ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 35–49

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

О ДВИЖЕНИИ ФРОНТА В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ–АДВЕКЦИЯ С KPZ-НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2025 г. **А. О. Орлов**

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 26.03.2024 г., после доработки 24.06.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Получено асимптотическое приближение решения, имеющего вид движущегося внутреннего слоя (фронта), начально-краевой задачи для сингулярно возмущённого параболического уравнения реакция–диффузия–адвекция с KPZ-нелинейностью. Найдено асимптотическое приближение для скорости движения фронта. Доказательство теоремы существования и единственности решения проведено с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: уравнение реакция–адвекция–диффузия, KPZ-нелинейность, контрастные структуры, движение фронта, малый параметр

DOI: 10.31857/S0374064125010041, EDN: HZYRYP

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущённого параболического уравнения, которое отличается от классического сингулярно возмущённого уравнения реакция–диффузия–адвекция (см. [1, 2]) наличием дополнительного нелинейного слагаемого, содержащего квадрат градиента искомой функции (KPZ-нелинейности [3, 4]):

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2 A(u,x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-f(u,x,\varepsilon)=0,\quad x\in(-1,1),\ \ t\in(0,T],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\quad t\in[0,T],$$
$$u(x,0,\varepsilon)=u_{init}(x,\varepsilon),\quad x\in[-1,1], \tag{1}$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ — малый параметр, $\varepsilon>0$ — заданная постоянная.

Решения типа бегущих волн для квазилинейных параболических уравнений реакция–диффузия–адвекция являются предметом интенсивного изучения (см. обширные монографии [5, 6]). Внимание к нелинейностям вида $A(u,x)(\partial u/\partial x)^2$ обусловлено как теоретическим интересом — квадрат является предельным показателем степени, при котором выполнены условия Бернштейна на рост нелинейности (см., например, [7–9]), так и важными приложениями, где такие нелинейности используются в математических моделях, в частности, моделях популяционной динамики [10], при моделировании роста свободной поверхности в теории полимеров [3, 4, 11], и многими другими. Отметим работу [12], в которой построены точные решения уравнения KPZ для нескольких физически оправданных нелинейностей. Однако там предполагается, что $A(u,x)=\text{const}$, $f=f(x,t)$. Кардинальное отличие задачи (1) состоит в том, что рассматривается уравнение, в котором нелинейные слагаемые явно зависят от координаты и искомой функции. В настоящей работе предлагается алгоритм построения асимптотического приближения решения вида фронта, при этом скорость движения является функцией координаты.

Стационарные решения задачи (1) с пограничными и внутренними слоями изучены в статьях [13, 14]. Погранслойные решения у системы тихоновского типа с KPZ-нелинейностями изучены в работе [15].

Статья структурирована следующим образом. В п. 2 строится асимптотическое приближение решения вида движущегося фронта, используя метод А.Б. Васильевой [16]. Отметим, что поскольку задача (1) является сингулярно возмущённой, то при $\varepsilon=0$ уравнение задачи (1) меняет свой тип, превращаясь из параболического в алгебраическое с тремя корнями (см. условие 2), два из которых описывают устойчивые положения равновесия системы и представляют собой регулярную часть асимптотического приближения нулевого порядка точности. Однако регулярное приближение не позволяет описать узкую область с большим градиентом, в которой решение переходит с одного устойчивого уровня на другой. Для описания решения в этой области и согласования устойчивых положений равновесия между собой строятся так называемые функции переходного слоя. Таким образом строится формальное асимптотическое приближение решения во всей рассматриваемой области. В п. 3 указан алгоритм нахождения асимптотического приближения положения фронта. В п. 4 приведено обоснование формальной асимптотики и доказана теорема существования и единственности, используя асимптотический метод дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова, который показал свою эффективность во многих сингулярно возмущённых задачах [16]. Полученные результаты проиллюстрированы в п. 5 на примере, который может быть использован для разработки и верификации новых численных методов для рассматриваемого класса задач (см. [17]).

Результаты, полученные в данной статье, развивают исследования [1, 2], в которых рассмотрено движение фронта в уравнении реакция–диффузия–адвекция со слабой адвекцией и гладкими или модульными (разрывными при некотором значении искомой функции нелинейностями) источниками, и переносят их на новый класс сингулярно возмущённых задач с KPZ-нелинейностями. При этом, как и в работах [1, 2], доказана теорема существования и единственности решения, имеющего в обоих случаях одинаковую форму контрастной структуры типа ступеньки [16].

В обсуждаемой ниже задаче предполагается, что в начальный момент времени фронт уже сформирован. Это означает, что функция $u_{init}(x,\varepsilon)$ имеет внутренний переходный слой в окрестности некоторой точки $x_{00}\in(-1,1)$, т.е. она близка к некоторому корню $\varphi^{(-)}(x)$ вырожденного уравнения $f(u,x,0)=0$ левее точки x_{00} и к корню $\varphi^{(+)}(x)$ правее этой точки. В окрестности x_{00} происходит резкий переход от $\varphi^{(-)}(x)$ к $\varphi^{(+)}(x)$.

Будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 1. Функции $A(u,x)$, $f(u,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими в своих областях определения.

Условие 2. Вырожденное уравнение $f(u,x,0)=0$ имеет ровно три решения $u=\varphi^{(\pm,0)}(x)$, причём $\varphi^{(-)}(x)<\varphi^{(0)}(x)<\varphi^{(+)}(x)$, $x\in[-1,1]$, а также справедливы неравенства

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0)>0,\quad f_u(\varphi^{(0)}(x),x,0)<0,\quad x\in[-1,1].$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ

Асимптотика решения задачи (1) строится методом пограничных функций отдельно в каждой из областей $[-1,\hat{x}]\times[0,T]$ и $[\hat{x},1]\times[0,T]$ с подвижной границей (см. [16]) с использованием развиваемого в научной школе профессоров А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, Н.Н. Нефедова эффективного метода построения асимптотики локализации внутреннего слоя в виде

$$U(x,\varepsilon)=\begin{cases}U^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t,\varepsilon)\in[-1,\hat{x}]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0],\\ U^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t,\varepsilon)\in[\hat{x},1]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0].\end{cases}$$

