ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 84–98

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОГНУТЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2025 г. Х. А. Хачатрян[1], А. С. Петросян[2]

[1]*Ереванский государственный университет, Армения*
[2]*Национальный аграрный университет Армении, г. Ереван*
e-mail: [1]*khachatur.khachatryan@ysu.am*, [2]*Haykuhi25@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.06.2024 г., после доработки 30.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследованы вопросы существования и единственности непрерывного ограниченного и положительного решения системы нелинейных многомерных интегральных уравнений, скалярный аналог которой при различных представлениях соответствующего матричного ядра и нелинейностей имеет важное прикладное значение в ряде задач физики и биологии. Предложен специальный итерационный подход для построения положительного непрерывного и ограниченного решения исследуемой системы. Показано, что соответствующие итерации равномерно сходятся к непрерывному решению указанной системы. С использованием некоторых априорных оценок для функций со строго вогнутыми графиками доказана единственность решения в достаточно широком подклассе непрерывных ограниченных и покоординатно неотрицательных вектор-функций. В случае когда интеграл матричного ядра имеет единичный спектральный радиус, установлено, что в определённом подклассе непрерывных ограниченных и покоординатно неотрицательных вектор-функций данная система имеет только тривиальное решение, являющееся собственным вектором матрицы интегрального ядра.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, система интегральных уравнений, положительное решение, непрерывное решение, ограниченное решение, тривиальное решение, итерационный процесс

DOI: 10.31857/S0374064125010075, EDN: HZTGIB

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему нелинейных многомерных интегральных уравнений

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,G_j(f_j(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n,\quad i=\overline{1,N},\tag{1}$$

относительно вектор-функции $f(x_1,\ldots,x_n)=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$ с неотрицательными непрерывными и ограниченными на множестве $\mathbb{R}^n$ координатами $f_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,N}$, где $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, т — знак транспонирования. В системе (1) матричное ядро

$$K(\mathrm{x},t):=(K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n))_{i,j=\overline{1,N}}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) $K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)>0$, $(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^{2n}$, $K_{ij}\in C(\mathbb{R}^{2n})$, $i,j=\overline{1,N}$;

2) существуют $a_{ij} := \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n < +\infty$, $i,j=\overline{1,N}$, причём $r(A)=1$, $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$, где $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A, т.е. модуль наибольшего по модулю собственного значения.

Согласно теореме Перрона (см. [1, с. 260]) существует вектор $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^{\text{т}}$ с положительными координатами η_i такой, что

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i=\overline{1,N}. \tag{2}$$

Зафиксируем вектор η и наложим следующие условия на нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$ (рис. 1):

a) $G_j\in C(\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$, $G_j(u)$ монотонно возрастают на множестве $\mathbb{R}^+$, $j=\overline{1,N}$;

b) $G_j(0)=0$, $G_j(\eta_j)=\eta_j$, $j=\overline{1,N}$;

c) $G_j(u)$, $j=\overline{1,N}$, строго вогнуты (выпуклы вверх) на $\mathbb{R}^+$ и существует непрерывное отображение $\varphi\colon[0,1]\to[0,1]$ со свойствами

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1,\ \varphi \text{ монотонно возрастает на отрезке } [0,1], \tag{3}$$

$$\varphi \text{ строго вогнута на отрезке } [0,1], \tag{4}$$

такое, что имеют место следующие неравенства:

$$G_j(\sigma u)\geqslant \varphi(\sigma)G_j(u), \quad u\in[0,\eta_j],\ \ \sigma\in[0,1],\ \ j=\overline{1,N};$$

d) существует число $r>0$ такое, что функциональные уравнения $G_i(u)=u/\varepsilon_i(r)$, $i=\overline{1,N}$, имеют положительные решения d_i, где

$$\varepsilon_i(r) := \min_{j=\overline{1,N}}\left\{\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r}\ \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n\right\}\in(0,1), \quad i=\overline{1,N},$$

$$B_r := \left\{\mathrm{x}:=(x_1,\ldots,x_n)\colon |\mathrm{x}|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\leqslant r\right\}.$$

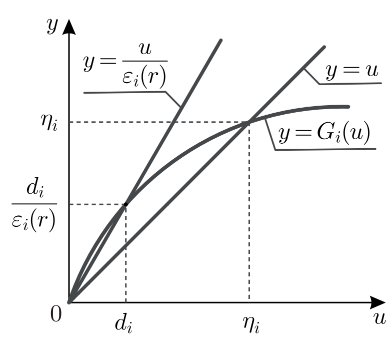

Рис. 1. График функции $y=G_i(u)$

Основная цель настоящей работы — исследовать вопросы существования и единственности непрерывного ограниченного и положительного решения системы (1), а также равномерную сходимость к решению соответствующего итерационного процесса со скоростью убывающей геометрической прогрессии.

Скалярный аналог системы нелинейных интегральных уравнений (1), кроме чисто теоретического интереса, имеет ряд важных приложений к исследованиям различных прикладных задач из физики и биологии. В частности, при конкретных представлениях матричного ядра K и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$ скалярная система (1) встречается в задачах из динамической теории p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн (см. [2–5]) и в математической теории пространственно-временно́го распространения пандемии в рамках модифицированных моделей Аткинсона–Ройтера и Дикмана–Капера (см. [6, с. 318] и [7, с. 121] соответственно).

