ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 22–34

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ АРГУМЕНТАМИ

М. Э. Муминов[1], Т. А. Раджабов[2]

[1] *Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент*

[1,2] *Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Узбекистан*

[2] *Ташкентский международный университет Кимё, Узбекистан*

e-mail: [1] *mmuminov@mail.ru,* [2] *radjabovtirkash@yandex.com*

Поступила в редакцию 17.12.2023 г., после доработки 08.05.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследована краевая задача для уравнения диффузии с кусочно-постоянными аргументами. Установлены условия существования бесконечного числа решений (найдены их явные формулы) или отсутствия решения для дифференциального уравнения, полученного после разделения переменных. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: уравнение диффузии, кусочно-постоянный аргумент, периодическое решение

DOI: 10.31857/S0374064125010037, EDN: IANIEX

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дифференциальные уравнения с кусочно-постоянными аргументами встречаются при изучении гибридных систем и могут моделировать определённые гармонические осцилляторы с почти периодическим воздействием [1, 2]. Широкий обзор исследований, посвящённых обыкновенным уравнениям и уравнениям с частными производными с кусочно-постоянными аргументами, приведён в работах [3, 4].

В статьях [5, 6] изучены дифференциальные уравнения специального вида с кусочно-постоянным аргументом. Периодические (разрешимые) задачи сведены к системе линейных алгебраических уравнений, описаны все условия существования её n-периодических решений, с помощью которых найдены явные формулы решений дифференциальных уравнений.

Уравнения с частными производными с кусочно-постоянным временны́м аргументом естественным образом возникают в процессе аппроксимации [7].

В статье [8] для уравнения с частными производными с кусочно-постоянным аргументом изучены существование, осцилляционность и асимптотические границы решений начальных задач с кусочно-постоянными запаздываниями.

Краевые и начальные задачи для уравнения диффузии с кусочно-постоянными аргументами исследовались в [9] и [10] соответственно. Уравнение с кусочно-постоянными смешанными аргументами вида

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+bu_{xx}(x,[t-1])+cu(x,[t])+du(x,[t+1])$$

рассматривалось в [11], где были исследованы вопросы существования решений, сходимости решений к нулю, неограниченность решений и их осцилляции.

В статье [12] найдено асимптотическое поведение решения уравнения диффузии с кусочно-постоянным аргументом обобщённого вида.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения диффузии с кусочно-постоянными аргументами вида [10, 13]

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)-bu_{xx}(x,[t])-cu_{xx}(x,[t+1]),\quad 0<x<1,\ \ t>0, \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=v(x). \tag{3}$$

Адаптировав метод [10, 14], получим сначала формальное решение задачи (1)–(3) в виде ряда. Для этого после разделения переменных исследуем дифференциальное уравнение первого порядка с кусочно-постоянным аргументом времени, получим условие существования и явную формулу его решения. Затем, применив метод [5, 6, 15, 16], найдём N-периодические решения и их явные формулы этого дифференциального уравнения. В частном случае докажем существование бесконечного числа решений дифференциального уравнения с кусочно-постоянным аргументом, что показывает некорректность результата о единственности, приведённого в [13].

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ АРГУМЕНТОМ

Пусть v_j — коэффициенты синусоидального ряда Фурье для функции $v(x)$, т.е.

$$v(x)=\sum_{j=1}^{+\infty}v_j\sin(j\pi x),\quad v_j=2\int\limits_0^1 v(x)\sin(j\pi x)\,dx.$$

Решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{+\infty}T_j(t)\sin(j\pi x). \tag{4}$$

Подставив функцию (4) в уравнение (1) и начальные условия (3), получим

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big(T_j'(t)+a^2\pi^2j^2T_j(t)+b\pi^2j^2T_j([t])+c\pi^2j^2T_j([t+1])\Big)\sin(j\pi x)=0,$$

$$u(x,0)=\sum_{j=1}^{\infty}T_j(0)\sin(j\pi x)=v(x),\quad T_j(0)=v_j.$$

Отсюда, с учётом ортогональности функций $\sin(n\pi x)$, имеем бесконечную последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным аргументом

$$T_j'(t)+a^2\pi^2j^2T_j(t)+b\pi^2j^2T_j([t])+c\pi^2j^2T_j([t+1])=0,\quad t>0,\ \ j\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