Каждую из функций $U^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ будем представлять в виде суммы трёх слагаемых:

$$U^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)=\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)+Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+R^{(\pm)}\big(\eta^{(\pm)},\varepsilon\big),$$

где $\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)=\bar{u}_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x)+\ldots$ — регулярная часть разложения, функции $Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)= =Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+\ldots$ описывают поведение решения в окрестности точки перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$, $\xi=(x-\hat{x}(t,\varepsilon))/\varepsilon$ — переменная переходного слоя: $\xi\leqslant 0$ для функций с индексом $(-)$ и $\xi\geqslant 0$ для функций с индексом $(+)$; функции $R^{(\pm)}(\eta^{(\pm)},\varepsilon)=R_0^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})+\varepsilon R_1^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})+\ldots$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка $[-1,1]$, $\eta^{(\pm)}=(x\mp 1)/\varepsilon$ — растянутые переменные вблизи точек $x=\pm 1$ соответственно. Поскольку функции $R_i^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})$ определяются стандартным образом (см., например, [16]), то процедуру их построения опускаем. Отметим, что данные функции не зависят от переменной t и тем самым не участвуют в описании движущегося переходного слоя, а функции $R_0^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})=0$ в силу краевых условий Неймана.

Положение внутреннего переходного слоя определяется из условия C^1-сшивания асимптотических представлений $U^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$:

$$U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varphi^{(0)}(\hat{x}(t,\varepsilon)), \tag{2}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{3}$$

Точку перехода $x=\hat{x}(t,\varepsilon)$ будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$\hat{x}(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\ldots \tag{4}$$

Коэффициенты данного разложения будут определены в процессе построения асимптотики.

Регулярная часть асимптотики определяется после подстановки представления для функций $\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ в уравнение

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{u}^{(\pm)}}{\partial x^2}-\varepsilon^2A(\bar{u}^{(\pm)},x)\left(\frac{\partial\bar{u}^{(\pm)}}{\partial x}\right)^2-f(\bar{u}^{(\pm)},x,\varepsilon)=0.$$

Стандартным образом [16] получим алгебраические уравнения для определения функций регулярной части $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$, $k=0,1,\ldots$

С учётом условия 2 регулярные функции нулевого порядка определяются как

$$\bar{u}_0^{(\pm)}(x)=\varphi^{(\pm)}(x).$$

Для сокращения записи введём обозначения

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x):=f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0).$$

Функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ при $k=1,2,\ldots$ определяются из уравнений

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x)\bar{u}_k^{(\pm)}(x)=\bar{h}_k^{(\pm)}(x),$$

где функции $\bar{h}_k^{(\pm)}(x)$ известны на каждом k-м шаге и выражаются рекуррентно через функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ с индексами $0,1,\ldots,k-1$. Разрешимость этих уравнений следует из условия 2.

Для того чтобы получить уравнения, которым удовлетворяют функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, перепишем дифференциальный оператор задачи в переменных (ξ,t). Тогда уравнения для функций $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $k=0,1,\ldots$, определяются стандартным способом [16] путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в обеих частях равенств:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}\frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial\xi}+A\big(\bar{u}^{(\pm)}\big(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon)\big)\left(\frac{\partial\bar{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2-\\ -A\big(\bar{u}^{(\pm)}\big(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big)+Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon)\big)\left(\frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2-\varepsilon\frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial t}=\\ =f\big(\bar{u}^{(\pm)}\big(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big)+Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big)-f\big(\bar{u}^{(\pm)}\big(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon\big).\end{gathered}\tag{5}$$

В отличие от подхода, изложенного в работе [2], мы не будем раскладывать по степеням ε точку перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$. Это упростит алгоритм построения асимптотики. Отметим, что уравнения, из которых находятся функции $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, содержат функции, зависящие от $\hat{x}(t,\varepsilon)$, $\partial\hat{x}(t,\varepsilon)/\partial t$, что и объясняет наличие у $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ аргумента ε.

Потребуем, чтобы функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $k=0,1,\ldots$, удовлетворяли условиям равенства нулю на бесконечности: $Q_k^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0$ при $\xi\to-\infty$, $Q_k^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0$ при $\xi\to+\infty$, $k=0,1,\ldots$, $t\in[0,T]$.

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в правой и левой частях равенств (5), получаем уравнения для функции $Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)$ при $\xi\leqslant 0$ и функции $Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)$ при $\xi\geqslant 0$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi}-A\big(\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\hat{x}(t,\varepsilon)\big)\left(\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2=\\ =f\big(\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\hat{x}(t,\varepsilon),0\big).\end{gathered}\tag{6}$$

Дополнительные условия при $\xi=0$ получим из условия непрерывного сшивания (2), записанного в нулевом порядке по ε:

$$Q_0^{(-)}(0,t,\varepsilon)+\varphi^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon))=Q_0^{(+)}(0,t,\varepsilon)+\varphi^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon))=\varphi^{(0)}(\hat{x}(t,\varepsilon)).$$

Добавим также условия на бесконечности: $Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0$ при $\xi\to-\infty$, $Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0$ при $\xi\to+\infty$, $t\in[0,T]$.

Введём оператор D, действующий по правилу

$$D\hat{x}:=\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t},\tag{7}$$

и функции

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon), \tag{8}$$

$$\tilde{u}(\xi,t,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon), & \text{если } \xi\leqslant 0,\\ \varphi^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon), & \text{если } \xi\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\tilde{v}^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}(\xi,t,\varepsilon),\quad \xi\leqslant 0,\quad \tilde{v}^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}(\xi,t,\varepsilon),\quad \xi\geqslant 0.$$

Замечание. Из вида уравнений (6) следует, что в функциях $Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $\tilde{u}(\xi,t,\varepsilon)$, $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ можно перейти к другому набору аргументов — $(\xi,\hat{x})$. В дальнейшем будем пользоваться обоими наборами, выбирая для каждого конкретного случая наиболее удобный.

