроме того, точка $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора A_1, $0 \in \rho(A_1)$. Тогда

$$Y_0(s) = C(s) = \frac{1}{2}(T(s; A_1) + T(-s; A_1)),$$

$$\int\limits_0^s T(\tau; A_1)u_0\,d\tau = \int\limits_0^s AT(\tau; A_1)A^{-1}u_0\,d\tau = \int\limits_0^s T'(\tau; A_1)A^{-1}u_0\,d\tau = (T(s; A_1) - I)A^{-1}u_0,$$

и условие (24), очевидно, справедливо, поскольку группа $T(s; A_1)$ равномерно ограничена.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда $E = H$ – гильбертово пространство и $A = -A_0^2$, где A_0 – самосопряжённый оператор, действующий в H, $0 \in \rho(A_0)$. Пусть E_λ – спектральная функция оператора A_0. По теореме Стоуна (см., например, [1, § 4, теорема 4.7]) оператор A_0 является генератором унитарной группы

$$T(t; A_0)x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dE_\lambda x, \quad x \in H,$$

которая удовлетворяет неравенству (24). Действительно,

$$\int\limits_0^s T(\tau; A_0)x\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^s e^{i\lambda\tau}d\tau\,dE_\lambda x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda s} - 1}{i\lambda}dE_\lambda x = -i(T(s; A_0) - I)A_0^{-1}x,$$

следовательно, операторная синус-функция ограничена, неравенство (24) выполнено и решение задачи Дирихле

$$u(t) = W_k(t)u_0 = 2\int\limits_0^{\infty} Z_k(t, s)\cos(A_0 s)u_0\,ds$$

стремится к нулю при $t \to \infty$.

3. Задача Дирихле в случае $k < 1$ с оператором вида $P_m(A)u(t) = (-1)^{m+1}B_m \times A^m u(t) + \sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n u(t)$, $\sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n \neq 0$. Введём в рассмотрение оператор

$$B = -\mu^{2m}B_m - \sum_{n=0}^{m-1}\mu^{2n}B_n, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Условие 2. Если $\sum_{n=0}^{m-1} B_n A^n \neq 0$, то при любом $\mu \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(B)$ оператора B не лежит на мнимой оси.

В случае выполнения условия 2 для определяемого равенством (6) фундаментального решения $G(t, s)$ в статье [10] установлена оценка

$$\left\|\frac{\partial^j G(t, s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant M_j t^{-(j+1)/(2m)}\exp(-at^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)} - \delta_1 t), \tag{26}$$

где $M_j > 0$, $a > 0$, $0 < \delta_1 < \delta$, постоянная δ взята из условия 1 (параболичности). Отметим, что в отличие от оценки (11) оценка (26) содержит множитель $\exp(-\delta_1 t)$.

Покажем, что условие 2 позволит ослабить требование равномерной ограниченности ОФБ $Y_q(s)$ при установлении разрешимости задачи Дирихле и допустить её экспоненциальный рост.

Лемма 5. *Если выполнено условие 2, то для определяемой равенством (9) операторной функции $Z_k(t,s)$ и её производных до порядка $j=\overline{0,2m}$ существуют постоянные $M_{k,j}$, Ω, $\Omega_1>0$ такие, что при $t>0$ справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant \frac{M_{k,j}t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m}+|s|^{m(1-k)+j+1}}e^{-\Omega_1 t-\Omega|s|}. \tag{27}$$

Доказательство. Также как и при доказательстве леммы 2, продифференцируем равенство (9) и воспользуемся оценкой (26). Обозначив $a=a_1+a_2$, $0<a_1<a$, $a_2=a-a_1$, $1=b_1+b_2$, $0<b_1<1$, $b_2=1-b_1$, $\delta_1=\delta_2+\delta_3$, $0<\delta_2<\delta_1$, $\delta_3=\delta_1-\delta_2$, получим

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant M_j\int\limits_0^\infty h_k(t,\tau)\tau^{-(j+1)/(2m)}\exp(-a\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}-\delta_1\tau)\,d\tau =$$

$$=\frac{M_j t^{1-k}}{2^{k-1}\Gamma(1/2-k/2)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)}\exp\left(-\frac{(b_1+b_2)t^2}{4\tau}-(a_1+a_2)\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}-(\delta_2+\delta_3)\tau\right)d\tau. \tag{28}$$

Покажем далее, что при $s\in\mathbb{R}$, $t,\tau>0$ справедливы неравенства

$$\exp(-a_2\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}-\delta_3\tau)\leqslant e^{-\Omega|s|}, \tag{29}$$

$$\exp(-b_2\tau^{-1}t^2-\delta_2\tau)\leqslant e^{-\Omega_1 t}, \tag{30}$$

где

$$\Omega=a_2^{(2m-1)/(2m)}(\delta_3(2m-1))^{1/(2m)}+\delta_3^{1/(2m)}(a_2/(2m-1))^{(2m-1)/(2m)},\quad \Omega_1=2\sqrt{b_2\delta_2}. \tag{31}$$

Неравенство (29) при $s=0$, очевидно, выполнено. Пусть теперь $s\ne 0$. Докажем соотношение

$$a_2\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}+\delta_3\tau\geqslant\Omega|s|$$

или равносильное ему

$$a_2\left(\frac{|s|}{\tau}\right)^{1/(2m-1)}+\delta_3\frac{\tau}{|s|}\geqslant\Omega.$$

Наименьшее значение функции $\varphi(t)=a_2t^{1/(2m-1)}+\delta_3/t$ при $t>0$ равно Ω, что и доказывает оценка (29).

Неравенство (30) получается из (29) заменой a_2 на b_2, m на 1, s на t, δ_3 на δ_2.

Учитывая неравенства (29), (30), из (28) выводим

$$\left\|\frac{\partial^j Z_k(t,s)}{\partial s^j}\right\| \leqslant \frac{M_j t^{1-k}}{2^{k-1}\Gamma(1/2-k/2)}e^{-\Omega_1 t-\Omega|s|}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)}\exp\left(-\frac{b_1t^2}{4\tau}-a_1\tau^{1/(1-2m)}|s|^{2m/(2m-1)}\right)d\tau. \tag{32}$$

Оценка интеграла в неравенстве (32) фактически была проведена ранее в лемме 2. Применив эту оценку, придём к требуемому неравенству (27). Лемма доказана.

Следующая лемма является непосредственным следствием лемм 3 и 5.

Лемма 6. *Если выполнено условие 2, то для определяемой равенством (9) операторной функции* $Z_k(t,s)$ *при* $t>0$ *справедлива оценка*

$$\left\|\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)\right\| \leqslant t^{1-k}e^{-\Omega_1 t-\Omega|s|}\sum_{j=1}^{n}\frac{|\theta_{j,n}|M_{k,j}s^{j-2n}}{t^{1-k+(j+1)/m}+|s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j}>0. \tag{33}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1 и 2,* $u_0\in D(A^m)$, *оператор* A *при некотором* $q\geqslant 0$ *является генератором ОФБ* $Y_q(s)$, *удовлетворяющей оценке*

$$\|Y_q(s)\|\leqslant \Upsilon e^{\omega s}, \quad s\geqslant 0, \quad \Upsilon\geqslant 1, \quad 0\leqslant\omega<\Omega, \tag{34}$$

где Ω *– постоянная из (31). Тогда задача Дирихле (3), (4) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при* $t\to\infty$, *которое представимо в виде*

$$u(t)=W_k(t)u_0=\frac{(-1)^n\cdot 2}{(2n-1)!!}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds,$$

где $Z_k(t,s)$ *определена равенством (9), а ОФБ* $Y_{2n}(s)$ *выражается через ОФБ* $Y_q(s)$ *по формуле (2).*

Доказательство. Сходимость определяющего функцию $u(t)=W_k(t)u_0$ интеграла и возможность его дифференцирования обусловлены оценкой (33). Проверим, что эта функция является решением задачи (3), (4).

Также как и при доказательстве теоремы 1 предположим вначале, что $u_0\in D(A^{m+[n/2]+2})$, $q>0$ и $\tilde{Y}_0(s)u_0$ определена равенством (18). После интегрирования по частям внеинтегральные слагаемые обратятся в нуль и мы получим

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=2\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial^2 Z_k(t,s)}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial Z_k(t,s)}{\partial t}\right)\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds=$$

$$=2\int\limits_0^\infty\left((-1)^m B_m\frac{\partial^{2m}Z_k(t,s)}{\partial s^{2m}}-\sum_{n=0}^{m-1}B_n\frac{\partial^{2n}Z_k(t,s)}{\partial s^{2n}}\right)\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds=$$

$$=2\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\left((-1)^m B_{2m}\frac{d^{2m}\tilde{Y}_0(s)u_0}{ds^{2m}}-\sum_{n=0}^{m-1}B_n\frac{d^{2n}\tilde{Y}_0(s)u_0}{ds^{2n}}\right)ds=$$

$$=2\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\left((-1)^m B_m A^m\tilde{Y}_0(s)u_0-\sum_{n=0}^{m-1}B_nA^n\tilde{Y}_0(s)u_0\right)ds=-2P_m(A)\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\tilde{Y}_0(s)u_0\,ds=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot 2}{(2n-1)!!}P_m(A)\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n Z_k(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds=-P_m(A)u(t).$$

Таким образом, функция $W_k(t)u_0$ является решением уравнения (3) на плотном в $D(A^m)$ множестве $D(A^{m+[n/2]+2})$ элементов u_0. В силу ограниченности в пространстве E операторной функции $W_k(t)$ утверждение будет справедливо и для $u_0\in D(A^m)$.

Случай $q=0$ рассматривается аналогично, причём со значительными упрощениями.

Поскольку оценка (33) содержит множитель $\exp(-\Omega_1 t)$, то, очевидно, решение $u(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$.

Остальные утверждения теоремы 3 уже фактически установлены в теореме 1. Теорема доказана.

Замечание. Если в теореме 3 условие 2 не выполнено, то также как и в теореме 1 ОФБ $Y_q(s)$ должна быть равномерно ограниченной. При этом указанное решение задачи Дирихле (3), (4), вообще говоря, не обязано стремится к нулю при $t\to\infty$. Для стремления решения к нулю, также как и в теореме 2, от ОФБ $Y_q(s)$ следует дополнительно потребовать выполнения неравенства (24).

Пример 3. Пусть $E=\mathbb{R}$, параметр $m=1$, $P_1(A)=B_1A+B_0$, где $B_1>0$ (условие параболичности), $A=-A_0^2$, $A_0\in\mathbb{R}$, и тогда $Y_0(s)=\cos(A_0s)$. Пусть также $B_0<0$ (условие эллиптичности многочлена $P_1(A)$), при этом оператор $B=-\mu^2B_1-B_0$ для $\mu\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условию 2. Тогда, учитывая результаты примера 1, получаем

$$Q(t,\sigma)=\exp(-tB_1\sigma^2+tB_0),\quad G(t,s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi tB_1}}\exp\Bigl(-\frac{s^2}{4tB_1}+tB_0\Bigr),$$

$$Z_k(t,s)=\frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\Gamma(1/2-k/2)\sqrt{\pi B_1}}\int\limits_0^\infty\tau^{k/2-2}\exp\Bigl(-\frac{t^2}{4\tau}-\frac{s^2}{4\tau B_1}+\tau B_0\Bigr)d\tau=$$

$$=\frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\Gamma(1/2-k/2)\sqrt{\pi B_1}}\int\limits_0^\infty\tau^{k/2-2}\exp\Bigl(-\frac{t^2B_1+s^2}{4\tau B_1}+\tau B_0\Bigr)d\tau=$$

$$=\frac{2^{k/2}t^{1-k}(t^2B_1+s^2)^{k/4-1/2}}{\Gamma(1/2-k/2)\sqrt{\pi B_1}(-B_0B_1)^{k/4-1/2}}K_{1-k/2}\Bigl(\frac{\sqrt{-B_0B_1(t^2B_1+s^2)}}{B_1}\Bigr),$$

при этом был использован интеграл 2.3.16.1 из [25].

По формуле (16) запишем стремящееся к нулю при $t\to\infty$ решение задачи Дирихле (3), (4) для $m=1$ в виде

$$u(t)=W_k(t)u_0=2\int\limits_0^\infty Z_k(t,s)\cos(A_0s)u_0\,ds.$$

4. Весовые граничные задачи в случае $k\geqslant 1$. Непосредственной проверкой устанавливается следующая

Лемма 7. *Если при $k<1$ функция $v_k(t)$ удовлетворяет задаче Дирихле (3), (4), то при $k>1$ функция $u(t)=t^{1-k}v_{2-k}(t)$ является ограниченным на бесконечности решением уравнения (3), удовлетворяющим условию*

$$\lim_{t\to0}t^{k-1}u(t)=u_0. \tag{35}$$

Из леммы 7 и теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть $k>1$, $u_0\in D(A^m)$, выполнены условия 1 и 2, оператор A при некотором $q\geqslant0$ является генератором ОФБ $Y_q(s)$, удовлетворяющей оценке (34). Тогда весовая задача Дирихле (3), (35) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при $t\to\infty$, которое представимо в виде*

$$u(t)=\frac{(-1)^n\cdot2t^{1-k}}{(2n-1)!!}\int\limits_0^\infty\Bigl(\frac1s\frac{\partial}{\partial s}\Bigr)^nZ_{2-k}(t,s)s^{2n}Y_{2n}(s)u_0\,ds,$$

где $Z_{2-k}(t,s)$ определена равенством (9), а ОФБ $Y_{2n}(s)$, $2n\geqslant q$, выражается через ОФБ $Y_q(s)$ по формуле (2).

Как уже было установлено ранее, если выполнено условие 2 и оператор A является генератором операторной косинус-функции $Y_0(s)$, то определяемая равенством (11) полугруппа $U(t;P_m(A))$ будет сжимающей, следовательно, по теореме 5.6 из [1, гл. 1, § 5] оператор

$$P_{1/2}(A)\ =\ -\sqrt{-P_m(A)}$$

является генератором сжимающей полугруппы $U_1(t;P_{1/2}(A)),$ которая имеет вид

$$U_1(t;P_{1/2}(A))=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin(t\sqrt{\tau})(\tau I+P_{1/2}(A))^{-1}\,d\tau.$$

В силу теоремы 4.1 из [27] справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть параметр $k\geqslant 1,$ $u_0\in D(A^{2m}),$ выполнены условия 1 и 2, оператор A является генератором операторной косинус-функции $Y_0(s),$ удовлетворяющей оценке (34). Тогда функция*

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_1^\infty (\xi^2-1)^{k/2-1}U_1(t\xi;P_{1/2}(A))(-P_{1/2}(A))^{k-1}u_1\,d\xi$$

является единственным решением уравнения (3), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t\to 0} t^k u'(t)=u_1,\quad \lim_{t\to\infty} u(t)=0. \tag{36}$$

Теорема 5, по сравнению с задачей (3), (35), содержит решение ещё одной весовой граничной задачи при $k>1,$ а также решение задачи (3), (36) при $k=1,$ которое имеет вид

$$u(t)=-\int\limits_1^\infty (\xi^2-1)^{-1/2}U_1(t\xi;-\sqrt{-P_m(A)})u_1\,d\xi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
2. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, 1989.
3. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. ВИНИТИ. Т. 28. 1990. С. 87–202.
4. *Мельникова И.В., Филинков А.И.* Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 6 (300). С. 111–150.
5. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–589.
6. *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
7. *Глушак А.В.* Семейство операторных функций Бесселя // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обз. Т. 187. ВИНИТИ РАН, М., 2020. С. 36–43.
8. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 1. Вып. 2 (42). С. 102–143.
9. *Глушак А.В.* О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 583–589.
10. *Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одном абстрактном параболическом уравнении // Изв. вузов. Математика. 1984. № 4. С. 72–75.
11. *Воробьева С.А., Глушак А.В.* Абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 706–709.
12. *Глушак А.В.* О свойствах решений уравнений, содержащих степени неограниченного оператора // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1355–1365.
13. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
14. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Соврем. математика. Фунд. направления. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.

15. *Ситник С.М., Шишкина Э.Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., 2019.
16. *Шишкина Э.Л.* Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и гиперболические B-потенциалы // Соврем. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 2. С. 157–338.
17. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1610–1620.
18. *Глушак А.В.* О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 510–514.
19. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
20. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.
21. *Глушак А.В., Шмулевич С.Д.* Интегральные представления решений одного сингулярного уравнения, содержащего сумму коммутирующих операторов // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 831–838.
22. *Glushak A.V.* A family of singular differential equations // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 5. P. 763–771.
23. *Koh E.L., Zemanian A.N.* The complex Hankel and I-transformations of generalized functions // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. № 5. P. 945–957.
24. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
25. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
26. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
27. *Глушак А.В.* О связи решений абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с дробными степенями операторного коэффициента уравнения // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 575–590.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (НИУ “БелГУ”)

Поступила в редакцию 09.04.2023 г.
После доработки 09.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1373–1384

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НЕЧЁТНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

© 2023 г. Т. Е. Моисеев

Исследована задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с краевым условием нечётности на границе области эллиптичности. Получены в явной форме все собственные значения и собственные функции. Доказано, что система собственных функций полна в эллиптической части области и неполна во всей области. Также доказана однозначная разрешимость задачи, решение записано в виде ряда для спектрального параметра не равного собственному значению. Для спектрального параметра, совпадающего с собственным значением, получены условия разрешимости, при выполнении которых семейство решений найдено в виде ряда. Получено условие разрешимости задачи в зависимости от собственных значений. Построенные аналитические решения могут быть эффективно использованы при численном моделировании задач трансзвуковой газовой динамики.

DOI: 10.31857/S0374064123100059, EDN: ONGOZC

1. Постановка задачи. В области $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \bigcup \mathcal{D}_{1-} \bigcup \mathcal{D}_{2-}$, где $\mathcal{D}_+ = \{(r,\Theta) : 0 < r < 1, 0 < \Theta < \pi\}$ – полукруг в верхней полуплоскости, $\mathcal{D}_{1-} = \{(x,y) : -y < x < y+1, \ -1/2 < y < 0\}$, $\mathcal{D}_{2-} = \{(x,y) : -y-1 < x < y, \ -1/2 < y < 0\}$ – равнобедренные прямоугольные треугольники в нижней полуплоскости, требуется определить регулярное решение уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром μ

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \mu^2 u = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_+ \bigcup \mathcal{D}_{1-} \bigcup \mathcal{D}_{2-}, \tag{1}$$

которое удовлетворяет следующим краевым условиям: на границе области задаются нелокальное условие (условие нечётности)

$$u(x,y) = -u(-x,y) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

и нормальная производная

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\Theta) \quad \text{для} \quad \Theta \in (0, \pi/2). \tag{3}$$

В области гиперболичности уравнения задаются условия Геллерстедта

$$u(x,-x) = 0, \quad x \in (0,1/2), \tag{4}$$

$$u(x,x) = 0, \quad x \in (-1/2, 0). \tag{5}$$

Заметим, что условие (2) можно заменить условием

$$u(1,\Theta) = -u(1,\pi-\Theta) \quad \text{для} \quad \Theta \in [0,\pi/2], \tag{6}$$

записанным в полярной системе координат. Регулярное решение задачи (1)–(5) (или (1), (3), (6)) изучается в классе функций $u \in C^0(\overline{\mathcal{D}}) \bigcap C^2(\mathcal{D}_+) \bigcap C^2(\mathcal{D}_{1-}) \bigcap C^2(\mathcal{D}_{2-})$, где $\overline{\mathcal{D}}$ – замыкание области $\mathcal{D}$. Кроме того, предполагается, что функция $u(x,y)$ непрерывно дифференцируема при переходе через отрезки $(0,1)$ и $(-1,0)$ действительной оси и $\operatorname{grad} u$ может обращаться в бесконечность медленнее первой степени в точках $(-1,0)$, $(0,0)$ и $(1,0)$. Для дальнейшего изложения удобно определить область $\mathcal{D}_{1+} = \{(r,\Theta) : 0 < r < 1,\ \ 0 < \Theta < \pi/2\}$, а $\overline{\mathcal{D}}_{1+}$ будет соответственно замыканием области $\mathcal{D}_{1+}$.

2. Сведение задачи (1)–(5) к решению смешанной краевой задачи. Область $\mathcal{D}$ является симметричной по x, что позволяет представить решение задачи (1)–(5) в следующем виде:

$$u(x,y) = U(x,y) + V(x,y),$$

где $u(x,y)$ – решение задачи (1)–(5), а $U(x,y)$ и $V(x,y)$ определяются по формулам

$$U(x,y) = (u(x,y) + u(-x,y))/2, \tag{7}$$

$$V(x,y) = (u(x,y) - u(-x,y))/2. \tag{8}$$

Непосредственно проверяется, что функции $U(x,y)$ и $V(x,y)$ являются решениями уравнения (1). Справедлива следующая

Лемма 1. *Если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи, то $U = 0$ при $x > 0$, и решение задачи в этом случае является нечётной по x функцией.*

Доказательство. Функция $U(x,y)$ является чётной по аргументу x, поэтому достаточно доказать, что $U = 0$ при $x > 0$. Как уже отмечалось, функция U является решением уравнения (1) в области $\mathcal{D}$, а значит и в области $\mathcal{D}_+ \bigcup \mathcal{D}_{1-}$, т.е.

$$U_{xx} + (\operatorname{sgn} y)U_{yy} + \mu^2 U = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_{1+} \bigcup \mathcal{D}_{1-}. \tag{9}$$

Из условия (2) и формулы (7) следует, что

$$U(1,\Theta) = 0, \quad \Theta \in [0,\pi/2]. \tag{10}$$

При $x = 0$ из формулы (7) вытекает условие

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad y \in (0,1). \tag{11}$$

Полагая в (7) $y = -x$ и учитывая условия (4), (5), имеем

$$U(x,-x) = 0, \quad x \in [0,1/2]. \tag{12}$$

Итак, мы получили, что функция U – решение смешанной краевой задачи (9)–(12). Задача (9)–(12) обладает только тривиальным (нулевым) решением, если только μ^2 не является точкой спектра [1]. Отсюда следует, что решение $u(x,y)$ – нечётная по x функция и справедливо равенство $u(x,y) = V(x,y)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи (9)–(12), то решение $u(x,y)$ задачи (1)–(5) является решением задачи Неймана–Трикоми в области $\mathcal{D}_{1+} \bigcup \mathcal{D}_{1-}$.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем $u(x,y) = V(x,y)$. Как уже отмечалось, функция V является решением уравнения (1) во всей области $\mathcal{D}$, а значит, она будет решением уравнения в области $\mathcal{D}_{1+} \bigcup \mathcal{D}_{1-}$, т.е.

$$V_{xx} + (\operatorname{sgn} y)V_{yy} + \mu^2 V = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_{1+} \bigcup \mathcal{D}_{1-}. \tag{13}$$

Положив в формуле (8) $x = 0$, получим равенство

$$V(0,y) = 0. \tag{14}$$

Так как $u(x,y) = V(x,y)$, то для функции $V(x,y)$ будет выполняться условие

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\Theta), \quad \Theta \in (0,\pi/2). \tag{15}$$

Наконец, пользуясь условиями (4), (5), находим

$$v(x,-x)=0,\quad x\in[0,1/2]. \tag{16}$$

Лемма доказана.

Итак, решение задачи (1)–(5) представимо в виде суммы решений смешанной краевой задачи (9)–(12) и задачи Неймана–Трикоми (13)–(16).

3. Собственные значения и собственные функции задачи (1)–(5). Собственные функции смешанной краевой задачи (9)–(12) могут быть записаны в виде

$$U=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m}{\sqrt{2}}\cos((2m+1/2)(\pi/2-\Theta)J_{2m+1/2}(r\mu)) & \text{в } \mathcal{D}_{1+},\\ \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{m+1/4}J_{2m+1/2}(\mu\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-},\end{cases} \tag{17}$$

где $m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Собственные значения μ_{mn} смешанной краевой задачи (9)–(12) определяются как корни уравнения

$$J_{2m+1/2}(\mu_{mn})=0,\quad m,n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{18}$$

где $J_{2m+1/2}(\mu_{mn})$ – функция Бесселя первого рода.

Аналогично записываются собственные функции задачи Неймана–Трикоми (13)–(16)

$$u_k=\begin{cases}\dfrac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta)J_{2k-1/2}(r\overline{\mu})) & \text{в } \mathcal{D}_{1+},\\ C\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4}J_{2k-1/2}(\overline{\mu}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-},\end{cases} \tag{19}$$

где $k\in\mathbb{N}$, C – произвольная постоянная, отличная от нуля. Собственные значения $\overline{\mu}_{kl}$ задачи Неймана–Трикоми (13)–(16) определяются как корни следующего уравнения:

$$J'_{2k-1/2}(\overline{\mu}_{kl})=0,\quad k,l\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что если спектральный параметр μ^2 не является корнем уравнения (18), а является корнем уравнения (20), то собственные функции задачи (1)–(5) будут иметь вид

$$v_{ml}=\begin{cases}\dfrac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))J_{2k-1/2}(r\overline{\mu}_{ml}) & \text{в } \mathcal{D}_{1+},\\ C\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4}J_{2k-1/2}(\overline{\mu}_{ml}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-},\\ C\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{k-1/4}J_{2k-1/2}(\overline{\mu}_{ml}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{2-},\end{cases} \tag{21}$$

где $m,l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Перед тем как переходить к построению собственных функций, в случае когда μ^2 является точкой спектра задачи Трикоми, т.е. μ^2 является одним из корней уравнения (18), докажем важную теорему, из которой будет следовать полнота собственных функций в области эллиптичности уравнения (1).

4. Отсутствие кратных корней у уравнений для собственных значений.

Теорема 1. *Уравнения (18) и (20) не имеют общих корней, за исключением быть может нуля.*

Доказательство. Предположим, что нашлась точка z такая, что для некоторых чисел $k\in\mathbb{N}$ и $m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ справедливы равенства

$$J_{2m+1/2}(z)=0, \tag{22}$$

$$J'_{2k-1/2}(z) = 0. \tag{23}$$

Рассмотрим сначала случай $k = m$. Справедлива следующая формула [2, с. 628]:

$$\frac{(2m-1/2)J_{2m-1/2}(z)}{z} - J'_{2m-1/2}(z) = J_{2m+1/2}(z), \tag{24}$$

из которой и из формул (22), (23) следует, что $J_{2m-1/2}(z) = 0$, поэтому с учётом (23) число z является кратным корнем уравнения $J_{2m-1/2}(z) = 0$. Но функция Бесселя может иметь кратный корень только в случае $z = 0$. Итак, в случае $k = m$ наше утверждение доказано.

Пусть $k > m$, т.е. $k = m + p$, где $p \in \mathbb{N}$. Тогда из формулы (24) получаем

$$0 = J'_{2m+2p-1/2}(z) = \frac{(2m+2p-1/2)J_{2m+2p-1/2}(z)}{z} - J_{2m+2p+1/2}(z). \tag{25}$$

Используя полиномы Ломмеля [3, с. 322; 4, с. 43], запишем две формулы:

$$J_{2m-1/2+2p}(z) = J_{2m+1/2}(z)R_{2p-1,2m+1/2}(z) - J_{2m-1/2}(z)R_{2p-2,2m+3/2}(z), \tag{26}$$

$$J_{2m+1/2+2p}(z) = J_{2m+1/2}(z)R_{2p,2m+1/2}(z) - J_{2m-1/2}(z)R_{2p-1,2m+3/2}(z), \tag{27}$$

где $R_{2p-2,2m+3/2}(z)$ и $R_{2p-1,2m+1/2}(z)$ – многочлены Ломмеля степени $2p-2$ и $2p-1$ соответственно относительно переменной $1/z$.

