ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 139–144

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В α-ПЛОСКОСТИ ГРУШИНА

Ю. Л. Сачков[1], Е. Ф. Сачкова[2]

[1,2]Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский
[1]Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва
e-mail: [1]yusachkov@gmail.com, [2]efsachkova@mail.ru

Поступила в редакцию 01.06.2024 г., после доработки 24.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Для α-плоскости Грушина описаны оптимальные траектории, время разреза и множество разреза.

Ключевые слова: α-плоскость Грушина, оптимальный синтез

DOI: 10.31857/S0374064125010119, EDN: HZJTBE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В субримановой геометрии [1, § 9.2] хорошо известна плоскость Грушина, представляющая простейший пример почти риманова многообразия (такое многообразие риманово в дополнении к особому подмногообразию коразмерности один). Естественным обобщением этого примера является α-плоскость Грушина, когда вырождение на особом множестве имеет порядок $\alpha \geqslant 1$. Экстремальные траектории для такого случая были параметризованы в статье [2], и на основе этого исследована их оптимальность в [3]. В данной работе проведено независимое исследование оптимальности экстремальных траекторий с помощью качественного подхода, не использующего параметризацию этих траекторий.

Задача оптимального управления для классической плоскости Грушина ставится следующим образом [1, § 9.2]:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y) \in M = \mathbb{R}^2, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int\limits_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} dt \to \min, \tag{2}$$

где $X_1 = \partial/\partial x,\ X_2 = x\partial/\partial y$.

Естественное обобщение этой задачи (α-плоскость Грушина) [2, 3] ставится аналогично, но для векторных полей:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = |x|^\alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geqslant 1. \tag{3}$$

Задача (1)–(3) называется *почти римановой задачей на α-плоскости Грушина.*

Обозначим функцию цены в этой задаче — почти риманово расстояние — как $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot))\colon q(\cdot)$ траектория системы (1), (2)$\}$. *Особым множеством* называется множество точек $q \in M$, в которых множество допустимых скоростей $\{\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2\}$ неполномерно: $Z = \{q = (x, y) \in M\colon x = 0\}$. Если $q_0 \in M \setminus Z$, то задача локально превращается в риманову, поэтому особый интерес представляет случай $q_0 \in Z$, который и рассматривается в данной работе.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

2.1. СИММЕТРИИ

Задача (1)–(3) имеет очевидные симметрии — отражения

$$(x,y)\mapsto(-x,y),\quad (x,y)\mapsto(x,-y),\quad (x,y)\mapsto(-x,-y). \tag{4}$$

Векторные поля X_1, X_2 не зависят от y, поэтому симметриями являются также параллельные переносы

$$(x,y)\mapsto(x,y+a),\quad a\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Другая однопараметрическая группа симметрий даётся потоком векторного поля

$$V=x\frac{\partial}{\partial x}+(1+\alpha)y\frac{\partial}{\partial y},\quad (x,y)\mapsto e^{tV}(x,y)=(e^t x, e^{(1+\alpha)t}y),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

так как $[V,X_1]=-X_1$, $[V,X_2]=-X_2$. Значит оптимальный синтез и, в частности, расстояние d инвариантны относительно симметрий (4), (5) и однородны порядка 1 относительно симметрии (6): $d(e^{tV}(q_0),e^{tV}(q_1))=e^t d(q_0,q_1)$, $q_i\in M$, $t\in\mathbb{R}$. Учитывая симметрию (5), будем далее полагать $q_0=(0,0)$.

2.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Система (1) вполне управляема в каждой из римановых полуплоскостей $\{q\in M:\operatorname{sign}x=\pm1\}$, так как в них множество допустимых скоростей полномерно. Переместиться между этими полуплоскостями можно вдоль полей $\pm X_1$, поэтому система (1) вполне управляема. Отметим, что в точках $q\in Z$ условие теоремы Рашевского–Чжоу [4, § 5.3; 5, § 2.2.4] выполнено только при $\alpha\in 2\mathbb{N}$. Все условия теоремы Филиппова [4, § 10.3; 5, § 3.1.2] выполнены, поэтому оптимальные траектории существуют.