Перепишем уравнения (6), а также дополнительные условия, с использованием (8):

$$\frac{\partial^2\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+D\hat{x}\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}-A(\tilde{u}^{(\pm)},\hat{x})\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2=f(\tilde{u}^{(\pm)},\hat{x},0),$$

$$\tilde{u}^{(\pm)}(0,\hat{x})=\varphi^{(0)}(\hat{x}),\quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty,\hat{x})=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \tag{9}$$

Наряду с задачами (9), рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\xi^2}+W\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}-A(\hat{u},\hat{x})\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}\right)^2=f(\hat{u},\hat{x},0),\quad \hat{u}(0,\hat{x})=\varphi^{(0)}(\hat{x}),\quad \hat{u}(\pm\infty,\hat{x})=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \tag{10}$$

Сформулируем и докажем результат существования решения задачи (10) в виде леммы.

Лемма. *Для каждого $\hat{x}\in(-1,1)$ существует единственная величина W такая, что задача (10) имеет единственное гладкое монотонное решение $\hat{u}(\xi,\hat{x})$, удовлетворяющее оценке*

$$|\hat{u}(\xi,\hat{x})-\varphi^{(\pm)}(\hat{x})|<C\exp\{-\kappa|\xi|\},$$

где C и κ — некоторые положительные постоянные. При этом зависимость $W(\hat{x})$ определяется как

$$W(\hat{x})=\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\varphi^{(+)}(\hat{x})} f(u,\hat{x},0)\exp\left\{-2\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{u}A(y,\hat{x})\,dy\right\}du\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}(\xi,\hat{x})\right)^2\exp\left\{-2\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\hat{u}(\xi,\hat{x})}A(y,\hat{x})dy\right\}d\xi\right]^{-1}.$$

Гладкость функции $W(\hat{x})$ совпадает с гладкостью функций $f(u,\hat{x},0)$ и $A(u,\hat{x})$.

Доказательство. Для того чтобы использовать известный результат из [18], сделаем монотонное преобразование, предложенное А.В. Бицадзе в работе [19]:

$$z(\xi,\hat{x}):=z(\hat{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x})=\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\hat{u}(\xi,\hat{x})}\exp\left\{-\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{y}A(r,\hat{x})\,dr\right\}dy,\quad (\hat{u},\hat{x})\in[\varphi^{(-)}(\hat{x}),\varphi^{(+)}(\hat{x})]\times[-1,1].$$

Введём обозначения

$$z^{(\pm,0)}(\hat{x})=\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\varphi^{(\pm,0)}(\hat{x})}\exp\left\{-\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{y}A(r,\hat{x})\,dr\right\}dy.$$

В силу монотонности преобразования $z(\hat{u},\hat{x})$ по $\hat{u}$ можно определить обратную функцию

$$\hat{u}(\xi,\hat{x})=h(z(\xi,\hat{x}),\hat{x}),\quad (z,\hat{x})\in[0,z^{(+)}(\hat{x})]\times[-1,1].$$

Таким образом, задача (10) переходит в задачу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+W\frac{\partial z}{\partial\xi}-f(h(z,\hat{x}),\hat{x},0)\exp\Bigg\{-\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{h(z,\hat{x})}A(r,\hat{x})\,dr\Bigg\}=0,$$

$$z(-\infty,\hat{x})=0,\quad z(0,\hat{x})=z^{(0)}(\hat{x}),\quad z(+\infty,\hat{x})=z^{(+)}(\hat{x}),\tag{11}$$

для которой в силу условий 1 и 2 верны [18] следующие утверждения.

1. Для каждого $\hat{x}\in(-1,1)$ существует единственная величина W такая, что задача (11) имеет единственное гладкое монотонное решение $\hat{z}(\xi,\hat{x})$, удовлетворяющее оценке

$$|z(\xi,\hat{x})-z^{(\pm)}(\hat{x})|<C\exp\{-\kappa|\xi|\},$$

где C и κ — некоторые положительные постоянные.

2. Зависимость $W(\hat{x})$ определяется как

$$W(\hat{x})=\int\limits_0^{z^{(+)}(\hat{x})}f(h(z,\hat{x}),\hat{x},0)\exp\Bigg\{-\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{h(z,\hat{x})}A(r,\hat{x})\,dr\Bigg\}\,dz\Bigg[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bigg(\frac{\partial\hat{z}}{\partial\xi}(\xi,\hat{x})\bigg)^2d\xi\Bigg]^{-1}.\tag{12}$$

Гладкость функции $W(\hat{x})$ совпадает с гладкостью функций $f(u,\hat{x},0)$ и $A(u,\hat{x})$.

Наконец, возвращаясь к функции $\hat{u}(\xi,\hat{x})$ с помощью преобразования $\hat{u}(\xi,\hat{x})=h(z(\xi,\hat{x}),\hat{x})$ и пересчитывая интегралы в выражении (12), имеем утверждение леммы. Лемма доказана.

Потребуем выполнения ещё одного условия.

Условие 3. Задача

$$\frac{dx}{dt}=W(x),\quad x(0)=x_{00}\tag{13}$$

имеет решение $x=x_0(t)$ такое, что $x_0(t)\in(-1,1)$ при $t\in[0,T]$; $W(x)>0$ для всех $x\in[-1,1]$.

Неравенство $W(x)>0$ в условии 3 гарантирует отсутствие стационарных решений у задачи (13). Обозначим через (9a) задачи (9), в которых заменим $\hat{x}$ на $x_0(t)$, или, иначе, в которых положим $\varepsilon=0$.

Из леммы и условия 3 следует единственная разрешимость задач (9a), так как выполнено условие $D\hat{x}_0=W(x_0)$. При этом

$$\frac{\partial\tilde{u}^{(+)}}{\partial\xi}(0,x_0(t))-\frac{\partial\tilde{u}^{(-)}}{\partial\xi}(0,x_0(t))=0.$$

В силу предполагаемой гладкости функций $f(u,\hat{x},0)$, $A(u,\hat{x})$ (см. условие 1) задачи (9) являются регулярными возмущениями задач (9a), потому они также единственно разрешимы. Отметим, что в силу представления (4)

$$\frac{\partial\tilde{u}^{(+)}}{\partial\xi}(0,\hat{x}(t,\varepsilon))-\frac{\partial\tilde{u}^{(-)}}{\partial\xi}(0,\hat{x}(t,\varepsilon))=O(\varepsilon).$$

Таким образом, построение функций переходного слоя в нулевом порядке завершено.