Подставив формулы (26), (27) в равенство (25), получим

$$0 = J_{2m+1/2}(z)\left[\frac{(2m+2p-1/2)}{z}R_{2p-1,2m+1/2}(z) - R_{2p,2m+1/2}(z)\right] -$$

$$- J_{2m-1/2}(z)\left[\frac{(2m+2p-1/2)}{z}R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z)\right].$$

С учётом (22) имеем

$$0 = J_{2m-1/2}(z)\left[\frac{(2m+2p-1/2)}{z}R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z)\right].$$

Из последнего равенства следует, что либо $J_{2m-1/2}(z) = 0$, либо выражение в квадратной скобке равно нулю.

Если $J_{2m-1/2}(z) = 0$, то из формулы (24) с учётом (22) следует, что $J'_{2m-1/2}(z) = 0$, но тогда z – кратный корень уравнения $J_{2m-1/2}(z) = 0$, а этого быть не может.

Остаётся рассмотреть случай, когда квадратная скобка равна нулю, т.е.

$$\frac{(2m+2p-1/2)}{z}R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z) = 0.$$

В этом случае z – алгебраическое число, но по теореме Зигеля [4, с. 74] с учётом (22) этого быть не может.

Рассмотрим теперь случай $k < m$, тогда $m = k + p$, где $p \in \mathbb{N}$. Из уравнения (22) с использованием полиномов Ломмеля [3, с. 322; 4, с. 43] получаем

$$0 = J_{2m+1/2}(z) = J_{2k+1/2+2p}(z) = J_{2k+1/2}(z)R_{2p,2k+1/2}(z) - J_{2k-1/2}(z)R_{2p-1,2k+3/2}(z). \tag{28}$$

Далее, из равенства (24) при $m = k$ с учётом (23) сразу запишем

$$\frac{(2k-1/2)J_{2k-1/2}(z)}{z} = J_{2k+1/2}(z). \tag{29}$$

Подставив теперь (29) в (28), будем иметь

$$0 = J_{2k-1/2}(z)\left[\frac{(2k-1/2)}{z}R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z)\right]. \tag{30}$$

Из (30) следует, что либо $J_{2k-1/2}(z) = 0,$ либо

$$\frac{(2k-1/2)}{z}R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z) = 0.$$

Если $J_{2k-1/2}(z) = 0,$ то в силу (23) число z – кратный корень уравнения $J_{2k-1/2}(z) = 0,$ но этого быть не может. Если же

$$\frac{(2k-1/2)}{z}R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z) = 0,$$

то z является рациональным числом и одновременно является корнем уравнения (22), но это противоречит теореме Зигеля [4, с. 74]. Теорема доказана.

5. Построение собственных функций в случае, когда спектральный параметр μ^2 является корнем уравнения (18). В случае если μ^2 является собственным значением смешанной задачи (9)–(12) функции, определяемые по формуле (21), не являются собственными для задачи (1)–(5) (следует из теоремы 1), и задача (9)–(12) имеет нетривиальное решение $U(x,y)$.

Поставим теперь задачу для определения функции $V(x,y)$ (формула (7)). Заметим, что эта функция нечётная, поэтому будет выполнено условие

$$V(0,y) = 0. \tag{31}$$

На характеристике $y = -x$ функция обращается в нуль:

$$V(x,-x) = 0. \tag{32}$$

Нормальная производная функции V удовлетворяет условию

$$\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r=1}, \tag{33}$$

где U – собственная функция задачи (9)–(12) (формула (17)). Будем искать решение этой задачи (задачи Неймана–Трикоми) в виде

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k, \tag{34}$$

где

$$u_k = \begin{cases} \dfrac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))J_{2k-1/2}(r\mu), & y>0,\\ C\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4} J_{2k-1/2}(\mu\sqrt{x^2-y^2}), & y<0,\end{cases}$$

при $\mu = \mu_{kn},$ μ_{kn} – корень уравнения (18), а коэффициенты A_k определяются из условия (33).

Теорема 2. *Ряд, определяемый по формуле (34), является решением задачи (31)–(33) и является равномерно сходящимся в $\overline{\mathcal{D}}$ вместе с производной по r при $\mu = \mu_{kn}$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция u_k удовлетворяет условиям (31), (32). Проверка условия (33) приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))\mu J'_{2k-1/2}(\mu) =$$

$$= -(-1)^m\sqrt{2}\cos((2m+1/2)(\pi/2-\Theta))\mu J'_{2m+1/2}(\mu). \qquad (35)$$

Если мы докажем равномерную сходимость ряда в левой части равенства (35), то тем самым построим собственную функцию.

Исследуем на равномерную сходимость ряд (34). Для удобства изложения введём новые переменные

$$B_k := A_k\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\mu J'_{2k-1/2}(\mu), \quad \psi/2 := \pi/2-\Theta$$

и обозначим правую часть в (35) через

$$f(\Theta) := -(-1)^m\sqrt{2}\cos((2m+1/2)(\pi/2-\Theta))\mu J'_{2m+1}(\mu).$$

Из (35) получаем явное выражение для B_k в следующем виде:

$$B_k = \int\limits_0^\pi f(\pi/2-\psi/2)h_k^{1/2}\,d\psi, \qquad (36)$$

где

$$h_k^{1/2} = \frac{2}{\pi\sqrt{2\cos\psi/2}}\biggl(\sum_{j=0}^k C^j_{-1/2}\sin((k-j)\psi)\biggr)$$

есть биортогональная система к системе $\{\sin((k-1/4)\psi)\}_1^\infty$. Далее из формулы (13) (см. [5]) получаем

$$-(k-1/4)h_k^{1/2} = (H_{k-1}^{-3/2})', \qquad (37)$$

где

$$H_n^\beta = \frac{2}{\pi(2\cos\psi/2)^\beta}\biggl(\sum_{k=0}^n C^k_\beta\sin((n-k)\psi) - C^n_\beta/2\biggr),$$

$n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\beta=-1/2$, а h_m^β определяются по формуле

$$h_m^\beta = \frac{2}{\pi(2\cos(\psi/2))^\beta}\sum_{k=0}^{m-1} C^k_\beta\sin((m-k)\psi). \qquad (38)$$

Заметим, что биномиальный коэффициент C^m_β для $\beta=-1/2$ ведет себя при $m\to\infty$ как $1/\sqrt{m}$ [4, с. 67]. Далее, подставив формулу (37) в (36) и проинтегрировав по частям полученное выражение с учётом равенства $H_n^{-3/2}(\pi)=0$, вытекающего из (38), получим

$$B_k = \frac{f(0)H_{k-1}^{-3/2}(0)}{k-1/4} - \frac{1}{2k-1/2}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)H_{k-1}^{-3/2}(\phi)\,d\phi = B'_k + B''_k. \qquad (39)$$

Оценим скорость убывания второго слагаемого в (39). Для этого подставим в него формулу (18) из работы [6] и в результате получим

$$B''_{k+1}(2k+3/2) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)\cos((k+3/4)\phi)\,d\phi +$$

$$+\frac{(-1)^k}{\pi^2}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)(2\cos(\phi/2))^{3/2}\,d\phi\int\limits_0^1\frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\,dt}{(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)}. \qquad (40)$$

Заметим, что первое слагаемое есть величина порядка $O(1/k^\alpha)$ [7], а внутренний интеграл второго слагаемого в (40) можно оценить через бета-функцию Эйлера:

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\,dt}{(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\,dt}{[(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)]^{1/4-\varepsilon}[(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)]^{3/4+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 2\frac{t^{k-1/2}(1-t)^{2\varepsilon-1}\,dt}{(2t\cos^2(\phi/2))^{3/4+\varepsilon}} \leqslant C\frac{B(k-1/4-\varepsilon,2\varepsilon)}{\cos^{3/2+4\varepsilon}(\phi/2)}. \tag{41}$$

В формуле

$$B(k-1/4-\varepsilon,2\varepsilon)=\frac{\Gamma(k-1/4-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(k-1/4+\varepsilon)},$$

связывающей бета- и гамма-функции Эйлера, величина, стоящая в правой части, имеет порядок $1/k^{2\varepsilon}$ при $k\to\infty$. Отсюда и из (41) следует, что

$$|B_k''| \leqslant \frac{c}{k^{1+2\varepsilon}}, \tag{42}$$

где c – некоторая положительная постоянная.

Оценим скорость убывания первого слагаемого в (39). Для этого достаточно оценить $H_{k-1}^{-3/2}(0)$. Опять, использовав формулу (8) из [6], получим

$$H_n^{-3/2}(0)=\frac{2}{\pi}+\frac{2^{5/2}(-1)^n}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2}}{(1+t)^2}\,dt. \tag{43}$$

Нетрудно видеть, что интеграл в (43) допускает оценку

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2}}{(1+t)^2}\,dt \leqslant \int\limits_0^1 t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt = B(n+3/2,1/2)=\frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(1/3)}{\gamma(n+2)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда и из оценки (42) получаем

$$B_k=\frac{2}{\pi k}+\overline{B}_k, \tag{44}$$

где $\overline{B}_k$ удовлетворяет (42).

Ряд (34) можно записать следующим образом (через коэффициенты B_k):

$$V=\sum_{k=1}^\infty B_k\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}\sin((2k-1/2)\phi/2). \tag{45}$$

Используя асимптотическое выражение

$$\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}=\frac{r^{2k-1/2}\mu}{2k-1/2}(1+O(1/k)), \tag{46}$$

справедливое для больших k, запишем ряд (45) с учётом (44), (46) следующим образом:

$$V=\sum_{k=1}^\infty B_k\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}\sin((2k-1/2)\phi/2)=\sum_{k=1}^\infty \frac{r^{2k-1/2}\mu}{\pi k^2}\sin((2k-1/2)\phi/2)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{B}_k\frac{r^{2k-1/2}\mu}{2k-1/2}(1+O(1/k))\mu\sin{(2k-1/2)\phi/2}. \tag{47}$$

Из оценки (47) и из формулы (42) для $\overline{B}_k$ следует равномерная сходимость ряда (34) и продифференцированного по r ряда (34), т.е. ряд (34) является решением задачи (31)–(33). Теорема доказана.

Следствие. *Если μ является корнем уравнения (18), то собственная функция нелокальной краевой задачи (1)–(5) имеет вид*

$$u(x,y)=\begin{cases}U(x,y)+V(x,y) & \text{при}\quad x>0,\\ U(-x,y)-V(-x,y) & \text{при}\quad x<0,\end{cases} \tag{48}$$

где $U(x,y)$ определяется по формуле (34), а $V(x,y)$ – по формуле (17).

Подытожим результаты этого пункта.

Теорема 3. *Собственные функции задачи (1)–(5), отвечающие собственным значениям μ^2, где μ определяется из уравнения (18), вычисляются по формуле (48); если же μ определяются из уравнения (20), то собственные функции вычисляются по формуле (19). Других собственных значений и собственных функций, а также присоединённых функций, нелокальная краевая задача (1)–(5) не имеет.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что не существует других собственных значений и других собственных функций, что следует из работы [1], где это было доказано для задач Трикоми и Неймана–Трикоми.

6. Полнота собственных функций.

Теорема 4. *Система собственных функций задачи (1)–(5) полна в пространстве $L_2(\mathcal{D}_+)$, т.е. полна в области эллиптичности уравнения (1).*

Доказательство. Достаточно доказать, что не существует функции из $L_2(\mathcal{D}_+)$, которая ортогональна всем собственным функциям. Пусть такая функция $f\in L_2(\mathcal{D}_+)$ существует. Обозначим

$$F(x,y)=[f(x,y)+f(-x,y)]/2,\quad L(x,y)=[f(x,y)-f(-x,y)]/2. \tag{49}$$

Очевидно, что $F(x,y)$ – чётная по x функция, а $L(x,y)$ – нечётная по x функция. При этом

$$f(x,y)=F(x,y)+L(x,y). \tag{50}$$

Функция $f(x,y)$ ортогональна всем собственным функциям, определяемым равенством (19), которые нечётны по x, поэтому

$$\int\limits_{\mathcal{D}_+} f(x,y)u_k\,dx\,dy=\int\limits_{\mathcal{D}_+}F(x,y)u_k\,dx\,dy+\int\limits_{\mathcal{D}_+}L(x,y)v_{ml}\,dx\,dy=2\int\limits_{\mathcal{D}_{1+}}L(x,y)v_{ml}\,dx\,dy=0.$$

Итак, собственные функции задачи Неймана–Трикоми ортогональны функции $L(x,y)$ в области $\mathcal{D}_{1+}$. Так как собственные функции задачи Неймана–Трикоми полны в $L_2(\mathcal{D}_{1+})$, то $L(x,y)=0$ в области $\mathcal{D}_+$. Следовательно,

$$f(x,y)=F(x,y).$$

Далее, функция $f(x,y)$ (50) также ортогональна всем функциям вида (48). Так как $F(x,y)$ (49) чётная в $\mathcal{D}_+$, то с учётом вида (48) получаем равенства

$$0=\int\limits_{\mathcal{D}_+}f(x,y)u(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{\mathcal{D}_+}F(x,y)u(x,y)\,dx\,dy=2\int\limits_{\mathcal{D}_{1+}}F(x,y)U(x,y)\,dx\,dy.$$

Учитывая, что $V(x,y)$ – собственные функции смешанной краевой задачи (9)–(12) и они согласно [1] полны в пространстве $L_2(\mathcal{D}_{1+})$, получаем $F(x,y)=0$. Поэтому $f(x,y)=0$. Теорема доказана.

7. Исследование разрешимости задачи (1)–(5). В случае если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи (9)–(12) функция

$$U(x,y)=[u(x,y)-u(-x,y)]/2=0$$

согласно лемме 2. Поэтому $u(x,y)=V(x,y)$ является нечётной по x функцией, и её достаточно найти при $x>0$. Запишем теперь задачу для $V(x,y)$:

$$V_{xx}+(\operatorname{sgn} y)V_{yy}+\mu^2V=0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_{1+}\bigcup\mathcal{D}_{1-}, \tag{51}$$

в силу нечётности функции $V(x,y)$ при $x=0$ получаем условие

$$V(0,y)=0. \tag{52}$$

На характеристике $y=-x$ функция обращается в нуль:

$$V(x,-x)=0. \tag{53}$$

Нормальная производная $V(x,y)$ удовлетворяет условию

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=1}=f(\Theta) \quad \text{для} \quad \Theta\in(0,\pi/2). \tag{54}$$

Будем искать решение этой смешанной краевой задачи в виде

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}A_ku_k, \tag{55}$$

где

$$u_k=\begin{cases}\dfrac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))J_{2k-1/2}(r\mu), & y>0,\\ C\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4}J_{2k-1/2}(\mu\sqrt{x^2-y^2}), & y<0.\end{cases}$$

Теорема 5. *Если функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера $f'(\theta)\in C^{\alpha}([0,\pi/2])$ с некоторым показателем $\alpha>0$ и $f(\pi/2)=0$, то ряд, определяемый по формуле (55), является решением задачи (51)–(54) и равномерно сходится в $\overline{\mathcal{D}_{1+}\bigcup\mathcal{D}_{1-}}$ вместе с производной по r.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция u_k удовлетворяет условиям (52), (53). Проверка условия (54) приводит к условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))\mu J'_{2k-1/2}(\mu)=f(\theta). \tag{56}$$

Если мы докажем равномерную сходимость ряда в левой части этого равенства, то тем самым построим решение задачи (51)–(54).

Исследуем на равномерную сходимость ряд, стоящий в (56). Для удобства изложения введём новые переменные

$$B_k:=A_k\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\mu J'_{2k-1/2}(\mu), \quad \psi/2:=\pi/2-\Theta.$$

Из (56) получаем явное выражение для B_k в следующем виде:

$$B_k = \int\limits_0^\pi f(\pi/2 - \psi/2) h_k^{1/2}\, d\psi, \tag{57}$$

где

$$h_k^{1/2} = \frac{2}{\pi\sqrt{2\cos\psi/2}}\Bigl(\sum_{j=0}^{k} C_{-1/2}^{j} \sin((k-j)\psi)\Bigr)$$

есть биортогональная система к $\{\sin((k-1/4)\psi)\}_1^\infty$. Далее из формулы (8) [5] имеем

$$-(k-1/4)h_k^{1/2} = (H_{k-1}^{-3/2})', \tag{58}$$

где

$$H_n^\beta = \frac{2}{\pi(2\cos\psi/2)^\beta}\Bigl(\sum_{k=0}^{n} C_\beta^k \sin((n-k)\psi) - C_\beta^n/2\Bigr), \tag{59}$$

$n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\beta = -1/2$, а h_m^β определяются по формуле

$$h_m^\beta = \frac{2}{\pi(2\cos\psi/2)^\beta}\sum_{k=0}^{m-1} C_\beta^k \sin((m-k)\psi).$$

Заметим, что биномиальный коэффициент C_β^m для $\beta = -1/2$ ведет себя при $m \to \infty$ как $1/\sqrt{m}$ [4, с. 67]. Далее, подставляя формулу (58) в (57) и интегрируя по частям полученное выражение с учётом равенства $H_n^{-3/2}(\pi) = 0$, вытекающего из (59), и равенства $f(\pi/2) = 0$, будем иметь

$$B_k = \frac{2}{2k-1/2}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2 - \phi/2) H_{k-1}^{-3/2}(\phi)\, d\phi. \tag{60}$$

Оценим скорость убывания полученного выражения. Для этого подставим в (60) формулу (8) из статьи [6] и в результате получим

$$B_{k+1}(2k+3/2) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)\cos((k+3/4)\phi)\, d\phi +$$

$$+\frac{(-1)^k}{\pi^2}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)(2\cos(\phi/2))^{3/2}\, d\phi \int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\, dt}{(1-t)^2 + 4t\cos^2(\phi/2)}. \tag{61}$$

Заметим, что первое слагаемое в (61) – величина порядка $O(1/k^\alpha)$ [7], а внутренний интеграл второго слагаемого можно оценить через бета-функцию Эйлера:

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\, dt}{(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\, dt}{[(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)]^{1/4-\varepsilon}[(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)]^{3/4+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 2\frac{t^{k-1/2}(1-t)^{2\varepsilon-1}\, dt}{(2t\cos^2(\phi/2))^{3/4+\varepsilon}} \leqslant C\frac{B(k-1/4-\varepsilon, 2\varepsilon)}{\cos^{3/2+4\varepsilon}(\phi/2)}. \tag{62}$$

В формуле
$$B(k-1/4-\varepsilon, 2\varepsilon) = \frac{\Gamma(k-1/4-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(k-1/4+\varepsilon)},$$
связывающей бета- и гамма-функции Эйлера, величина, стоящая в правой части, имеет порядок $1/k^{2\varepsilon}$ при $k\to\infty.$ Отсюда и из (62) следует, что
$$|B_k| \leqslant \frac{c}{k^{1+2\varepsilon}}, \tag{63}$$
где c – некоторая положительная постоянная. Ряд (55) можно записать следующим образом (через коэффициенты B_k):
$$V = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}\sin((2k-1/2)\phi/2). \tag{64}$$
Отметим асимптотическое выражение
$$\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu} = \frac{r^{2k-1/2}\mu}{2k-1/2}(1+O(1/k)),$$
справедливое для больших $k,$ из которого вытекает верное при больших k неравенство
$$\left|\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)}\right| \leqslant \frac{c}{k}.$$
Из этой оценки и из формулы (63) следует равномерная сходимость ряда (55) и продифференцированного по r ряда (55), т.е. функция, представимая формулой (55), является решением задачи (50)–(54). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случаи, когда μ^2 является собственным значением задачи (1)–(5), т.е. корнем уравнения (18) или уравнения (20).

Теорема 6. *Если μ является корнем уравнения (20) при некотором $k=p,$ функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера*
$$f'(\theta)\in C^{\alpha}([0,\pi/2]), \quad f(\pi/2)=0,$$
то задача (1)–(5) разрешима, если выполнено следующее условие:
$$\int\limits_0^{\pi} f(\pi/2-\phi/2)h_p^{1/2}\,d\phi = 0,$$
где $h_p^{1/2}$ – функция из (38). В случае выполнения условия (64) решение задачи (1)–(5) неединственно и определяется с точностью до собственной функции (19), отвечающей собственному значению из уравнения (20).

Теорема 7. *Если μ является корнем уравнения (18), функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера*
$$f'(\theta)\in C^{\alpha}([0,\pi/2]), \quad f(\pi/2)=0,$$
то задача (1)–(5) разрешима, её решение неединственно и определяется с точностью до собственной функции (48), отвечающей собственному значению из уравнения (18).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пономарев С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения Лаврентьева–Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
3. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М., 1949.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1965.
5. *Моисеев Е.И.* О дифференциальных свойствах разложений по системе синусов и косинусов // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 117–126.
6. *Моисеев Е.И.* О базисности систем синусов и косинусов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 794–798.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М., 1985.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 14.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1385–1396

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.2

О ВЛИЯНИИ НЕИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ НА ПОСТАНОВКУ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2023 г. А. Б. Расулов

Изучено влияние неизолированных особенностей в младших коэффициентах (т.е. когда младшие коэффициенты имеют особенности по замкнутым линиям, лежащим внутри области) уравнения Бицадзе на постановку краевых задач. Обнаружено, что условия в задаче Римана–Гильберта на границе области недостаточно для её решения, поэтому рассмотрена задача, объединяющая элементы задач Римана–Гильберта на границе области и линейного сопряжения на окружностях-носителях сингулярностей коэффициентов, лежащих внутри области. С помощью надлежащего уточнения теоремы Келлога о конформном отображении этой области на круг исследован вопрос разрешимости этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123100060, EDN: ONKXZI

Статья посвящается юбилеям моих учителей:
75-летию Александра Павловича Солдатова
и 85-летию Нусрата Раджабовича Раджабова

1. История вопроса. Классическая теорема Коши–Ковалевской гарантирует локальную аналитичность решения линейного дифференциального уравнения, представленного в нормальной форме, если его коэффициенты, правая часть и начальные данные аналитичны (в случае вещественных переменных разлагаются в сходящиеся степенные ряды) или если коэффициенты и правая часть эллиптического уравнения порядка m удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$ (тогда производные порядка m любого решения этого уравнения также удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем).

Исследования вырождающихся эллиптических уравнений показали, что аналитичность коэффициентов уравнения наследуется его решением. Фундаментальная система состоит из функций, представляющих собой произведение голоморфной в окрестности точки (плоскости) вырождения функции на функцию, которая может иметь особенность на указанном множестве. Эта особенность либо степенная, при этом показатель находится по коэффициентам уравнения, либо логарифмическая, степенная и логарифмическая или экспоненциальная. Для обоснования существования решения краевой задачи для вырождающихся уравнений, как правило, используют неявные методы построения решения (например, метод барьеров). При этом затруднительно выяснить структуру решения и проследить, как аналитичность коэффициентов и правой части уравнения отражается на решении задачи (см. работы [1–8]).

Как следует из исследований, посвящённых вырождающимся дифференциальным уравнениям, на решения краевых задач может влиять особенность коэффициентов, содержащихся в рассматриваемой области. Например, в статье [9] изучена разрешимость задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Коши–Римана

$$w_{\bar z} = \frac{Q(z)}{P(z)} w(z) + a(z)w + b(z)\overline{w}, \quad |z| < 1,$$

где $Q(z)$, $P(z)$ – полиномы, причём $P(z)$ внутри круга $|z| \leqslant 1$ имеет простые корни, $a(z), b(z) \in L^p(D)$ (здесь и дальше $p > 2$). Здесь и ниже используются стандартные обозначения $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$. Показано, что число непрерывных решений задачи зависит не только от индекса, но и от места расположения и типа особенностей коэффициентов уравнения.

В работе [10] для обобщённой системы Коши–Римана с сингулярной линией выявлено, что для корректной постановки краевой задачи необходимо рассматривать задачу, объединяющую элементы задач Римана–Гильберта (на границе области) и линейного сопряжения (на сингулярном отрезке, содержащемся внутри области).

В теории эллиптических уравнений важное место занимает система уравнений Бицадзе [1, с. 134]

$$u_{1xx} - u_{1yy} - 2u_{2xy} = 0, \quad 2u_{1xy} + u_{2xx} - u_{2yy} = 0.$$

Как известно, любая эллиптическая система уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и двумя неизвестными функциями от двух переменных приводится к одному из уравнений [11]:

$$u_{z\bar{z}} = 0 \quad \text{или} \quad u_{\bar{z}\bar{z}} = 0,$$

где $u = u_1 + iu_2$.

Класс задач для первого уравнения (уравнения Лапласа) хорошо изучен, в отличие от задач для второго уравнения (уравнения Бицадзе).

С другой стороны, как следует из работ [12, 13], уравнение Бицадзе непосредственно связано с уравнением Стокса. Согласно [12] в плоском случае уравнение Стокса базируется на функции потока $u_1(x,y)$ и функции напряжения $u_2(x,y)$ и имеет вид

$$u_{1xx} - u_{1yy} = -4\eta u_{2xy}, \quad -u_{1xy} = \eta(u_{2yy} - u_{2xx}),$$

где η – материальная постоянная. Подстановка $2\eta u_2 \to u_2$ переводит эту систему в систему уравнений Бицадзе, поэтому исследование системы уравнений Бицадзе с младшими членами представляет особый интерес.

Уравнение Бицадзе с младшими регулярными коэффициентами было исследовано в работах [1, 14–18] и др. Важность изучения уравнения с главной частью $u_{\bar{z}\bar{z}}$ и с особенностями в младших коэффициентах была подчёркнута ещё в 80-х годах прошлого века А.В. Бицадзе. Но эти исследования были связаны с некоторыми трудностями принципиального характера, особенно когда коэффициенты сингулярны во внутренней точке рассматриваемой области. Понятие сверхсингулярных особенностей было введено Н.Р. Раджабовым [4]. В статье [19] для уравнения Бицадзе с младшими коэффициентами, имеющими в одной внутренней точке рассматриваемой области сильную особенность, найдено интегральное представление обобщённого решения из класса непрерывных функций. В [20] для уравнения Бицадзе с младшими коэффициентами, имеющими в конечном числе точек рассматриваемой области сильные особенности и интегрируемую особенность в начале координат, найдено обобщённое решение из класса непрерывных функций задачи типа Римана–Гильберта.

В настоящей работе исследовано влияние неизолированных особенностей в младших коэффициентах уравнения Бицадзе на постановку краевых задач.