2.3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Как обычно в субримановой геометрии, перейдём от минимизации длины (2) к минимизации энергии $J=0{,}5\int_0^{t_1}(u_1^2+u_2^2)\,dt$. Применим к полученной задаче принцип максимума Понтрягина [4, § 3; 5, § 5.2; 6, § 12.4; 7, § 3.2.2]. Анормальные траектории постоянны и нестрого анормальны. Для параметризации нормальных экстремальных траекторий положим $X_3=\partial/\partial y$ и обозначим линейные на слоях кокасательного расслоения T^*M гамильтонианы: $h_i(\lambda)=\langle\lambda,X_i\rangle$, $i=1,3$, $\lambda\in T^*M$. Тогда максимизированный гамильтониан принципа максимума Понтрягина равен $H=h_1^2+|x|^{2\alpha}h_3^2\equiv1$ и гамильтонова система для нормальных экстремалей имеет вид

$$\dot h_1=-\alpha\operatorname{sign}x\,|x|^{2\alpha-1}h_3^2,\quad \dot h_3=0,\quad \dot x=h_1,\quad \dot y=|x|^{2\alpha}h_3. \tag{7}$$

Гамильтониан H есть первый интеграл, поэтому при каждом $h_3\neq0$ независимая подсистема уравнений (7) для переменных h_1 и x имеет фазовый портрет типа центр.

Если $h_3=0$, то $h_1\equiv\mathrm{const}\neq0$, $x=h_1t$, $y=0$. Пусть $h_3\neq0$. При интегрировании системы (7) методом разделения переменных получаем уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{H-h_3^2|x|^{2\alpha}}}=\pm dt,$$

в котором левая часть интегрируется в общем случае в гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$. С другой стороны, в работе [2] система (7) проинтегрирована в терминах некоторых обобщений тригонометрических функций. Однако мы не будем использовать явную параметризацию экстремальных траекторий и исследуем оптимальность экстремальных траекторий, опираясь только на качественные методы.

Учитывая симметрию $(h_3, y) \mapsto (-h_3, -y)$ системы (7), далее считаем, что $h_3 > 0$. После замены переменных $X = xh_3^{1/\alpha}$, $Y = yh_3^{1+1/\alpha}$, $H_1 = h_1$, $s = th_3^{1/\alpha}$ гамильтонова система (7) примет вид

$$H_1' = -\alpha \operatorname{sign} X\,|X|^{2\alpha-1}, \quad X' = H_1, \quad Y' = |X|^{2\alpha} \tag{8}$$

с первым интегралом $H = H_1^2 + |X|^{2\alpha} \equiv 1$. Так как $H = 1$, то имеем $H_1(0) = H_1^0 = \pm 1$. Воспользовавшись симметрией $(H_1, X) \mapsto (-H_1, -X)$, получаем $H_1^0 = 1$. Первые два уравнения системы (8) имеют в плоскости (H_1, X) фазовый портрет типа центр, поэтому для любого $\alpha \geqslant 1$ существует единственное число $s_* = s_*(\alpha) > 0$ такое, что

$$X(s) > 0 \quad \text{при } s \in (0, s_*), \quad X(s_*) = 0. \tag{9}$$

Тогда первый положительный корень функции $x(t)$ равен $t_* = s_* h_3^{-1/\alpha}$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. 1. *Если $h_3 = 0$, то экстремальная траектория $q(t)$ оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$.*

2. *Если $h_3 \neq 0$, то экстремальная траектория $q(t)$ оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 \in (0, t_*]$, и неоптимальна при $t_1 > t_*$, где $t_* = s_*|h_3|^{-1/\alpha}$.*

Доказательство. Сначала исследуем случай 2. Пусть $h_3 \neq 0$. Рассмотрим экспоненциальное отображение

$$\operatorname{Exp}\colon (\lambda, t) \mapsto q(t), \quad \operatorname{Exp}\colon \tilde{N} \to M, \quad \tilde{N} = (T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}) \times \mathbb{R}_+,$$
$$\lambda = (h_3, h_1^0), \quad h_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ h_1^0 = \pm 1.$$

При любом $h_3 \neq 0$ экстремальные траектории $\operatorname{Exp}(h_3, 1, t)$ и $\operatorname{Exp}(h_3, -1, t)$ симметричны относительно оси y и пересекаются на этой оси при $t = t_*$. Поэтому точка пересечения $\operatorname{Exp}(h_3, 1, t_*)$ является точкой Максвелла [5, § 3.3.5] и эти траектории неоптимальны при условии $t > t_*$.

Докажем теперь, что любая траектория $\operatorname{Exp}(h_3, 1, t)$ оптимальна при $t \in [0, t_1]$, $t_1 \in (0, t_*)$. Учитывая симметрии задачи, будем считать, что $h_1^0 = 1$ и $h_3 > 0$, и будем обозначать $\operatorname{Exp}(h_3, t) := \operatorname{Exp}(h_3, 1, t)$. Пусть $N = \{(h_3, t) \in \mathbb{R}^2 : h_3 > 0, \ t \in (0, t_*)\}$, $D = \{(x, y) \in M : x, \ y > 0\}$. Покажем, что $\operatorname{Exp}\colon N \to D$ есть диффеоморфизм, для этого воспользуемся следующей теоремой Адамара о глобальном диффеоморфизме.