Функции переходного слоя первого порядка находятся из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + D\hat{x}\frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - 2\tilde{A}(\xi,t)\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - \left(\tilde{A}_u(\xi,t)\left(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\right)^2 + \tilde{f}_u(\xi,t)\right)Q_1^{(\pm)} = r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),$$

$$Q_1^{(\pm)}(0,t,\varepsilon) + \bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) = 0, \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty,t,\varepsilon) = 0, \tag{14}$$

где введены обозначения

$$\tilde{f}_u(\xi,t) = f_u(\tilde{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x},0), \quad \tilde{A}(\xi,t) = A_u(\tilde{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x}), \quad \tilde{A}_u(\xi,t) = A_u(\tilde{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x}) \tag{15}$$

и

$$r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial t}(\xi,t,\varepsilon) + 2\tilde{A}(\xi,t)\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x}) +$$

$$+\left(\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) + \xi\frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x})\right)\left(\tilde{f}_u(\xi,t) + \tilde{A}_u(\xi,t)\left(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\right)^2\right) + \xi\left(\tilde{f}_x(\xi,t) + \tilde{A}_x(\xi,t)\left(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\right)^2\right) + \tilde{f}_\varepsilon(\xi,t).$$

Здесь производные $\tilde{f}_x(\xi,t)$, $\tilde{f}_\varepsilon(\xi,t)$ вычисляются в той же точке, что и производная $\tilde{f}_u(\xi,t)$ в (15). Аналогично $\tilde{A}_x(\xi,t)$ вычисляется в той же точке, что и $\tilde{A}_u(\xi,t)$. Во всех введённых здесь обозначениях аргумент ε подразумеваем, но для краткости опускаем. Задачу для функции $Q_1^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)$ будем решать на полупрямой $\xi \leqslant 0$, а для функции $Q_1^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)$ — на полупрямой $\xi \geqslant 0$. Решения задач (14) записываются в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = -\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x})\frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,\hat{x})} +$$

$$+\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\int_0^{\xi}\frac{e^{-(D\hat{x})\eta}}{(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,\hat{x}))^2 p^{(\pm)}(\eta,\hat{x})}\int_{\pm\infty}^{\eta}\tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,\hat{x})p^{(\pm)}(\sigma,\hat{x})e^{(D\hat{x})\sigma}r_1^{(\pm)}(\sigma,t,\varepsilon)\,d\sigma\,d\eta, \tag{16}$$

где

$$p^{(\pm)}(\xi,\hat{x}) = \exp\left\{-2\int_0^{\xi}A(\tilde{u}^{(\pm)}(y,\hat{x}),\hat{x})\tilde{v}^{(\pm)}(y,\hat{x})\,dy\right\}.$$

Из выражения для функций $r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ следует, что они имеют экспоненциальные оценки [16], а из (16) стандартным образом выводим, что аналогичные оценки справедливы и для функций $Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$.

Аналогично первому приближению можно найти для любого $k = 2,3,\ldots$ функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$: они определяются из краевых задач с таким же дифференциальным оператором, что и в задачах (14).

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ФРОНТА

Опишем алгоритм нахождения асимптотического приближения положения фронта. Неизвестные коэффициенты $x_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, разложения определяются из условий сшивания (3) производных асимптотических приближений. Введём функцию

$$H(\varepsilon,t) := \varepsilon\left(\frac{dU^{(+)}}{dx}(\hat{x},t,\varepsilon) - \frac{dU^{(-)}}{dx}(\hat{x},t,\varepsilon)\right) = H_0(\varepsilon,t) + \varepsilon H_1(\varepsilon,t) + \varepsilon^2 H_2(\varepsilon,t) + \ldots, \tag{17}$$

где

$$H_0(\varepsilon,t)=\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,\hat{x})-\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,\hat{x}),$$

$$H_1(\varepsilon,t)=\frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(\hat{x})-\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(\hat{x})+\left(\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,t,\varepsilon)-\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,t,\varepsilon)\right)$$

и т.д.

Условие C^1-сшивания (3) выражается равенством $H(\varepsilon,t)=0$. В силу леммы и условия 3 с учётом разложения точки перехода (4) это равенство выполнено в порядке ε^0.

Анализ задач (9), (10) показывает, что функция $H_0(\varepsilon,t)$ может быть представлена в виде

$$H_0(\varepsilon,t)=(D\hat{x}-W(\hat{x}))\left[\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,\hat{x})}\int\limits_0^{\pm\infty}(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x}))^2e^{(D\hat{x})\xi}p^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\,d\xi\right]_-^+ +O(\varepsilon^2). \qquad (18)$$

Здесь и далее $[\ ]_-^+$ означает разность между выражениями, помеченными символами $+$ и $-$.

Как следует из разложения (17) и представления (18), члены $x_i(t)$, $i\geqslant 1$, высших порядков в (4) могут быть найдены из следующих задач Коши:

$$\frac{dx_i}{dt}-W'(x_0(t))x_i(t)=G_i(t),\quad x_i(0)=0,$$

где $G_i(t)$ — известные функции.

4. ОБОСНОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ

Положим

$$X_n(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i(t),\quad \xi=\frac{x-X_n(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Кривая $X_n(t,\varepsilon)$ разделяет область $\bar{D}\colon (x,t)\in[-1,1]\times[0,T]$ на две подобласти:

$$\bar{D}_n^{(-)}\colon (x,t)\in[-1,X_n(t,\varepsilon)]\times[0,T] \quad\text{и}\quad \bar{D}_n^{(+)}\colon (x,t)\in[X_n(t,\varepsilon),1]\times[0,T].$$

Определим функции

$$U_n^{(-)}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{u}_i^{(-)}(x)+Q_i^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)+R_i^{(-)}(\eta^{(-)})\right),\quad (x,t)\in\bar{D}_n^{(-)},$$

$$U_n^{(+)}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{u}_i^{(+)}(x)+Q_i^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)+R_i^{(+)}(\eta^{(+)})\right),\quad (x,t)\in\bar{D}_n^{(+)},$$

где $\hat{x}(t,\varepsilon)$, входящие в выражения для функций переходного слоя, заменены на $X_n(t,\varepsilon)$, и обозначим

$$U_n(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}U_n^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_n^{(-)},\\ U_n^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_n^{(+)}.\end{cases} \qquad (19)$$

Для доказательства существования и единственности решения вида движущегося фронта используем асимптотический метод дифференциальных неравенств [16]. Построим непрерывные функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$, $\beta(x,t,\varepsilon)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим условиям.