2. Интегральное представление решений в явной форме. Пусть область D содержит окружности $\gamma_j = \{z : |\delta_j| = r_j\}$, где $\delta_j \equiv z - z_j$, $j = \overline{1,n}$, и ограничена простым ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки, и пусть для краткости

$$\rho = \rho_1 \ldots \rho_n, \quad \rho_j(z) = \delta_j^{-1}|\delta_j|\,||z - z_j| - r_j|, \quad j = \overline{1,n}.$$

В открытом множестве $D_0 = D \setminus \gamma$, $\gamma = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j$, рассмотрим уравнение Бицадзе с сингулярными младшими коэффициентами следующего вида:

$$u_{\bar{z}\bar{z}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\rho_j} u_{\bar{z}} + \frac{a_0}{\rho} u = f, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C(\overline{D})$, $a_0 = -\rho(ab + b^2)$, $a = -\sum_{j=1}^{n} a_j \rho_j^{-1}$ и функция $b(z) \in C(\overline{D})$ аналитична в области D. Относительно правой части f уравнения предполагаем, что она принадлежит пространству $L^p(G_0)$, $p > 2$, в каждой подобласти $G_0 \subseteq D_0$.

В работе для уравнения Бицадзе (1) построено представление общего решения. Далее для уравнения (1), коэффициенты которого допускают особенность первого порядка на окружности γ_j, исследована краевая задача, объединяющая элементы задач Римана–Гильберта на Γ и линейного сопряжения на γ_j, $j=\overline{1,n}$.

Выбор таких коэффициентов уравнения объясняется тем, что левую часть (1) можно представить в виде

$$u_{\bar z\bar z}+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\rho_j}u_{\bar z}+\frac{a_0}{\rho}u=\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}+a+b\right)(u_{\bar z}-bu) \tag{2}$$

и свести исследование к интегрированию уравнений первого порядка

$$U_{\bar z}-(a+b)U=f,\quad u_{\bar z}+bu=U \tag{3}$$

с сингулярным коэффициентом

$$a=\frac{a_1}{\rho_1}+\ldots+\frac{a_n}{\rho_n} \tag{4}$$

и регулярным коэффициентом b.

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D_0)$, если в любой подобласти $G_0\in D_0$ её обобщённая производная $f_{\overline z}\in L^p_{\mathrm{loc}}(G_0)$, $p>2$.

Напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в монографии [21] и в книге [8].

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{\mathrm{loc}}(G)$, т.е. принадлежат $W^{1,p}(G_0)$ в любой ограниченной области G_0, лежащей в множестве G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. [21]) любое слабое решение u уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\overline{G_0})$ с показателем $\mu\leqslant(p-2)/p$. В соответствии с внутренней регулярностью решений и согласно свойству левой части уравнения (2) в дальнейшем решение уравнения (1) предполагается регулярным в открытом множестве D_0.

Более точно, под *регулярным решением* уравнения (1) в рассматриваемой области D_0 понимается функция u, которая в любой замкнутой подобласти $\overline{G_0}\subseteq D_0$ имеет первую обобщённую производную по $\overline z$, принадлежащую классу $L^p(\overline{G_0})$, и удовлетворяет этому уравнению.

Уравнение (1), согласно (2), (3), сводится к интегрированию двух уравнений первого порядка вида

$$U_{\bar z}-CU=f. \tag{5}$$

Хорошо известно, что в его исследовании существенную роль играет интегральный оператор Помпейу–Векуа [21, с. 31]

$$(Tf)(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_D\frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta-z}, \tag{6}$$

здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. Если $f\in L^p(D)$, $p>2$, то функция $U=Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D)$ и удовлетворяет уравнению $U_{\bar z}=f$, причём оператор (6) ограничен. Напомним, что имеет место следующее вложение [21, с. 39] данных пространств в класс Гёльдера:

$$W^{1,p}(D)\subseteq C^\mu(\overline D),\quad \mu=1-\frac{2}{p},$$

в частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline D)$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $p>2$. Когда точное значение показателя Гёльдера μ несущественно, вместо $C^\mu(\overline D)$ используем обозначение $H(\overline D)$ [22, с. 31].

Пусть в уравнении (5) коэффициент C и правая часть f принадлежат классу $L^p(D)$. Очевидно, что в этом случае для функции $V = e^{-TC}U$ справедливо соотношение $V_{\bar z} = e^{-TC}U_{\bar z} - Ce^{-TC}U = e^{-TC}f$. Следовательно, общее решение этого уравнения определяется формулой

$$U = e^{TC}\phi + (e^{TC}Te^{-TC})f \tag{7}$$

с произвольной аналитической в области D функцией ϕ. Функции $e^{\pm TC}$ рассматриваются здесь как операторы умножения.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} - (a+b)u = f \tag{8}$$

с коэффициентом (4), который запишем в виде

$$a(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^*(z-z_j)}{|z-z_j|(|z-z_j|-r_j)} + a_0(z), \quad a_0(z) \in L^p(D),$$

где $a_j^* \in \mathbb{C}$ и функция $b(z) \in C(\overline{D})$ аналитична в области D. В этом случае коэффициент a имеет особенность на окружностях γ_j, $j = \overline{1,n}$, и решение уравнения предполагается регулярным в множестве D_0.

Лемма 1. *Пусть* $a_0(z) \in L^p(D)$, *функция* $b(z) \in C(\overline{D})$ *аналитична в области* D *и* $\omega_* = 2\sum_{j=1}^n a_j^* \ln\big||z-z_j|-r_j\big|$. *Тогда функция*

$$\Omega(z) = \omega_*(z) + (T(a_0+b))(z), \quad z \in D_0, \tag{9}$$

удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar z} = a + b$.

Доказательство проводится проверкой, что функция $\Omega(z) = 2\sum_{j=1}^n a_j^* \ln\big||z-z_j|-r_j\big| + (T(a_0+b))(z)$ удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar z}(z) = a+b$ с функцией

$$a(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^*(z-z_j)}{|z-z_j|(|z-z_j|-r_j)} + a_0(z).$$

С другой стороны, как было отмечено выше, для $(a_0+b) \in L^p$ функция $T(a_0+b)$ является решением уравнения $(T(a_0+b))_{\bar z} = a_0 + b$. Отсюда следует, что функция $\Omega(z)$ в (9) удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar z} = a+b$.

Теорема 1. *Пусть функция* $\Omega(z)$ *определена формулой (9) и* $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$. *Тогда общее решение уравнения (8) в классе* $C(\overline{D}\backslash\gamma)$ *определяется формулой*

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)],$$

где $\phi \in C(\overline{D}\backslash\gamma)$ *аналитична в открытом множестве* $D\backslash\gamma$.

Из леммы 1 следует, что у функции

$$e^{\Omega(z)} = C_0(z)\big||z-z_1|-r_1\big|^{2a_1^*}\cdots\big||z-z_n|-r_n\big|^{2a_n^*}$$

$C_0(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и всюду отлична от нуля. Поэтому, согласно теореме 1, решение $u(z)$ уравнения (9) ведет себя как

$$u(z) = O(1)(\big||z-z_j|-r_j\big|^{2a_j^*}) \quad \text{при} \quad |z-z_j| \to r_j.$$

Заметим, что функция $e^{\Omega(z)}$ при $\operatorname{Re} a_j^* < 0$, $j = \overline{1,n}$ ($\operatorname{Re} a_j^* > 0$, $j = \overline{1,n}$), допускает в окружности $\delta_j = r_j$ особенность (нуль) степенного порядка. При $\operatorname{Re} a_j^* \geqslant 0$, $j = \overline{1,k}$, эти функции, очевидно, ограничены. Если $\operatorname{Re} a_j^* = 0$, $j = \overline{1,n}$, т.е. $a = a_0 \in L^p(D)$, то получим обычное равенство $Ta = Ta_0 \in W^{1,p}(D)$.

Обратимся к уравнению (5). Пусть коэффициент $C \in L^p(D_0)$, причём функция TC существует, принадлежит $W^{1,p}(D_0)$ и удовлетворяет уравнению $(TC)_{\bar z} = C$. Тогда в предположении $e^{-TC}f \in L^p(D)$ представление (7) сохраняет свою силу по отношению к области D_0. В частности, согласно теореме 1 оно справедливо для соответствующего уравнения с коэффициентом $a = \sum_{j=1}^n a_j^* \rho_j^{-1}$, удовлетворяющим условию $a_0(z) \in L^p(D)$. Совместно с разложением (3) это обстоятельство позволяет описать общее решение уравнения (1).

Итак, на основании теоремы 1, приведённых выше рассуждений и при обозначениях

$$\omega_* = \sum_{j=1}^n a_j^* \omega_j, \quad \phi \equiv \phi_2$$

доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $a_0(z) \in L^p(D)$ *и* $\operatorname{Re} a_j^* \leqslant 0$, $j = \overline{1,n}$. *Тогда при* $e^{\omega_*} f \in L^p(D)$ *любое решение уравнения (1) в области* D_0 *определяется формулой*

$$u = e^{-Tb}\phi_1 + (e^{-Tb}Te^{\omega_* + T(a_0+2b)})\phi_2 + (e^{-Tb}Te^{\omega_* + T(a_0+2b)}Te^{-\omega_* - T(a_0+b)})f, \tag{10}$$

где функции ϕ_1, ϕ_2 *аналитичны в области* D_0, *причём* $e^{-\omega_*}\phi_2 \in L^p(D)$, *и определяются однозначно по* u.

Заметим, что согласно известному свойству интегралов типа Коши [22, с. 22] функция $h_k \in H(\overline{D})$, $k = 0,1,2$, где $h_0 = -Tb$, $h_1 = T(a_0 + 2b)$, $h_2 = T(a_0 + b)$.

В действительности можно утверждать больше, что показывает

Лемма 2. *В условиях теоремы 2 функция* $h_k \in W^{1,p}(D)$, $k = 0,1,2$.

Доказательство этой леммы содержится в статье [19].

Представление (10) после переобозначения с учётом леммы 2 можем записать в виде

$$u = e^{h_0}\phi_1 + (e^{h_0}Te^{\omega_* + h_1})\phi_2 + (e^{h_0}Te^{\omega_* + h_1}Te^{-\omega_* - h_2})f$$

с некоторыми $h_j \in W^{1,p}(D)$, $j = 0,1,2$, или кратко

$$u = e^{h_0}\phi_1 + T_0\phi_2 + T_1 f, \tag{11}$$

с соответствующими интегральными операторами T_0, T_1. Эти операторы действуют по формулам

$$(T_0\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{k_0(z,\zeta)}{\zeta - z} e^{\omega_*(\zeta)}\varphi(\zeta)\, d_2\zeta, \quad z \in D,$$

где $k_0(z,\zeta) = e^{h_0(z) - h_1(\zeta)}$, и

$$(T_1\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{k_1(z,\zeta)}{\zeta - z} e^{-\omega_*(\zeta)}\varphi(\zeta)\, d_2\zeta, \quad z \in D,$$

где $k_1(z,\zeta) = e^{h_0(z) - h_1(\zeta)}[h(z) - h(\zeta)]$ и $h = Te^{h_1 + \omega_*} \in W^{1,p}(D)$.

Из (10) или (11) видно, что аналитические функции ϕ_1, ϕ_2 определяются по u однозначно и восстанавливаются по формулам

$$\phi_2 = e^{-\omega_* + h_0 + h}(u_{\bar z} - bu) + Te^{-\omega_* + h_0 + h} f, \quad \phi_1 = e^{-h_0}(u - T_0\phi_2 - T_1 f). \tag{12}$$

3. Постановка краевой задачи. Полученное интегральное представление (10) позволяет для уравнения (1) исследовать краевую задачу, объединяющую элементы задач Римана–Гильберта на границе Γ и линейного сопряжения на окружностях γ_j, $j = \overline{1,n}$.

Задача *R*. Найти регулярное решение уравнения (1) в классе

$$u, e^{-\omega_*}(u_{\bar z} - bu) \in C^\mu(\overline{D_j}), \quad j = \overline{1,n}, \quad 0 < \mu < 1 - 2/p, \tag{13}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\operatorname{Re} G_1 u|_\Gamma = g_1, \quad \operatorname{Re} G_2 e^{-\omega_*}(u_{\bar z} - bu)|_\Gamma = g_2, \quad t \in \Gamma, \tag{14}$$

$$(e^{-\Omega}u)^+(t) - G_j(t)(e^{-\Omega}u)^-(t) = g_j(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{15}$$

$$(e^{-\Omega}u)^+(t) - (e^{-\Omega}u)^-(t) = 0, \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n,$$

$$e^{-\omega_*}(u_{\bar z} - bu)^+(t) = e^{-\omega_*}(u_{\bar z} - bu)^-(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

где знаки “ $+$ ” и “ $-$ ” указывают на граничные значения со стороны D_j^+ и D_j^-.

Эту задачу рассматриваем при следующих требованиях на её данные:

1) $e^{-\omega_*} f \in L^p(D)$;

2) функции $G_k, g_k \in C^\nu(\Gamma)$, $k = 1,2,j$, причём G_1 и G_2 всюду отличны от нуля, $G_j(t) \in H(\gamma_j)$ также всюду отличны от нуля, причём $\ln G_j \in H(\gamma_j)$;

3) $g(t) \in H(\Gamma)$, $g_j(t) \in H(\gamma_j)$, $j = \overline{1,n}$.

Как следует из условий задачи, одна из окружностей γ_j, лежащих внутри Γ, является носителем условий задачи линейного сопряжения (15), а остальные окружности, лежащие внутри Γ, являются носителями условий сопряжения (16).

Замечание. Из постановки задачи R видно, что окружности γ_j, $j = \overline{1,n}$, являющиеся носителями сингулярностей, разбивают область на части, на границах которых необходимо дополнительно задавать граничные условия типа (15) и (16).

4. Классическая задача Римана–Гильберта. Напомним постановку классической задачи Римана–Гильберта [22, 23]: найти аналитическую в области D функцию $\phi(z) \in H(\overline{D})$, удовлетворяющую на границе $\Gamma = \partial D$ условию

$$\operatorname{Re} G\phi|_\Gamma = g, \tag{17}$$

где функция $G = G_1 + iG_2 \in H(\Gamma)$ всюду отлична от нуля, H – класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с некоторым показателем [22, с. 18, 145].

Далее воспользуемся компактным изложением А.П. Солдатова о решении задачи Римана–Гильберта и приведём некоторые факты о разрешимости классической задачи Римана–Гильберта (17) в случае единичного круга $\mathbb{D}$ с границей $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. С этой целью функцию ϕ продолжим в область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{z : |z| > 1\}$, положив, что она удовлетворяет условию $\phi = \phi_*$, где ϕ_* определяется с помощью инверсии $\phi_*(z) = \overline{\phi(1/\overline{z})}$. Операция $\phi \to \phi_*$, являющаяся линейной, инволютивна над полем $\mathbb{R}$, т.е. $(\phi_*)_* = \phi$. Видно, что $\phi_*^\pm(t) = \overline{\phi^\mp}$, $t \in \mathbb{T}$. Задачу (17) с коэффициентом G можем представить в виде

$$\phi^+ - \widetilde{G}\phi^- = \widetilde{g}, \tag{18}$$

где $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ и $\widetilde{g} = 2g/G$.

Последняя задача с коэффициентом $\widetilde{G}$ исследуется с помощью так называемой $\widetilde{G}$-канонической функции. По определению под ней понимается функция $X(z)$, которая аналитична в каждой связной компоненте $\mathbb{D}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и продолжается по непрерывности на её замыкание $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}}$; всюду отлична от нуля, включая её граничные значения $X^\pm$; вместе с $X^{-1}(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет соотношению

$$X^+ = \widetilde{G}X^-.$$

Определим индекс Коши [22, с. 125]

$$\text{æ} = \operatorname{Ind}_\Gamma G = \frac{1}{2\pi}\arg G(t)|_\Gamma.$$

Лемма 3. *Пусть* $æ = \mathrm{Ind}_\Gamma G$, *так что функция* $\theta(t) = \arg G(t) - æ\arg t \in H(\mathbb{T})$, *и пусть*

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2æ}, & |z| > 1, \end{cases} \quad \Theta(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\pi - 2\theta(t)}{t - z}\, dt.$$

Тогда функция $X(z) = R(z) e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$ *является* $\widetilde{G}$*-канонической и обладает свойством*

$$X_*(z) = X(z) z^{-2æ}.$$

Теорема 3. *В условиях леммы 3 все решения задачи (17) в классе* $H(\overline{\mathbb{D}})$ *описываются формулой*

$$\phi(z) = \mathrm{Ig}\,(z) + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2æ}, \tag{19}$$

где

$$\mathrm{Ig}\,(z) \equiv \frac{X(z)}{\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z},$$

а функция g *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t)\, dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ-2}, \tag{20}$$

где P^0_k *– класс многочленов степени* k.

Доказательство. Как уже отмечалось, при дополнительном условии $\phi = \phi_*$ задача (17) эквивалентна задаче (18). Последняя представляет собой задачу линейного сопряжения по отношению к $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ и $g = f/G$.

Очевидно, что при $æ \leqslant 0$ размерность пространства $P^0_{-2æ}$ над полем $\mathbb{R}$ равна $-2æ + 1$, а при $æ \geqslant 0$ размерность пространства $P^0_{2æ-2}$ равна $2æ - 1$. Во всех случаях индекс задачи (17) равен $-2æ + 1$ и, в частности, всегда отличен от нуля.

Рассмотрим функцию

$$A(z) = \Theta(z) - \Theta(0)/2, \quad z \in \mathbb{D},$$

фигурирующую в представлении канонической функции $X(z)$. В явном виде запишем

$$A(z) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\theta(t)\, dt}{t - z} + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t)\, d_1 t, \quad A(0) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t)\, d_1 t.$$

По формуле Сохоцкого–Племеля отсюда имеем

$$A^+(t_0) = \frac{\pi i}{2} - i a(t_0) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\theta(t)\, dt}{t - t_0} + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t)\, d_1 t.$$

Полагая $e^{2i\beta} = t_0/t$, можем записать равенства

$$\frac{dt}{t - t_0} = \frac{i\, d_1 t}{1 - e^{2i\beta}} = \frac{i - \mathrm{ctg}\,\beta}{2}\, d_1 t,$$

так что

$$A^+(t_0) = \frac{\pi i}{2} - i a(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t) \,\mathrm{ctg}\,\beta\, d_1 t.$$

Следовательно, функцию $A(z)$ можем однозначно определить по условиям

$$\mathrm{Im}\, A^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \mathrm{Re}\, A(0) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \theta(t)\, d_1 t. \tag{21}$$

Теорема доказана.

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производная $\omega' \in H(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ из условия $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $æ = \operatorname{Ind}_\Gamma G$, *так что функция* $\theta(t) = \arg G(t) - æ \arg t \in H(\Gamma)$, *и пусть* $X(z) = e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$, *где функция* $\Theta \in H(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im}\Theta^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \operatorname{Re}\Theta(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \theta(t)|\omega'(t)|\,d_1 t.$$

Тогда все решения задачи (17) в классе $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t) - \omega(z)} + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2æ}, \tag{22}$$

где функция g *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)]\omega'(t)\,dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ-2}. \tag{23}$$

Доказательство почти очевидно. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Рассмотрим в области $\mathbb{D}$ задачу

$$\operatorname{Re} G_0\phi|_\Gamma = g_0 \tag{24}$$

с коэффициентом $G_0 = G \circ \omega^{-1}$. Пусть $A_0 \in H(\overline{\mathbb{D}}_0)$ есть решение задачи (21) по отношению к соответствующей функции $\alpha_0 = \arg G_0(t) - æ\arg t \in H(\Gamma)$, которая определяется аналогично лемме 3, и пусть $X_0 = e^{A_0}$. Тогда согласно (21) функция $A = A_0 \circ \omega$ и аналогичным образом связаны функции X и X_0. Применим теорему 4 к задаче (24), добавив к соответствующим обозначениям в соотношениях (19), (20) индекс нуль. Тогда при подстановке ω они перейдут в соотношения (22), (23), что и завершает доказательство теоремы.

5. Решение задачи *R*. Из (10) (или из (11)) видно, что аналитические функции ϕ_1, ϕ_2 определяются по u однозначно и восстанавливаются по формулам (12).

В рассматриваемом случае $(p > 2)$ пространство $W^{1,p}(D)$ вложено в гёльдерово пространство $H(\overline{D})$ (причём $C^{\mu_0}(\overline{D}) \subseteq H(\overline{D})$ с показателем $\mu_0 = 1 - 2/p$).

Следовательно, при $\mu < \mu_0$ соответствие между решением u по формуле (10) уравнения (1) из класса (13) и парой аналитических в D функций $\phi_1, \phi_2 \in H(\overline{D})$ будет взаимно-однозначным.

Положив

$$\widetilde{G}_1 = G_1 e^{-h_0 - h}|_\Gamma, \quad \widetilde{G}_2 = G_2 e^{h_0}|_\Gamma,$$

условия (14) задачи R с ограниченными операторами $R_j : H(\overline{D}) \to H(\Gamma)$, действующими по формулам

$$R_0\varphi = \operatorname{Re} G_1[T_0\varphi]|_\Gamma, \quad R_1\varphi = \operatorname{Re} G_1[T_1\varphi]|_\Gamma, \quad R_2\varphi = \operatorname{Re} G_2\varphi|_\Gamma,$$

примут вид

$$\operatorname{Re}\widetilde{G}_2\phi_2|_\Gamma = g_2 - R_2 f \equiv \tilde{g}_2, \quad \operatorname{Re}\widetilde{G}_1\phi_1|_\Gamma - R_0\phi_2 = g_1 - R_1 f \equiv \tilde{g}_1,$$

а условия (15) и (16) задачи R запишутся как

$$(\phi_1^+ - G_j\phi_1^-)|_{\gamma_j} = g_j^*, \quad \phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots n,$$

где $g_j^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_jF^-)$, $F = T_0\phi_2 + T_1 f$.

В результате задача R будет сведена к эквивалентной задаче

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{G}_2\phi_2|_\Gamma = g_2 - R_2 f \equiv \tilde{g}_2, \quad \mathrm{Re}\,\widetilde{G}_1\phi_1|_\Gamma - R_0\phi_2 = g_1 - R_1 f \equiv \tilde{g}_1, \quad (\phi_1^+ - G_j\phi_1^-)|_{\gamma_j} = g_j^*,$$

$$\phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n.$$

Таким образом, задача R приводится к последовательному решению двух задач (см. ниже), в результате решения которых определим соответственно значения искомых функций $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$.

Решение задачи R рассмотрим в двух случаях: когда область $D \equiv \mathbb{D}$ – единичный круг и когда область D – произвольная конечная область, ограниченная гладким замкнутым контуром Γ.

Сперва рассмотрим задачу R в случае единичного круга, т.е. относительно области $\mathbb{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$. Тогда окружности $\gamma_k = \{z : |z - z_k| = r_k < 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, являются носителями граничных данных в силу условий (16).

Согласно второму условию (16) и первой формуле обращения для функции ϕ_2 в (12) приходим к эквивалентной задаче

$$\phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{25}$$

где через $\phi_2^+(t)$ и $\phi_2^-(t)$ обозначены предельные значения функций $\phi_2^+(z)$ и $\phi_2^-(z)$ соответственно из внутренних частей областей $\mathbb{D}_k$, $k = \overline{1, n}$, в их внешние части и наоборот. Отметим, что мы воспользовались свойствами функций $f_0 = e^{-\omega_* + h_0 + h} f \in L^p$, $p > 2$, $(Tf_0)^\pm(t) \in H(\overline{\mathbb{D}})$ и $(h_0 + h)^+ = (h_0 + h)^-$, $(Tf_0)^+(t) = (Tf_0)^-(t)$, $t \in \gamma_j$, $j = \overline{1, n}$.

Следовательно, условия (25) определяют единую аналитическую функцию ϕ_2 во всей области D, включая все окружности γ_j, $j = \overline{1, n}$. Этот факт позволяет нам изучить второе условие в (14) и прийти к краевой задаче Гильберта со следующими данными:

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{G}_2\phi_2|_\mathbb{T} = \widetilde{g}_2, \tag{26}$$

коэффициент $\widetilde{G}_2 = G_2 e^{h_0 + h}|_\mathbb{T}$, индекс

$$æ_2 = \frac{1}{2\pi}\arg \widetilde{G}_2(t)|_\mathbb{T} = \frac{1}{2\pi}\arg G_2(t)|_\mathbb{T}$$

и правая часть

$$\widetilde{g}_2 = g_2 - \mathrm{Re}\,[G_2 e^{h_0 + h} Tf_0|_\mathbb{T}],$$

и сформулировать её решение на основе теорем 2 и 3.

Теорема 5. *Пусть* $æ_2 = \mathrm{Ind}_\Gamma G_2$, *так что функция* $\theta_2(t) = \arg G_2(t) - æ_2 \arg t \in H(\mathbb{T})$, *и пусть* $X_2(z) = e^{\Theta_2(z) - \Theta_2(0)/2}$, *где функция* $\Theta_2 \in H(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле*

$$\mathrm{Im}\,\Theta_2^+ = \frac{\pi}{2} - \theta_2, \quad \mathrm{Re}\,\Theta_2(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\mathbb{T} \theta_2(t)\, d_1 t.$$

В условиях леммы 3 и теорем 2, 3 все решения задачи (26) в классе $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi_2(z) = \mathrm{I}\widetilde{\mathrm{g}}_2\,(z) + X_2(z) p(z), \quad p \in P^0_{-2æ_2},$$

где

$$\mathrm{I}\widetilde{\mathrm{g}}_2\,(z) \equiv \frac{X_2(z)}{\pi i}\int\limits_\mathbb{T} \frac{\widetilde{g}_2(t)}{\widetilde{G}_2(t) X_2^+(t)}\frac{dt}{t - z},$$

а функция $\widetilde{g}_2(z)$ *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_\mathbb{T} \frac{\widetilde{g}_2(t)}{\widetilde{G}_2(t) X_2^+(t)} q(t)\, dt = 0, \quad q \in P^0_{2æ_2 - 2},$$

где P_k^0 *– класс многочленов степени* k.

Теперь, используя первое условие в (16), интегральное представление (10), формулу обращения для функции ϕ_1 в (12) и условие (15), получаем для ϕ_1 краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0\phi_1|_\Gamma = g_0, \quad (\phi_1^+ - G_j\phi_1^-)|_l = g_j^*, \tag{27}$$

где $G_0 = G_1(e^{h_0})|_\Gamma$, $g_0 = g_1 - \operatorname{Re}[G_1F|_\Gamma]$, $g_j^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_jF^-)$, $F = T_0\phi_2 + T_1 f$.