Теорема 2 [8; 9, § 6.2]. *Пусть $F\colon X \to Y$ — гладкое отображение между гладкими многообразиями одинаковой размерности такое, что X, Y связны, Y односвязно, F невырождено и собственное. Тогда F — диффеоморфизм.*

Сначала докажем, что $\operatorname{Exp}(N) \subset D$. Так как $h_3 > 0$ и $t \in (0, t_*)$, то $x(t) > 0$ в силу неравенства (9). Из обыкновенного дифференциального уравнения (8) следует, что $y(t) > 0$. Поэтому $\operatorname{Exp}(N) \subset D$.

Очевидно, что N и D связны, а D односвязно. Покажем, что $\operatorname{Exp}|_N$ невырождено, т.е. якобиан $\partial(x, y)/\partial(t, h_3)$ отличен от нуля в области N. Имеем $\partial x/\partial t = H_1$, $\partial y/\partial t = h_3^{-1} X^{2\alpha}$, $\partial x/\partial h_3 = -\alpha^{-1} h_3^{-1-1/\alpha} X + (\partial s/\partial h_3) H_1 h_3^{-1/\alpha}$, $\partial y/\partial h_3 = -(1+1/\alpha) h_3^{-2-1/\alpha} Y + (\partial s/\partial h_3) X^{2\alpha} h_3^{-1-1/\alpha}$, откуда $J = h_3^{-2-1/\alpha} \alpha^{-1} J_1$, $J_1 = X^{2\alpha+1} - (\alpha+1) Y H_1$. Дифференцируя в силу (8), получаем

$J_1' = \alpha X^{2\alpha-1} J_2$, $J_2 = H_1 X + (\alpha+1)Y$. Дифференцируя ещё раз, имеем $J_2' = H_1^2 + X^{2\alpha} > 0$, поэтому $J|_N > 0$, т.е. $\operatorname{Exp}|_N$ невырождено.

Теперь покажем, что отображение $\operatorname{Exp}\colon N \to D$ собственное. Это равносильно следующему условию: если последовательность $\{(h_3^n, t^n)\colon n \in \mathbb{N}\} \subset N$ не содержится ни в каком компакте в N, то её образ $q^n = \operatorname{Exp}(h_3^n, t^n)$ не содержится ни в каком компакте в D. Пусть последовательность $\{(h_3^n, t^n)\colon n \in \mathbb{N}\} \subset N$ не содержится ни в каком компакте в N, обозначим $s^n = (h_3^n)^{1/\alpha} t^n \in (0, s_*)$. Тогда она содержит подпоследовательность, для которой выполнено одно из следующих условий: 1) $h_3^n \to \bar h_3 \in (0, +\infty)$, $s^n \to 0$; 2) $h_3^n \to 0$, $s^n \to 0$; 3) $h_3^n \to 0$, $s^n \to \bar s \in (0, s_*)$; 4) $h_3^n \to 0$, $s^n \to s_*$; 5) $h_3^n \to \bar h_3 \in (0, +\infty)$, $s^n \to s_*$; 6) $h_3^n \to +\infty$, $s^n \to s_*$; 7) $h_3^n \to +\infty$, $s^n \to \bar s \in (0, s_*)$; 8) $h_3^n \to +\infty$, $s^n \to 0$.

Покажем, что для каждого из них последовательность $q^n = (x^n, y^n)$ содержит подпоследовательность, на которой выполнено одно из следующих условий: $x^n \to 0$, $x^n \to +\infty$, $y^n \to 0$, $y^n \to +\infty$, т.е. q^n не содержится ни в каком компакте в D.

При условии 1) имеем $X(s^n) \to X(0) = 0$, поэтому $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to 0$.