1. Условие упорядоченности:

$$\alpha(x,t,\varepsilon)\leqslant\beta(x,t,\varepsilon),\quad x\in[-1,1],\ t\in[0,T],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0].\tag{20}$$

2. Действие дифференциального оператора на верхнее и нижнее решения:

$$L[\beta]:=\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial t}-\varepsilon^2A(\beta,x)\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2-f(\beta,x,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant$$
$$\leqslant L[\alpha]:=\varepsilon^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\varepsilon^2A(\alpha,x)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-f(\alpha,x,\varepsilon)\tag{21}$$

для всех $x\in(-1,1)$ и $t\in[0,T]$, за исключением тех $x(t)$, в которых функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,t,\varepsilon)$ являются негладкими.

3. Условия на границе:

$$\frac{d\alpha}{dx}(-1,t,\varepsilon)\geqslant 0\geqslant\frac{\partial\beta}{\partial x}(-1,t,\varepsilon),\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x}(+1,t,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\frac{\partial\beta}{\partial x}(+1,t,\varepsilon),\quad t\in[0,T],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0].\tag{22}$$

4. Условия на начальную функцию:

$$\alpha(x,0,\varepsilon)\leqslant u_{init}(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,0,\varepsilon),\quad x\in[-1,1],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0].\tag{23}$$

5. Условия на скачок производных:

$$\frac{\partial\beta}{dx}(\overline{x}(t)-0,t,\varepsilon)\geqslant\frac{\partial\beta}{dx}(\overline{x}(t)+0,t,\varepsilon),\tag{24}$$

где $\overline{x}(t)$ — точка, в которой верхнее решение является негладким;

$$\frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x}(t)-0,t,\varepsilon)\leqslant\frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x}(t)+0,t,\varepsilon),\tag{25}$$

где $\underline{x}(t)$ — точка, в которой нижнее решение является негладким.

Известно (см. [20]), что при выполнении условий (20)–(25) существует единственное решение задачи (1), для которого выполняются неравенства

$$\alpha(x,t,\varepsilon)\leqslant u(x,t,\varepsilon)\leqslant\beta(x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in[-1,1]\times[0,T].$$

Докажем следующую теорему существования и единственности.

Теорема. *При выполнении условий 1–3 для любой достаточно гладкой начальной функции $u_{init}(x)$, лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha(x,0,\varepsilon)\leqslant u_{init}(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,0,\varepsilon),$$

существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), которое при любом $t\in[0,T]$ заключено между этими верхним и нижним решениями и для которого функция $U_n(x,t,\varepsilon)$ является равномерным в области $[-1,1]\times[0,T]$ асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Доказательство. Верхнее и нижнее решения задачи будем строить как модификацию асимптотических рядов (19). Зададим функцию

$$x_\beta(t,\varepsilon)=X_{n+1}(t)-\varepsilon^{n+1}\delta(t),$$

а положительную функцию $\delta(t)>0$ определим ниже. Построим верхнее решение задачи в каждой из областей $\bar{D}_{\beta}^{(-)}: (x,t)\in[-1,x_{\beta}(t,\varepsilon)]\times[0,T]$ и $\bar{D}_{\beta}^{(+)}: (x,t)\in[x_{\beta}(t,\varepsilon),1]\times[0,T]$:

$$\beta(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\beta^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_{\beta}^{(-)},\\ \beta^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_{\beta}^{(+)}.\end{cases}$$

Сшивать функции $\beta^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $\beta^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке $x_{\beta}(t,\varepsilon)$ будем таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$\beta^{(-)}(x_{\beta}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\beta^{(+)}(x_{\beta}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varphi^{(0)}(x_{\beta}(t,\varepsilon)).$$

Отметим, что функция $\beta(x,t,\varepsilon)$ не является гладкой. Введём растянутую переменную

$$\xi_{\beta}=\frac{x-x_{\beta}(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Построим функции $\beta^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ как модификации формальной асимптотики (19):

$$\beta^{(-)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(-)}|_{\xi_{\beta}}+\varepsilon^{n+1}\big(\mu+q_{\beta}^{(-)}(\xi_{\beta},t,\varepsilon)\big)+\varepsilon^{n+1}R_{\beta}^{(-)}(\eta^{(-)}),\quad (x,t)\in D_{\beta}^{(-)},\ \xi_{\beta}\leqslant 0,\ \eta^{(-)}\geqslant 0;$$

$$\beta^{(+)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(+)}|_{\xi_{\beta}}+\varepsilon^{n+1}\big(\mu+q_{\beta}^{(+)}(\xi_{\beta},t,\varepsilon)\big)+\varepsilon^{n+1}R_{\beta}^{(+)}(\eta^{(+)}),\quad (x,t)\in D_{\beta}^{(+)},\ \xi_{\beta}\geqslant 0,\ \eta^{(+)}\leqslant 0.$$

Здесь под обозначениями $U_{n+1}^{(\pm)}|_{\xi_{\beta}}$ понимаем функции из (19), в которых аргумент ξ у функций переходного слоя заменён на ξ_{β}, а X_{n+1} — на x_{β}.