с начальным условием

$$T_j(0)=v_j. \tag{6}$$

Определение 1. Функция $T(t)$ называется решением задачи (5), (6), если она удовлетворяет следующим условиям:

(i) $T(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$;

(ii) производная $T'(t)$ существует и непрерывна в $\mathbb{R}_+$, за исключением точек $[t]\in\mathbb{R}_+$, где существуют односторонние производные;

(iii) $T(t)$ удовлетворяет (5) и (6) в $\mathbb{R}_+$ с возможным исключением в точках $[t]\in\mathbb{R}_+$.

Обозначим

$$E_j(t)=e^{-a^2\pi^2j^2t}-\frac{b}{a^2}\big(1-e^{-a^2\pi^2j^2t}\big),\quad D_j(t)=\frac{c}{a^2}\big(1-e^{-a^2\pi^2j^2t}\big),\quad j\in\mathbb{N}.$$

Теорема 1. *Пусть a, b, c — действительные числа. Если $D_j(1)\neq-1$, то уравнение (5) имеет единственное решение, представимое на промежутках $t\in[n,n+1)$, $n=0,1,2,\ldots,$ в виде*

$$T_j(t)=\left(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j. \tag{7}$$

Теорема 2. 1. *Если $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)=0$ для $j>0$, то задача (5), (6) имеет бесконечно много решений. В частности, эта задача имеет единственное однопериодическое и бесконечное множество N-периодических решений, $N=2,3,\ldots$*

2. *Пусть $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)\neq0$. Тогда если $v_j\neq0$, то задача (5), (6) не имеет решения. Если $v_j=0$, то эта задача имеет тривиальное решение.*

Пример 1. Пусть $j=1$, $a\in\mathbb{R}$, $c=a^2/(e^{-a^2\pi^2j^2}-1)$, $b=-a^2e^{-a^2\pi^2j^2}/(e^{-a^2\pi^2j^2}-1)$, $v_1=1$. В этом случае $D_j(1)=-1$, $E_j(1)=0$. Функции

$$F_2(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1-e^{a^2\pi^2}}+\dfrac{e^{a^2\pi^2}}{e^{a^2\pi^2}-1}e^{-a^2\pi^2t}\right)v_1-\dfrac{1-e^{-a^2\pi^2t}}{e^{-a^2\pi^2}-1}T_{11}(1), & t\in[0,1),\\[2ex] \left(\dfrac{1}{1-e^{a^2\pi^2}}+\dfrac{e^{a^2\pi^2}}{e^{a^2\pi^2}-1}e^{-a^2\pi^2(t-1)}\right)T_{11}(1)-\dfrac{1-e^{-a^2\pi^2(t-1)}}{e^{-a^2\pi^2}-1}v_1, & t\in[1,2],\end{cases}$$

и

$$F_3(t)=\begin{cases}\left(-\dfrac{b}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2t})+e^{-a^2\pi^2t}\right)v_1-\dfrac{c}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2t})T_{11}(1), & t\in[0,1),\\[2ex] \left(-\dfrac{b}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2(t-1)})+e^{-a^2\pi^2(t-1)}\right)T_{11}(1)-\dfrac{c}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2(t-1)})T_{21}(2), & t\in[1,2),\\[2ex] \left(-\dfrac{b}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2(t-2)})+e^{-a^2\pi^2(t-2)}\right)T_{21}(2)-\dfrac{c}{a^2}(1-e^{-a^2\pi^2(t-2)})v_1, & t\in[2,3),\end{cases}$$

являются двух- и трёхпериодическими решениями задачи (5), (6) при $j=1$ соответственно, где $T_{11}(1)$, $T_{21}(2)$ — произвольные числа. Выбрав эти константы, приведём решения и их графики.