Математические исследования системы вида (1) в основном проводились в одномерном случае при $n=1$. Так, например в случае, когда $n=1$ и ядро K зависит от разности своих аргументов, система (1) достаточно подробно изучена в работах [8–10]. Соответствующий скалярный аналог системы (1) ($N=1$) в многомерном случае рассмотрен в работах [5, 11–13], когда ядро K либо зависит от разности своих аргументов, либо мажорируется таким ядром. Следует также отметить, что соответствующие скалярные одномерные уравнения при различных ограничениях на ядро и на нелинейность исследовались (разными методами) в статьях [2, 3, 14–17].

В настоящей работе при условиях 1), 2) и a)–d) докажем сначала конструктивную теорему существования положительного непрерывного и ограниченного решения системы (1). В ходе доказательства этой теоремы получим равномерную оценку разности построенного решения и соответствующих последовательных приближений, причём правая часть полученного неравенства стремится к нулю как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, когда номер m-го приближения стремится к бесконечности. Далее, используя некоторые оценки для строго вогнутых и монотонных функций, докажем единственность решения системы (1) в достаточно широком подклассе непрерывных ограниченных и покоординатно неотрицательных вектор-функций. В случае когда

$$C_{ij}(x_1,\ldots,x_n):=\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n=a_{ij}$$

для всех $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и $i,j=\overline{1,N}$, покажем, что в отмеченном выше подклассе вектор-функций единственным решением системы (1) является только вектор $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^{\text{т}}$. В работе приводятся конкретные примеры матричного ядра K и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$, удовлетворяющих всем условиям доказанных утверждений. Некоторые из этих примеров имеют прикладное значение в указанных выше областях физики и биологии.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Следующая лемма играет важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* a), b), 1), 2), *причём на* $\mathbb{R}^+$ *графики функций* $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$ *строго вогнуты. Тогда для любого покоординатно неотрицательного и ограниченного на* $\mathbb{R}^n$ *решения* $f^*(x_1,\ldots,x_n)=(f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N^*(x_1,\ldots,x_n))^{\text{т}}$ *системы* (1) *справедливо неравенство*

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\eta_i,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad i=\overline{1,N},$$

где $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^{\text{т}}$ — *неподвижный вектор матрицы* A (*см.* (2)).

Доказательство. Обозначим $\gamma_i:=\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f_i^*(x_1,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,N}$. Тогда из системы (1) в силу условий 1), 2), a) и соотношения (2) будем иметь

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\sum_{j=1}^N a_{ij}G_j(\gamma_j)\leqslant\max_{j=\overline{1,N}}\left\{\frac{G_j(\gamma_j)}{\eta_j}\right\}\sum_{j=1}^N a_{ij}\eta_j=\eta_i\max_{j=\overline{1,N}}\left\{\frac{G_j(\gamma_j)}{\eta_j}\right\},$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_i \leqslant \eta_i \max_{j=\overline{1,N}} \left\{ \frac{G_j(\gamma_j)}{\eta_j} \right\}, \quad i=\overline{1,N}. \tag{5}$$

Очевидно, что существует индекс $j^* \in \{1,2,\ldots,N\}$ такой, что

$$\max_{j=\overline{1,N}} \left\{ \frac{G_j(\gamma_j)}{\eta_j} \right\} = \frac{G_{j^*}(\gamma_{j^*})}{\eta_{j^*}}. \tag{6}$$

Заменив в неравенстве (5) индекс i на индекс j^*, получим $\gamma_{j^*} \leqslant G_{j^*}(\gamma_{j^*})$. Убедимся, что из последнего неравенства следует оценка $\gamma_{j^*} \leqslant \eta_{j^*}$. Предположим обратное: $\gamma_{j^*} > \eta_{j^*}$. В силу условий a), b) и строгой вогнутости графика $G_{j^*}(u)$ следует, что функция $G_{j^*}(u)/u$ монотонно убывает на $(0,+\infty)$. Значит, $G_{j^*}(\gamma_{j^*})/\gamma_{j^*} < G_{j^*}(\eta_{j^*})/\eta_{j^*} = 1$. Последнее неравенство противоречит полученному выше неравенству $\gamma_{j^*} \leqslant G_{j^*}(\gamma_{j^*})$. Таким образом, $\gamma_{j^*} \leqslant \eta_{j^*}$. В силу этой оценки, соотношения (6) и условий a), b) приходим из (5) к неравенству $\gamma_i \leqslant \eta_i$, $i=\overline{1,N}$. Лемма доказана.

Полезна также следующая

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* a), b), d), 1) *и* 2) *и* $f(x_1,\ldots,x_n)$ — *произвольное покоординатно неотрицательное и непрерывное на* $\mathbb{R}^n$ *решение системы* (1). *Тогда если существует индекс* $j_0 \in \{1,2,\ldots,N\}$ *такой, что* $\delta_{j_0} := \inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r} f_{j_0}(x_1,\ldots,x_n) > 0$, *то* $\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f_i(x_1,\ldots,x_n) > 0$, $i=\overline{1,N}$, *где число* r *определено в условии* d).

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условий a), b), 1) и 2) следует, что

$$\begin{gathered} f_i(x_1,\ldots,x_n) \geqslant \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) G_j(f_j(t_1,\ldots,t_n))\, dt_1\ldots dt_n \geqslant \\ \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} K_{ij_0}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) G_{j_0}(f_{j_0}(t_1,\ldots,t_n))\, dt_1\ldots dt_n \geqslant \\ \geqslant G_{j_0}(\delta_{j_0}) \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} K_{ij_0}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\, dt_1\ldots dt_n, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{7}$$

Далее рассмотрим функции

$$\tilde{C}_{ij_0}(x_1,\ldots,x_n) := \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} K_{ij_0}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\, dt_1\ldots dt_n, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N},$$

и следующие возможные случаи: A) $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r$, B) $(x_1,\ldots,x_n)\in B_r$.