Положительная величина μ выбирается так, чтобы были выполнены условия (20) и (21). Функции $R_{\beta}^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})$ подбираются так, чтобы было выполнено условие (22) (их построение в данной работе не рассматривается). Функции $q_{\beta}^{(\pm)}(\xi_{\beta},t,\varepsilon)$ нужны для устранения невязок, которые возникают при действии оператора на верхнее решение. Определим их из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 q_{\beta}^{(\pm)}}{\partial\xi_{\beta}^2}+Dx_{\beta}\frac{\partial q_{\beta}^{(\pm)}}{\partial\xi_{\beta}}-2\tilde{A}(\xi_{\beta},t)\tilde{v}^{(\pm)}(\xi_{\beta},x_{\beta})\frac{\partial q_{\beta}^{(\pm)}}{\partial\xi_{\beta}}-$$

$$-\big(\tilde{A}_u(\xi_{\beta},t)\big(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi_{\beta},x_{\beta})\big)^2+\tilde{f}_u(\xi_{\beta},t)\big)q_{\beta}^{(\pm)}-qf^{(\pm)}(\xi_{\beta},t,\varepsilon)=0,$$

$$q_{\beta}^{(\pm)}(0,t,\varepsilon)+\mu=0,\quad q_{\beta}^{(\pm)}(\pm\infty,t,\varepsilon)=0,\tag{26}$$

где $qf^{(\pm)}(\xi_{\beta},t,\varepsilon)=\mu\big(\tilde{A}_u(\xi_{\beta},t)\big(\tilde{v}^{(\pm)}(\xi_{\beta},x_{\beta})\big)^2+\tilde{f}_u(\xi_{\beta},t)-\bar{f}_u^{(\pm)}(x_{\beta})\big)$.

Для данных функций можно получить явные выражения

$$q_{\beta}^{(\pm)}(\xi_{\beta},t,\varepsilon)=-\mu\frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,x_{\beta})}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,x_{\beta})}+$$

$$+\tilde{v}^{(\pm)}(\xi_{\beta},x_{\beta})\int\limits_0^{\xi_{\beta}}\frac{e^{-(Dx_{\beta})\eta}}{(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x_{\beta}))^2p^{(\pm)}(\eta,x_{\beta})}\int\limits_{\pm\infty}^{\eta}\tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,x_{\beta})e^{(Dx_{\beta})\sigma}p^{(\pm)}(\sigma,x_{\beta})qf^{(\pm)}(\sigma,t,\varepsilon)\,d\sigma\,d\eta.\tag{27}$$

Функции $q^{(\pm)}(\xi_{\beta},t,\varepsilon)$ имеют экспоненциальные оценки [16].

Можно упростить выражения (27) следующим образом:

$$q_{\beta}^{(\pm)}(\xi_{\beta},t,\varepsilon)=$$
$$=-\mu-\mu\bar{f}_u^{(\pm)}(x_{\beta})\tilde{v}^{(\pm)}(\xi_{\beta},x_{\beta})\int\limits_0^{\xi_{\beta}}\frac{e^{-(Dx_{\beta})\eta}}{(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x_{\beta}))^2p^{(\pm)}(\eta,x_{\beta})}\int\limits_{\pm\infty}^{\eta}\tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,x_{\beta})e^{(Dx_{\beta})\sigma}p^{(\pm)}(\sigma,x_{\beta})\,d\sigma\,d\eta.$$

По аналогичному алгоритму построим нижнее решение. Зададим функцию

$$x_{\alpha}(t,\varepsilon)=X_{n+1}(t)+\varepsilon^{n+1}\delta(t),$$

где $\delta(t)$ — та же самая функция, что и при построении верхнего решения.

Построим нижнее решение задачи в каждой из областей $\bar{D}_{\alpha}^{(-)}$: $(x,t)\in[-1,x_{\alpha}(t,\varepsilon)]\times[0,T]$ и $\bar{D}_{\alpha}^{(+)}$: $(x,t)\in[x_{\alpha}(t,\varepsilon),1]\times[0,T]$:

$$\alpha(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_{\alpha}^{(-)},\\ \alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}_{\alpha}^{(+)}.\end{cases}$$

Будем сшивать функции $\alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $\alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке $x_{\alpha}(t,\varepsilon)$ таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$\alpha^{(-)}(x_{\alpha}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\alpha^{(+)}(x_{\alpha}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varphi^{(0)}(x_{\alpha}(t,\varepsilon)).$$

Отметим, что функция $\alpha(x,t,\varepsilon)$ не является гладкой. Введём растянутую переменную

$$\xi_{\alpha}=\frac{x-x_{\alpha}(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Построим функции $\alpha^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ как модификации формальной асимптотики (19):

$$\alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(-)}\big|_{\xi_{\alpha}}-\varepsilon^{n+1}(\mu+q_{\alpha}^{(-)}(\xi_{\alpha},t,\varepsilon))+\varepsilon^{n+1}R_{\alpha}^{(-)}(\eta^{(-)}),\quad (x,t)\in D_{\alpha}^{(-)},\ \xi_{\alpha}\leqslant 0,\ \eta^{(-)}\geqslant 0;$$
$$\alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(+)}\big|_{\xi_{\alpha}}-\varepsilon^{n+1}(\mu+q_{\alpha}^{(+)}(\xi_{\alpha},t,\varepsilon))+\varepsilon^{n+1}R_{\alpha}^{(+)}(\eta^{(+)}),\quad (x,t)\in D_{\alpha}^{(+)},\ \xi_{\alpha}\geqslant 0,\ \eta^{(+)}\leqslant 0.$$

Здесь $\mu>0$ — величина, что и в выражении для верхнего решения, а $q_{\alpha}^{(\pm)}(\xi_{\alpha},t,\varepsilon)$ определяются из задач (26), в которых растянутая переменная ξ_{β} заменена на ξ_{α}, а x_{β} — на x_{α}.

Убедимся, что построенные функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам (20)–(25). Условие упорядоченности (20) можно проверить аналогично тому, как это было сделано в работе [2].

Покажем, что неравенство (21) выполняется. Из способа построения верхнего и нижнего решений следуют равенства

$$L\big[\alpha^{(\pm)}\big]=\varepsilon^{n+1}\bar{f}_u^{(\pm)}(x_{\alpha})\mu+O(\varepsilon^{n+2}),\quad L\big[\beta^{(\pm)}\big]=-\varepsilon^{n+1}\bar{f}_u^{(\pm)}(x_{\beta})\mu+O(\varepsilon^{n+2}).$$

Неравенства вблизи границы (22) выполняются за счёт стандартной модификации погранслойных функций [16] (их проверка в данной работе не предусматривается).