Функция $F_2(t)$ при $T_{11}(1)=3$ и $a=1/\pi$ имеет вид (рис. 1, *а*)

$$F_2(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e^{1-t}}{e-1}-\dfrac{3(1-e^{-t})}{e^{-1}-1}, & t\in[0,1),\\[2ex] \dfrac{1-e^{1-t}}{1-e^{-1}}+3\left(\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e^{2-t}}{e-1}\right), & t\in[1,2].\end{cases} \tag{8}$$

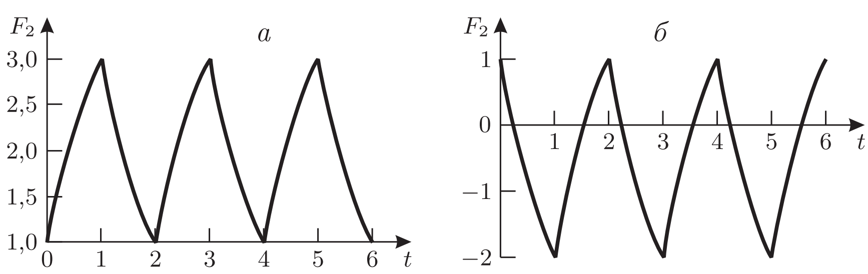

Рис. 1. Графики функции $F_2(t)$

а при $T_{11}(1)=-2$ и $a=1/\pi$ (рис. 1, *б*)

$$F_2(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e^{1-t}}{e-1}+\dfrac{2(1-e^{-t})}{e^{-1}-1}, & t\in[0,1),\\ \dfrac{e^{1-t}-1}{e^{-1}-1}-2\left(\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e^{2-t}}{e-1}\right), & t\in[1,2].\end{cases} \tag{9}$$

Функция $F_3(t)$ при $T_{11}(1)=2$, $T_{21}(2)=3/2$ и $a=1/\pi$ представима в виде (рис. 2, *а*)

$$F_3(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e(2-e^{-t})}{e-1}, & t\in[0,1),\\ \dfrac{2}{1-e}+\dfrac{e(3+e^{1-t})}{2(e-1)}, & t\in[1,2),\\ \dfrac{3}{2(1-e)}+\dfrac{e(2+e^{2-t})}{2(e-1)}, & t\in[2,3],\end{cases} \tag{10}$$

при $T_{11}(1)=-2$, $T_{21}(2)=-3/2$ и $a=1/\pi$ (рис. 2, *б*)

$$F_3(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e(3e^{-t}-2)}{e-1}, & t\in[0,1),\\ \dfrac{2}{e-1}-\dfrac{e(3+e^{1-t})}{2(e-1)}, & t\in[1,2),\\ \dfrac{3}{2(e-1)}-\dfrac{e(5e^{2-t}-2)}{2(e-1)}, & t\in[2,3],\end{cases} \tag{11}$$

а при $T_{11}(1)=3$, $T_{21}(2)=-4$ и $a=1/\pi$ (рис. 2, *в*)

$$F_3(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e}+\dfrac{e(3-2e^{-t})}{e-1}, & t\in[0,1),\\ \dfrac{3}{1-e}+\dfrac{e(7e^{1-t}-4)}{e-1}, & t\in[1,2),\\ \dfrac{4}{e-1}-\dfrac{e(5e^{2-t}-1)}{e-1}, & t\in[2,3].\end{cases}$$

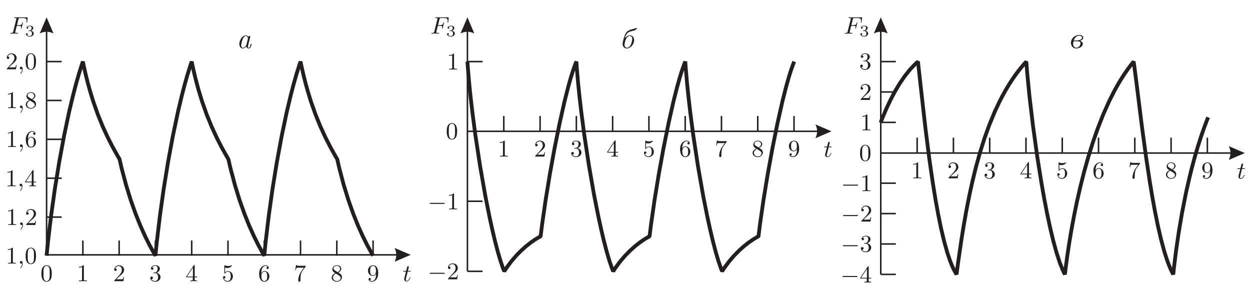

Рис. 2. Графики функции $F_3(t)$

Замечание 1. В примере 1 параметры уравнения удовлетворяют условиям теоремы единственности из статьи [13]. В нём показана некорректность результатов теоремы 2 из [11], утверждающей единственность решения задачи (5), (6).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Определение 2. Функция $u(x,t)$ называется *решением задачи* (1)–(3), если выполняются следующие условия:

(i) $u(x,t)$ непрерывна на множестве $\Omega=[0,1]\times\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$;

(ii) частные производные u_t и u_{xx} существуют и непрерывны на Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$, где односторонние производные существуют по второму аргументу;

(iii) $u(x,t)$ удовлетворяет (1)–(3) в Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$.

Предположение. *Пусть функция $v(\cdot)$ имеет на отрезке $[0,1]$ непрерывные производные до третьего порядка включительно и удовлетворяет условиям $v(0)=v(1)=v''(0)=v''(1)=0$.*

Теорема 3. *Пусть выполняется предположение, $c\neq -a^2$ и $D_j(1)\neq -1$ при $j\in\mathbb{N}$. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение, представимое в виде ряда*

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{+\infty}\left(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j\sin(j\pi x),\quad t\in[n,n+1),\ n=0,1,2,\ldots$$

Теорема 4. 1. *Пусть выполняется предположение, $D_{j_0}(1)=-1$ и $E_{j_0}(1)=0$. Тогда задача (1)–(3) имеет бесконечное число решений, представимых на $t\in[n,n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$, как*

$$u(x,t)=\sum_{j=1,j\neq j_0}^{+\infty}\left(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j\sin(j\pi x)+T_{j_0}(t)\sin(j\pi x),\tag{12}$$

где $T_{j_0}(t)$ — произвольное решение задачи (5), (6) (см. п. 2 в теореме 2).

2. *Если $D_{j_0}(1)=-1$, $E_{j_0}(1)\neq 0$ и $v_{j_0}\neq 0$ при $j=j_0$, то задача (1)–(3) не имеет решения.*

Пример 2. Пусть $a=1/\pi$, $c=2$, $b=3$ в уравнении (1) и $u(x,0)=\sum_{j=1}^{5}\sin(j\pi x)/j$ в условии (3). Тогда решение задачи (1)–(3) имеет вид (рис. 3)

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{5}\left[\left(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j\right]\sin(j\pi x),\quad t\in[n,n+1),\ n=0,1,2,\ldots$$

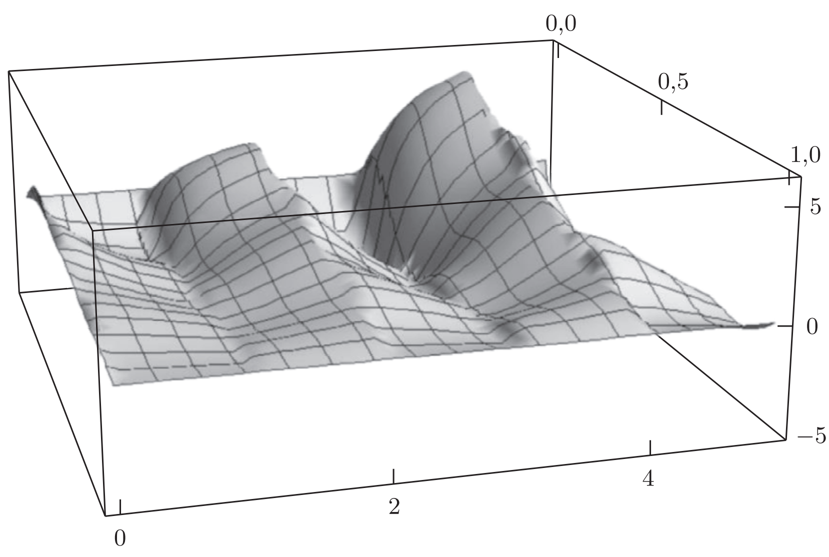

Рис. 3. График функции $u(x,t)$

Пример 3. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $c = a^2/(e^{-a^2\pi^2 j^2} - 1)$, $b = -a^2 e^{-a^2\pi^2 j^2}/(e^{-a^2\pi^2 j^2} - 1)$, $v(x) = \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x)$. Тогда решение задачи (1)–(3) определяется по формуле