В случае A), учитывая определение чисел $\varepsilon_i(r)$ в условии d) и неравенство (7), получаем

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) \geqslant G_{j_0}(\delta_{j_0})\varepsilon_i(r), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь случай B). Из условий 1), 2) немедленно следует, что $\tilde{C}_{ij_0}\in C(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{C}_{ij_0}(x_1,\ldots,x_n)>0$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N}$. Учитывая компактность шара B_r, согласно теореме Вейерштрасса можно утверждать, что для каждого $i\in\{1,2,\ldots,N\}$ существует точка $\mathrm{x}^i=(x_1^i,\ldots,x_n^i)\in B_r$ такая, что

$$\min_{(x_1,\ldots,x_n)\in B_r} \{\tilde{C}_{ij_0}(x_1,\ldots,x_n)\} = \tilde{C}_{ij_0}(x_1^i,\ldots,x_n^i) > 0. \tag{9}$$

Из (7)–(9) заключаем, что

$$\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f_i(x_1,\ldots,x_n)\geqslant\min\{\varepsilon_i(r),\tilde{C}_{ij_0}(x_1^i,\ldots,x_n^i)\}G_{j_0}(\delta_{j_0}),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь функции $C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$, $i,j=\overline{1,N}$, и предположим, что

e) существуют точка $(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_n)\in\mathbb{R}^n$ и индексы $i_1,j_1\in\{1,2,\ldots,N\}$ такие, что

$$C_{i_1,j_1}(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_n)<a_{i_1j_1}.$$

Имеет место

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы 1 и e). Тогда любое непрерывное ограниченное и покоординатно неотрицательное решение $f(x_1,\ldots,x_n)$ системы (1) удовлетворяет неравенствам $f_i(x_1,\ldots,x_n)<\eta_i$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N}$.*

Доказательство. Согласно лемме 1 решение $f_i(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\eta_i$, $i=\overline{1,N}$. Убедимся, что $f_i(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv\eta_i$, $i=\overline{1,N}$. Действительно, в противном случае из (1) с учётом условия b) получим

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\eta_j\equiv\eta_i,\quad i=\overline{1,N}.$$

Принимая во внимание (2), приходим к равенству

$$\sum_{j=1}^N \eta_j(C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)-a_{ij})\equiv 0,\quad i=\overline{1,N}. \tag{10}$$

Так как $C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant a_{ij}$, $\eta_j>0$, $i,j=\overline{1,N}$, то в силу условия e) приходим в (10) к противоречию. Следовательно, существуют точка $(x_1^*,\ldots,x_n^*)\in\mathbb{R}^n$ и индекс $j^*\in\{1,2,\ldots,N\}$ такие, что $f_{j^*}(x_1^*,\ldots,x_n^*)<\eta_{j^*}$. Отсюда в силу непрерывности функции f_{j^*} следует, что существует окрестность $O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ точки $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ такая, что

$$f_{j^*}(x_1,\ldots,x_n)<\eta_{j^*},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*). \tag{11}$$

В силу (11), соотношения (2) и неравенства $C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant a_{ij}$ из (1) с учётом условий a), b) будем иметь

$$\begin{gathered}
f_i(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j\neq j^*}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_j(f_j(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n+\\
+\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_{j^*}(f_{j^*}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n\leqslant\\
\leqslant\sum_{j\neq j^*}C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\eta_j+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)}K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_{j^*}(f_{j^*}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n+\\
+\int\limits_{O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)}K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_{j^*}(f_{j^*}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n\leqslant\\
\leqslant\sum_{j\neq j^*}C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\eta_j+\eta_{j^*}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)}K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n+\\
+\int\limits_{O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)}K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_{j^*}(f_{j^*}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n<
\end{gathered}$$

$$< \sum_{j\neq j^*} C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\eta_j + \eta_{j^*} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)} K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n +$$

$$+\eta_{j^*} \int\limits_{O_\delta(x_1^*,\ldots,x_n^*)} K_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \sum_{j\neq j^*} C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\eta_j + C_{ij^*}(x_1,\ldots,x_n)\eta_{j^*} \leqslant \sum_{j=1}^N a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i,j=\overline{1,N}.$$

Лемма доказана.

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим теперь следующие последовательные приближения для системы (1):

$$f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,G_j(f_j^{(m)}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n,$$

$$f_i^{(0)}(x_1,\ldots,x_n) \equiv \eta_i, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ i=\overline{1,N},\ m=0,1,2,\ldots \tag{12}$$

Предположим, что выполняются условия a)–d), 1) и 2). Индукцией по m несложно проверить достоверность следующих утверждений:

$$f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n) \text{ монотонно убывают по } m,\ m=0,1,2,\ldots,\ i=\overline{1,N}, \tag{13}$$

$$f_i^{(m)} \in C(\mathbb{R}^n), \quad i=\overline{1,N}, \tag{14}$$

$$f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n) > 0, \quad m=0,1,2,\ldots,\ i=\overline{1,N}. \tag{15}$$

Докажем, что для всех $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r$ имеют место следующие оценки снизу:

$$f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n) \geqslant d_i, \quad m=0,1,2,\ldots,\ i=\overline{1,N}, \tag{16}$$

где числа d_i определены в условии d).

Проверим неравенство (16) при $m=0$. Действительно, так как функции $G_i(u)/u$ монотонно убывают на $(0,+\infty)$, $i=\overline{1,N}$, то из оценки

$$1 = \frac{G_i(\eta_i)}{\eta_i} < \frac{1}{\varepsilon_i(r)} = \frac{G_i(d_i)}{d_i}$$

получаем, что $d_i < \eta_i = f_i^{(0)}(x_1,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,N}$.