Проверим условие скачка производной (24)

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\beta}}-\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\beta}}\right)=-\varepsilon^{n+1}\frac{1}{\tilde{v}(0,x_0)}\left(L(x_0)\frac{d\delta}{dt}-L(x_0)W'(x_0(t))\delta(t)+F(x_0)\right)+O(\varepsilon^{n+2}),$$

где

$$F(x_0)=\mu\left[\bar{f}_u^{(\pm)}(x_0)\int\limits_{\pm\infty}^{0}p(\sigma,x_0)\tilde{v}(\sigma,x_0)e^{(Dx_0)\sigma}\,d\sigma\right]_-^+,$$

$$L(x_0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}^2(\xi,x_0)e^{(Dx_0)\xi}p(\xi,x_0)\,d\xi>0.$$

Здесь индекс у функций $\tilde{v}(\xi,x_0)$, $p(\xi,x_0)$ опущен в силу их гладкости при $\xi=0$.

Определим функцию $\delta(t)$ как решение задачи

$$L(x_0)\frac{d\delta}{dt}-L(x_0)W'(x_0(t))\delta(t)+F(x_0)=\sigma,\quad \delta(0)=\delta_0,$$

где σ — достаточно большая положительная величина и $\delta_0>0$. В этом случае решение задачи $\delta(t)$ — положительная функция. Таким образом,

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta}-\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta}\right)=-\varepsilon^{n+1}\frac{\sigma}{\tilde{v}(0,x_0)}+O(\varepsilon^{n+2}).$$

Выражение в правой части отрицательно ввиду $\sigma>0$. При том же выборе функции $\delta(t)$ будет выполнено неравенство скачка производной для нижнего решения $\alpha(x,t,\varepsilon)$. Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=e^u(1-e^{-u})\left(\frac{1}{2}-e^{-u}\right)(1-\varphi^{(0)}(x)-e^{-u}),\quad x\in(-1,1),\ t\in(0,T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\quad t\in[0,T],$$

$$u(x,0,\varepsilon)=u_{init}(x,\varepsilon),\quad x\in[-1,1].$$

Будем считать, что при всех $x\in[-1,1]$ выполнено неравенство $1/4<\varphi^{(0)}(x)<1/2$. Члены регулярной части нулевого порядка легко определяются:

$$\bar{u}_0^{(-)}(x)=0,\quad \bar{u}_0^{(+)}(x)=\ln 2.$$

Задача для функции $\tilde{u}(\xi,x_0)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+W\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}-\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right)^2=e^{\tilde{u}}(1-e^{-\tilde{u}})\left(\frac{1}{2}-e^{-\tilde{u}}\right)(1-\varphi^{(0)}(x_0)-e^{-\tilde{u}}),$$

$$\tilde{u}(0,x_0)=-\ln(1-\varphi^{(0)}(x_0)),\quad \tilde{u}(-\infty,x_0)=0,\quad \tilde{u}(\infty,x_0)=\ln 2. \tag{28}$$

Заменой $z(\xi,x_0):=z(\tilde{u}(\xi,x_0))=1-e^{-\tilde{u}(\xi,x_0)}$ задача (28) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+W\frac{\partial z}{\partial\xi}=z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-\varphi^0(x_0)),\quad z(-\infty,x_0)=0,\quad z(\infty,x_0)=1/2. \tag{29}$$

Решение задачи (29) определяется по формуле

$$z = \left(2 + \left(\frac{1}{\varphi(x_0)} - 2\right)\exp\left\{-\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right\}\right)^{-1}.$$

Сделав обратную замену, получим выражение для решения исходной задачи (28):

$$\tilde{u}(\xi, x_0) = -\ln\left(1 - \left(2 + \left(\frac{1}{\varphi(x_0)} - 2\right)\exp\left\{-\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\right\}\right)^{-1}\right).$$

Начальная задача для определения положения фронта в нулевом приближении имеет вид

$$\frac{dx_0}{dt} = \sqrt{2}\left(\varphi^{(0)}(x_0) - \frac{1}{4}\right), \quad x_0(0) = x_{00}. \tag{30}$$

Автор выражает благодарность проф. Н.Н. Нефедову за плодотворные обсуждения и внимание к работе.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефедов, Н.Н. Движение фронта со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа / Н.Н. Нефедов, Е.И. Никулин, А.О. Орлов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 6. — С. 763–776.
2. Божевольнов, Ю.В. Движение фронта в параболической задаче реакция–диффузия / Ю.В. Божевольнов, Н.Н. Нефедов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 264–273.
3. Kardar, M. Dynamic scaling of growing interfaces / M. Kardar, G. Parisi, Y.C. Zhang // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 56, № 9. — P. 889–892.
4. Burgers equation with correlated noise: renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth / E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, Y.C. Zhang // Phys. Rev. A. — 1989. — V. 39, № 6. — P. 3053–3075.
5. Gilding, B.H. Travelling Waves in Nonlinear Diffusion-Convection Reaction / B.H. Gilding, R. Kersner. — Basel : Birkhäuser, 2004. — 210 p.
6. Volpert, A.I. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems / A.I. Volpert, Vit.A. Volpert, Vl.A. Volpert. — Providence : Amer. Math. Soc., 1994. — 448 p.
7. Похожаев, С.И. Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$ / С.И. Похожаев // Мат. сб. — 1980. — Т. 113, № 2. — С. 324–338.
8. Денисов, В.Н. О стабилизации решения задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений / В.Н. Денисов, А.Б. Муравник // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 351–355.
9. Муравник, А.Б. Об убывании неотрицательных решений сингулярных параболических уравнений с KPZ-нелинейностями / А.Б. Муравник // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 8. — С. 1422–1427.
10. Grimson, M.J. Continuum model for the spatiotemporal growth of bacterial colonies / M.J. Grimson, G.C. Barker // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 49, № 2. — P. 1680–1687.
11. Krug, J. Universality classes for deterministic surface growth / J. Krug, H. Spohn // Phys. Rev. A. — 1988. — V. 38, № 8. — P. 4271–4283.