$$u(x,t) = T_1(t)\sin(\pi x) + 2T_2(t)\sin(2\pi x).$$

Отметим, что $D_1(1) = -1$, $E_1(1) = 0$ и $D_2(1) \neq -1$, т.е. числа a, b и c удовлетворяют условиям п. 1 теоремы 2 и теореме 1. Поэтому согласно теореме 1 функция $T_2(t)$ имеет вид

$$T_2(t) = 2(E_2(t-n) - D_2(t-n)), \quad t \in [n, n+1),$$

а функцию $T_1(t)$ можно определить многими способами.

Приведём графики $u(x,t)$ для примера 1. В случае когда $T_1(t) = F_2(t)$ и $F_2(t)$ определяется равенством (8), график функции $u(x,t)$ изображён на рис. 4, *а*, если $F_2(t)$ определяется выражением (9), то на рис. 4, *б*. При $T_1(t) = F_3(t)$, где $F_3(t)$ определяется равенством (10), график функции $u(x,t)$ представлен на рис. 5, *а*, а если $F_3(t)$ определяется равенством (11), то на рис. 5, *б*.

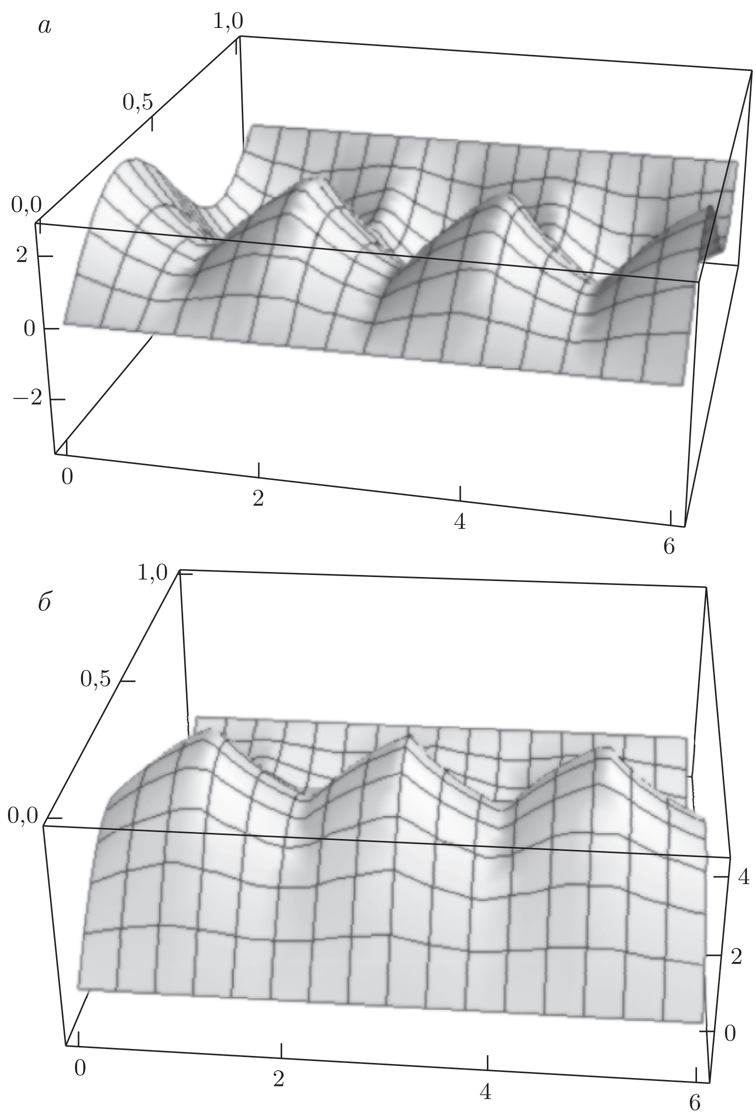

Рис. 4. Графики функции $u(x,t)$

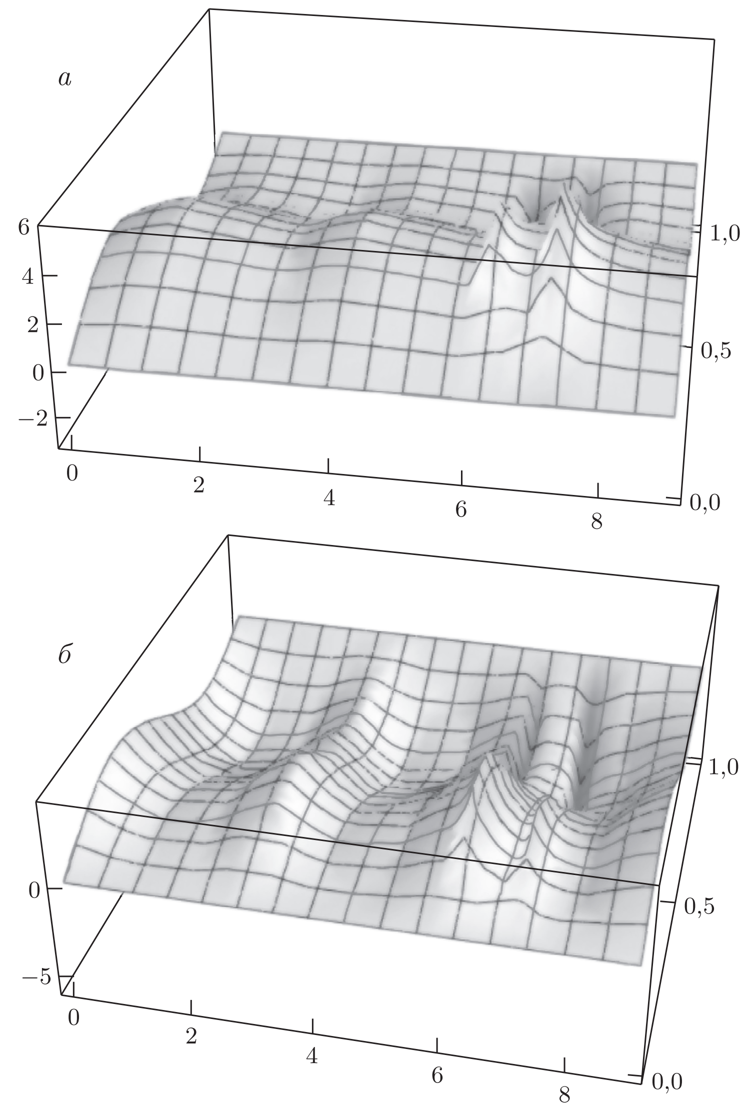

Рис. 5. Графики функции $u(x,t)$

Замечание 2. В примере 3 параметры уравнения не удовлетворяют условиям следствия 1 в [13], т.е. $a^2+b+c=0$. Решение u периодично по t. Это означает, что нулевое решение задачи (1)–(3) не является асимптотически устойчивым. Поэтому условия следствия 1 являются достаточными для того, чтобы нулевое решение было асимптотически устойчиво.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $T_{nj}(t)$ решение уравнения (5) на промежутке $[n,n+1)$, т.е.

$$T_j(t)=T_{nj}(t),\quad t\in[n,n+1),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Тогда

$$T'_{nj}(t)+a^2\pi^2j^2T_{nj}(t)=-b\pi^2j^2T_{nj}(n)-c\pi^2j^2T_{nj}(n+1),\quad t\in[n,n+1). \tag{13}$$

Решение уравнения (13) определяется по формуле

$$T_{nj}(t)=-\frac{bT_{nj}(n)}{a^2}\big(1-e^{-a^2\pi^2j^2(t-n)}\big)+T_{nj}(n)e^{-a^2\pi^2j^2(t-n)}-\frac{cT_{nj}(n+1)}{a^2}\big(1-e^{-a^2\pi^2j^2(t-n)}\big)$$