Предположим теперь, что для $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r$ неравенство (16) выполняется при некотором натуральном m. Тогда, используя условия a), b), d), 1) и 2), из (12) и (15) будем иметь

$$f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) \geqslant \sum_{j=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_j(f_j^{(m)}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^N G_j(d_j) \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n \geqslant G_i(d_i)\varepsilon_i(r) = d_i, \quad i=\overline{1,N}.$$

При выполнении условия e) по аналогии с доказательством леммы 3 можно также убедиться, что имеют место неравенства

$$f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i, \quad m=1,2,\ldots,\ i=\overline{1,N},\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Принимая во внимание (14), (15) и компактность шара B_r, можно утверждать, что для каждых $i\in\{1,2,\ldots,N\}$ и $m\in\{0,1,2,\ldots\}$ существует точка $(x_1^{m,i},\ldots,x_n^{m,i})\in B_r$ такая, что

$$\min_{(x_1,\ldots,x_n)\in B_r} f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n)=f_i^{(m)}(x_1^{m,i},\ldots,x_n^{m,i})>0,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in B_r. \tag{18}$$

Итак, из (16) и (18) для $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ следует, что

$$f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n)\geqslant\min\{f_i^{(m)}(x_1^{m,i},\ldots,x_n^{m,i}),d_i\}>0,\quad m=0,1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь функции $\chi_i(x_1,\ldots,x_n)=f_i^{(2)}(x_1,\ldots,x_n)/f_i^{(1)}(x_1,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,N}$, на множестве $\mathbb{R}^n$. Из (13), (14) и (19) имеем

$$\begin{gathered}\chi_i\in C(\mathbb{R}^n),\quad i=\overline{1,N},\\ \frac{\alpha_i}{\eta_i}\leqslant\chi_i(x_1,\ldots,x_n)\leqslant 1,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N},\end{gathered} \tag{20}$$

где в силу (17), (19)

$$0<\alpha_i:=\min\{f_i^{(2)}(x_1^{2,i},\ldots,x_n^{2,i}),d_i\}<\eta_i,\quad i=\overline{1,N}.$$

Обозначим через $\sigma_0=\min_{i=\overline{1,N}}(\alpha_i/\eta_i)$. Очевидно, что $\sigma_0\in(0,1)$.

Следовательно, учитывая (20) и (12), а также условия 1), a), будем иметь

$$\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_j(\sigma_0f_j^{(1)}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n\leqslant$$
$$\leqslant f_i^{(3)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_j(f_j^{(1)}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n=$$
$$=f_i^{(2)}(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Отсюда в силу условия c) приходим к неравенствам

$$\varphi(\sigma_0)f_i^{(2)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(3)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(2)}(x_1,\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,N}. \tag{21}$$

Теперь, используя (21), (12), условия 1), a) и c), запишем

$$\varphi(\varphi(\sigma_0))f_i^{(3)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(4)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(3)}(x_1,\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,N}.$$

Продолжая эти рассуждения, на m-м шаге получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}F_m(\sigma_0)f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(m+2)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n),\\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N},\ \ F_m(\sigma):=\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\sigma))}_{m\ \text{раз}},\ \ \sigma\in[0,1].\end{gathered} \tag{22}$$

Далее, используя свойства (3) и (4) функции φ, докажем справедливость неравенства

$$F_m(\sigma_0)\geqslant k^m\sigma_0+1-k^m,\quad m=1,2,\ldots, \tag{23}$$

где

$$k := \frac{1-\varphi(\sigma_0/2)}{1-\sigma_0/2} \in (0,1), \quad \sigma_0 = \min_{i=\overline{1,N}}\{\alpha_i/\eta_i\} \in (0,1). \tag{24}$$

Для этого рассмотрим прямую $y = ku + 1 - k$, проходящую через точки $(1,1)$ и $(\sigma_0/2, \varphi(\sigma_0/2))$, где число k задаётся согласно формуле (24). Из свойств (3) и (4) немедленно следует, что (рис. 2)

$$\varphi(\sigma_0) \geqslant k\sigma_0 + 1 - k. \tag{25}$$

Так как $k\sigma_0 + 1 - k \in (0,1)$, то с учётом свойств вогнутости графика и монотонности функции φ из (25) будем иметь

$$F_2(\sigma_0) = \varphi(\varphi(\sigma_0)) \geqslant \varphi(k\sigma_0 + 1 - k) \geqslant k(k\sigma_0 + 1 - k) + 1 - k = k^2\sigma_0 + 1 - k^2.$$

Продолжив этот процесс, на m-м шаге получим неравенство (23).

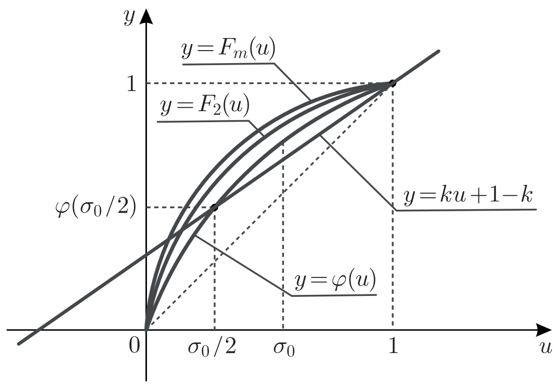

Рис. 2. График функции $y = \varphi(u)$

Таким образом, ввиду (22), (23), (17) и (13) приходим к следующей равномерной оценке для последовательных приближений (12):

$$0 \leqslant f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+2)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)k^m,$$
$$(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ m = 1,2,\ldots, \ \ i = \overline{1,N}. \tag{26}$$

Из (26) получаем равномерную сходимость последовательности непрерывных вектор-функций $f^{(m)}(x_1,\ldots,x_n) = (f_1^{(m)}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N^{(m)}(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$, $m = 0,1,2,\ldots$, на множестве $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{m\to\infty} f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n) = f_i(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ i = \overline{1,N},$$

причём $f_i \in C(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1,N}$.