Теорема 6. *При выполнении условий теоремы 1 фредгольмова задача (27) рассматривается в классе (13) и её индекс равен* $1 - 2æ_1$, *где*

$$æ_1 = \frac{1}{2\pi}\arg G_1(t)|_\Gamma.$$

Более точно, все решения задачи (27) в классе $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\phi_1(z) = \frac{X_1(z)}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g_1^*(t)}{G_1(t)X_1^+(t)}\frac{dt}{t-z} + X_1(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2æ_1},$$

где $X_1(z) = e^{\Theta_1(z)-\Theta_1(0)/2}$ *– каноническая функция, функция* $\Theta_1 \in H(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im}\Theta_1^+ = \frac{\pi}{2} - \theta_2, \quad \operatorname{Re}\Theta_1(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\theta_1(t)\,d_1t,$$

в которой $\theta_1(t) = \arg G_1(t) - æ_1\arg t \in H(\mathbb{T})$ *и функция* g_1^* *удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g_1^*(t)}{G_1(t)X^+(t)}p(t)\,dt = 0, \quad p \in P^0_{2æ_1-2},$$

причём

$$g_1^* = g_j - \operatorname{Re}[\alpha e^{\Omega}(Tf_0)|_\mathbb{T}] - \operatorname{Re}[GX_1\psi]|_\mathbb{T}, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)(t-z)}\,dt,$$

$$g_1^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_jF^-), \quad F = T_0\phi_2 + T_1 f.$$

Доказательство. По теореме 2 общее решение u уравнения (1) в классе (13) представимо в виде (10) (или в краткой форме в виде (11)), где функция ϕ принадлежит $H(\overline{D_j^\pm})$. Кроме того, в силу леммы 1 функция $\Omega \in H(\Gamma)$. Поэтому подставим данное представление в условия (14), (15) и используем формулу обращения для искомой функции ϕ_1 из (12). Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\arg G_0|_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\arg G_1|_\Gamma = æ_1. \tag{28}$$

Согласно хорошо известным свойствам интеграла типа Коши [22], функция

$$X_j(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}\frac{\ln G_j(t)(t)\,dt}{t-z}\right), \quad z \in D_j^+ \bigcup D_j^-, \tag{29}$$

принадлежит классу $H(\overline{D_j^\pm})$, $j = 1, 2$, причём её граничное значение $\ln X_j^\pm \in H(\gamma_j)$ на окружности γ_j удовлетворяет краевому условию $X_j^+ = G_jX_j^-$. Поэтому второе краевое условие в (27) можно записать в виде

$$\frac{\phi_1^+}{X_j^+} - \frac{\phi_1^-}{X_j^-} = \frac{g_j^*}{X_j^+}.$$

Функция
$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}\frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)(t-z)}\,dt$$
принадлежит классу $H(\overline{D_j^\pm})$ и удовлетворяет краевому условию
$$\psi^+(t)-\psi^-(t)=\frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)}.$$
Следовательно, разность
$$\phi_0(z)=\frac{\phi_1(z)}{X_j(z)}-\psi(z) \tag{30}$$
аналитична в области D и принадлежит классу $H(\overline{D})$. Подстановка формул (29) и (30) в (27) приводит к эквивалентной задаче Римана–Гильберта:
$$\operatorname{Re}(\alpha_0\phi_0)|_{\mathbb{T}}=g_0,$$
где $\alpha_0=G_1X_je^{-h_0-h}|_{\mathbb{T}}$ и $g_0=g_1-\operatorname{Re}[G_1e^{-h_0-h}X_j\psi]|_{\mathbb{T}}$.

Равенство (28) сохраняется и для α_0, G_j.

Резюмируя результаты исследований, сформулированные для единичного круга в теоремах 5 и 6, используя теорему Келлога, приходим к результату, представляющему решение задачи R для области D_0. При этом сохраняем обозначения формул как в теоремах 1–6.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и* $æ_k=\operatorname{Ind}_\Gamma G_k$, $k=1,2$, *так что функция* $\theta_k(t)=\arg G_k(t)-æ_k\arg t\in H(\Gamma)$, *и пусть* $X_k(z)=R_k(z)e^{\Theta_k(z)-\Theta_k(0)/2}$, *где функция* $\Theta_k\in H(\overline{D})$ *аналитична в области* D *и её мнимая часть определяется как решение задачи Дирихле*
$$\operatorname{Im}\Theta_k^+=\frac{\pi}{2}-\theta_k,\quad \operatorname{Re}\Theta_k(z_0)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\theta_k(t)|\omega'(t)|\,d_1t,\quad k=1,2.$$
Тогда все решения задачи R *в классе* $H(\overline{D})$ *описываются формулой*
$$u=e^{g_0}\phi_2+T_0\phi_1+T_1f,$$
в которой аналитические функции $\phi_k(z)$, $k=1,2$, *определяются формулами*
$$\phi_k(z)=\frac{X_k(z)}{\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\tilde g_k(t)}{\tilde G_k(t)X_k^+(t)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)-\omega(z)}+X_k(z)p_k[\omega(z)],\quad p_k\in P^0_{-2æ_k},\quad k=1,2,$$
где функция $\tilde g_k$ *удовлетворяет условиям ортогональности*
$$\int\limits_\Gamma\frac{\tilde g_k(t)}{\tilde G_k(t)X_k^+(t)}q[\omega(t)]\omega'(t)\,dt=0,\quad q\in P^0_{2æ_k-2},\quad k=1,2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск, 1997.
3. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., 1991.
4. *Раджабов Н.Р.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе, 1992.

5. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
6. *Коровина М.В.* Дифференциальные уравнения с коническим вырождением в пространствах с асимптотиками // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 9. С. 1249–1258.
7. *Ломов И.С.* Метод регуляризации сингулярных возмущений и исследование нерегулярно вырождающихся эллиптических задач. Некоторые проблемы теории возмущений и метод регуляризации // Сб. науч. тр., посвящ. 100-летию со дня рождения Сергея Александровича Ломова. М., 2023. С. 105–122.
8. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., 1966.
9. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differ. Equat. 2004. V. 196. P. 67–90.
10. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.
11. *Фролов П.С.* О компонентах связности вещественных эллиптических систем на плоскости // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. № 6. С. 1350–1353.
12. *Bochev P.B.* Analysis of least-squares finite element methods Muhammad Tahir, A.R. Davies for the Navier–Stokes equations // Siam J. Numer. Anal. 1997. V. 34. № 5. P. 1817–1844.
13. *Tahir M., Davies A.R.* Stokes–Bitsadze problem – I // Punjab University J. of Math. 2005. V. 32. P. 77–90.
14. *Солдатов А.П.* Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Изв. РАН. 2006. Т. 70. № 6. С. 161–192.
15. *Сакс Р.С.* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1975.
16. *Товмасян Н.Е.* Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 60–71.
17. *Tovmasyan N.E.* Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. Singapore, 1994.
18. *Бабаян А.О.* Об одной краевой задаче для уравнения Бицадзе в единичном круге // Изв. НАН Армении. Математика. 2007. Т. 42. № 4. С. 3–10.
19. *Солдатов А.П., Расулов А.Б.* Уравнение Бицадзе с сильными особенностями в младших коэффициентах // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 238–248.
20. *Rasulov A.B., Fedorov Yu.S., Sergeeva A.M.* Integral representations of solutions for the Bitsadze equation with the set of supersingular points in the lower coefficients // Proc. Intern. Conf. on Appl. and Eng. Math. (ICAEM). August 27–29, 2019. Taxila, Pakistan. Danvers, 2019. P. 13–17.
21. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. М., 1959.
22. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
23. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 11.05.2023 г.
После доработки 15.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1397–1411

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 2023 г. В. Г. Романов

Для системы нелинейных уравнений электродинамики рассматривается задача об определении коэффициента проводимости среды, стоящего при нелинейности. Предполагается, что коэффициенты электрической и магнитной проницаемостей постоянны, а проводимость зависит лишь от одной пространственной переменной x, причём эта проводимость равна нулю на полуоси $x < 0$. Для моды, в которой участвуют только две компоненты электромагнитного поля, рассматривается процесс распространения волн, вызванный падением плоской волны с постоянной амплитудой из области $x < 0$ на неоднородность, локализованную на полупрямой $x \geqslant 0$. Изучаются условия разрешимости прямой задачи при заданном коэффициенте проводимости и свойства её решения. Для решения обратной задачи задаётся след электрической компоненты решения прямой задачи на конечном отрезке оси $x = 0$. Устанавливается теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи и находится глобальная оценка условной устойчивости её решений.

DOI: 10.31857/S0374064123100072, EDN: ONVPZC

Введение. Рассмотрим систему уравнений электродинамики с нелинейным поглощением

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\mathbf{E}_t + \sigma(\mathbf{x})|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\mathbf{H}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4, \tag{1}$$

в которой ε и μ – вещественные положительные числа, характеризующие электрическую и магнитную проницаемости, $\sigma(\mathbf{x}) \geqslant 0$ – проводимость среды, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – векторы напряжённости электрического и магнитного полей. В частном случае, когда функция $\sigma(\mathbf{x})$ зависит лишь от одной пространственной переменной x, существуют решения системы уравнений (1) вида $\mathbf{E} = (0, E_2(x,t), 0)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H_3(x,t))$, при этом компоненты $E_2(x,t)$ и $H_3(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\varepsilon(E_2)_t + \sigma(x)(E_2)^3 + (H_3)_x = 0, \quad \mu(H_3)_t + (E_2)_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

В дальнейшем система уравнений (2) будет рассматриваться в области $\Omega(T) = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \leqslant T\}$, $T > 0$.

Обозначим через $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ скорость распространения электромагнитных волн и через $\theta_0(t)$ – функцию Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \geqslant 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$.

Предположим, что $\sigma(x) \equiv 0$ для $x < 0$ и $\sigma \in C[0, cT/2]$. Для уравнений (2) при известной функции $\sigma(x)$ поставим задачу Коши с данными при $t \leqslant 0$:

$$E_2|_{t\leqslant 0} = \frac{a}{2\sqrt{\varepsilon}}\theta_0(t - x/c), \quad H_3|_{t\leqslant 0} = \frac{a}{2\sqrt{\mu}}\theta_0(t - x/c), \tag{3}$$

где $a > 0$ – некоторое фиксированное число.

Задачу (2), (3) назовём *прямой задачей.* Поставим по отношению к ней *обратную задачу* об определении коэффициента $\sigma(x)$, а именно: требуется найти $\sigma(x)$ по следу компоненты E_2 решения прямой задачи на отрезке $[0, T]$ оси $x = 0$:

$$E_2|_{x=0} = f(t), \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Прямые и обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений и систем активно изучаются в последнее десятилетие. Прямые задачи обычно посвящены вопросам существования или несуществования решений на бесконечном интервале по времени (см., например, статьи [1–3] и литературу в них). Обратные задачи заключаются в определении переменных коэффициентов, входящих в уравнения. В частности, в работах [4–9] для полулинейных уравнений на лоренцевом многообразии рассмотрены вопросы реконструкции этого многообразия по данным о решении прямых задач (например, по заданному отображению Дирихле–Неймана). Обратные задачи об определении коэффициентов в различных полулинейных уравнениях изучены в работах [10–14]. В статьях [15–18] ряд обратных задач исследован для полулинейного волнового уравнения. Их анализ основан на асимптотических разложениях решения прямой задачи по особенностям вблизи характеристических поверхностей. Это позволило свести рассматриваемые задачи к задачам интегральной геометрии (или томографии). В работе [19] подобный метод использован для исследования трёхмерной обратной задачи для нелинейной системы уравнений электродинамики.

Рассматриваемая в настоящей статье постановка одномерной (по числу пространственных переменных) обратной задачи для нелинейной системы (1) является новой. В п. 1 анализируется свойства решения прямой задачи (2), (3) для заданного множества функций $\sigma(x)$. Результаты представлены теоремой об однозначной разрешимости прямой задачи. В п. 2 установлена теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи. В п. 3 дана глобальная оценка условной устойчивости решения обратной задачи.

1. Исследование прямой задачи. Преобразуем задачу (2), (3) к более удобному для исследований виду. С этой целью введём римановы инварианты $u(x,t)$ и $v(x,t)$, определив их следующим образом:

$$u=\sqrt{\varepsilon}E_2+\sqrt{\mu}H_3,\quad v=\sqrt{\varepsilon}E_2-\sqrt{\mu}H_3.$$

Тогда уравнения (2) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)u+\hat\sigma(x)(u+v)^3=0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)v+\hat\sigma(x)(u+v)^3=0,\quad (x,t)\in\Omega(T), \tag{5}$$

где $\hat\sigma(x)=\sigma(x)/(8\varepsilon^2)$. Условия (3) для функций $u(x,t)$, $v(x,t)$ принимают вид

$$u|_{t\leqslant 0}=a\theta_0(t-x/c),\quad v|_{t\leqslant 0}=0. \tag{6}$$

В обратной задаче условие (4) должно быть заменено на следующее:

$$(u+v)|_{x=0}=2\sqrt{\varepsilon}f(t),\quad t\in[0,T]. \tag{7}$$

Введём в рассмотрение области

$$D_T^+=\{(x,t):x\geqslant 0,\ \ x/c<t\leqslant T-x/c\},\quad (D_T')^+=\{(x,t):x\geqslant 0,\ \ 0\leqslant t\leqslant x/c\leqslant T/2\},$$

$$D_T^-=\{(x,t):x<0,\ \ -x/c<t\leqslant T+x/c\},\quad (D_T')^-=\{(x,t):x<0,\ \ 0\leqslant t\leqslant -x/c\leqslant T/2\}.$$

Так как $\hat\sigma(x)=0$ для $x<0$, то в области $D_T^-\bigcup(D_T')^-$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению $u_t+cu_x=0$ и начальному условию $u|_{t=0}=a$, поэтому $u(x,t)=a$ для $(x,t)\in D_T^-\bigcup(D_T')^-$. Кроме того, из уравнения $v_t-cv_x=0$ и начального условия $v|_{t=0}=0$ следует, что $v(x,t)=0$ для $(x,t)\in(D_T')^-$. Проинтегрировав уравнение $v_t-cv_x=0$, находим, что

$$v(x,t)=v(0,t+x/c),\quad (x,t)\in D_T^-.$$

Таким образом, функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ полностью определяются в области $D_T^-\bigcup(D_T')^-$ граничными значениями функции $v|_{x=0}$. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать прямую задачу только в области $D_T^+\bigcup(D_T')^+$. Из изложенного выше следует граничное условие

$$u(0,t)=a,\quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

В области $(D'_T)^+$ система уравнений (5) однородна и удовлетворяет нулевым начальным условиям $u|_{t=0} = 0$, $v|_{t=0} = 0$, поэтому

$$u(x,t) = 0, \quad 0 < t < x/c < T/2; \quad v(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t < x/c \leqslant T/2.$$

В частности, отсюда и из второго уравнения (5) следует условие

$$v(x, x/c) = 0, \quad x \in [0, cT/2]. \tag{9}$$

Задача (5) с граничными условиями (8) и (9) корректна в области D_T^+. Заменим её системой интегральных уравнений. Интегрируя второе уравнение (5) на плоскости переменных ξ, τ вдоль характеристики $c\tau + \xi = ct + x$ и используя условие (9), получаем

$$v(x,t) = -\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} \hat\sigma(\xi)(u(\xi,\tau) + v(\xi,\tau))^3|_{\xi = x + c(t-\tau)}\, d\tau, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{10}$$

Интегрируя первое уравнение (5) вдоль характеристики $c\tau - \xi = ct - x$ от точки (x,t) до точки $(0, t - x/c)$ и используя условие (8), находим второе интегральное уравнение

$$u(x,t) = a - \int\limits_{t-x/c}^{t} \hat\sigma(\xi)(u(\xi,\tau) + v(\xi,\tau))^3|_{\xi = x - c(t-\tau)}\, d\tau, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{11}$$

При исследовании системы интегральных уравнений (10), (11) удобно использовать новую функцию

$$w(x,t) = u(x,t) + v(x,t).$$

Интегральное уравнение для этой функции образуется в результате сложения уравнений (10) и (11) и имеет вид

$$w(x,t) = a - \int\limits_{t-x/c}^{t} \hat\sigma(\xi) w^3(\xi,\tau)|_{\xi = x - c(t-\tau)}\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} \hat\sigma(\xi) w^3(\xi,\tau)|_{\xi = x + c(t-\tau)}\, d\tau, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{12}$$

Определение 1. Будем говорить, что $\hat\sigma \in \mathcal{Q}(\sigma_0, \sigma_1, T)$, если

$$\sigma \in C([0, cT/2]), \quad 0 < \sigma_0 \leqslant \hat\sigma(x) \leqslant \sigma_1, \quad x \in [0, cT/2]. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть* $\hat\sigma \in \mathcal{Q}(\sigma_1, T)$ *и выполнено условие*

$$a^2 \sigma_1 T \leqslant 1. \tag{14}$$

Тогда уравнение (12) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $C(D_T^+)$, *и для него выполнены неравенства*

$$a/2 \leqslant w(x,t) \leqslant a, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{15}$$

Замечание 1. Условие (14) при фиксированных T и σ_1 является условием на выбор положительного числа a в прямой задаче.

Доказательство леммы 1. Определим для уравнения (12) последовательные приближения $w_n(x,t)$ по формулам

$$w_0(x,t) = a,$$

$$w_n(x,t)=a-\int\limits_{t-x/c}^{t}\hat\sigma(\xi)w_{n-1}^3(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}\hat\sigma(\xi)w_{n-1}^3(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau,\quad n\in\mathbb N,\quad (x,t)\in D_T^+.$$

Из равенства $w_0(x,t)=a$ и условий (13), (14) следует, что $w_1\in C(D_T^+)$, и для этой функции выполнены соотношения

$$\frac a2\leqslant a-\sigma_1a^3\frac T2\leqslant w_1(x,t)\leqslant a,\quad (x,t)\in D_T^+.$$

Так как $w_1\in C(D_T^+)$, отсюда следует, что $w_2\in C(D_T^+)$. Кроме того, из неравенства $w_1(x,t)\leqslant a$ вытекают соотношения

$$\frac a2\leqslant a-\sigma_1a^3\frac T2\leqslant w_2(x,t)\leqslant a,\quad (x,t)\in D_T^+.$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при любом n справедливо утверждение $w_n\in C(D_T^+)$, и все последовательные приближения ограничены сверху и снизу положительными числами:

$$\frac a2\leqslant w_n(x,t)\leqslant a,\quad n\in\mathbb N\bigcup\{0\},\quad (x,t)\in D_T^+.\tag{16}$$

Покажем равномерную сходимость последовательности $w_n(x,t)$ в области D_T^+. Вычислив разность $w_{k+1}(x,t)-w_k(x,t)=\widetilde w_{k+1}(x,t)$, $k\in\mathbb N\bigcup\{0\}$, получим

$$|\widetilde w_1(x,t)|\leqslant\sigma_1\biggl(\int\limits_{t-x/c}^{t}a^3\,d\tau+\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}a^3\,d\tau\biggr),$$

$$|\widetilde w_{k+1}(x,t)|\leqslant\sigma_1\int\limits_{t-x/c}^{t}[(w_k^2(\xi,\tau)+w_k(\xi,\tau)w_{k-1}(\xi,\tau)+w_{k-1}^2(\xi,\tau))|\widetilde w_k(\xi,\tau)|]_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau+$$

$$+\sigma_1\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}[(w_k^2(\xi,\tau)+w_k(\xi,\tau)w_{k-1}(\xi,\tau)+w_{k-1}^2(\xi,\tau))\times$$

$$\times|\widetilde w_k(\xi,\tau)|]_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau,\quad k\in\mathbb N,\quad (x,t)\in D_T^+.\tag{17}$$

Так как $w_{k-1}(x,t)\leqslant a$, $w_k(x,t)\leqslant a$, то из формулы (17) вытекают неравенства

$$|\widetilde w_1(x,t)|\leqslant\frac12a^3\sigma_1t,$$

$$|\widetilde w_{k+1}(x,t)|\leqslant3a^2\sigma_1\Biggl[\int\limits_{t-x/c}^{t}|\widetilde w_k(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}|\widetilde w_k(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau\Biggr],\quad k\in\mathbb N,\quad (x,t)\in D_T^+.\tag{18}$$

Из неравенств (18) находим последовательно:

$$|\widetilde{w}_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma_1 a^3 t, \quad |\widetilde{w}_2(x,t)| \leqslant \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^2\frac{t^2}{2!},$$

$$|\widetilde{w}_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^n\frac{t^n}{n!} \leqslant \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^n\frac{T^n}{n!}, \quad n=3,4,\ldots, \quad (x,t)\in D_T.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $w_n(x,t)$ в области D_T^+. Предельная функция $w(x,t)$ этой последовательности является функцией класса $C(D_T^+)$. Из неравенств (16) вытекает, что для неё справедливы оценки (15).

Установим единственность непрерывного решения уравнения (12). Допустим, что уравнение имеет два таких решения: $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$. Обозначим $\overline{w}(x,t) = w_1(x,t) - w_2(x,t)$. Тогда

$$|\overline{w}(x,t)| \leqslant \sigma_1 \int\limits_{t-x/c}^{t} [(w_1^2(\xi,\tau) + w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))|\overline{w}(\xi,\tau)|]_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau +$$

$$+\,\sigma_1 \int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} [(w_1^2(\xi,\tau) + w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))|\overline{w}(\xi,\tau)|]_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{19}$$

С учётом того, что $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ не превосходят числа a, из неравенства (19) выводим оценку

$$|\overline{w}(x,t)| \leqslant 3a^2\sigma_1\biggl(\int\limits_{t-x/c}^{t} |\overline{w}(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau + \int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} |\overline{w}(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau\biggr), \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{20}$$

Пусть

$$z(t) = \begin{cases} \max\limits_{x\in[0,ct]} |\overline{w}(x,t)|, & t\in[0,T/2],\\ \max\limits_{x\in[0,T-ct]} |\overline{w}(x,t)|, & t\in[T/2,T]. \end{cases}$$

Тогда из (20) следует неравенство

$$z(t) \leqslant 6a^2\sigma_1 \int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \quad t\in[0,T],$$

из которого вытекает, что $z(t)=0$ для всех $t\in[0,T]$, и, значит, $\overline{w}(x,t)=0$ в области D_T^+. Поэтому $w_1(x,t)=w_2(x,t)$ для $(x,t)\in D_T^+$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение уравнения (12) принадлежит классу $C^1(D_T^+)$. Кроме того, если выполнено условие*

$$48a^2\sigma_1^2 T \leqslant \sigma_0, \tag{21}$$

то имеет место оценка

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leqslant -w_t(x,t) \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{22}$$

Замечание 2. Как и в случае леммы 1, условие (21) является условием на выбор числа a.

Доказательство леммы 2. Чтобы показать, что функция $w(x,t)$ обладает в области D_T^+ непрерывными частными производными по переменным x и t, запишем уравнения (10)–(12), заменив в них переменную интегрирования τ на ξ. После этой замены представим уравнения для функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$ в виде

$$v(x,t) = -\frac{1}{c}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+, \tag{23}$$

$$u(x,t) = a - \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\,d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{24}$$

Уравнение для $w(x,t)$ имеет вид

$$w(x,t) = -\frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{c}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi)w^3(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{25}$$

Продифференцтровав равенство (25) по переменной t, получим

$$w_t(x,t) = -\frac{3}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\,d\xi - \frac{3}{c}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\sigma}((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2), \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{26}$$

Аналогично, продифференцировав уравнение (25) по переменной x, будем иметь

$$w_x(x,t) = \frac{3}{c^2}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\,d\xi - \frac{3}{c^2}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2c}\hat{\sigma}((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2), \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{27}$$

Рассмотрим уравнение (26). Для удобства дальнейших вычислений введём функцию

$$\varphi(x,t) = -w_t(x,t)$$

и вернёмся в (26) к переменной интегрирования τ. Тогда получим уравнение

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x,t) - 3\int\limits_{t-x/c}^{t} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau -$$

$$-3\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in D_T^+, \tag{28}$$

в котором
$$\varphi_0(x,t)=\frac{1}{2}\hat\sigma((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2). \tag{29}$$
Так как функция w^2, входящая в (28), известна, то это уравнение является линейным интегральным уравнением относительно функции $\varphi(x,t)$. Оно принадлежит к уравнениям типа Вольтерры с непрерывным ядром. Его решение можно найти методом последовательных приближений. Действительно, определим $\varphi_n(x,t)$ формулой
$$\varphi_n(x,t)=\varphi_0(x,t)-3\int\limits_{t-x/c}^{t}\hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau-$$
$$-3\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}\hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau,\quad n\in\mathbb{N},\quad (x,t)\in D_T^+. \tag{30}$$
Покажем, что последовательность $\varphi_n(x,t)$ сходится равномерно в области D_T^+. Для функции $\varphi_0(x,t)$ из равенства (29) следует оценка
$$0<\varphi_0(x,t)\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2},\quad (x,t)\in D_T^+.$$
Из формулы (30) находим последовательно, что
$$|\varphi_1(x,t)-\varphi_0(x,t)|\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2}(6\sigma_1a^2)t,\quad |\varphi_2(x,t)-\varphi_1(x,t)|\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2}(6\sigma_1a^2)^2\frac{t^2}{2!},$$
$$|\varphi_n(x,t)-\varphi_{n-1}(x,t)|\leqslant\frac{\sigma_1a^2}{2}(6\sigma_1a^3)^n\frac{t^n}{n!}\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2}(6\sigma_1a^2)^n\frac{T^n}{n!},\quad n=3,4,\ldots,\quad (x,t)\in D_T^+.$$
Из этих оценок следует равномерная сходимость последовательности $\varphi_n(x,t)$ в области D_T^+. Следовательно, предельная функция $\varphi(x,t)$ последовательности $\varphi_n(x,t)$ является непрерывной в D_T^+. Единственность решения уравнения (28) устанавливается стандартным способом.

Так как функция $\varphi(x,t)$ непрерывна в области D_T^+, то из уравнения (27) следует непрерывность в той же области производной $w_x(x,t)$. Таким образом, установлена принадлежность функции $w(x,t)$ классу $C^1(D_T^+)$.

Установим теперь оценку (22) при выполнении условия (21). В этом случае последовательные приближения могут быть оценены более точно. Учитывая, что $a/2\leqslant w(x,t)\leqslant a$ (согласно лемме 1), из формулы (29) получаем соотношения
$$\frac{\sigma_0a^3}{16}\leqslant\varphi_0(x,t)\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2},\quad (x,t)\in D_T^+.$$
Далее из (30), используя условие (21), находим оценки
$$\frac{\sigma_0a^3}{32}\leqslant\frac{\sigma_0a^3}{16}-\frac{3\sigma_1^2a^5T}{2}\leqslant\varphi_1(x,t)\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2},$$
$$\frac{\sigma_0a^3}{32}\leqslant\frac{\sigma_0a^3}{16}-\frac{3\sigma_1^2a^5T}{2}\leqslant\varphi_n(x,t)\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2},\quad n=2,3,\ldots,\quad (x,t)\in D_T^+,$$
из которых следует, что предельная функция $\varphi(x,t)$ удовлетворяет неравенствам
$$\frac{\sigma_0a^3}{32}\leqslant\varphi(x,t)\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2},\quad n=2,3,\ldots,\quad (x,t)\in D_T^+. \tag{31}$$
Из (31) следует (22).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда система уравнений (10), (11) имеет в области* D_T^+ *единственное решение и оно принадлежит классу* $C^1(D_T^+)$.

Доказательство. Из леммы 1 следуют существование, единственность и непрерывность в области D_T^+ функций $u(x,t)$ и $v_2(x,t)$. Чтобы показать, что эти функции обладают в области D_T^+ непрерывными производными по переменным x и t, достаточно продифференцировать уравнения (23), (24) по этим переменным. Выполним это, как пример, для функции $v(x,t)$. Продифференцировав уравнение (23), получим равенства

$$v_t(x,t) = -\frac{3}{c}\int\limits_x^{(x+ct)/2}\hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\hat\sigma((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2),\quad (x,t)\in D_T^+, \tag{32}$$

$$v_x(x,t) = -\frac{3}{c^2}\int\limits_x^{(x+ct)/2}\hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2c}\hat\sigma((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2)+\frac{1}{c}\hat\sigma(x)w^3(x,t),\quad (x,t)\in D_T^+. \tag{33}$$

Из равенств (32), (33) вытекает непрерывность производных функции $v(x,t)$ в области D_T^+. Следовательно, $v\in C^1(D_T^+)$. Аналогично доказывается, что $u\in C^1(D_T^+)$.