или

$$T_{nj}(t)=E_j(t-n)T_{nj}(n)-D_j(t-n)T_{nj}(n+1),\quad t\in[n,n+1). \tag{14}$$

Положив $t=n+1$ в (14) для всех $n=0,1,2,\ldots,$ получим

$$T_{nj}(n+1)=E_j(1)T_{nj}(n)-D_j(1)T_{nj}(n+1).$$

Отсюда с учётом $D_j(1)\neq-1$ имеем

$$T_{nj}(n+1)=\frac{E_j(1)T_{nj}(n)}{1+D_j(1)}. \tag{15}$$

Тогда (14) запишем как

$$T_{nj}(t)=E_j(t-n)T_{nj}(n)-\frac{D_j(t-n)}{1+D_j(1)}E_j(1)T_{nj}(n). \tag{16}$$

Из непрерывности функции $T_j(t)$ по $t>0$ вытекают равенства

$$T_{n+1,j}(n+1)=T_j(n+1)=\lim_{t\to n+1-0}T_j(t)=T_{nj}(n+1).$$

Следовательно, формулу (15) можно переписать в виде

$$T_{n+1,j}(n+1)=\frac{E_j(1)T_{nj}(n)}{1+D_j(1)},$$

откуда

$$T_{nj}(n)=\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}T_{n-1,j}(n-1)=\frac{E_j^2(1)}{(1+D_j(1))^2}T_{n-2,j}(n-2)=\ldots=\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}T_{0j}(0),$$

или

$$T_{nj}(n)=\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}T_{0j}(0).$$

Таким образом, решение $T_{nj}(t)$, определённое формулой (16), представляется только через $T_{0j}(0)$:

$$T_{nj}(t)=\left(E_j(t-n)-D_j(t-n)\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}T_{0j}(0).$$

Равенство $T_{0j}(0)=v_j$ завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. 1. Пусть $D_j(1)=-1$, $E_j(1)=0$. Построим функцию $T_j(t)=$ $=T_{nj}(t)$, $t\in[n,n+1)$, $n=0,1,2,\ldots,$ следующим образом. Функция

$$T_{0j}(t)=E_j(t)T_{0j}(0)-D_j(t)C_{0j},\quad t\in[0,1),$$

удовлетворяет уравнению (5), где $T_{0j}(0)=v_j$ и C_{0j} — произвольное число. Так как $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)=0$, имеет место равенство $T_{0j}(1)=\lim_{t\to1}T_{0j}(t)=C_{0j}$. Легко проверить, что функция

$$T_{1j}(t)=E_j(t-1)T_{1j}(1)-D_j(t-1)C_{1j},\quad t\in[1,2),$$

удовлетворяет уравнению (5), где C_{1j} — произвольное число.

В силу непрерывности функции $T_j(t)$ имеем

$$T_j(1)=T_{1j}(1)=\lim_{t\to 1-0}T_{0j}(t)=T_{0j}(1).$$

Равенства $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)=0$ дают $T_{1j}(2)=\lim_{t\to 2}T_{1j}(t)=C_{1j}$.

Функция

$$T_{nj}(t)=E_j(t-n)T_{nj}(n)-D_j(t-n)C_{nj}$$

на $[n,n+1)$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет уравнению (5), где C_{nj} — произвольное число. Ясно, что $T_j(n)=T_{nj}(n)=\lim_{t\to n-0}T_{n-1,j}(t)=T_{n-1,j}(n)$.

Аналогично из равенств $D_j(1)=-1$ и $E_j(1)=0$ получим $T_{nj}(n)=\lim_{t\to n+1}T_{nj}(t)=C_{nj}$. По построению функция

$$T_j(t)=T_{nj}(t),\quad t\in[n,n+1),\ n=0,1,2,\ldots,$$

является решением задачи (5), (6). Так как константы C_{0j}, C_{1j}, $\ldots$, C_{nj}, $\ldots$ произвольные, то задача имеет бесконечное число решений.

Пусть $T_j(t)$ — однопериодическое решение задачи (5), (6), тогда его можно представить в виде

$$T_j(t)=T_{0j}(t)=E_j(t)T_{0j}(0)-D_j(t)C_{0j},\quad t\in[0,1].$$

Поскольку функция $T_j(t)$ однопериодическая и $T_{0j}(1)=C_{0j}$, то $T_{0j}(0)=T_{0j}(1)$, $C_{0j}(1)= =T_{0j}(0)=v_j$. Это показывает единственность однопериодического решения (5), (6).