В силу (13), условий 1), 2), a), (14), (16), (26) и теоремы Б. Леви (см. [18, с. 303]) предельная вектор-функция $f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$ удовлетворяет системе (1) и оценке снизу

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) \geqslant d_i, \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus B_r, \ \ i = \overline{1,N}. \tag{27}$$

Учитывая оценку (27) и лемму 2, заключаем, что

$$\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f_i(x_1,\ldots,x_n) > 0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{28}$$

Далее, принимая во внимание условие e), утверждение леммы 3 и свойство монотонности (13), приходим к строгому неравенству

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i, \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ i = \overline{1,N}. \tag{29}$$

Теперь в оценке (26) вместо m возьмём $m+1$, $m+2$, $\ldots$, $m+p$. В результате получим следующие неравенства:

$$0 \leqslant f_i^{(m+2)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+3)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)k^{m+1},$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N},$$
$$0 \leqslant f_i^{(m+3)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+4)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)k^{m+2},$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 \leqslant f_i^{(m+p+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+p+2)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)k^{m+p},$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ p,m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Суммируя их с неравенством (26), приходим к двусторонней оценке

$$0 \leqslant f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+p+2)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)(k^m+k^{m+1}+\ldots+k^{m+p}),$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ p,m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{30}$$

Из (30), в частности, следует, что

$$0 < f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i^{(m+p+2)}(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)\frac{k^m}{1-k}. \tag{31}$$

Зафиксировав индекс m и устремив $p\to\infty$ в (31), получим

$$0 < f_i^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_n) - f_i(x_1,\ldots,x_n) < \eta_i(1-\sigma_0)\frac{k^m}{1-k}. \tag{32}$$

Заметим также, что если функции $\{C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\}_{i,j=\overline{1,N}}$ удовлетворяют дополнительному условию

$$a_{ij} - C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\in L_1(\mathbb{R}^n), \quad i,j=\overline{1,N}, \tag{33}$$

то, рассуждая аналогично доказательству основной теоремы (об интегральной асимптотике решения) из работы [13], можно утверждать, что существуют положительные постоянные $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\ldots$, $\mathcal{D}_N$ такие, что

$$0 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta_i - f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n))dx_1\ldots dx_n \leqslant \mathcal{D}_i, \quad m=0,1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Отсюда согласно теореме Б. Леви заключаем, что $\eta_i - f_i\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,N}$, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta_i - f_i(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant \mathcal{D}_i, \quad i=\overline{1,N}.$$

На основании изложенного выше справедлива следующая

Теорема 1. *При выполнении условий a)–e), 1), 2) система нелинейных многомерных интегральных уравнений (1) имеет покоординатно положительное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}^n$ решение $f(x_1,\ldots,x_n)=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{т}}$, являющееся равномерным пределом последовательных приближений (12). Более того, имеют место оценки (27)–(29) и (32). Если к тому же выполняется условие (33), то $\eta_i - f_i\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,N}$.*

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1)

Рассмотрим следующий подкласс непрерывных покоординатно неотрицательных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ вектор-функций:

$$\mathbb{H}:=\Big\{f(x_1,\ldots,x_n)=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n))^{\mathrm{T}}:\ f_i\in C_M(\mathbb{R}^n),$$

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 0,\ \ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N},$$

$$\text{существует } j_0\in\{1,2,\ldots,N\} \text{ такое, что } \inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r} f_{j_0}(x_1,\ldots,x_n)>0\Big\}, \tag{34}$$

где число $r>0$ определяется в условии d), через $C_M(\mathbb{R}^n)$ обозначено пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^n$. Имеет место следующая

Теорема 2. *При выполнении условий* a)–e), 1), 2) *система нелинейных многомерных интегральных уравнений* (1) *кроме решения* f, *построенного при помощи последовательных приближений* (13), *в классе* $\mathbb{H}$ *других решений не имеет.*

Доказательство. Предположим обратное: система (1) кроме решения $f\in\mathbb{H}$, построенного при помощи последовательных приближений (12), обладает также другим решением $f^*\in\mathbb{H}$. Тогда, используя леммы 2 и 3, заключаем, что

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n)<\eta_i,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}, \tag{35}$$

$$\alpha_i^*:=\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f_i^*(x_1,\ldots,x_n)>0,\quad i=\overline{1,N}. \tag{36}$$

Применив метод индукции по m, несложно убедиться в достоверности следующих неравенств:

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n)<f_i^{(m)}(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=0,1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{37}$$

В (37) устремляя $m\to\infty$, приходим к неравенству

$$f_i^*(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{38}$$

Рассмотрим функции $B_i(x_1,\ldots,x_n)=f_i^*(x_1,\ldots,x_n)/f_i(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N}$. Так как $f,f^*\in\mathbb{H}$, то в силу (28), (29), (35), (36), (38) имеем, что $B_i\in C(\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,N}$, и

$$\frac{\alpha_i^*}{\eta_i}\leqslant B_i(x_1,\ldots,x_n)\leqslant 1,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}.$$

Обозначим $\sigma^*=\min_{i\in\overline{1,N}}\{\alpha_i^*/\eta_i\}$. В силу (35) и (36) число $\sigma^*\in(0,1)$. Таким образом, получаем неравенство

$$\sigma^* f_i(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i^*(x_1,\ldots,x_n)\leqslant f_i(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{39}$$

Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 1, из (39) получаем следующие оценки:

$$0\leqslant f_i(x_1,\ldots,x_n)-f_i^*(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\eta_i(1-\sigma^*)k_*^m,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=\overline{1,N}, \tag{40}$$

где $k_*=(1-\varphi(\sigma^*/2))/(1-\sigma^*/2)\in(0,1)$.