2. Теорема о существовании и единственности локального решения обратной задачи. Рассмотрим обратную задачу (2)–(4), полагая, что функция $f(t)$ задана. Принимая введённые далее обозначения, заменим её эквивалентной задачей (5)–(7). Проведённое выше исследование прямой задачи показывает, что функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ должны удовлетворять на границе области D_T^+ условиям (8), (9). Поэтому обратную задачу можно переформулировать в следующем виде: найти функции $\hat\sigma(x)$, $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\Big)u+\hat\sigma(x)w^3=0,\quad \Big(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\Big)v+\hat\sigma(x)w^3=0,\quad (x,t)\in D_T^+, \tag{34}$$

в которых $w=u+v$, и условиям

$$u(0,t)=a,\quad v(0,t)=2\sqrt{\varepsilon}f(t)-a,\quad t\in[0,T],\quad v(x,x/c)=0,\quad x\in cT/2. \tag{35}$$

Если предположить, что условия лемм 1 и 2 выполнены, то из этих лемм следует, что функция $f(t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$f\in C^1[0,T],\quad f(t)>0,\quad f'(t)<0,\quad t\in[0,T],\quad f(0)=a. \tag{36}$$

Последнее из этих равенств следует из уравнения (12) для функции $w(x,t)$. Однако при рассмотрении вопроса о разрешимости обратной задачи мы не в праве предполагать выполнения условий лемм 1 и 2. Но отмеченное выше даёт основание предположить выполнение условий (36). Покажем, что при выполнении этих условий существует локально единственное решение обратной задачи (34), (35).

Теорема 2. *Пусть выполнены уравнения (34) и соотношения (35), а функция* $f(t)$ *удовлетворяет условиям (36). Тогда найдётся* $T^*\in(0,T]$ *такое, что на отрезке* $[0,T^*]$ *существует единственное непрерывное и положительное решение обратной задачи.*

Доказательство. Согласно (35) функция $v(0,t)$ задана на отрезке $[0,T]$. Поэтому запишем для неё новое интегральное соотношение, более удобное здесь, чем (10). Проинтегрировав второе уравнение (34) вдоль характеристики $\xi + c\tau = x + ct$ от точки $(x,t) \in D_T^+$ до точки $(0, t + x/c)$, получим уравнение

$$v(x,t) = 2\sqrt{\varepsilon} f(t + x/c) - a - \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, t + (x-\xi)/c)\, d\xi, \quad (x,t) \in D_T^+.$$

Складывая его с уравнением (24), находим уравнение для функции $w(x,t)$:

$$w(x,t) = w_0(x,t) - \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, t + (x-\xi)/c)\, d\xi -$$

$$- \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, t - (x-\xi)/c)\, d\xi, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{37}$$

в котором

$$w_0(x,t) = 2\sqrt{\varepsilon} f(t + x/c).$$

Продифференцировав это уравнение по переменной t и сохранив ранее введённое обозначение $\varphi(x,t) = -w_t(x,t)$, получим уравнение

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x,t) - \frac{3}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, t + (x-\xi)/c)\varphi(\xi, t + (x-\xi)/c)\, d\xi -$$

$$- \frac{3}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, t - (x-\xi)/c)\varphi(\xi, t - (x-\xi)/c)\, d\xi, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{38}$$

где

$$\varphi_0(x,t) = -2\sqrt{\varepsilon} f'(t + x/c).$$

Положим $x = 0$ в (32) и используем вторую формулу из (35). Тогда придём к уравнению

$$2\sqrt{\varepsilon} f'(t) = \frac{3}{c}\int\limits_0^{ct/2} \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)|_{\tau = t - \xi/c}\, d\xi - \frac{1}{2}\hat{\sigma}(ct/2) w^3(ct/2, t/2), \quad t \in [0,T],$$

которое преобразуем к виду

$$\hat{\sigma}(x) = \hat{\sigma}_0(x) + \hat{\sigma}_0(x)\left(\frac{w_0^3(x, x/c)}{w^3(x, x/c)} - 1\right) +$$

$$+ \frac{6}{cw^3(x, x/c)}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)|_{\tau = (2x-\xi)/c}\, d\xi, \quad x \in [0, cT/2], \tag{39}$$

здесь

$$\hat{\sigma}_0(x) = -\frac{4\sqrt{\varepsilon} f'(2x/c)}{w_0^3(x, x/c)}.$$

Соотношения (37)–(39) образуют в области D_T^+ замкнутую систему уравнений относительно функций $w(x,t)$, $\varphi(x,t)$ и $\hat{\sigma}(x)$. Из условий теоремы 2 следует, что функции $w_0(x,t)$, $\varphi_0(x,t)$

и $\hat\sigma_0(x)$ непрерывны и положительны в D_T^+. Поэтому найдутся положительные числа α и β такие, что

$$\alpha \leqslant w_0(x) \leqslant \beta, \quad \alpha \leqslant \varphi_0(x) \leqslant \beta, \quad (x,t) \in D_T^+, \quad \alpha \leqslant \hat\sigma_0(x) \leqslant \beta, \quad x \in [0, cT/2]. \tag{40}$$

Введём вектор-функции

$$\psi(x,t) = (w(x,t), \varphi(x,t), \hat\sigma(x)) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3),$$

$$\psi^0(x,t) = (w_0(x,t), \varphi_0(x,t), \hat\sigma_0(x)) = (\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0).$$

Пусть $\mathcal{M}(T)$ – множество функций $\psi(x,t)$, непрерывных в D_T^+ и таких, что

$$\|\psi - \psi^0\| = \max_{k=1,2,3} \max_{(x,t)\in D_T^+} |\psi_k(x,t) - \psi_k^0(x,t)| \leqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{41}$$

Запишем систему уравнений (37)–(39) в операторном виде

$$\psi = \mathcal{A}(\psi), \tag{42}$$

где $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$ – нелинейный векторный оператор, а его компоненты определены правыми частями уравнений (37)–(39) соответственно. Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T^*)$ при подходящем выборе T^*.

Докажем сначала, что для некоторого $T_1 \in (0, T]$ оператор $\mathcal{A}$ переводит множество $\mathcal{M}(T_1)$ в себя. Пусть $\psi \in \mathcal{M}(T)$. Тогда из неравенств (40), (41) следуют априорные оценки для компонент функции $\psi(x,t)$:

$$\frac{\alpha}{2} \leqslant \psi_k(x,t) \leqslant \beta + \frac{\alpha}{2}, \quad k = 1,2,3, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{43}$$

Из уравнения (37), оценивая первую компоненту вектора $\mathcal{A}(\psi) - \psi^0$ с помощью неравенств (43), находим, что

$$|\mathcal{A}_1(\psi) - w_0(x,t)| \leqslant C_1 T, \quad C_1 = \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{44}$$

Действуя аналогично, из уравнения (38) получаем оценку

$$|\mathcal{A}_2(\psi) - \varphi_0(x,t)| \leqslant C_2 T, \quad C_2 = 3\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{45}$$

Чтобы оценить разность $|\mathcal{A}_3(\psi) - \hat\sigma_0(x)|$, используем неравенство (44) для оценки второго слагаемого правой части уравнения (39). При этом

$$\left|\frac{w_0^3(x,x/c)}{w^3(x,x/c)} - 1\right| = \frac{|w(x,x/c) - w_0(x,x/c)|}{w^3(x,x/c)}(w^2(x,x/c) + w(x,x/c)w_0(x,x/c) + w_0^2(x,x/c)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{24}{\alpha^3}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^6 T, \quad x \in [0, cT/2].$$

Из уравнения (39) имеем оценку

$$|\mathcal{A}_3(\psi) - \hat\sigma_0(x)| \leqslant C_3 T, \quad C_3 = \frac{24}{\alpha^3}\left[\beta\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^6 + \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4\right], \quad x \in [0, cT/2]. \tag{46}$$

Выберем T_1 из условия

$$T_1 = \min\left(T, \frac{\alpha}{2C_1}, \frac{\alpha}{2C_2}, \frac{\alpha}{2C_3}\right).$$

Тогда из оценок (44)–(46) следует, что выполнено неравенство (41), если в нём положить $T = T_1$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}(\psi)$ отображает множество $\mathcal{M}(T_1)$ на себя.

Покажем теперь, что оператор $\mathcal{A}(\psi)$ сжимает расстояние между любыми элементами множества $\mathcal{M}(T^*)$ при некотором $T^* \in (0, T_1]$. Пусть $\psi^k = (w_k, \varphi_k, \hat{\sigma}_k)$, $k = 1, 2$, – два произвольных элемента множества $\mathcal{M}(T)$. Запишем равенство (37) для $k = 1$ и $k = 2$ и вычтем одно из другого. Тогда из полученного равенства следует оценка

$$|\mathcal{A}_1(\psi^1) - \mathcal{A}_1(\psi^2)| = |w_1(x,t) - w_2(x,t)| \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_0^x |\hat{\sigma}_1(\xi) - \hat{\sigma}_2(\xi)| w_1^3(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}_2(\xi)(w_1^2(\xi,\tau) + w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))|w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c}\int\limits_0^x |\hat{\sigma}_1(\xi) - \hat{\sigma}_2(\xi)| w_1^3(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}_2(\xi)(w_1^2(\xi,\tau) + w^1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))|w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_4 T\|\psi^1 - \psi^2\|, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{47}$$

в которой $C_4 = 4(\beta + \alpha/2)^3$. Аналогично из равенства (38) имеем оценку

$$|\mathcal{A}_2(\psi^1) - \mathcal{A}_2(\psi^2)| = |\varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{c}\int\limits_0^x [|\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)| w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) + \sigma_2(\xi)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau))|w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) +$$

$$+ \sigma_2(\xi) w_2^2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) - \varphi_2(\xi,\tau)|]_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi +$$

$$+ \frac{3}{c}\int\limits_0^x [|\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)| w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) + \sigma_2(\xi)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau))|w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) +$$

$$+\sigma_2(\xi) w_2^2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) - \varphi_2(\xi,\tau)|]_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi \leqslant C_5\|\psi^1 - \psi^2\|T, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{48}$$

в которой $C_5 = 12(\beta + \alpha/2)^3$.

Из уравнения (39) находим, что

$$|\mathcal{A}_3(\psi^1) - \mathcal{A}_3(\psi^2)| = |\hat{\sigma}_1(x) - \hat{\sigma}_2(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|w_1(x,x/c) - w_2(x,x/c)|}{w_1^3(x,x/c)w_2^3(x,x/c)}(w_1^2(x,x/c) + w_1(x,x/c)w_2(x,x/c) + w_2^2(x,x/c)) \times$$

$$\times \left(\hat{\sigma}_0(x) w_0^3(x,x/c) + \frac{6}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}_1(\xi) w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau)|_{\tau=(2x-\xi)/c}\, d\xi\right) +$$

$$+ \frac{6}{c w_2^3(x,x/c)}\int\limits_0^x [|\hat{\sigma}_1(\xi) - \hat{\sigma}_2(\xi)| w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) + \hat{\sigma}_2(\xi)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau)) \times$$

$$\times |w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) + \hat{\sigma}_2(\xi) w_2^2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) - \varphi_2(\xi,\tau)|]_{\tau=(2x-\xi)/c}\, d\xi, \quad x \in [0, cT/2].$$

Используем для оценки разности $w_1(x,x/c)-w_2(x,x/c)$ соотношения (44) и неравенства (40), (43) для остальных слагаемых. Тогда вычисления приводят к оценке

$$|\mathcal{A}_3(\psi^1)-\mathcal{A}_3(\psi^2)|\leqslant (C_6T+C_7T^2)\|\psi^1-\psi^2\|,\quad x\in[0,cT/2], \tag{49}$$

где постоянные C_6 и C_7 вычисляются по формулам

$$C_6=3\frac{8^2\beta^4}{\alpha^6}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)^6+24\frac{8}{c\alpha^3}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)^3,\quad C_7=9\frac{8^2}{\alpha^6}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)^{10}.$$

Пусть $\rho\in(0,1)$. Учитывая, что $C_5>C_4$, выберем T^* из условия

$$T^*=\min\left(T_1,\frac{\rho}{C_5},\frac{-C_6+\sqrt{C_6^2+4\rho C_7}}{2C_7}\right).$$

Тогда из оценок (47)–(49) следует, что

$$\|\mathcal{A}(\psi^1)-\mathcal{A}(\psi^2)\|\leqslant\rho\|\psi^1-\psi^2\|,\quad (x,t)\in D^+_{T^*}.$$

Так как $\rho<1$, то это означает, что оператор $\mathcal{A}$ сжимает расстояние между элементами множества $\mathcal{M}(T^*)$. Из теоремы о сжимающих отображениях заключаем, что уравнение (42) имеет решение на множестве $\mathcal{M}(T^*)$, и притом только одно. Отсюда следует утверждение теоремы 2.

3. Глобальная оценка условной устойчивости решений обратной задачи. Из установленного выше факта, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T^*)$, нетрудно вывести оценку устойчивости решения обратной задачи на отрезке $[0,cT^*/2]$. Однако это будет локальная оценка, так как, вообще говоря, $T^*<T$. При априорном условии, что решения обратной задачи принадлежат заданному множеству $\mathcal{Q}(\sigma_0,\sigma_1,T)$, можно получить оценку устойчивости решения обратной задачи при любом конечном T. Эта оценка имеет условный характер, но она является глобальной и поэтому зачастую полезна при конструировании вычислительных алгоритмов. Далее выводится оценка условной устойчивости решений рассматриваемой обратной задачи.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f\in\mathcal{F}(T)$, если $f\in C^1([0,T])$ и для неё выполнены условия (36).

Обозначим

$$\|f\|_{C^1([0,T])}=\max\left(\max_{t\in[0,T]}|f(t)|,\max_{t\in[0,T]}|f'(t)|\right).$$

Теорема 3. *Пусть для $k=1,2$ существуют решения $\hat\sigma_k\in\mathcal{Q}(\sigma_0,\sigma_1,T)$ обратной задачи с данными $f=f_k\in\mathcal{F}(T)$ в (7). Пусть, кроме того, для числа $a>0$ выполнены условия (14) и (21). Тогда найдётся положительная постоянная $C=C(\varepsilon,a,\sigma_0,\sigma_1,T)$ такая, что*

$$|\hat\sigma_1(x)-\hat\sigma_2(x)|\leqslant C\|f_1-f_2\|_{C^1([0,T])},\quad x\in[0,cT/2]. \tag{50}$$

Доказательство. Обозначим через $u_k(x,t)$, $v_k(x,t)$, $k=1,2$, функции, соответствующие решению прямой задачи (5)–(7) при $\hat\sigma=\hat\sigma_k(x)$, и пусть $w_k(x,t)=u_k(x,t)+v_k(x,t)$.

Тогда функции $w_k(x,t)$, $k=1,2$, положительны в D^+_T (как следует из леммы 1) и для них верны оценки

$$0<a/2\leqslant w_k(x,t)\leqslant a,\quad (x,t)\in D^+_T,\quad k=1,2. \tag{51}$$

Кроме того, из леммы 2 следует положительность функций $\varphi_k(x,t)=-(w_k)_t(x,t)$ и справедливость неравенств

$$\frac{\sigma_0a^3}{32}\leqslant\varphi_k(x,t)\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2},\quad (x,t)\in D^+_T,\quad k=1,2. \tag{52}$$

Это означает также, что функции $f_k(t) = w_k(0,t)$ должны удовлетворять условиям

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leqslant -f_k'(t) \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad t \in [0,T], \quad k = 1,2. \tag{53}$$

Введём обозначения

$$w_1(x,t) - w_2(x,t) = \overline{w}(x,t), \quad \varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t) = \overline{\varphi}(x,t), \quad \hat\sigma_1(x) - \hat\sigma_2(x) = \overline{\sigma}(x),$$

$$f_1(t) - f_2(t) = \bar f(t), \quad Z(x) = \max\biggl(\max_{t\in[x/c,T-x/c]} |\overline{w}(x,t)|, \max_{t\in[x,T-x]} |\overline{\varphi}(x,t)|, |\overline{\sigma}(x)|\biggr). \tag{54}$$

Воспользуемся равенствами (37)–(39). Заменим в них функции w, φ, $\hat\sigma$ на w_k, φ_k, $\hat\sigma_k$, $k=1,2$, и w_0, φ_0, $\hat\sigma_0$ – на w_{0k}, φ_{0k}, $\hat\sigma_{0k}$. При этом нужно заменить f на f_k. Вычтем из получившихся равенств при $k=1$ соответствующие равенства при $k=2$ и последовательно оценим $\overline{w}(x,t)$, $\overline{\varphi}(x,t)$ и $\overline{\sigma}(x)$.

Из (37) выводим равенство

$$\overline{w}(x,t) = 2\sqrt{\varepsilon}\bar f(t+x/c) - \frac{1}{c}\int\limits_0^x [\overline{\sigma}(\xi) w_1^3(\xi,\tau) +$$

$$+ \sigma_2(\xi)\overline{w}(\xi,\tau)(w_1^2(\xi,\tau) + w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))]_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi -$$

$$-\frac{1}{c}\int\limits_0^x [\overline{\sigma}(\xi) w_1^3(\xi,\tau) + \sigma_2(\xi)\overline{w}(\xi,\tau)(w_1^2(\xi,\tau) + w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))]_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+,$$

из которого, используя неравенства (51) и априорное условие $\hat\sigma_k \in \mathcal{Q}(\sigma_0,\sigma_1,T)$, находим оценку

$$|\overline{w}(x,t)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}\,\|\bar f\|_{C[0,T]} + C_8\int\limits_0^x Z(\xi)\,d\xi, \quad C_8 = \frac{2a^2}{c}(a+3\sigma_1), \quad (x,t)\in D_T. \tag{55}$$

Аналогично, используя уравнение (38), получаем

$$\overline{\varphi}(x,t) = 2\sqrt{\varepsilon}\,\bar f'(t+x/c) - \frac{3}{c}\int\limits_0^x [\overline{\sigma}(\xi) w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) +$$

$$+ \sigma_2(\xi)\overline{w}(\xi,\tau)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) + \hat\sigma_2(\xi) w_2^2(\xi,\tau)\overline{\varphi}(\xi,\tau)]_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi -$$

$$-\frac{3}{c}\int\limits_0^x [\overline{\sigma}(\xi) w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) + \sigma_2(\xi)\overline{w}(\xi,\tau)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) +$$

$$+ \hat\sigma_2(\xi) w_2^2(\xi,\tau)\overline{\varphi}(\xi,\tau)]_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+.$$

Из этого равенства и неравенств (51), (52) следует оценка

$$|\overline{\varphi}(x,t)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}\|\bar f'\|_{C[0,T]} + C_9\int\limits_9^x Z(\xi)\,d\xi, \quad C_9 = \frac{3a^2\sigma_1}{c}(a^2(a+2\sigma_1)+2), \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{56}$$

Наконец, используя равенство (39), приходим к соотношению

$$\overline{\sigma}(x) = -4\sqrt{\varepsilon}\,\bar f_1'(2x/c) + \frac{\overline{w}(x,x/c)}{w_1^3(x,x/c)w_2^3(x,x/c)}[w_1^2(x,x/c) + w_1(x,x/c)w_2(x,x/c) + w_2^2(x,x/c)]\,\times$$

$$\times\left(4\sqrt{\varepsilon}\,f_2'(2x/c)-\frac{6}{c}\int\limits_0^x\hat\sigma_1(\xi)w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau)|_{\tau=(2x-\xi)/c}\,d\xi\right)+\frac{6}{cw_2^3(x,x/c)}\int\limits_0^x[|\overline{\sigma}(\xi)|w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau)+$$

$$+\hat\sigma_2(\xi)|\overline{w}(\xi,\tau)|(w_1(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau)+\hat\sigma_2(\xi)w_2^2(\xi,\tau)|\overline{\varphi}(\xi,\tau)|]_{\tau=(2x-\xi)/c}\,d\xi,\quad x\in[0,cT/2].$$

При оценке слагаемых правой части этого равенства воспользуемся для $\overline{w}(x,x/c)$ неравенством (55), а для оценки $\varphi_k(x,t)$ и $f_2'(2x/c)$ – неравенствами (52) и (53) соответственно. Тогда будем иметь

$$|\overline{\sigma}(x)|\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\|\bar f'\|_{C[0,T]}+C_{10}\int\limits_0^x Z(\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,cT/2],$$

$$C_{10}=3\frac{8^2a^5\sigma_1C_8}{2\alpha^6}[4\sqrt{\varepsilon}+3T\sigma_1a^2]+\frac{24\sigma_1}{c\alpha^3}[a^4(a+2\sigma_1)+2a^2]. \tag{57}$$

Из оценок (55)–(57) следует итоговое неравенство

$$Z(x)\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\|\bar f\|_{C^1[0,T]}+K\int\limits_0^x Z(\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,cT/2], \tag{58}$$

в котором $K=\max(C_8,C_9,C_{10})$. Применив к интегральному соотношению (58) неравенство Гронуолла–Беллмана (см., например, [20]), получим

$$Z(x)\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\|\bar f\|_{C^1[0,T]}\exp(Kx)\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\|\bar f\|_{C^1[0,T]}\exp(KcT/2),\quad x\in[0,cT/2].$$

Из этой оценки, с учётом обозначений (54), следует неравенство (50).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piskin E.* On the decay and blow up of solutions for a quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms // Boundary Value Problems. 2015. Art. 127.
2. *Messaoudi S.A., Talahmeh A.A.* On wave equation: review and recent results // Arab. J. Math. 2018. V. 7. P. 113–145.
3. *Ogbiyele P.A., Arawomo P.O.* Existence and blow up time estimate for a negative initial energy solution of a nonlinear Cauchy problem // Acta Appl. Math. 2020. V. 170. P. 443–458.
4. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P. 781–857.
5. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.
6. *Lassas M.* Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Intern. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.
7. *Hintz P., Uhlmann G.* Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Int. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987.
8. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Int. Math. Res. Notices. 2022. V. 17. P. 13181–13211.
9. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // arXiv:2103.08110v1 [math.AP]. 15 Mar. 2021.
10. *Barreto A.S.* Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14. № 6. P. 1057–1105.
11. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation // arXiv:2107.08513v1 [math.AP]. 18 Jul. 2021.
12. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equat. 2019. V. 44. № 11. P. 1140–1158.

13. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53.
14. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pure Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.
15. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для нелинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25. № 2. С. 83–100.
16. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25. № 3. С. 154–169.
17. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для волнового уравнения с полиномиальной нелинейностью // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26. № 1. С. 142–149.
18. *Романов В.Г.* Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // Докл. РАН. 2022. Т. 504. № 1. С. 36–41.
19. *Романов В.Г.* Обратная задача для уравнений электродинамики с нелинейной проводимостью // Докл. РАН. 2023. Т. 509. № 1. С. 65–68.
20. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М., 1965.

Институт математики
имени С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск

Поступила в редакцию 14.07.2023 г.
После доработки 14.07.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1412–1424

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.957

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. **А. Б. Хасанов, Х. Н. Нормуродов, У. О. Худаёров**

Для интегрирования нелинейного уравнения Лиувилля в классе периодических бесконечнозонных функций применён метод обратной спектральной задачи. Введена эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением нелинейного уравнения Лиувилля. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе трижды непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда, построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формулы первого следа, удовлетворяет уравнению Лиувилля.

DOI: 10.31857/S0374064123100084, EDN: OOBNJP

Введение. В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Лиувилля (см. [1, с. 14; 2]) вида

$$q_{xt} = a(t)e^q, \quad q = q(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,0) = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(\mathbb{R}), \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π-периодических по x функций:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \quad q(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(t>0)\bigcap C(t\geqslant 0). \tag{3}$$

Здесь $a(t) \in C([0,\infty))$ – заданная непрерывная ограниченная функция. Нетрудно убедиться в том, что условия совместности линейных уравнений

$$y_x = \begin{pmatrix} q_x/2 & -\lambda \\ \lambda & -q_x/2 \end{pmatrix} y, \quad y_t = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & b(t)e^q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

эквивалентны уравнению (1) для функции $q = q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Хорошо известно, что нахождение явной формулы для решения нелинейного эволюционного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (мКдФ), нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ), уравнения синус-Гордона, уравнения Хирота и др. в классе периодический функций существенно зависит от количества нетривиальных лакун в спектре периодического оператора Штурма–Лиувилля и оператора Дирака. С помощью метода обратной спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля и оператора Дирака с периодическим потенциалом, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах [3–8] была установлена полная интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордона, Хироты и др.) в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Кроме того, для конечнозонных решений нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ и др.) была выведена явная формула через тета-функции Римана. Таким образом, в этих работах была доказана разрешимость задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений при любых конечнозонных начальных данных. Более подробно эта теория изложена в монографиях [9, 10], а также в статье [11].

В связи с этим класс периодических функций удобно разбить на два множества:

1) класс периодических конечнозонных функций;

2) класс периодических бесконечнозонных функций.

Известно [12], что если $q(x) = 2a\cos(2x)$, $a \neq 0$, то в спектре оператора Штурма–Лиувилля $Ly \equiv -y'' + q(x)y$, $x \in \mathbb{R}$, открыты все лакуны, иначе говоря, $q(x)$ – периодический бесконечнозонный потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака (см. [13]).

В данной работе предлагается алгоритм построения периодических бесконечнозонных решений $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, задачи (1)–(3) сведением её к обратной спектральной задаче для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} P(x,t) & Q(x,t) \\ Q(x,t) & -P(x,t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad P(x,t) = 0, \quad Q(x,t) = \frac{1}{2}q'_x(x,t).$$

Отметим, что задача Коши в классе периодических и почти-периодических бесконечнозонных функций для нелинейных эволюционных уравнений без источника и с источником, а также с дополнительным членом в различных постановках изучалась в работах [14–24].

1. Эволюция спектральных данных. Обозначим через

$$c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^{\text{т}}, \quad s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^{\text{т}}$$

решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^{\text{т}}$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^{\text{т}}$ соответственно.

Функция

$$\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$$

называется *функцией Ляпунова* для уравнения (4).