При выполнении условия 2) последовательность $t^n = s^n/(h_3^n)^{1/\alpha} > 0$ содержит подпоследовательность одного из следующих видов: $t^n \to 0$, $t^n \to \bar t \in (0, +\infty)$, $t^n \to +\infty$. Если $t^n \to 0$, то $x^n = x(h_3^n, t^n) \to x(0, 0) = 0$. Если $t^n \to \bar t \in (0, +\infty)$, то $y^n = y(h_3^n, t^n) \to y(0, \bar t) = 0$. Пусть $t^n \to +\infty$. При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{s^n\}$ убывает. Существует число $K \in \mathbb{N}$ такое, что $s^K < s_*/2$, поэтому $H_1(s) > 0$ для всех $s \in [0, s^K]$. Следовательно, $H_1|_{[0, s^K]} \geqslant \varepsilon := \min_{[0, s^K]} H_1 > 0$ и

$$X(s^n) = \int\limits_0^{s^n} H_1(s)\, ds \geqslant \varepsilon s^n = \varepsilon t^n (h_3^n)^{1/\alpha}, \quad x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \geqslant \varepsilon t^n \to +\infty.$$

Для остальных условий имеем: 3) $X(s^n) \to X(\bar s) \in (0, +\infty)$ и $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +\infty$; 4) $Y(s^n) \to Y(s_*) = \int_0^{s_*} |X(s)|^{2\alpha} ds \in (0, +\infty)$ и $y^n = Y(s^n)/(h_3^n)^{1+1/\alpha} \to +\infty$; 5) $X(s^n) \to X(s_*) = 0$, откуда $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +0$; 6) $X(s^n) \to X(s_*) = 0$, откуда $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +0$; 7) $X(s^n) \to X(\bar s) \in (0, +\infty)$, откуда $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +0$; 8) $X(s^n) \to X(0) = 0$, откуда $x^n = X(s^n)/(h_3^n)^{1/\alpha} \to +0$. Поэтому отображение $\operatorname{Exp}\colon N \to D$ собственное. По теореме 2 это отображение является диффеоморфизмом. В силу существования оптимальных траекторий любая траектория $\operatorname{Exp}(h_3, t)$, $h_3 \neq 0$, $t \in [0, t_1]$, оптимальна для любого $t_1 \in (0, t_*)$.

При $t = t_*$ в точку $\operatorname{Exp}(h_3, t_*)$ приходят две траектории, симметричные относительно оси y и с одинаковым значением функционала времени, поэтому обе они оптимальны.

Теперь рассмотрим случай 1. Если $h_3 = 0$, то экстремальная траектория — прямая $q(t) = (h_1^0 t, 0)$. Из доказанного выше включения $\operatorname{Exp}(N) \subset D$ следует, что при $h_3 \neq 0$ и $t > 0$ экстремальные траектории не пересекают координатную ось $y = 0$, поэтому в каждую точку этой оси приходит единственная (с точностью до перепараметризации) экстремальная траектория — прямая $q(t) = (h_1^0 t, 0)$. В силу существования оптимальной траектории она оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$. Теорема доказана.

Следствие. 1. *Для любой траектории* $\operatorname{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda = (h_3, h_1^0) \in T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}$, *время разреза (время потери оптимальности) равно* $t_{\mathrm{cut}} = t_* = |h_3|^{-1/\alpha} s_* \in (0, +\infty]$.

2. *Множество разреза*

$$\mathrm{Cut} = \{\operatorname{Exp}(\lambda, t_{\mathrm{cut}}(\lambda))\colon \lambda \in T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}\} = \{(x, y) \in M\colon x = 0, \ y \neq 0\}.$$

Замечание. Оптимальность экстремальных траекторий на α-плоскости Грушина впервые исследована в работе [3] на основе аналогичных рассуждений, но с использованием явной параметризации экстремальных траекторий, полученных в работе [2]. Новизна данного исследования состоит в качественном использовании лишь свойства гамильтоновой системы (7), но не её явного интегрирования.

Для 2-плоскости Грушина на рис. 1 приведена почти риманова сфера радиуса 2: $\{q \in M\colon d(q_0, q) = 2\}$ и её радиусы (оптимальные траектории, приходящие в точки этой сферы), а на рис. 2 — волновые фронты $\{\mathrm{Exp}(\lambda, R)\colon \lambda \in N\}$ для разных значений R.