В (40) устремляя число $m\to\infty$, приходим к равенству $f_i(x_1,\ldots,x_n)=f_i^*(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N}$. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* a)–d), 1), 2) *и имеют место соотношения*

$$C_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=a_{ij},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ i,j=\overline{1,N}.$$

Тогда система (1) *в классе* $\mathbb{H}$ *обладает только тривиальным решением* $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^{\mathrm{T}}$.

5. ПРИМЕРЫ

Для наглядности полученных теоретических результатов приведём примеры матричного ядра K и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$.

Примеры ядра K:

p$_1$) $K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,x_2-t_2,\ldots,x_n-t_n)$, $(x_1,\ldots,x_n),(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $i,j=\overline{1,N}$, где $\mathring{K}_{ij}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)>0$, $\mathring{K}_{ij}\in C(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n}\mathring{K}_{ij}(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n=a_{ij}<1$, $i,j=\overline{1,N}$, $r(A)=1$, $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$, $(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in\mathbb{R}^n$.

p$_2$) $K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=\lambda_{ij}(|x|)\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,x_2-t_2,\ldots,x_n-t_n)$, $(x_1,\ldots,x_n),(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, $0<\inf_{v\geqslant 0}\lambda_{ij}(v)\leqslant\lambda_{ij}(v)<1$, $v\geqslant 0$, $1-\lambda_{ij}\in L_1(0,+\infty)$, $i,j=\overline{1,N}$.

p$_3$) $K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)$, $(x_1,\ldots,x_n),(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)>0$, $C^*_{ij}\in C(\mathbb{R}^n)$, $\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=1$, $i,j=\overline{1,N}$.

Приведём также *примеры функций* $\mathring{K}_{ij}$, λ_{ij}, C^*_{ij}, $i,j=\overline{1,N}$:

q$_1$) $\mathring{K}_{ij}(\tau_1,\ldots,\tau_n)=\pi^{-n/2}a_{ij}e^{-(\tau_1^2+\ldots+\tau_n^2)}$, $r(A)=1$, $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$, $\tau_j\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,N}$,

q$_2$) $\mathring{K}_{ij}(\tau_1,\ldots,\tau_n)=\int_a^b e^{-(|\tau_1|+\ldots+|\tau_n|)s}\,dQ_{ij}(s)$, $\tau_j\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,N}$, где $Q_{ij}(s)$ — монотонно возрастающие функции на $[a,b)$, $0<a<b\leqslant+\infty$, причём

$$2^n\int_a^b\frac{1}{s^n}\,dQ_{ij}(s)=a_{ij},\quad i,j=\overline{1,N};$$

q$_3$) $\lambda_{ij}(|x|)=1-\varepsilon_{ij}e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}$, $0<\varepsilon_{ij}<1$ — параметры, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i,j=\overline{1,N}$,

q$_4$) $C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=1-\varepsilon_{ij}e^{-(|x_1|+\ldots|x_n|)}$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $i,j=\overline{1,N}$.

Перейдем теперь к *примерам нелинейностей* $\{G_j(u)\}_{j=\overline{1,N}}$:

r$_1$) $G_j(u)=u^{\beta_j}\eta_j^{1-\beta_j}$, $u\in[0,+\infty)$, $\beta_j\in(0,1)$, $j=\overline{1,N}$;

r$_2$) $G_j(u)=\eta_j(u^{\beta_j}+u^{\delta_j})/(\eta_j^{\beta_j}+\eta_j^{\delta_j})$, $u\in[0,+\infty)$, $\beta_j,\delta_j\in(0,1)$, $j=\overline{1,N}$;

r$_3$) $G_j(u)=l_j(1-e^{-u^{\beta_j}})$, $u\in[0,+\infty)$, $\beta_j\in(0,1)$, $l_j=\eta_j/(1-\exp\{-\eta_j^{\beta_j}\})$, $j=\overline{1,N}$.

Подробно остановимся на примерах p$_3$), q$_1$), r$_3$) и проверим выполнение условий 2) и d). Прежде всего заметим, что в данном случае

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\biggl(C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\int_{\mathbb{R}^n}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n\biggr)=$$

$$=\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\biggl(C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\int_{\mathbb{R}^n}\mathring{K}_{ij}(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n\biggr)=$$

$$=a_{ij}\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=a_{ij},\quad i,j=\overline{1,N}.$$

Так как $r(A)=1$ (см. пример q$_1$)), то условие 2) выполняется. Для полноты изложения приведём пример матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$ с единичным спектральным радиусом и с элементами $a_{ij}\in(0,1)$, $i,j=\overline{1,N}$ (в случае когда $N=2$):

$$A=\begin{pmatrix}7/9 & 1/3\\ 1/3 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Проверим условие d). Сначала оценим интеграл от функции $\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)$ по множеству $\mathbb{R}^n\setminus B_r$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n-\int\limits_{B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=a_{ij}-\int\limits_{B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n\geqslant a_{ij}-\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=a_{ij}-\int\limits_{-r}^{r}\Phi_{ij}(x_n-t_n)\,dt_n=a_{ij}-\int\limits_{x_n-r}^{x_n+r}\Phi_{ij}(\tau_n)\,d\tau_n,$$

где $\Phi_{ij}(\tau):=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathring{K}_{ij}(t_1,\ldots,t_{n-1},\tau)\,dt_1\ldots dt_{n-1}$.