12. Analytic traveling-wave solutions of the Kardar–Parisi–Zhang interface growing equation with different kind of noise terms / I.F. Barna, G. Bognár, L. Mátyás [et al.] // Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2019, Lisbon, Portugal, July 1–5 / Eds. S. Pinelas, J.R. Graef, S. Hilger, [et al.]. — Cham : Springer, 2020. — P. 239–253.
13. Васильева, А.Б. О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка / А.Б. Васильева, М.А. Давыдова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 6. — С. 938–947.
14. Нефедов, Н.Н. Существование и устойчивость решений с внутренним переходным слоем уравнения реакция–диффузия–адвекция с KPZ-нелинейностью / Н.Н. Нефедов, А.О. Орлов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1007–1021.
15. Нефедов, Н.Н. Существование и устойчивость стационарных решений с пограничными слоями в системе быстрого и медленного уравнений реакция–диффузия–адвекция с KPZ-нелинейностями / Н.Н. Нефедов, А.О. Орлов // Теор. мат. физика. — 2024. — Т. 220, № 1. — С. 137–153.
16. Нефедов, Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвеция: теория и применение / Н.Н. Нефедов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 22. — С. 2074–2094.
17. Аналитико-численный подход для решения сигулярно возмущённых параболических уравнений с использованием динамически адаптированных сеток / Д.В. Лукьяненко, В.Т. Волков, Н.Н. Нефедов [и др.] // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, № 3. — С. 334–341.
18. Fife, C.P. The generation and propogation of internal layers / C.P. Fife, L. Hsiao // Nonlin. Anal. Theory Methods Appl. — 1998. — V. 12, № 1. — P. 19–41.
19. Бицадзе, А.В. К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 11. — С. 1993–2008.
20. Fife, C.P. Comparison principles for reaction–diffusion systems / C.P. Fife, M.M. Tang // J. Differ. Equat. — 1995. — V. 40 — P. 168–185.

ON FRONT MOTION IN THE REACTION–DIFFUSION–ADVECTION PROBLEM WITH KPZ-NONLINEARITY

 A. O. Orlov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

We obtain an asymptotic approximation to a moving inner layer (front) solution of an initial– boundary value problem for a singularly perturbed parabolic reaction–diffusion–advection equation with KPZ-nonlinearity. An asymptotic approximation for the velocity of the front is found. To prove the existence and uniqueness of a solution the asymptotic method of differential inequalities is used.

Keywords: reaction–advection–diffusion equation, KPZ-nonlinearity, contrast structures, front motion, small parameter

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-11-00069).

REFERENCES

1. Nefedov, N.N., Nikulin, E.I., and Orlov, A.O., Front motion in a problem with weak advection in the case of a continuous source and a modular-type source, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 6, pp. 757–770.
2. Bozhevol'nov, Y.V. and Nefedov, N.N., Front motion in the parabolic reaction–diffusion problem, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 2, pp. 264–273.
3. Kardar, M., Parisi, G., and Zhang, Y.C., Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, no. 9, pp. 889–892.

4. Medina, E., Hwa, T., Kardar, M., and Zhang, Y.C., Burgers equation with correlated noise: renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth, *Phys. Rev. A*, 1989, vol. 39, no. 6, pp. 3053–3075.
5. Gilding, B.H. and Kersner, R., *Travelling Waves in Nonlinear Diffusion–Convection Reaction*, Basel: Birkhäuser, 2004.
6. Volpert, A.I., Volpert, V.A., and Volpert, V.A., *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, Providence: Amer. Math. Soc., 1994.
7. Pokhozhaev, S.I., On equations of the form $\Delta u = f(x, u, Du)$, *Math. USSR-Sb.*, 1982, vol. 41, no. 2, pp. 269–280.
8. Denisov, V.N. and Muravnik, A.B., On stabilization of the solution of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 3, pp. 369–374.
9. Muravnik, A.B., Decay of nonnegative solutions of singular parabolic equations with KPZ-nonlinearities, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 8, pp. 1375–1380.
10. Grimson, M.J. and Barker, G.C., Continuum model for the spatiotemporal growth of bacterial colonies, *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 49, no. 2, pp. 1680–1687.
11. Krug, J. and Spohn, H., Universality classes for deterministic surface growth, *Phys. Rev. A.*, 1988, vol. 38, no. 8, pp. 4271–4283.
12. Barna, I.F., Bognár, G. Mátyás, L. [et al.], Analytic traveling-wave solutions of the Kardar–Parisi–Zhang interface growing equation with different kind of noise terms, in: *Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2019, Lisbon, Portugal, July 1–5*, S. Pinelas, J.R. Graef, S. Hilger [et al.] eds., Cham: Springer, 2020.
13. Vasil'eva, A.B. and Davydova, M.A., On a contrast steplike structure for a class of second-order nonlinear singularly perturbed equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 6, pp. 900–908.
14. Nefedov, N.N. and Orlov, A.O., Existence and stability of solutions with internal transition layer for the reaction–diffusion–advection equation with a KPZ-nonlinearity, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 1009–1024.
15. Nefedov, N.N. and Orlov, A.O., Existence and stability of stationary solutions with boundary layers in a system of fast and slow reaction–diffusion–advection equations with KPZ-nonlinearities, *Theor. Math. Phys.*, 2024, vol. 220, no. 1, pp. 1178–1192.
16. Nefedov, N.N., Development of methods of asymptotic analysis of transition layers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 12, pp. 2068–2087.
17. Lukyanenko, D.V., Volkov, V.T., Nefedov, N.N. [et al.], Analytic-numerical approach to solving singularly perturbed parabolic equations with the use of dynamic adapted meshes, *Model. Anal. Int. Syst.*, 2016, vol. 23, no. 3, pp. 334–341.
18. Fife, C.P. and Hsiao, L., The generation and propogation of internal layers, *Nonlin. Anal. Theory Methods Appl.*, 1998, vol. 12, no. 1, pp. 19–41.
19. Bitsadze, A.V., On the theory of a class of nonlinear partial differential equations, *Differ. Equat.*, 1977, vol. 13, no. 11, pp. 1993–2008.
20. Fife, C.P. and Tang, M.M., Comparison principles for reaction–diffusion systems, *J. Differ. Equat.*, 1995, vol. 40, pp. 168–185.