Кроме того, для решений $c(x,\lambda,\tau,t)$ и $s(x,\lambda,\tau,t)$ при больших $|\lambda|$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$c(x,\lambda,\tau,t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}[q'_x(x+\tau,t) + q'_x(\tau,t)]\sin(\lambda x) + a(x,\tau,t)\sin(\lambda x) \\ -\frac{1}{2}[q'_x(x+\tau,t) - q'_x(\tau,t)]\cos(\lambda x) - a(x,\tau,t)\cos(\lambda x) \end{pmatrix} + \\ + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to \infty, \tag{5}$$

$$s(x,\lambda,\tau,t) = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda x) \\ \cos(\lambda x) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}[q'_x(x+\tau,t) - q'_x(\tau,t)]\cos(\lambda x) + a(x,\tau,t)\cos(\lambda x) \\ -\frac{1}{2}[q'_x(x+\tau,t) + q'_x(\tau,t)]\sin(\lambda x) + a(x,\tau,t)\sin(\lambda x) \end{pmatrix} + \\ + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to \infty, \tag{6}$$

где

$$a(x,\tau,t) = \frac{1}{4}\int_0^x [q'_s(s+\tau,t)]^2\,ds.$$

Из этих асимптотик при действительных λ получим

$$\Delta(\lambda,\tau,t) = 2\cos(\lambda\pi) + \frac{1}{\lambda}a(\pi,\tau,t)\sin(\lambda\pi) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to \infty,$$

$$\Delta^2(\lambda,\tau,t)-4=-4\sin^2(\lambda\pi)+\frac{4a(\pi,\tau,t)}{\lambda}\cos(\lambda\pi)\sin(\lambda\pi)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad |\lambda|\to\infty.$$

Вектор-функции

$$\psi^{\pm}(x,\lambda,\tau,t)=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,\tau,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,\tau,t))^{\text{т}}=c(x,\lambda,\tau,t)+m^{\pm}(\lambda,\tau,t)s(x,\lambda,\tau,t)$$

называются *решениями Флоке* уравнения (4).

Функции Вейля–Титчмарша определяются следующими формулами:

$$m^{\pm}(\lambda,\tau,t)=\frac{s_2(\pi,\lambda,\tau,t)-c_1(\pi,\lambda,\tau,t)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda,\tau,t)-4}}{2s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}.$$

Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L)=\{\lambda\in\mathbb{R}:|\Delta(\lambda)|\leqslant 2\}=\mathbb{R}\setminus\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, называются *лакунами*, где λ_n – корни уравнения $\Delta(\lambda)\mp 2=0$. Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической $(y(0,\tau,t)=\pm y(\pi,\tau,t))$ задачи для уравнения (4). Нетрудно доказать, что $\lambda_{-1}=\lambda_0=0$, т.е. $\lambda=0$ является двукратным собственным значением периодической задачи для уравнения (4).

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t)=0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, и при этом $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Так как коэффициенты в уравнении (4) имеют вид $P(x,t)\equiv\equiv 0$, $Q(x,t)=q_x'(x,t)/2$, то $\lambda_{-1}=\lambda_0=\xi_0=0$, т.е. $\xi=0$ является собственным значением задачи Дирихле.

Числа $\xi_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau,t)=\operatorname{sign}\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}$, $n\in\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, называются *спектральными параметрами* оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, и границы спектра $\{\lambda_n(\tau,t),n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ называются *спектральными данными* оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Определение 1. Коэффициенты $P(x,t)\equiv 0$, $Q(x,t)=q_x'(x,t)/2$ периодического оператора Дирака $L(\tau,t)$ называются *бесконечнозонными функциями*, если границы лакуны $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n\in\mathbb{Z}$, удовлетворяют условиям

$$\ldots<\lambda_{-3}<\xi_{-1}<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\xi_0<\lambda_0<\lambda_1<\xi_1<\lambda_2<\ldots,$$

где $\lambda_{-1}=\lambda_0=\xi_0=0$.

Определение 2. Коэффициенты $P(x,t)\equiv 0$, $Q(x,t)=q_x'(x,t)/2$ периодического оператора Дирака $L(\tau,t)$ называются *конечнозонными функциями*, если существует такое конечное число N, что для всех $|n|>N$ выполняются равенства $\lambda_{2n-1}=\lambda_{2n}=\xi_n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задача восстановления коэффициента $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ по спектральным данным называется *обратной задачей*. Коэффициент $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\lambda_n(\tau,t)$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Если с помощью начальной функции $q_0(x+\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$, построить оператор Дирака $L(\tau,0)$ вида

$$L(\tau,0)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega_0(x+\tau)y=\lambda y,\quad x\in\mathbb{R},\quad \tau\in\mathbb{R},$$

где

$$\Omega_0(x+\tau)=\begin{pmatrix}0 & q_0'(x+\tau)/2\\ q_0'(x+\tau)/2 & 0\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$

то увидим, что границы спектра $\lambda_n(\tau)$, $n\in\mathbb{Z}$, полученной задачи не зависят от параметра $\tau\in\mathbb{R}$, т.е. $\lambda_n(\tau)=\lambda_n$, $n\in\mathbb{Z}$, а спектральные параметры от параметра τ зависят: $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in\mathbb{Z}$, и являются периодическими функциями:

$$\xi_n^0(\tau+\pi)=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n^0(\tau+\pi)=\sigma_n^0(\tau),\quad \tau\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Решив прямую задачу, найдём спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ оператора $L(\tau, 0)$.

Обратная задача для оператора Дирака вида

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R},$$

с периодическими коэффициентами $p(x) = p(x+\pi)$, $q(x) = q(x+\pi)$ в различных постановках изучена в работах [25–32]. Следует отметить, что обратная задача в терминах спектральных данных для оператора Хилла исследована в статьях [33–35].

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, – решение задачи (1)–(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, оператора $L(\tau,t)$ не зависят от параметров $\tau \in \mathbb{R}$ и t, т.е. $\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, удовлетворяют соответственно первой и второй системе дифференциальных уравнений Дубровина:*

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))\xi_n(\tau,t), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))g_n(\xi(\tau,t)), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{8}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,0) = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,0) = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{9}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, – спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$. Последовательности $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, в уравнении (8) определяются по формулам

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))}\, f_n(\xi), \quad f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{a(t)}{2\xi_n(\tau,t)} \exp\{q(\tau,t)\}, \quad \xi(\tau,t) = (\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots).$$

Доказательство. Пусть π-периодическая по x функция $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, удовлетворяет уравнению (1). Обозначим через $y_n(x,\tau,t) = (y_{n,1}(x,\tau,t), y_{n,2}(x,\tau,t))^{\mathrm{т}}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ортонормированные собственные вектор-функции оператора $L(\tau,t)$, рассматриваемого на отрезке $[0,\pi]$ с граничными условиями Дирихле

$$y_1(0,\tau,t) = 0, \quad y_1(\pi,\tau,t) = 0,$$

соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Дифференцируя по переменной t тождество

$$\xi_n(\tau,t) = (L(\tau,t)y_n, y_n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

и используя симметричность оператора $L(\tau,t)$, получаем

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = (\dot{\Omega}(x+\tau,t)y_n, y_n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{10}$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y,z)=\int\limits_0^\pi [y_1(x)\overline{z_1(x)}+y_2(x)\overline{z_2(x)}]\,dx,\quad y=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}z_1(x)\\ z_2(x)\end{pmatrix},$$

запишем равенство (10) в виде

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=\int\limits_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_{xt}\,dx. \tag{11}$$

Подставив (1) в (11), получим равенство

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=a(t)I_1(\tau,t), \tag{12}$$

где $I_1(\tau,t)=\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}\,dx$.

С помощью тождеств

$$y_{n,1}(x,\tau,t)=\frac{1}{\xi_n(\tau,t)}\left(y'_{n,2}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,2}(x,\tau,t)\right),$$

$$y_{n,2}(x,\tau,t)=\frac{1}{\xi_n(\tau,t)}\left(-y'_{n,1}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,1}(x,\tau,t)\right)$$

нетрудно вычислить интеграл

$$I_1(\tau,t)=\int\limits_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\xi_n(\tau,t)}\int\limits_0^\pi y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}\left(y'_{n,2}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,2}(x,\tau,t)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\xi_n(\tau,t)}\left(\int\limits_0^\pi [y^2_{n,2}(x,\tau,t)e^{q(x+\tau,t)}]'\,dx\right)=\frac{1}{2\xi_n(\tau,t)}e^{q(\tau,t)}[y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)]. \tag{13}$$

Подставив (13) в тождество (12), будем иметь

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=\frac{a(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\{q(\tau,t)\}[y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)]. \tag{14}$$

Так как собственные значения $\xi_n(\tau,t)$ задачи Дирихле для уравнения (4) простые, то справедливо равенство

$$y_n(x,\tau,t)=\frac{1}{c_n(\tau,t)}s(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t),$$

где

$$c_n^2(\tau,t)=\int\limits_0^\pi [s_1^2(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t)+s_2^2(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t)]\,dx=-\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t).$$

Используя это равенство, найдём

$$y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)=-\left(s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)-\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}\right)\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}.$$

Подставим в это соотношение равенство

$$s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)=s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)-\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}=$$

$$=\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(\tau,t))-4}$$

и получим

$$y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)=-\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(\tau,t))-4}\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}. \qquad (15)$$

С учётом разложений

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_{2k-1})(\lambda-\lambda_{2k})}{a_k^2},\quad s_1(\pi,\lambda,t)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},$$

где $a_0=1,$ $a_k=k$ при $k\neq 0,$ запишем равенство (15) в виде

$$y^2_{n,2}(\pi,t)-y^2_{n,2}(0,t)=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi).$$

Подставив это выражение в тождество (14), получим (8). Аналогично можно доказать (7).

Если заменить граничные условия Дирихле на периодические $(y(0,t)=y(\pi,t))$ или на антипериодические $(y(0,t)=-y(\pi,t))$ граничные условия, то вместо уравнения (14) получим $\partial\lambda_n(\tau,t)/\partial t=0,$ т.е. $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau,0),$ $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$

Теперь в уравнении $L(\tau,t)\nu_n=\lambda_n(\tau,t)\nu_n,$ $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$ положим $t=0.$ Так как собственные значения $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau,0),$ $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$ периодической или антипериодической задач для уравнения $L(\tau,0)\nu_n=\lambda_n(\tau)\nu_n,$ $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$ не зависят от параметра $\tau\in\mathbb{R},$ то имеем $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau)=\lambda_n,$ $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$ Теорема доказана.

Лемма 1. *Справедливы следующие формулы следов:*

$$q'_\tau(\tau,t)=2\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)), \qquad (16)$$

$$\left(\frac{1}{2}q_\tau(\tau,t)\right)^2+\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2_{2k-1}+\lambda^2_{2k}}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right). \qquad (17)$$

Доказательство. Применим теорему Миттаг-Лёффлера и получим равенства

$$\frac{s_2(\pi,\lambda,\tau,t)-c_1(\pi,\lambda,\tau,t)}{s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\sigma_k(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau,t))-4}}{(\lambda-\xi_k(\tau,t))}\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_k(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\sigma_k(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau,t))-4}\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_k(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left(1-\frac{\xi_k(\tau,t)}{\lambda}\right)^{-1}=$$

$$
=\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\sigma_k(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau,t))-4}\left(\frac{\partial s_1(\pi,\xi_k(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left\{\sum_{\substack{n=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\xi_k(\tau,t)}{\lambda}\right)^n\right)\right\}=
$$

$$
=\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}2(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t))+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad |\lambda|\to\infty.
$$

С другой стороны, используя асимптотики (5) и (6) для решений $c(x,\lambda,\tau,t)$ и $s(x,\lambda,\tau,t)$ при больших $|\lambda|$, имеем

$$
\frac{s_2(\pi,\lambda,\tau,t)-c_1(\pi,\lambda,\tau,t)}{s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}=\frac{1}{\lambda}q'_\tau(\tau,t)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad |\lambda|\to\infty.
$$

Сравнив эти асимптотики, получим формулу (16).

Если $y(x,\tau,t)=(y_1(x,\tau,t),y_2(x,\tau,t))^{\text{т}}$ является решением периодической или антипериодической задачи для уравнения (4), соответствующей спектральному параметру $\lambda\neq 0$, то $y_1(x,\tau,t)$ и $y_2(x,\tau,t)$ являются решениями следующих граничных задач:

$$
-y_1''+q_1(x+\tau,t)y_1=\lambda^2 y_1,\quad y_1(0,\tau,t)=\pm y_1(\pi,\tau,t);
$$

$$
-y_2''+q_2(x+\tau,t)y_2=\lambda^2 y_2,\quad y_2(0,\tau,t)=\pm y_2(\pi,\tau,t),
$$

где

$$
q_1(x,t)=\frac{1}{4}q_x^2(x,t)+\frac{1}{2}q_{xx}(x,t),\quad q_2(x,t)=\frac{1}{4}q_x^2(x,t)-\frac{1}{2}q_{xx}(x,t).
$$

Так как для функции $q_1(x+\tau,t)$ имеет место равенство

$$
q_1(\tau,t)=\lambda_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k^2(\tau,t)),
$$

отсюда следует формула (17). Лемма доказана.

Далее, учитывая формулы следов (16) и (17), систему (8) можно записать в замкнутой форме:

$$
\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}f_n(\xi)g_n(\xi(\tau,t)),\tag{18}
$$

где

$$
g_n(\xi)=\frac{a(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{C(t)+2\int\limits_0^\tau\left(\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k(\xi(s,t))\right)ds\right\}.
$$

Здесь $C(t)$ – некоторая ограниченная непрерывная функция.

В результате замены переменных

$$
\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{19}
$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (18) и начальные условия (9) можно записать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$
\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\quad x(\tau,0)=x^0(\tau)\in K,
$$

где

$$
K=\left\{x(\tau,t)=(\ldots,x_{-1}(\tau,t),x_1(\tau,t),\ldots):\|x(\tau,t)\|=\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})|x_n(\tau,t)|<\infty\right\},
$$

$$H(x) = (\ldots, H_{-1}(x), H_1(x), \ldots),$$
$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(\ldots, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t), \ldots) \times$$
$$\times f_n(\ldots, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t), \ldots) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(x(\tau,t)) f_n(x(\tau,t)).$$

Известно, что если $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$, то $q_0'(x) \in C^2(\mathbb{R})$. Поэтому для длины лакун оператора $L(\tau, 0)$ имеет место оценка (см. [26, с. 98])

$$\gamma_k \equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{|q_{2k}^2|}{2|k|^2} + \frac{\delta_k}{|k|^3}, \tag{20}$$

где

$$\lambda_{2k} = k + \sum_{j=1}^{3} c_j k^{-j} + 2^{-2}|k|^{-2}|q_{2k}^2| + |k|^{-3}\varepsilon_k^+, \quad \lambda_{2k-1} = k + \sum_{j=1}^{3} c_j k^{-j} - 2^{-2}|k|^{-2}|q_{2k}^2| + |k|^{-3}\varepsilon_k^-,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |q_{2k}^2|^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty, \quad \delta_k = \varepsilon_k^+ - \varepsilon_k^-.$$

Отсюда, учитывая $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, получаем

$$\inf_{k \neq n} |\xi_n(\tau,t) - \xi_k(\tau,t)| \geqslant a > 0.$$

Теперь, пользуясь этим неравенством и (19), (20), оценим функции

$$|f_n(x(\tau,t))|, \ |\partial f_n(x(\tau,t))/\partial x_m|, \ |g_n(x(\tau,t))|, \ |\partial g_n(x(\tau,t))/\partial x_m|.$$

Лемма 2. *Справедливы следующие оценки:*

$$C_1 \leqslant |f_n(x)| \leqslant C_2, \quad \left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right| \leqslant C_3 \gamma_m, \tag{21}$$

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{C_4}{|n|}, \quad \left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right| \leqslant \frac{C_5 \gamma_m}{|n|}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{22}$$

где $C_j > 0$, $j = \overline{1,5}$, *не зависят от параметров* m *и* n.

Доказательство. Оценки (21) доказаны в работе [14], поэтому докажем (22). Поскольку функция $a(t)$ ограничена, то найдётся такое число $M > 0$, что выполняется неравенство $|a(t)| \leqslant M$, пользуясь которым и (19), (20), получим оценки

$$|g_n(x(\tau,t))| \leqslant \frac{Me^{|C(t)|}}{2|\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n(\tau,t)|} \exp\left\{\int_0^\tau \left|\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty} (-1)^{k-1}\gamma_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s,t)) f_k(x(s,t))\right| ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2A_1|n|} \exp\left\{M_1 + \int_0^\tau \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty} C_2 \gamma_k \, ds\right\} \leqslant \frac{C_4}{|n|},$$

$$\left|\frac{\partial g_n(x(\tau,t))}{\partial x_m}\right| \leqslant \frac{|a(t)|e^{|C(t)|}}{2|\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n(\tau,t)|} \exp\left\{\int_0^\tau \left|\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty} (-1)^{k-1}\gamma_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s,t)) f_k(x(s,t))\right| ds\right\} \times$$

$$\times\left\{\left|\int_0^\tau(-1)^{m-1}\gamma_m\sigma_m^0(s)\left[2\cos(2x_m(s,t))f_m(x(s,t))+\sin(2x_m(s,t))\frac{\partial f_m(x(s,t))}{\partial x_m(s,t)}\right]ds\right|+\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau\left|\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq m}}^{\infty}(-1)^{k-1}\gamma_k\sigma_k^0(s)\sin(2x_k(s,t))\frac{\partial f_k(x(s,t))}{\partial x_m(s,t)}\right|ds\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{2A_1|n|}\exp\left\{M_1+\int_0^\tau\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}C_2\gamma_k\,ds\right\}\left\{B_1\gamma_m|\tau|+B_2\gamma_m^2|\tau|+\gamma_m\int_0^\tau\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq m}}^{\infty}C_3\gamma_k\,ds\right\}\leqslant\frac{C_5\gamma_m}{|n|}.$$

Здесь $M_1=\sup C(t),\ \ t\geqslant 0.$ Лемма доказана.

Лемма 3. *Если периодическая бесконечнозонная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(\mathbb{R}),$ то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве $K,$ т.е. существует константа $L>0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t),y(\tau,t)\in K$ выполняется неравенство*

$$\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\|\leqslant L\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\|,$$

где

$$L=C\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_n}{|n|}<\infty. \tag{23}$$

Доказательство. Сначала, используя лемму 2, оценим производную функции $F_n(x)=$ $=g_n(x)f_n(x),\ \ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}:$

$$\left|\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_m}\right|=\left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}f_n(x)+\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}g_n(x)\right|\leqslant\left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right||g_n(x)|+\left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right||f_n(x)|\leqslant$$

$$\leqslant C_3\gamma_m\frac{C_4}{|n|}+C_2\frac{C_5\gamma_m}{|n|}\leqslant\frac{C\gamma_m}{|n|},$$

где положительные константы $C_2,\ C_3,\ C_4$ и C_5 не зависят от m и $n.$ Далее, используя выражение

$$H_n(x(\tau,t))=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)F_n(x(\tau,t)),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

получаем равенство

$$|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))|=|F_n(x(\tau,t))-F_n(y(\tau,t))|.$$

Применим к функции $\varphi(t)=F_n(x+t(y-x))$ теорему Лагранжа о конечном приращении на отрезке $t\in[0,1]$ и получим $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t^*),$ т.е.

$$F_n(x)-F_n(y)=\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq 0}}^{\infty}\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}(x_m-y_m),$$

где $\theta=x+t^*(y-x).$ Отсюда следует, что

$$|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))|=|F_n(x(\tau,t))-F_n(x(\tau,t))|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq 0}}^{\infty}\left|\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}\right||x_m(\tau,t)-y_m(\tau,t)|\leqslant\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq 0}}^{\infty}\frac{C}{|n|}|\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}||x_m(\tau,t)-y_m(\tau,t)|=\frac{C}{|n|}\|x-y\|.$$

Теперь оценим норму

$$\|H(x)-H(y)\| = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} (\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})|H_n(x)-H_n(y)| \leqslant \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{C}{|n|}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\|x-y\| = L\|x-y\|.$$

Здесь

$$L = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{C}{|n|}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}) = C\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\gamma_n}{|n|} < \infty.$$

Таким образом, условие Липшица выполняется. Поэтому решение задачи Коши (8), (9) для всех $t>0$ и $\tau\in\mathbb{R}$ существует и единственно. Лемма доказана.

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 2 дают метод нахождения решения задачи (1)–(3).

Сначала найдём спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, оператора Дирака $L(\tau,0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ через λ_n, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Теперь, решив задачу Коши (18), (9) при произвольном значении τ, найдём $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Из формулы следов (16) определим функцию $q_\tau(\tau,t)$, т.е. найдём решение задачи (1)–(3).

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (1)–(3) имеет решение. От этого предположения нетрудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $q_\tau(\tau,t)$, $\tau\in\mathbb{R}$, $t>0$, действительно удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 2. Функция $q_\tau(\tau,t)$, построенная с помощью систем уравнений Дубровина (8), (9) и формулы следа (16), действительно удовлетворяет уравнению (1).

При этом мы также будем использовать вторую формулу следов (17). Продифференцировав формулу (17) по t, будем иметь

$$\frac{1}{2}q_\tau(\tau,t)q_{\tau t}(\tau,t)+\frac{1}{2}(q_{\tau t}(\tau,t))_\tau = -\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty} 2\xi_k(\tau,t)\frac{\partial\xi_k(\tau,t)}{\partial t}. \tag{24}$$

Здесь использовали равенство $(q_\tau(\tau,t))_{t\tau}=(q_\tau(\tau,t))_{\tau t}$. Далее, учитывая систему уравнений (8), из (24) получаем

$$q_\tau(\tau,t)z(\tau,t)+z_\tau(\tau,t) = -4\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}(-1)^k\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi)a(t)\exp\{q(\tau,t)\}, \tag{25}$$

где

$$z(\tau,t)=q_{\tau t}(\tau,t). \tag{26}$$

Теперь используем систему уравнений (7), соответствующую уравнению (4), а также формулу следов (16). Тогда из (25) получим уравнение относительно $z(\tau,t)$:

$$q_\tau(\tau,t)z(\tau,t)+z_\tau(\tau,t)=2a(t)e^{q(\tau,t)}q_\tau(\tau,t). \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$z(\tau,t)=a(t)e^{q(\tau,t)}+C_1(t)e^{-q(\tau,t)}$$

является решением линейного уравнения (27). Выбрав $C_1(t)=0$, имеем $z(\tau,t)=a(t)e^{q(\tau,t)}$. Отсюда и из обозначения (26) получим уравнение (1): $q_{\tau t}=a(t)e^{q(\tau,t)}$.

Замечание 3. Равномерная сходимость рядов в (16), (17) и (23) следует из равенств (20) и оценки (21).

Теорема 2. *Если периодическая бесконечнозонная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию*

$$q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(\mathbb{R}),$$

то существует однозначно определяемое решение $q'_x(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, задачи (1)–(3), которое определяется по формуле (16) и принадлежит классу $C^{1,1}_{x,t}(t>0)\bigcap C(t\geqslant 0)$.

Следствие 1. *Из результатов работ [29] и [33] следует, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической π-периодической функцией, то решение $q(x,t)$ задачи (1)–(3) является действительной аналитической функцией по переменной x.*

Следствие 2. *Если число $\pi/2$ является периодом (антипериодом) для начальной функции $q_0(x)$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda)+2=0$ $(\Delta(\lambda)-2=0)$ являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициенту $q(x,t)$, совпадает с $\Delta(\lambda)$, то согласно результатам работ [28] и [30] число $\pi/2$ является также периодом (антипериодом) для решения $q(x,t)$ по переменной x.*

Теперь рассмотрим конечнозонный случай. Здесь решение $q'_\tau(\tau,t)$, $\tau\in\mathbb{R}$, $t>0$, задачи (1)–(3) определяется по формуле

$$q'_\tau(\tau,t)=2\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)\bar{h}_k(\xi(\tau,t)),$$

при этом координаты $\xi=\xi(\tau,t)=(\xi_{-N}(\tau,t),\ldots,\xi_{-1}(\tau,t),\ldots,\xi_{-N}(\tau,t))$, $\sigma(\tau,t)=(\sigma_{-N}(\tau,t),\ldots$ $\ldots,\sigma_{-1}(\tau,t),\ldots,\sigma_{-N}(\tau,t))$ удовлетворяют системе уравнений Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\,\bar{f}_n(\xi)\bar{g}_n(\xi(\tau,t)),\quad |n|\leqslant N,$$

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=0,\quad |n|\geqslant N+1,$$

с начальными условиями

$$\xi_n(\tau,0)=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,0)=\sigma_n^0(\tau),\quad n=\pm1,\pm2,\ldots,\pm N,$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)=\pm1$, $n=\pm1,\pm2,\ldots,\pm N$, – спектральные параметры конечнозонного оператора Дирака вида

$$L(\tau,0)y\equiv\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&q_0'(x+\tau)/2\\q_0'(x+\tau)/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad x\in\mathbb{R},\quad \tau\in\mathbb{R}.$$

Здесь

$$\bar{h}_n(\xi)=\begin{cases}\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\,\bar{f}_n(\xi), & |n|\leqslant N,\\ 0, & |n|\geqslant N+1,\end{cases}$$

$$\bar{f}_n(\xi)=\sqrt{\prod_{\substack{k=-N\\k\neq n}}^{N}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$\bar{g}_n(\xi)=\frac{a(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{C(t)+2\int\limits_0^\tau\left(\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)\bar{h}_k(\xi(s,t))\right)ds\right\}.$$

Нетрудно заметить, что задача (1)–(3) разрешима при всех конечнозонных начальных данных, так как

$$L=C\sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N}\frac{\gamma_n}{|n|},\quad \gamma_n\equiv 0,\quad |n|\geqslant N+1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жибер А.В., Муртозина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.* Характеристическое кольцо Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. М.; Ижевск, 2012.
2. *Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* Уравнения типа Лиувилля // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 1. С. 26–29.
3. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. теор. и мат. физики. 1975. Т. 23. № 1. С. 51–68.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. эксп. и теор. физики. 1974. Т. 67. № 12. С. 2131–2143.
5. *Итс А.Р., Котляров В.П.* Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шрёдингера // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. № 11. С. 965–968.
6. *Смирнов А.О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 103–114.
7. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Решения типа "волн-убийц" уравнений иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура: единый подход // Журн. теор. и мат. физики. 2016. Т. 186. № 2. С. 191–220.
8. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархии // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2018. Т. 473. С. 205–227.
9. *Митрапольський Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев, 1987.
10. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980.
11. *Matveev V.B.* 30 years of finite-gap integration theory // Philos. Trans. of the Royal Soc. A. Math. Phys. and Eng. Sci. 2008. V. 366. P. 837–875.
12. *Ince E.L.* A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1922. V. 21. P. 117–120.
13. *Джаков П.Б., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 4 (370). С. 77–182.
14. *Маннонов Г.А., Хасанов А.Б.* Задача Коши для нелинейного уравнения Хирота в классе периодических бесконечнозонных функций // Алгебра и анализ. 2022. Т. 34. № 5. С. 139–172.
15. *Хасанов А.Б., Нормуродов Х.Н., Худаёров У.О.* Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза-синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций // Журн. теор. и мат. физики. 2023. Т. 214. № 2. С. 198–210.
16. *Grinevich P.G., Taimanov I.A.* Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type // Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2. V. 224. / Eds. V.M. Buchstaer, I.M. Krichever. Providence, 2008. P. 125–138.
17. *Хасанов А.Б., Хасанов М.М.* Интегрирование нелинейного уравнения Шрёдингера с дополнительным членом в классе периодических функций // Журн. теор. и мат. физики. 2019. Т. 199. № 1. С. 60–68.
18. *Khasanov A.B., Khasanov T.G.* Integration of a nonlinear Korteweg–de Vries equation with a loaded term and a source // J. of Appl. and Industr. Math. 2022. V. 16. № 2. P. 227–239.
19. *Khasanov A.B., Allanazarova T.Z.* On the modified Korteweg–de Vries equation with loaded term // Ukrainian Math. J. 2022. V. 73. № 11. P. 1783–1809.
20. *Муминов У.Б., Хасанов А.Б.* Задача Коши для дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом // Мат. тр. 2022. Т. 25. № 1. С. 102–133.
21. *Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б.* О периодической оценке Тоды с интегральным источником // Теор. и мат. физика. 2015. Т. 184. № 2. С. 1114–1128.
22. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Почти-периодичность бесконечномерных потенциалов оператора Дирака // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. Р. 746–748.
23. *Lax P.* Almost periodic solutions of the KdV equation // SIAM Rev. 1976. V. 18. № 3. P. 351–375.
24. *McKean H., Trubowitz E.* Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branchpoints // Comm. Pure Appl. Math. 1976. V. 29. P. 143–226.
25. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М., 1988.
26. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 30. / Под ред. В.А. Марченко. Харьков, 1978. С. 90–101

27. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 31. / Под ред. В.А. Марченко. Харьков, 1979. С. 102–109.
28. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Аналог обратной теоремы Г. Борга для оператора Дирака // Узб. мат. журн. 2000. № 3–4. С. 40–46.
29. *Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М.* Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // Узб. мат. журн. 2001. № 3–4. С. 48–55.
30. *Currie S., Roth T., Watson B.* Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proc. Edinb. Math. Soc. 2017. V. 60. № 3. P. 615–633.
31. *Grebert B., Guillot J.C.* Gap of one dimensional periodic AKNS systems // Forum Math. 1993. V. 5. № 5. P. 459–504.
32. *Korotayev E., Mokeev D.* Dubrovin equation for periodic Dirac operator on the half-line // Appl. Anal. 2020. V. 101. № 1. P. 1–29.
33. *Trubowtz E.* The inverse problem for periodic potentials // Comm. Pure. Appl. Math. 1977. V. 30. P. 321–337.
34. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Обратная задача на полулинии для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. P. 23–32.
35. *Бабаджанов Б.А., Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 3. P. 298–305.