Рассмотрим функции $F_{ij}(x_n):=\int_{x_n-r}^{x_n+r}\Phi_{ij}(\tau_n)\,d\tau_n$, $i,j=\overline{1,N}$, $x_n\in\mathbb{R}$. Так как $F_{ij}(x_n)\to 0$ при $|x_n|\to\infty$, то для каждых фиксированных $i,j\in\{1,2,\ldots,N\}$ существует число $r_0>0$ такое, что при $|x_n|>r_0$

$$F_{ij}(x_n)\leqslant\frac{a_{ij}}{2}.$$

Но поскольку $F_{ij}\in C(\mathbb{R})$ и $\mathring{K}_{ij}(t_1,\ldots,t_n)>0$, $(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, то для $x_n\in[-r_0,r_0]$

$$F_{ij}(x_n)\leqslant\max_{x_n\in[-r_0,r_0]}\left\{\int\limits_{x_n-r}^{x_n+r}\Phi_{ij}(\tau_n)\,d\tau_n\right\}=:\delta_{ij}<a_{ij}.$$

Следовательно, $F_{ij}(x_n)\leqslant\max\{a_{ij}/2,\delta_{ij}\}<a_{ij}$, $x_n\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,N}$.

Таким образом, имеем

$$\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus B_r}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n\geqslant$$

$$\geqslant\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\mathring{K}_{ij}(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)\,dt_1\ldots dt_n\geqslant a_{ij}-\max\left\{\frac{a_{ij}}{2},\delta_{ij}\right\}>0,\quad i,j=\overline{1,N},$$

откуда вытекает, что

$$\varepsilon_i(r)\geqslant\min_{j=\overline{1,N}}\left\{C^0_{ij}\left(a_{ij}-\max\left\{\frac{a_{ij}}{2},\delta_{ij}\right\}\right)\right\}>0,$$

где $C^0_{ij}:=\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}C^*_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$.

С другой стороны, очевидно, что $\varepsilon_i(r)\leqslant a_{ij}<1$, $i,j=\overline{1,N}$.

Теперь убедимся, что для примера $р_3$) уравнения $G_i(u)=u/\varepsilon_i(r)$ имеют положительные решения d_i. Действительно, так как $G_i\in C(\mathbb{R}^+)$, $G_i(\eta_i)=\eta_i$, $\lim_{u\to+0}G_i(u)/u=+\infty$, $\lim_{u\to+\infty}G_i(u)/u=0$, $i=\overline{1,N}$, а $\varepsilon_i(r)\in(0,1)$ и $G_i(u)/u$ монотонно убывает на $(0,+\infty)$, то при каждом $i\in\{1,2,\ldots,N\}$ существует единственное $d_i>0$ такое, что $G_i(d_i)/d_i=\varepsilon_i(r)$.

Проверка условий 2) и d) для остальных примеров выполняется аналогично.

Теперь приведём конкретный пример нелинейного многомерного интегрального уравнения, имеющего приложение в теории p-адической струны (см. [5]):

$$\varphi^p(x_1,\ldots,x_n)=\pi^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-((x_1-t_1)^2+\ldots+(x_n-t_n)^2)}\varphi(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где $p>2$ — нечётное число. С помощью обозначения $f(x_1,\ldots,x_n)=\varphi^p(x_1,\ldots,x_n)$ данное уравнение сводится к многомерному уравнению вида (1) с вогнутой нелинейностью относительно искомой неотрицательной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Приведём также пример одномерного интегрального уравнения свёрточного типа с экспоненциальной нелинейностью, возникающего в математической теории географического распространения эпидемии:

$$f(x)=a\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(1-e^{-f(t)})\,dt, \quad x\in\mathbb{R},$$

где $a>1$ — числовой параметр, ядро $K(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,dx=1$ (см. [6, с. 318] в формулировке теоремы 1 $(f(x)=-\chi(x))$).

Авторы выражают благодарность рецензентам за полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер ; пер. с англ. С.П. Демушкина. — М. : Наука, 1973. — 280 с.
2. Владимиров, В.С. О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны / В.С. Владимиров, Я.И. Волович // Теор. мат. физика. — 2004. — Т. 138, № 3. — С. 355–368.
3. Хачатрян, Х.А. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны / Х.А. Хачатрян // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 2. — С. 172–193.
4. Арефьева, И.Я. Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в p-адических струнах / И.Я. Арефьева // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2004. — Т. 245. — С. 47–54.
5. Khachatryan, A.Kh. Solvability of a class of nonlinear pseudo-differential equations in $\mathbb{R}^n$ / A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. — 2018. — V. 10, № 2. — P. 90–99.
6. Atkinson, C. Deterministic epidemic waves / C. Atkinson, G.E.H. Reuter // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — V. 80. — P. 315–330.
7. Diekmann, O. Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection / O. Diekmann // J. Math. Biol. —1978. — V. 6, № 2. — P. 109–130.
8. Петросян, А.С. Единственность решения одной системы интегральных уравнений на полуоси с выпуклой нелинейностью / А.С. Петросян, Ц.Э. Терджян, Х.А. Хачатрян // Мат. тр. — 2020. — Т. 23, № 2. — С. 187–203.
9. Хачатрян, Х.А. О разрешимости одной системы сингулярных интегральных уравнений с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой / Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян // Изв. вузов. Математика. — 2021. — № 1. — С. 31–51.