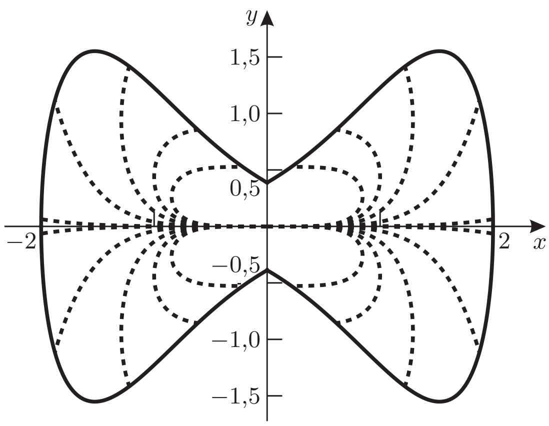

Рис. 1. Сфера радиуса 2 и её радиусы

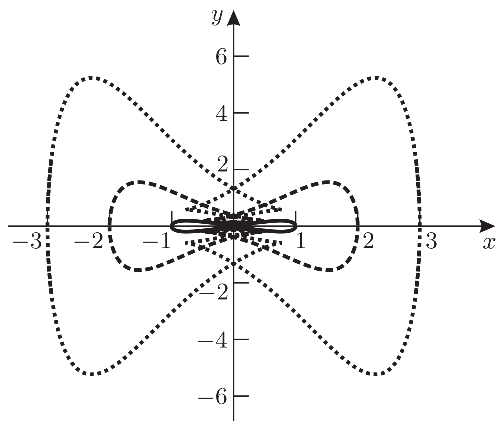

Рис. 2. Волновые фронты

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено качественное исследование оптимальных траекторий на α-плоскости Грушина, не использующее явное интегрирование гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина. Насколько нам известно, это первое такого рода исследование в теории оптимального управления. Например, даже в субримановой задаче на группе Гейзенберга оптимальность исследуется на основе явного интегрирования гамильтоновой системы [1, § 13.2]. Мы надеемся, что представленный в данной работе качественный подход к построению оптимального синтеза может быть полезен в других задачах оптимального управления, где явное интегрирование гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина затруднительно или вовсе невозможно. Этот подход может быть применён в задачах небольшой размерности и с большой группой симметрий.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00140).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agrachev, A. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian Viewpoint / A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. — Cambridge Univ. Press, 2019. — 745 p.
2. Chang, D.-C. SubRiemannian geodesics in the Grushin plane / D.-C. Chang, Y. Li // J. Geom. Anal. — 2012. — V. 22, № 3. — P. 800–826.

3. Borza, S. Distortion coefficients of the α-Grushin plane / S. Borza // J. Geom. Anal. — 2022. — V. 32, № 78. — P. 1–28.
4. Аграчев, А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. — М. : Физматлит, 2005. — 392 с.
5. Сачков, Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления / Ю.Л. Сачков. — М. : Ленанд, 2021. — 160 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М. : Наука, 1961. — 384 с.
7. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк ; пер. с англ. Ю.С. Ледяева ; под ред. В.И. Благодатских. — М. : Наука, 1988. — 279 с.
8. Hadamard, J. Les surfaces a courbures opposees et leurs lignes géodésique / J. Hadamard // J. Math. Pures Appl. — 1898. — № 4. — P. 27–73.
9. Krantz, S.G. The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications / S.G. Krantz, H.R. Parks. — Birkäuser, 2001. — 148 p.

OPTIMAL TRAJECTORIES IN THE GRUSHIN α-PLANE

© 2025 / Yu. L. Sachkov[1], E. F. Sachkova[2]

[1,2]*Institute of Programm Systems named after A.K. Ailamazyan of RAS, Pereslavl-Zalessky, Russia*
[1]*Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia*
e-mail: [1]yusachkov@gmail.com, [2]efsachkova@mail.ru

For the Grushin α-plane, optimal trajectories, cutting time, and cutting set are described.

Keywords: Grushin α-plane, optimal synthesis

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00140).

REFERENCES

1. Agrachev, A., Barilari, D., and Boscain, U., *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian Viewpoint*, Cambridge Univ. Press, 2019.
2. Chang, D.-C. and Li, Y., SubRiemannian geodesics in the Grushin plane, *J. Geom. Anal.*, 2012, vol. 22, no. 3, pp. 800–826.
3. Borza, S., Distortion coefficients of the α-Grushin plane, *J. Geom. Anal.*, 2022, vol. 32, no. 78, pp. 1–28.
4. Agrachev, A.A. and Sachkov, Yu.L., *Geometricheskaya teoriya upravleniya* (Geometric Control Theory), Moscow: Fizmatlit, 2005.
5. Sachkov, Yu.L., *Vvedeniye v geometricheskuyu teoriyu upravleniya* (Introduction to Geometric Control Theory), Moscow: URSS, 2021.
6. Pontryagin, L.S., Boltyansky, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko, E.F., *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical Theory of Optimal Processes), Moscow: Nauka, 1961.
7. Clark, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York: Wiley, 1983.
8. Hadamard, J., Les surfaces a courbures opposees et leurs lignes géodésique, *J. Math. Pures Appl.*, 1898, no. 4, pp. 27–73.
9. Krantz, S.G. and Parks, H.R., *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*, Birkäuser, 2001.