Самаркандский государственный университет
имени Ш. Рашидова, Узбекистан,
Самаркандский государственный
архитектурно-строительный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 27.03.2023 г.
После доработки 24.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1425–1432

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА К СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2023 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова

Рассматривается задача стабилизации переключаемой интервальной линейной системы с медленными переключениями, недоступными для наблюдения. Решение предлагается искать в классе регуляторов переменной структуры. Для обеспечения работоспособности такого регулятора необходимо построение наблюдателя переключающего сигнала. Настоящая работа посвящена некоторым теоретическим вопросам, связанным с периодом квантования времени работы нейронаблюдателя.

DOI: 10.31857/S0374064123100096, EDN: OOCCAQ

1. Постановка задачи. Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{1}$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество всех переключающих сигналов σ, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ $(\tau > 0)$; I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ – композиция отображения $[A] : I \to \{[A_1], \ldots, [A_m]\}$ $([A_i] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbb{IR}^{n\times n}$ – множество всех квадратных интервальных матриц порядка $n)$ и переключающего сигнала σ, $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $[b] : I \to \{[b_1], \ldots, [b_m]\}$ $([b_i] \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbb{IR}^n$ – множество всех интервальных векторов размерности $n)$; пары интервальных матриц $([A_i], [b_i])$, $i = \overline{1, m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий вход.

Переключаемую интервальную систему (1) будем понимать как бесконечное семейство обычных переключаемых систем вида

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1x(t) + b_1u & \text{при } \sigma(t) = 1, \\ A_2x(t) + b_2u & \text{при } \sigma(t) = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A_mx(t) + b_mu & \text{при } \sigma(t) = m, \end{cases} \tag{2}$$

где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$ (здесь под включением понимается принадлежность каждого элемента матрицы A_i либо столбца b_i соответствующему промежутку – элементу интервальной матрицы $[A_i]$ либо интервального столбца $[b_i]$), $i = \overline{1, m}$, $\sigma \in S_\tau$. При этом если t_0, t_1, $\ldots$, t_n, $\ldots$ представляет собой последовательность моментов переключения, то $t_j - t_i \geqslant \tau$ для всех $j > i$.

Далее предполагаем, что переключающий сигнал не доступен для наблюдения.

Задача. Требуется стабилизировать систему (1) в нулевом положении равновесия, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$ такую, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S_\tau$ и любых наборов $\{A_1, \ldots, A_m\}$ $(A_i \in [A_i])$, $\{b_1, \ldots, b_m\}$ $(b_i \in [b_i])$ норма $\|x(t)\|$ соответствующего решения системы (2), замкнутой этой обратной связью, стремится к нулю при $t \to \infty$.

При этом вектор-функция $x(t)$ определяется как решение линейной нестационарной системы с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in S_\tau,$$

где $A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \ldots, A_m\}$, $b_{\sigma(t)} \in \{b_1, \ldots, b_m\}$. Далее для векторов будем использовать нормы $\|x\| = \max_i |x_i|$ или $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, а для матриц, соответственно, $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ или $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i s_i(A^*A)}$, где $s_i(A^*A)$ – собственные числа матрицы A^*A.

В работе [1] была рассмотрена подобная задача стабилизации для скалярной переключаемой линейной системы без интервальной неопределённости вида

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau. \tag{3}$$

При этом для её решения был использован подход, заключающийся в построении регулятора переменной структуры (переключаемого регулятора)

$$u = u_\sigma(x), \tag{4}$$

каждый режим которого является стабилизирующей обратной связью $u = u_i(x)$ для, соответственно, i-го режима $\dot{x} = A_i x + b_i u$ переключаемой системы (3), т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = A_i x + b_i u_i(x).$$

Отметим, что в предположении полной управляемости пары (A_i, b_i) стабилизирующую обратную связь для каждого режима системы (3) было предложено искать в форме линейной статической обратной связи $u = -k_i^{\mathrm{T}} x$. Известно [2, с. 249], что такая обратная связь всегда существует как решение задачи модального управления.

В настоящей статье для стабилизации системы (1) также предлагается использовать указанный подход и искать стабилизирующую обратную связь в виде переключаемого регулятора вида (4) с режимами в форме линейной статической обратной связи $(u = -k_i^{\mathrm{T}} x)$

$$u = -k_\sigma x, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{5}$$

где $k_\sigma = k \circ \sigma$ – композиция отображения $k : I \to \{k_1^{\mathrm{T}}, \ldots, k_m^{\mathrm{T}}\}$ $(k_i \in \mathbb{R}^n)$ и переключающего сигнала σ. Тогда система (1), замкнутая регулятором (4), будет иметь вид

$$\dot{x} = [A_\sigma]x - [b_\sigma]k_\sigma x, \quad \sigma \in S_\tau. \tag{6}$$

Теперь заметим, что при использовании переключаемого регулятора для стабилизации системы (1) необходимо решить две проблемы. Первая состоит в поиске для каждого интервального режима

$$\dot{x} = [A_i]x + [b_i]u$$

стабилизирующей линейной статической обратной связи $u = -k_i^{\mathrm{T}} x$, существование которой уже не гарантируется легко проверяемым критерием, как в случае обычных (не интервальных) линейных систем. Вместе с этим поиск стабилизирующей обратной связи для каждого режима переключаемой системы (1) неразрывно связан с решением вопроса об устойчивости этой системы, замкнутой соответствующим регулятором (5), поскольку известно, что устойчивость каждого замкнутого режима

$$\dot{x} = ([A_i]x - [b_i]k_i^{\mathrm{T}})x$$

системы (1) в отдельности ещё не является достаточным условием устойчивости замкнутой переключаемой системы (6).

Вторая проблема состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени, для того чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора. Но, по условию, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени не доступна.

В п. 2 настоящей работы для решения первой проблемы предлагается использовать результаты статьи [3], позволяющие свести задачу нахождения стабилизирующей обратной связи для каждого интервального режима к решению системы линейных матричных неравенств, а для решения задачи устойчивости замкнутой системы (6) будет предложена методика получения оценок времени задержки τ для обеспечения устойчивости переключаемой интервальной системы с устойчивыми режимами на основе результатов работ [4, с. 64; 5, с. 88]. Решение второй проблемы основано на методе построения нейронаблюдателя переключающего сигнала, изложенного в статье [1], и представлено в пп. 3, 4.

2. Выбор режимов переключаемого регулятора. Зафиксируем произвольный номер $i \in I$ и рассмотрим задачу поиска параметров вектора $k_i \in \mathbb{R}^n$, обеспечивающего устойчивость любой системы из семейства

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_i^{\mathrm{T}})x. \tag{7}$$

Для решения этой задачи может быть использован следующий подход. Для каждой интервальной матрицы $[A_i]$ построим множество вершинных матриц $A_{r,i}$ $(r = \overline{1, 2^{n^2}})$, т.е. таких матриц, элементы которых принимают только крайние значения (либо $\underline{a}_{ij}$, либо $\overline{a}_{ij}$) из соответствующих промежутков $[a]_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$. Аналогично строим множества вершинных векторов $b_{q,i}$ $(q = \overline{1, 2^n})$.

Далее в соответствии с методикой, изложенной в [3], по вершинным матрицам $A_{r,i}$ и векторам $b_{q,i}$ интервальных семейств $[A_i]$ и $[b_i]$ строятся специальные множества матриц $F_{l,i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и векторов $g_{l,i} \in \mathbb{R}^n$ $(l = \overline{1, \kappa},$ где $\kappa = 2^{n^2+n})$, после чего вектор обратной связи k_i находим из системы линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} P_i F_{l,i}^{\mathrm{T}} + F_{l,i}P_i + z_i g_{l,i}^{\mathrm{T}} + g_{l,i}z_i^{\mathrm{T}} < 0, \\ P_i > 0, \quad l = \overline{1, \kappa}. \end{cases} \tag{8}$$

Если (z_i, P_i) – решение системы (8), то $k_i^{\mathrm{T}} = -z_i^{\mathrm{T}} P_i^{-1}$. При этом функция

$$V_i(x) = x^{\mathrm{T}} P_i x$$

является общей квадратичной функцией Ляпунова для семейства систем (7).

Итак, пусть стабилизирующие обратные связи $u = -k_i^{\mathrm{T}} x$ для каждого i-го режима системы (1) построены. Рассмотрим теперь вопрос об оценке времени задержки τ, которое гарантирует устойчивость замкнутой системы (6) при любом $\sigma \in S_\tau$.

Зафиксируем номер $i \in \{1, \ldots, m\}$ и рассмотрим произвольную систему

$$\dot{x} = (A - bk_i^{\mathrm{T}})x, \tag{9}$$

где $A \in [A_i]$, $b \in [b_i]$. В работе [3] показано, что матрица такой системы может быть представлена в виде

$$A - bk_i^{\mathrm{T}} = \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i), \quad \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l = 1, \quad \lambda_l \geqslant 0, \tag{10}$$

где $\Psi_l^{(i)}(k_i) = F_{l,i} - g_{l,i}k_i^{\mathrm{T}}$.

Пусть пара (z_i, P_i) – решение системы (8). В [3] показано, что тогда для всех $l = \overline{1, \kappa}$ выполняется неравенство

$$(\Psi_l^{(i)}(k_i))^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i) < 0,$$

где $k_i^{\mathrm{T}} = -z_i^{\mathrm{T}} P_i^{-1}$, $Q_i = P_i^{-1}$. Отсюда и из (10) имеем

$$(A - bk_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i(A - bk_i^{\mathrm{T}}) = \left(\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i)\right)^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\kappa} (\lambda_l (\Psi_l^{(i)}(k_i))^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i)) = -\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)},$$

где $H_l^{(i)} = -((\Psi_l^{(i)}(k_i))^{\mathrm{T}} Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i))$ – положительно определённые матрицы.

Таким образом,

$$(A-bk_i)^{\mathrm{т}}Q_i+Q_i(A-bk_i)=-\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l H_l^{(i)},$$

причём матрица $H^{(i)}=\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l H_l^{(i)}$ является положительно определённой. Отсюда получаем, что система (9) асимптотически устойчива, а в силу произвольности выбора матрицы A и вектора b получаем, что обратная связь $u=-k_i^{\mathrm{т}}x$ обеспечивает устойчивость семейства замкнутых систем (7).

Далее пусть $h_{\min}^{(i)}$ – минимальное собственное значение матрицы $H^{(i)}$. Тогда имеем следующую цепочку соотношений:

$$h_{\min}^{(i)}=\min_{\|x\|_2=1}(x^{\mathrm{т}}H^{(i)}x)=\min_{\|x\|_2=1}\left(x^{\mathrm{т}}\left(\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l H_l^{(i)}\right)x\right)=\min_{\|x\|_2=1}\left(\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l(x^{\mathrm{т}}H_l^{(i)}x)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\min_{\|x\|_2=1}\left(\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l(h_l^{(i)}\|x\|_2^2)\right)\geqslant\min_{\|x\|_2=1}\left(\|x\|_2^2\left(\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l h_l^{(i)}\right)\right)=\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l h_l^{(i)},\tag{11}$$

где $h_l^{(i)}$ – минимальные собственные значения матриц $H_l^{(i)}$. Обозначим $\mu_i=\min\limits_l h_l^{(i)}$. Тогда из (11) получаем

$$h_{\min}^{(i)}\geqslant\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l h_l^{(i)}\geqslant\mu_i\sum_{l=1}^{\kappa}\lambda_l=\mu_i,$$

т.е.

$$h_{\min}^{(i)}\geqslant\mu_i.\tag{12}$$

В соответствии с [4, с. 56] для любого решения $x(t)$ системы (9) выполнено неравенство

$$\|x(t)\|_2\leqslant c_i e^{-\theta_i(t-s)}\|x(s)\|_2,\quad t\geqslant s\geqslant 0,$$

где $c_i=\sqrt{M_i/m_i}$, $\theta_i=h_{\min}^{(i)}/(2M_i)$, а m_i и M_i – соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы Q_i. В силу (12)

$$e^{-\theta_i(t-s)}\leqslant e^{-\nu_i(t-s)}\quad\text{при}\quad t>s\geqslant 0,$$

где $\nu_i=\mu_i/(2M_i)$, а тогда для любого решения $x(t)$ системы (9) получаем

$$\|x(t)\|\leqslant\sqrt{n}\|x(t)\|_2\leqslant c_i\sqrt{n}e^{-\nu_i(t-s)}\|x(s)\|_2\leqslant c_i\sqrt{n}e^{-\nu_i(t-s)}\|x(s)\|\quad\text{при}\quad t>s\geqslant 0.$$

Обозначив $c_{ii}=c_i\sqrt{n}$, $\alpha_{ii}=-\nu_i$, запишем последнее неравенство в виде

$$\|x(t)\|\leqslant c_{ii}e^{\alpha_{ii}(t-s)}\|x(s)\|,\quad t\geqslant s\geqslant 0.\tag{13}$$

На основании изложенного выше и достаточного условия устойчивости переключаемой линейной системы, полученного в работе [5], справедлива

Теорема 1. *Пусть для переключаемой интервальной линейной системы (1) при любом $i\in I$ совместна система линейных матричных неравенств (8) и (z_i,P_i) – её соответствующее решение. Тогда переключаемый регулятор*

$$u=-k_\sigma x,\quad k_i^{\mathrm{т}}=-z_i^{\mathrm{т}}P_i^{-1},\quad\sigma\in S_\tau,\tag{14}$$

стабилизирует систему (1) при

$$\tau>\frac{2\ln c}{|\alpha|},$$

где $c=\max\limits_i c_{ii}$, $\alpha=\max\limits_i\alpha_{ii}$.

3. Построение нейронаблюдателя режимов замкнутой переключаемой системы. Как уже было упомянуто выше, отсутствие информации о значении переключающего сигнала в процессе функционирования переключаемой системы не даёт возможности непосредственно использовать переключаемый регулятор (14). Для того чтобы обеспечить синхронность переключений самой системы и регулятора, необходимо построить наблюдатель, который бы формировал в каждый момент времени оценку переключающего сигнала $\sigma(t)$. В настоящей работе, как и в статье [1], предлагается строить оценку переключающего сигнала на основе нейросетевого подхода, который заключается в том, что в качестве упомянутого выше наблюдателя режимов используется нейронная сеть. Считаем, что выходом такой нейросети является оценка $\hat{\sigma}(t)$ недоступного для измерения переключающего сигнала $\sigma(t)$. При этом регулятор переменной структуры будет иметь вид

$$u = -k_{\hat{\sigma}}x, \tag{15}$$

где $\hat{\sigma}(t)$ – оценка переключающего сигнала, $\hat{\sigma}(t) \in \{1,\ldots,m\}$, а векторы $k_i \in \mathbb{R}^n$ выбираются из условий устойчивости семейств матриц $[A_i] - [b_i]k_i$.

Пара – переключаемый регулятор и нейронная сеть – в [1] была названа *нейрорегулятором.* Систему (1), замкнутую нейрорегулятором, можно представить переключаемой системой следующего вида:

$$\dot{x} = ([A_\sigma] - [b_\sigma]k_{\hat{\sigma}})x, \quad \sigma \in S_\tau, \quad \hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}, \tag{16}$$

где $\varepsilon_p = \tau/p$ – достаточно малая положительная константа, $p \in \mathbb{N}$ – некоторый фиксированный параметр алгоритма наблюдения, $[S]_{\varepsilon_p}$ – множество переключающих сигналов, для которых моменты переключений принадлежат множеству $\{l\varepsilon_p,\, l \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$. Перенумеруем (от 1 до m^2) все возможные режимы

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_j)x, \quad i,j = \overline{1,m},$$

переключаемой системы (16), присвоив каждому (ij)-му режиму соответствующий номер $s = (i-1)m+j$. Введём функцию $\xi : \{1,\ldots,m^2\} \to \{1,\ldots,m\}$, отображающую каждый номер s в соответствующий ему индекс i, т.е. $\xi(s) = i$.

Как и в случае построения нейронаблюдателя для переключающего сигнала обычной переключаемой системы, рассмотренной в [1], работа нейронной сети в качестве наблюдателя переключающего сигнала для переключаемой интервальной системы (1) также осуществляется в процессе функционирования системы и состоит в том, что для заданной дискретной последовательности моментов времени $l\varepsilon_p$, $l \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l+1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть в момент времени $t = (l+1)\varepsilon_p$ должна определять номер s текущего режима переключаемой системы (16). Также как и в [1] обозначим выход нейросети в момент $l\varepsilon_p$ через $N[l\varepsilon_p]$. На основе данной информации оценка $\hat{\sigma}[l\varepsilon]$ переключающего сигнала $\sigma(t)$ строится следующим образом:

$$\hat{\sigma}(t) \equiv \xi(N[l\varepsilon_p]) \quad \text{при} \ \ t \in [l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p), \quad l \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

В результате переключение векторов k_i стабилизирующей обратной связи задаёт переключающий сигнал (17) с некоторым заданным начальным условием $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0$ $(\hat{\sigma}_0 \in \{1,\ldots,m\})$. Описанный наблюдатель далее обозначаем через $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$. По аналогии с [1] введём дискретную ошибку оценивания $e_\sigma[l\tau]$ $(l \in \mathbb{N}\bigcup\{0\})$ сигнала $\sigma(t)$:

$$e_\sigma[l\tau] = \max_{i=\overline{0,l-1}} \mu_{i\tau}^{(i+1)\tau},$$

где $\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau}$ – количество промежутков вида $[j\varepsilon_p, (j+1)\varepsilon_p) \subset [i\tau, (i+1)\tau]$, для которых $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}(j\varepsilon_p)$.

Заметим, что построение описанного нейронаблюдателя для переключаемой интервальной системы является существенно более сложной задачей по сравнению с обычной системой, рассмотренной в статье [1], поскольку в данном случае каждый режим, по сути, представляет собой континуальное семейство систем, в связи с чем теперь речь идёт о распознавании с помощью нейросети различных семейств линейных динамических систем.

4. Квантование времени работы наблюдателя переключающего сигнала. Одной из основных проблем обеспечения работоспособности переключаемого регулятора (15) является правильный выбор величины ε_p (периода срабатывания нейронаблюдателя). Учитывая, что режимы регулятора (15) могут переключаться только в дискретные моменты времени $t = l\varepsilon_p$ и при этом ещё могут возникать ошибки в распознавании режимов замкнутой системы (16), практически неизбежно будут возникать неустойчивые режимы на промежутках времени, длина которых будет зависеть от величины ε_p. И для того чтобы при этом обеспечить стремление нормы решения к нулю, необходимо рассчитать "правильное" значение величины ε_p в зависимости от возможной ошибки оценивания переключающего сигнала и от величины задержки τ. Решим этот вопрос.

Итак, для каждого замкнутого режима

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_j)x, \quad i \neq j, \tag{18}$$

построим интервальное расширение

$$\dot{x} = [\Lambda_{ij}]x, \quad [\Lambda_{ij}] = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n} : |\Lambda - \Lambda^\circ_{ij}| \leqslant \triangle\Lambda_{ij}\}, \tag{19}$$

где Λ°_{ij} – центральный элемент интервального семейства, $\triangle\Lambda_{ij}$ – размах интервальной неопределённости и $A_i - b_ik_j \in [\Lambda_{ij}]$ для любых $A \in [A_i]$ и $b \in [b_i]$. Знаки модуля $|\cdot|$ и неравенства $\leqslant$ относительно матриц далее понимаем поэлементно.

Рассмотрим следующие системы:

$$(\Sigma_1) \ \ \dot{x} = \Lambda^\circ_{ij}x,$$

$$(\Sigma_2) \ \ \dot{x} = (|\Lambda^\circ_{ij}| + \triangle\Lambda_{ij})x,$$

$$(\Sigma_3) \ \ \dot{x} = |\Lambda^\circ_{ij}|x.$$

Пусть $J^{(l)}_{ij}$ – жорданова нормальная форма (ЖНФ) для матрицы системы Σ_l, $r^{(l)}_{ij}$ – размер максимальной клетки Жордана для $J^{(l)}_{ij}$, $M^{(l)}_{ij}$ – соответствующая матрица преобразования к ЖНФ $J^{(l)}_{ij}$. Обозначим

$$\alpha^{(l)}_{ij} = \max_{\lambda^{(ijl)}_k \in \operatorname{Spec} J^{(l)}_{ij}} \operatorname{Re}\lambda^{(ijl)}_k, \quad c^{(l)}_{ij} = \|(M^{(l)}_{ij})^{-1}\|\|(M_{ij})^{(l)}\|, \quad P^{(1)}_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r^{(l)}_{ij}-1} \frac{t^k}{k!}.$$

Тогда, в соответствии с [6, с. 57], для норм матриц Коши систем Σ_l, $l = 1, 2, 3$, выполняются оценки

$$\|e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)}\| \leqslant c^{(1)}_{ij}e^{\alpha^{(1)}_{ij}(t-s)}P^{(1)}_{ij}(t-s),$$

$$\|e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)}\| \leqslant c^{(2)}_{ij}e^{\alpha^{(2)}_{ij}(t-s)}P^{(2)}_{ij}(t-s),$$

$$\|e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}\| \leqslant c^{(3)}_{ij}e^{\alpha^{(3)}_{ij}(t-s)}P^{(3)}_{ij}(t-s) \tag{20}$$

при любых $t > s \geqslant 0$.

Пусть теперь Λ – некоторая произвольная матрица из семейства $[\Lambda_{ij}]$. Тогда, в соответствии с [7, с. 88], для матрицы Коши системы

$$\dot{x} = \Lambda x \tag{21}$$

при любых $t > s \geqslant 0$ имеем следующую оценку:

$$|e^{\Lambda(t-s)} - e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)}| \leqslant e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}$$

или

$$e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)} - e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} + e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)} \leqslant e^{\Lambda(t-s)} \leqslant e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)} + e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}.$$

Отсюда для любого решения системы (21) справедлива оценка

$$\|x(t)\| = \|e^{\Lambda(t-s)}x(s)\| \leqslant \|e^{\Lambda(t-s)}\|\|x(s)\| \leqslant \|e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)} + e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}\|\|x(s)\|.$$

Учитывая (20) и неравенство

$$\|e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)} - e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)} + e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}\| \leqslant \|e^{\Lambda^\circ_{ij}(t-s)}\| + \|e^{(|\Lambda^\circ_{ij}|+\triangle\Lambda_{ij})(t-s)}\| + \|e^{|\Lambda^\circ_{ij}|(t-s)}\|,$$

получаем

$$\|x(t)\| \leqslant \left(\sum_{l=1}^{3} c^{(l)}_{ij} e^{\alpha^{(l)}_{ij}(t-s)} P^{(l)}_{ij}(t-s)\right)\|x(s)\|, \quad t > s \geqslant 0.$$

Введём обозначения

$$c_{ij} = 3\max\{c^{(1)}_{ij}, c^{(2)}_{ij}, c^{(3)}_{ij}\}, \quad \alpha_{ij} = \max\{\alpha^{(1)}_{ij}, \alpha^{(2)}_{ij}, \alpha^{(3)}_{ij}\}, \quad r_{ij} = \max\{r^{(1)}_{ij}, r^{(2)}_{ij}, r^{(3)}_{ij}\}$$

и окончательно будем иметь

$$\|x(t)\| \leqslant c_{ij}e^{\alpha_{ij}(t-s)}P_{ij}(t-s)\|x(s)\|, \quad t > s \geqslant 0, \tag{22}$$

где $P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}-1} t^k/k!$. И поскольку каждая система семейства (18) принадлежит также семейству (19), то для любого решения режима (18) верна та же оценка (22). Обозначим

$$\rho = \max_{i\neq j}\alpha_{ij}, \quad \beta = \max_{i\neq j} c_{ij}, \quad r = \max_{i\neq j} r_{ij}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\rho > 0$.

Основываясь теперь на неравенствах (13), (22) и основном результате работы [1], сформулируем достаточное условие устойчивости замкнутой системы (16).

Теорема 2. *Пусть для замкнутой системы (16) при любом переключающем сигнале* $\sigma \in S_\tau$ *и любом начальном условии* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *наблюдатель* $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ *генерирует оценку* $\hat\sigma \in [S]_{\varepsilon_p}$ *с ошибкой, удовлетворяющей условию*

$$e_\sigma[l\tau] \leqslant \theta$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \theta \leqslant [p/2]$.

Тогда если

$$\tau > \frac{2\ln h}{|\alpha|},$$

где $h = c^{\theta+2}\beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, *то для любого начального условия* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *и любого переключающего сигнала* $\sigma \in S_\tau$ *норма соответствующего решения системы (16) стремится к нулю:*

$$\|x(t)\| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Здесь $P(t) = \sum_{k=0}^{r-1} t^k/k!$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.* Теоретические аспекты построения нейрорегулятора для переключаемых систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1548–1556.
2. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976.
3. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.* Достаточные условия существования стабилизирующих регуляторов для переключаемых интервальных систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 534–544.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М., 2014.
5. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии операторных возмущений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 7. С. 865–876.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
7. *Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.* Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М., 2006.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 07.06.2023 г.
После доработки 26.07.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1433–1437

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДВУХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ

© 2023 г. А. М. Денисов, Чжу Дунцинь

Рассмотрена обратная задача для нелинейной математической модели динамики сорбции с неизвестным переменным кинетическим коэффициентом. Доказана теорема существования двух решений обратной задачи и обоснован итерационный метод её решения. Приведён пример применения предложенного метода для численного решения обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123100102, EDN: OQCIPL

Рассмотрим следующую задачу для функций $u(x,t)$ и $a(x,t)$:

$$u_x + a_t = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$a_t = \gamma(t)(u - \psi(a)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$a(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $\mu(t)$, $\gamma(t)$, $\psi(s)$ – заданные функции, а $Q_\tau = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$.