10. Хачатрян, Х.А. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой / Х.А. Хачатрян // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 164–181.
11. Khachatryan, Kh.A. Alternating bounded solutions of a class of nonlinear two-dimensional convolution-type integral equations / Kh.A. Khachatryan, A.S. Petrosyan // Trans. Moscow Math. Soc. — 2021. — V. 82, № 2. — P. 259–271.
12. Khachatryan, Kh.A. On bounded solutions of a class of nonlinear integral equations in the plane and the Urysohn equation in a quadrant of the plane / Kh.A. Khachatryan, H.S. Petrosyan // Ukr. Math. J. — 2021. — V. 73, № 5. — P. 811–829.
13. Хачатрян, Х.А. Об одном классе многомерных интегральных уравнений типа свёртки с выпуклой нелинейностью / Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 686–695.
14. Арабаджян, Л.Г. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна / Л.Г. Арабаджян // Изв. НАН Армении. Сер. Математика. — 1997. — Т. 32, № 1. — С. 21–28.
15. Жуковская, Л.В. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн / Л.В. Жуковская // Теор. мат. физика. — 2006. — Т. 146, № 3. — С. 402–409.
16. Хачатрян, Х.А. Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью / Х.А. Хачатрян // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84, № 4. — С. 198–207.
17. Хачатрян, Х.А. О разрешимости некоторых нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки / Х.А. Хачатрян // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2020. — Т. 81, № 1. — С. 3–40.
18. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — 4-е изд., перераб. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

ON THE SOLVABILITY OF A SYSTEM OF MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS WITH CONCAVE NONLINEARITIES

 Kh. A. Khachatryan[1], **H. S. Petrosyan**[2]

[1] *Yerevan State University, Armenia*
[2] *Armenian National Agrarian University, Yerevan, Armenia*
e-mail: [1] *khachatur.khachatryan@ysu.am,* [2] *Haykuhi25@mail.ru*

The work is devoted to the study of questions of existence and uniqueness of a continuous bounded and positive solution to one system of nonlinear multidimensional integral equations. The scalar analogue of the indicated system of integral equations, with different representations of the corresponding matrix kernel and nonlinearities, has important applied significance in a number of areas of physics and biology. This article proposes a special iterative approach for constructing a positive continuous and bounded solution to the system under study. It is possible to prove that the corresponding iterations uniformly converge to a continuous solution of the specified system. Using some a priori estimates for strictly concave functions, we also prove the uniqueness of the solution in a fairly wide subclass of continuous bounded and coordinately nonnegative vector functions. In the case when the integral of the matrix kernel has a unit spectral radius, it is proved that in a certain subclass of continuous bounded and coordinate-wise non-negative vector functions, this system has only a trivial solution, which is an eigenvector of the kernel integral matrix.

Keywords: nonlinear integral equation, system of integral equations, positive solution, continuous solution, limited solution, trivial solution, iterative process

FUNDING

The research of the first author was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia, scientific project no. 23RL-1A027.

REFERENCES

1. Lancaster, P., *Theory of Matrices*, New York; London: Academic Press, 1969.
2. Vladimirov, V.S. and Volovich, Ya.I., Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory, *Theor. Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309.
3. Khachatryan, Kh.A., On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory, *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427.
4. Aref'eva, I.Ya., Rolling tachyon on non-BPS branes and p-adic strings, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, vol. 245, pp. 40–47.
5. Khachatryan, A.Kh. and Khachatryan, Kh.A., Solvability of a class of nonlinear pseudo-differential equations in $\mathbb{R}^n$, *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 90–99.
6. Atkinson, C. and Reuter, G.E.H., Deterministic epidemic waves, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, vol. 80, pp. 315–330.
7. Diekmann, O., Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection, *J. Math. Biol.*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130.
8. Petrosyan, H.S., Terdzhyan, Ts.E., and Khachatryan, Kh.A., Uniqueness of the solution of one system of integral equations on the semi-axis with convex nonlinearity, *Matematicheskie Trudy*, 2020, vol. 23, no. 2, pp. 187–203.
9. Khachatryan, Kh.A. and Petrosyan, H.S., Solvability of a certain system of singular integral equations with convex nonlinearity on the positive half-line, *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 27–46.
10. Khachatryan, Kh.A., The solvability of a system of nonlinear integral equations of Hammerstein type on the whole line, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 164–181.
11. Khachatryan, Kh.A. and Petrosyan, A.S., Alternating bounded solutions of a class of nonlinear two-dimensional convolution-type integral equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2021, vol. 82, no. 2, pp. 259–271.
12. Khachatryan, Kh.A. and Petrosyan, H.S., On bounded solutions of a class of nonlinear integral equations in the plane and the Urysohn equation in a quadrant of the plane, *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 73, no. 5, pp. 811–829.
13. Khachatryan, Kh.A. and Petrosyan, H.S., On one class of multidimensional integral equations of convolution type with convex nonlinearity, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 680–690.
14. Arabadzhyan, L.G., Solutions of certain integral equations of the Hammerstein type, *J. Contemp. Math. Anal.*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 17–24.
15. Zhukovskaya, L.V., Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory, *Theor. Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342.
16. Khachatryan, Kh.A., Existence and uniqueness of solution of a certain boundary-value problem for a convolution integral equation with monotone non-linearity, *Izv. Math.*, 2020, vol. 84, no. 4, pp. 807–815.
17. Khachatryan, Kh.A., Solvability of some nonlinear boundary value problems for singular integral equations of convolution type, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2020, vol. 81, no. 1, pp. 1–31.
18. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Introductory Real Analysis*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970.