Задачу (1)–(4) можно интерпретировать как математическую модель процесса динамики сорбции [1, с. 174] с изменяющимся во времени кинетическим коэффициентом $\gamma(t)$.

Определение 1. *Решением задачи* (1)–(4) будем называть пару функций $u(x,t)$, $a(x,t)$ таких, что $u, a, u_x, a_t \in C(Q_T)$ и $u(x,t)$, $a(x,t)$ удовлетворяют (1)–(4).

В работе [2] была доказана следующая лемма о существовании, единственности и свойствах решения задачи (1)–(4).

Лемма 1. *Пусть функции* $\gamma(t)$, $\mu(t)$ *и* $\psi(s)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\gamma, \mu \in C[0,T], \quad \gamma(t) > 0, \quad \mu(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}), \quad \psi(0) = 0, \quad 0 < \psi'(s) \leqslant \psi_1, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \psi_1 = \mathrm{const}.$$

Тогда существует единственная пара функций $u(x,t)$, $a(x,t)$, *являющихся решением задачи (1)–(4). Кроме того,* $u(x,t) > 0$, $a(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in Q_T$.

Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(4) от функции $\gamma(t)$, будем обозначать его $u(x,t;\gamma)$, $a(x,t;\gamma)$.

Легко видеть, что задача (1)–(4) имеет эволюционный характер и её решение на множестве Q_τ, $\tau \in (0,T]$, однозначно определяется значениями функций $\mu(t)$, $\gamma(t)$ на отрезке $[0,\tau]$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $\psi(s)$ и $\mu(t)$ заданы, а $\gamma(t)$ неизвестна. Требуется определить функцию $\gamma(t)$ по следующей дополнительной информации о решении задачи (1)–(4):

$$u_x(l,t;\gamma) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $h(t)$ – заданная функция.

Пусть $t_0 \in (0,T]$. Дадим определение решения обратной задачи на отрезке $[0,t_0]$.

Определение 2. Функция $\gamma(t)$ называется *решением обратной задачи на отрезке* $[0,t_0]$, если $\gamma \in C[0,t_0]$, $\gamma(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$, $u(x,t;\gamma)$ и $a(x,t;\gamma)$ удовлетворяют (1)–(5) для $(x,t) \in Q_{t_0}$.

В статье [2] была доказана теорема существования решения обратной задачи, в которой неизвестный коэффициент $\gamma(t)$ в задаче (1)–(4) определялся по дополнительной информации $u(l,t;\gamma)=g(t)$. Исследованию различных обратных задач для математических моделей динамики сорбции посвящены работы [3–12] и ряд других.

Перейдём к исследованию сформулированной обратной задачи. Было показано [2], что существование и единственность решения задачи (1)–(4) на множестве Q_{t_0} эквивалентно существованию и единственности непрерывного решения $u(x,t;\gamma)$, $a(x,t;\gamma)$ системы интегральных уравнений

$$u(x,t;\gamma)=\mu(t)e^{-\gamma(t)x}+\gamma(t)\int\limits_0^x e^{-\gamma(t)(x-s)}\psi(a(s,t;\gamma))\,ds,\quad (x,t)\in Q_{t_0},\tag{6}$$

$$a(x,t;\gamma)=\int\limits_0^t \mu(\tau)\gamma(\tau)e^{-\gamma(\tau)x}\,d\tau-\int\limits_0^t \gamma(\tau)\psi(a(x,\tau;\gamma))\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t(\gamma(\tau))^2\int\limits_0^x e^{-\gamma(\tau)(x-s)}\psi(a(s,\tau;\gamma))\,ds\,d\tau,\quad (x,t)\in Q_{t_0}.\tag{7}$$

Пусть функция $\gamma(t)$ является решением обратной задачи на отрезке $[0,t_0]$. Продифференцировав уравнение (6) по x, положив $x=l$ и использовав условие (5), имеем

$$\gamma(t)e^{-\gamma(t)l}=-\frac{h(t)}{\mu(t)}+\frac{\gamma(t)}{\mu(t)}\psi(a(l,t;\gamma))-\frac{(\gamma(t))^2}{\mu(t)}\int\limits_0^l e^{-\gamma(t)(l-s)}\psi(a(s,t;\gamma))\,ds,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0.\tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) определяют нелинейное уравнение для функции $\gamma(t)$.

Рассмотрим функцию $F(z)=z\exp(-zl)$ при $z>0$. Она достигает максимального значения e^{-1}/l при $z=1/l$. На интервале $(0,1/l)$ $F'(z)>0$, а на множестве $(1/l,+\infty)$ $F'(z)<0$.

Для любого отрезка $[a_1,a_2]\subset(0,1/l)$ на отрезке $[F(a_1),F(a_2)]$ существует обратная к $F(z)$ функция $G_1(s)$, отображающая $[F(a_1),F(a_2)]$ на $[a_1,a_2]$. Аналогично, для любого отрезка $[b_1,b_2]\subset(1/l,+\infty)$ на отрезке $[F(b_2),F(b_1)]$ существует обратная к $F(z)$ функция $G_2(s)$, отображающая $[F(b_2),F(b_1)]$ на $[b_1,b_2]$.

Полагая в уравнении (8) $t=0$, с учётом условия (4) и равенства $\psi(0)=0$ будем иметь

$$\gamma(0)\exp(-\gamma(0)l)=-h(0)/\mu(0).\tag{9}$$

Из этого равенства следует необходимое условие разрешимости обратной задачи:

$$0<-h(0)/\mu(0)<e^{-1}/l.\tag{10}$$

Очевидно, что если это условие выполнено, то уравнение (9) имеет два решения: первое

$$\gamma(0)=\gamma_{01}=G_1(-h(0)/\mu(0))\in(0,1/l)$$

и второе

$$\gamma(0)=\gamma_{02}=G_2(-h(0)/\mu(0))\in(1/l,+\infty).$$

Пусть d_1 и d_2 – положительные постоянные, $d_1<d_2$. Рассмотрим множество

$$\Gamma=\{\gamma(t)\in C[0,t_0],\quad d_1\leqslant\gamma(t)\leqslant d_2,\quad t\in[0,t_0]\}.$$

Лемма 2 [2]. *Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(s)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\mu\in C[0,T],\quad \mu(t)>0,\quad t\in[0,T],$$

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}), \quad \psi(0) = 0, \quad 0 < \psi'(s) \leqslant \psi_1, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \psi_1 = \mathrm{const}.$$

Тогда для любых функций $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $t_0 \in (0, T]$, *справедлива оценка*

$$\max_{Q_{t_0}} |a(x,t,\gamma_1) - a(x,t,\gamma_2)| \leqslant c_1 t_0 \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C[0,t_0]},$$

где c_1 *– постоянная, не зависящая от* $t_0 \in (0, T]$ *и* $\gamma \in \Gamma$.

Пусть a и b – положительные постоянные такие, что

$$[\gamma_{01} - a, \gamma_{01} + a] \subset (0, 1/l), \quad [\gamma_{02} - b, \gamma_{02} + b] \subset (1/l, +\infty),$$

а $t_1, t_2 \in (0, T]$.

Определим множества

$$\Gamma_1 = \{\gamma(t) \in C[0, t_1], \quad \gamma_{01} - a \leqslant \gamma(t) \leqslant \gamma_{01} + a, \quad t \in [0, t_1]\}, \tag{11}$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma(t) \in C[0, t_2], \quad \gamma_{02} - b \leqslant \gamma(t) \leqslant \gamma_{02} + b, \quad t \in [0, t_2]\}.$$

Рассмотрим на множестве Γ_1 оператор

$$(A_1\gamma)(t) = G_1\biggl(-\frac{h(t)}{\mu(t)} + \frac{\gamma(t)}{\mu(t)}\psi(a(l,t;\gamma)) - \frac{(\gamma(t))^2}{\mu(t)} \int_0^l e^{-\gamma(t)(l-s)}\psi(a(s,t;\gamma))\,ds\biggr), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{12}$$

а на множестве Γ_2 – оператор

$$(A_2\gamma)(t) = G_2\biggl(-\frac{h(t)}{\mu(t)} + \frac{\gamma(t)}{\mu(t)}\psi(a(l,t;\gamma)) - \frac{(\gamma(t))^2}{\mu(t)} \int_0^l e^{-\gamma(t)(l-s)}\psi(a(s,t;\gamma))\,ds\biggr), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Сформулируем и докажем теорему о существовании двух решений обратной задачи.

Теорема. *Предположим, что функции* $\mu(t)$, $h(t)$ *и* $\psi(s)$ *таковы, что* $\mu, h \in C[0,T]$, $\mu(t) > 0$, $h(t) < 0$ *для* $t \in [0,T]$ *и выполнено условие (10);* $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi(0) = 0$, $0 < \psi'(s) \leqslant \psi_1$, $s \in \mathbb{R}$, $\psi_1 = \mathrm{const}$. *Тогда найдётся число* $t_0 \in (0,T]$ *такое, что на отрезке* $[0, t_0]$ *существуют два решения обратной задачи* $\bar{\gamma}_1(t)$ *и* $\bar{\gamma}_2(t)$.

Доказательство. Из уравнения (8) и определений (11) и (12) следует, что существование решения обратной задачи $\bar{\gamma}_1 \in \Gamma_1$ на отрезке $[0, t_1]$ эквивалентно существованию решения операторного уравнения

$$\gamma(t) = (A_1\gamma)(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{13}$$

на множестве Γ_1. Докажем существование решения уравнения (13) на множестве Γ_1, используя принцип сжимающих отображений.

Найдём условия, при которых оператор A_1 отображает множество Γ_1 в себя.

Из леммы 1 и уравнения (7) следует, что для всех $\gamma \in \Gamma_1$ справедлива оценка

$$0 \leqslant a(x,t;\gamma) \leqslant c_2 t_1, \quad (x,t) \in Q_{t_1}, \tag{14}$$

где $c_2 = (\gamma_{01} + a)\|\mu\|_{C[0,T]} \exp((\gamma_{01} + a)\psi_1 T)$.

Обозначим через m минимальное значение функции $\mu(t)$ на отрезке $[0, T]$. Из определения множества Γ_1 и оценки (14) следует, что

$$\max_{[0,t_1]} \biggl|\frac{\gamma(t)}{\mu(t)}\psi(a(l,t;\gamma)) - \frac{(\gamma(t))^2}{\mu(t)} \int_0^l e^{-\gamma(t)(l-s)}\psi(a(s,t;\gamma))\,ds\biggr| \leqslant c_3 t_1, \tag{15}$$

где $c_3 = m^{-1}2(\gamma_{01} + a)\psi_1 c_2$.

Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции $-h(t)/\mu(t)$ на отрезке $[0,T]$. Выберем число t_1 так, что

$$F(\gamma_{01}-a) < F(\gamma_{01}) - \omega(t_1) - c_3 t_1 < F(\gamma_{01}) + \omega(t_1) + c_3 t_1 < F(\gamma_{01}+a). \tag{16}$$

Из определений оператора A_1, множества Γ_1 и оценки (15) следует, что при t_1, удовлетворяющем условию (16), оператор A_1 отображает множество Γ_1 в себя.

Найдём условие, при выполнении которого оператор A_1 является сжимающим на множестве Γ_1. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_1$. С учётом оценки (14) и леммы 2 имеем

$$\left|\frac{\gamma_1(t)}{\mu(t)}\psi(a(l,t;\gamma_1)) - \frac{(\gamma_1(t))^2}{\mu(t)}\int\limits_0^l e^{-\gamma_1(t)(l-s)}\psi(a(s,t;\gamma_1))\,ds - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma_2(t)}{\mu(t)}\psi(a(l,t;\gamma_2)) + \frac{(\gamma_2(t))^2}{\mu(t)}\int\limits_0^l e^{-\gamma_2(t)(l-s)}\psi(a(s,t;\gamma_2))\,ds\right| \leqslant c_4 t_1 \|\gamma_1-\gamma_2\|_{C[0,t_1]}, \tag{17}$$

где $c_4 = m^{-1}\psi_1[c_2 + (\gamma_{01}+a)(c_1+2lc_2) + (\gamma_{01}+a)^2(l^2c_2+lc_1)]$.

Обозначим через g_m максимум производной функции $G_1(s)$ на $[F(\gamma_{01}-a), F(\gamma_{01}+a)]$. Из определения оператора A_1 и оценки (17) следует, что

$$\|A_1\gamma_1 - A_1\gamma_2\|_{C[0,t_1]} \leqslant g_m c_4 t_1 \|\gamma_1-\gamma_2\|_{C[0,t_1]}.$$

Учитывая это неравенство, получаем, что если t_1 удовлетворяет неравенству

$$g_m c_4 t_1 < 1, \tag{18}$$

то оператор A_1 является сжимающим на множестве Γ_1.

Так как существует $t_1 \in (0,T]$ такое, что для него выполнены неравенства (16) и (18), то при этом t_1 оператор A_1 отображает множество Γ_1 в себя и является сжимающим на этом множестве. Следовательно, на Γ_1 существует единственное решение обратной задачи $\bar\gamma_1(t)$.

Совершенно аналогично доказывается, что существует $t_2 \in (0,T]$ такое, что для него оператор A_2 отображает множество Γ_2 в себя и является сжимающим на этом множестве. Следовательно, на Γ_2 существует единственное решение обратной задачи $\bar\gamma_2(t)$. Выбрав $t_0 = \min\{t_1,t_2\}$, получим, что на отрезке $[0,t_0]$ существуют два решения обратной задачи $\bar\gamma_1(t)$ и $\bar\gamma_2(t)$. Теорема доказана.

Приведём численный пример, иллюстрирующий существование двух решений обратной задачи. Схема расчётов была следующей. На множестве Γ_1 задавалась функция $\bar\gamma_1(t)$, с которой решалась задача (1)–(4) и вычислялась функция $h(t) = u_x(l,t;\bar\gamma_1)$. Очевидно, что функция $\bar\gamma_1(t)$ является решением обратной задачи для этой функции $h(t)$. Другое решение обратной задачи $\bar\gamma_2(t)$ с этой функцией $h(t)$ находилось в результате применения итерационного метода для решения уравнения $\gamma(t) = (A_2\gamma)(t)$ на множестве Γ_2. Приближённые значения решений обратной задачи $\bar\gamma_{1ap}(t)$ и $\bar\gamma_{2ap}(t)$ определялись в результате применения итерационных методов:

$$\gamma_{n+1}(t) = (A_1\gamma_n)(t), \quad \gamma_0(t) = \gamma_{01}, \quad \gamma_{n+1}(t) = (A_2\gamma_n)(t), \quad \gamma_0(t) = \gamma_{02}, \quad n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Расчёты проводились при $l=1$, $T=1$, $\mu(t)=t+0.2$, $\psi(s)=s(3-s)^{-1}$. Число итераций N определялось из условия $\max\limits_{[0,T]}|\gamma_N(t)-\gamma_{N-1}(t)| \leqslant 0.001$.

На рис. 1 приведены функция $\bar\gamma_1(t) = 0.6t^2+0.2$ (сплошная кривая) и найденное в результате применения первого итерационного метода приближённое решение $\bar\gamma_{1ap}(t)$ (точки), а на рис. 2 – приближённое решение обратной задачи $\bar\gamma_{2ap}(t)$ (точки), полученное в результате применения второго итерационного метода; штриховыми линиями показаны значения γ_{01} и γ_{02} соответственно.

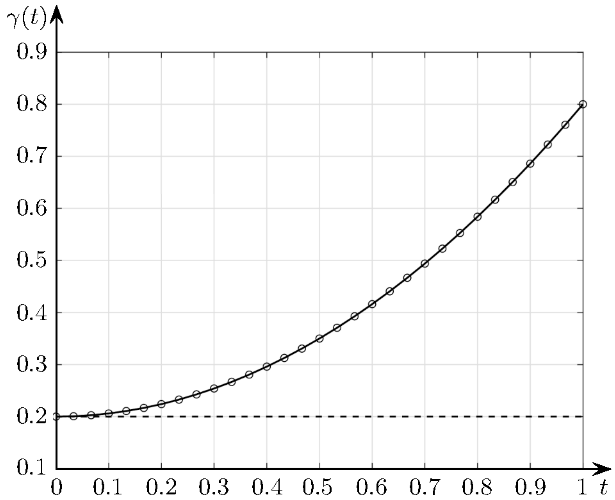

Рис. 1. Приближённое решение обратной задачи $\bar{\gamma}_{1ap}(t)$.

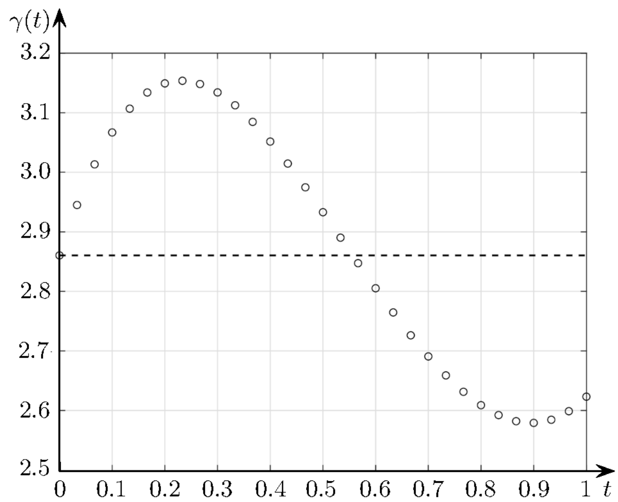

Рис. 2. Приближённое решение обратной задачи $\bar{\gamma}_{2ap}(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1999.
2. *Денисов А.М., Чжу Дунцинь.* Обратная задача для математической модели динамики сорбции с переменным кинетическим коэффициентом // Вестн. Московского ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2022. № 4. С. 5–13.
3. *Денисов А.М., Туйкина С.Р.* О некоторых обратных задачах неравновесной динамики сорбции // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 100–102.
4. *Lorenzi A., Paparoni E.* An inverse problem arising in the theory of absorption // Appl. Anal. 1990. V. 36. № 3. P. 249–263.
5. *Muraviev D.N., Chanov A.V., Denisov A.M., Omarova F., Tuikina S.R.* A numerical method for calculating isotherms of ion exchange on impregnated sulfonate ion-exchangers based on data of dynamic experiments // Reactive Polymers. 1992. V. 17. № 1. P. 29–38.
6. *Denisov A.M., Lamos H.* An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics // J. Inverse and Ill Posed Problems. 1996. V. 4. № 3. P. 191–202.
7. *Щеглов А.Ю.* Метод решения обратной граничной задачи динамики сорбции с учётом диффузии внутри зерна // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 4. С. 580–590.
8. *Denisov A.M., Lorenzi A.* Recovering an unknown coefficient in an absorption model with diffusion // J. Inverse and Ill Posed Problems. 2007. V. 15. № 6. P. 599–610.
9. *Tuikina S.R., Solov'eva S.I.* Numerical solution of an inverse problem for a two-dimensional model of sorption dynamics // Comput. Math. and Model. 2012. V. 23. № 1. P. 34–41.
10. *Tuikina S.R.* A numerical method for the solution of two inverse problems in the mathematical model of redox sorption // Comput. Math. and Model. 2020. V. 31. № 1. P. 96–103.
11. *Денисов А.М., Ефимов А.А.* Итерационный метод численного решения обратной коэффициентной задачи для системы уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 900–909.
12. *Денисов А.М.* Существование и единственность решения одной системы нелинейных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1174–1181.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 24.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1438–1440

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О КРАТНОМ СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТОМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

© 2023 г. Н. Ю. Капустин

Рассматривается задача для уравнения Бесселя целого порядка с комплексным физическим и спектральным параметрами в граничном условии. Спектральный параметр в граничное условие входит квадратично. Изучается вопрос базисности системы собственных функций в случае появления кратного собственного значения.

DOI: 10.31857/S0374064123100114, EDN: OOJKGO

1. Постановка задачи. В работе [1] рассмотрена спектральная задача для уравнения Бесселя целого порядка

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R(r)=0,\quad 0<r<1, \tag{1}$$

с граничным условием

$$R'(1)=d\lambda^2R(1). \tag{2}$$

В предположении ограниченности решений уравнения (1) получена система собственных функций

$$R_k(r)=J_n(\sqrt{\lambda_k}r),\quad k\in\mathbb{N},$$

отвечающих собственным значениям λ_k – корням характеристического уравнения

$$J_n'(\sqrt{\lambda})=d(\sqrt{\lambda})^3J_n(\sqrt{\lambda}). \tag{3}$$

Для всех собственных значений задачи будем считать выполненным условие

$$-\pi/2<\arg\sqrt{\lambda_k}\leqslant\pi/2,\quad k\in\mathbb{N}.$$

2. Основные результаты. Получено уравнение

$$-4zJ_n(z)J_n'(z)+n^2J_n^2(z)=z^2[J_n^2(z)+(J_n'(z))^2] \tag{4}$$

для кратных корней уравнения (3) и доказана их простота при $n\neq0$ (случай $n=0$ достаточно подробно изучен в статье [2] и на нём здесь мы останавливаться не будем).

Доказано следующее утверждение: если $d\notin\{J_n'(z)J_n(z)/z^3\}$, где z – любой корень уравнения (4), то система

$$\{\sqrt{r}R_k(r)=\sqrt{r}J_n(\sqrt{\lambda_k}r)\},\quad k=1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m-1,m+1,\ldots,$$

собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без любых двух собственных функций с номерами l и m является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}W_k(r)\}$ определяется по формуле

$$\overline{W_k(r)}=A_k^{-1}\left[J_n(\sqrt{\lambda_k}r)-\frac{(\lambda_k-\lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_l-\lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_l})}J_n(\sqrt{\lambda_l}r)-\frac{(\lambda_k-\lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_m-\lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_m})}J_n(\sqrt{\lambda_m}r)\right],$$

где

$$A_k = \int_0^1 r J_n^2(\sqrt{\lambda_k} r)\, dr + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) =$$

$$= \left(\frac{d^2\lambda_k^3 + 1 - n^2/\lambda_k}{2}\right) J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m-1, m+1, \ldots$$

Рассмотрим случай появления кратного спектра. Имеют место утверждения.

Теорема 1. *Если $d = J_n'(z)J_n(z)/z^3$, где комплексное число z – любой корень уравнения (4), то система $\{\sqrt{r}R_k(r)\}$, $k = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots,$ собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без одной собственной функции с номером l, соответствующей кратному собственному значению $\lambda_l = z^2$, является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}V_k(r)\}$ определяется по формуле*

$$\overline{V_k(r)} = A_k^{-1}\left[J_n(\sqrt{\lambda_k} r) - \frac{(\lambda_l - \lambda_k)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{J_n(\sqrt{\lambda_l})} Z_l(r) - \left(1 - \frac{(\lambda_l - \lambda_k)Z_l(1)}{J_n(\sqrt{\lambda_l})}\right)\frac{J_n(\sqrt{\lambda_k})}{J_n(\sqrt{\lambda_l})} J_n(\sqrt{\lambda_l} r)\right],$$

где

$$Z_l(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}}[J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l} r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l} r)].$$

Теорема 2. *Если $d = J_n'(z)J_n(z)/z^3$, где комплексное число z – любой корень уравнения (4), то система $\{\sqrt{r}R_k(r)\}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots,$ собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель, без одной собственной функции $R_m(r)$, соответствующей простому собственному значению λ_m, при наличии кратного корня $\lambda_l = z^2$, $m \neq l$, образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Биортогонально сопряжённая к этой системе система $\{\sqrt{r}V_k(r)\}$ определяется по формулам*

$$\overline{V_l(r)} = A_l^{-1}\left[Z_l^\alpha(r) - \frac{Z_l^\alpha(1)}{J_n(\sqrt{\lambda_m})} J_n(\sqrt{\lambda_m} r)\right],$$

$$\overline{V_k(r)} = A_k^{-1}\left[J_n(\sqrt{\lambda_k} r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_l - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_l})} J_n(\sqrt{\lambda_l} r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_m - \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_m})} J_n(\sqrt{\lambda_m} r)\right], \quad k \neq l,$$

где

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}}[J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l} r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l} r)] + \alpha J_n(\sqrt{\lambda_l} r), \quad Z_l^\alpha(1) = \frac{J_n(\sqrt{\lambda_l})}{\lambda_l - \lambda_m},$$

$$A_l = \int_0^1 r Z_l^\alpha(r) J_n(\sqrt{\lambda_l} r) dr + d(\lambda_l + \lambda_m) Z_l^\alpha(1) J_n(\sqrt{\lambda_l}) = -\left(2d + d^2\lambda_l^2 + \frac{1}{4\lambda_l}\right) J_n^2(\sqrt{\lambda_l}).$$

Доказательство этих теорем проводится по схемам, разработанным в [3, 4] с использованием результатов работ [5, 6]. Построение биортогонально сопряжённой системы основано, в свою очередь, на формулах

$$\int_0^1 r J_n(\sqrt{\lambda_m} r) J_n(\sqrt{\lambda_k} r) dr + d(\lambda_m + \lambda_k) J_n(\sqrt{\lambda_m}) J_n(\sqrt{\lambda_k}) = 0,$$

$$\int_0^1 r J_n(\sqrt{\lambda_m} r) Z_l(r) dr + d(\lambda_m + \lambda_l) J_n(\sqrt{\lambda_m}) Z_l(1) - d J_n(\sqrt{\lambda_m}) J_n(\sqrt{\lambda_l}) = 0,$$

в которых λ_m, λ_k и λ_l – различные собственные значения задачи (1), (2), причём λ_l – кратный корень.

Функция $Z_l(r)$ – это присоединённая функция для собственной функции $R_l(r) = J_n(\sqrt{\lambda_l}r)$ с кратным собственным значением. Действительно, пусть z – любой корень уравнения (4), $d = J_n'(z)J_n(z)/z^3$, $\lambda_l = z^2$. Рассмотрим задачу для присоединённой функции

$$Z_l''(r) + \frac{1}{r}Z_l'(r) + \left(\lambda_l - \frac{n^2}{r^2}\right)Z_l(r) = R_l(r), \quad 0 < r < 1, \tag{5}$$

$$Z_l'(1) = d\lambda_l^2 Z_l(1) - 2d\lambda_l R_l(1). \tag{6}$$

Решением задачи (5), (6) является корневая функция

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{r}{4\sqrt{\lambda_l}}[J_{n+1}(\sqrt{\lambda_l}r) - J_{n-1}(\sqrt{\lambda_l}r)] + \alpha J_n(\sqrt{\lambda_l}r),$$

где α – любое комплексное число.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российский Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капустин Н.Ю.* О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1715–1718.
2. *Moiseev E.I., Moiseev T.E., Kapustin N.Yu.* On the multiple spectrum of a problem for the Bessel equation // Integral Transforms and Special Functions. 2020. V. 31. № 12. P. 1020–1024.
3. *Капустин Н.Ю., Моисеев Т.Е.* О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1426–1430.
4. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
5. *Капустин Н.Ю.* О классической задаче с комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 701–706.
6. *Капустин Н.Ю.* О двух спектральных задачах с одним характеристическим уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 962–964.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.
После доработки 30.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.