Пусть $T_j(t)$ является двухпериодическим решением задачи (5), (6). Тогда функция $T_j(t)$ на $[0,2]$ имеет вид

$$T_j(t)=\begin{cases}E_j(t)T_{0j}(0)-D_j(t)T_{1j}(1), & t\in[0,1),\\ E_j(t-1)T_{1j}(1)-D_j(t-1)C_{1j}, & t\in[1,2),\end{cases}$$

где $T_{0j}(0)=v_j$, $T_{1j}(1)$ — произвольное число. Из периодичности $T_j(t)$ следует, что $T_j(0)= =T_{0j}(0)=T_j(2)=C_{1j}$. Это показывает, что задача (5), (6) имеет бесконечно много двухпериодических решений.

Пусть $T_j(t)$ — N-периодическое решение задачи (5), (6). Функция $T_j(t)$ на промежутке $[0,N]$ имеет вид

$$T_j(t)=\begin{cases}E_j(t)v_j-D_j(t)T_{1j}(1), & t\in[0,1),\\ E_j(t-1)T_{1j}(1)-D_j(t-1)T_{2j}(2), & t\in[1,2),\\ \vdots & \\ E_j(t-N+2)T_{N-1,j}(N-2)-D_j(t-N+2)T_{N-1,j}(N-1), & t\in[N-2,N-1),\\ E_j(t-N+1)T_{N-1,j}(N-1)-D_j(t-N+1)v_j, & t\in[N-1,N),\end{cases}$$

где $T_{1j}(1)$, $T_{2j}(2)$, $\ldots$, $T_{N-1,j}(N-1)$ — произвольные числа.

2. Предположим, что функция $T_j(t)$ является решением задачи (5), (6). Тогда согласно (14) имеет место равенство

$$T_{nj}(t)=E_j(t-n)T_{nj}(n)-D_j(t-n)T_{nj}(n+1),\quad t\in[n,n+1).$$

Отсюда при $t=n+1$ с учётом $D_j(1)=-1$ имеем $E_j(1)T_{nj}(n)=0$ для всех $n=0,1,2,\ldots$ Поэтому $T_{nj}(n)=0$ для всех $n=0,1,2,\ldots$, так как $E_j(1)\neq 0$, т.е. уравнение имеет только тривиальное решение. Следовательно, если $T_j(0)=v_j=T_{0j}(0)\neq 0$, то задача (5), (6) не имеет решения.

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем равномерную сходимость в любом замкнутом множестве $\overline{\Lambda}\subset[0,1]\times\mathbb{R}_+$ следующих рядов:

$$\sum_{j=1}^{+\infty}T_j(t)\sin(j\pi x), \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}T_j'(t)\sin(j\pi x), \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\pi^2j^2T_j(t)\sin(j\pi x), \tag{19}$$

где $T_j(t)$ — решение задачи (5), (6), и на $[n,n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$, функции $T_j(t)$, $T_j'(t)$ представляются, соответственно, в виде (7) и

$$T_j'(t)=-\left(a^2+b+c\frac{E_j(1)}{1+D_j(1)}\right)\pi^2j^2e^{-a^2\pi^2j^2(t-n)}\frac{E_j^n(1)}{(1+D_j(1))^n}v_j.$$

Согласно предположению имеет место равенство

$$v_j=-\frac{2v_j'''}{\pi^3j^3},\quad v_j'''=\int_0^1 v'''(x)\cos(j\pi x)\,dx,\quad j=1,2,\ldots$$

Из непрерывности функции $v'''(x)$ вытекает сходимость ряда $\sum_{j=1}^{+\infty}(v_j''')^2$. Отсюда с учётом неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty}j^2v_j\right|=\frac{2}{\pi^3}\left|\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{v_j'''}{j}\right|<+\infty. \tag{20}$$

Поскольку $0\leqslant 1-e^{-a^2\pi^2j^2t}\leqslant 1$, то для всех $t\in[0,\infty)$ и $j\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$|E_j(t)|\leqslant 1+\frac{|b|}{a^2},\quad |D_j(t)|<\frac{|c|}{a^2}. \tag{21}$$

Заметим, что $\lim_{j\to\infty}D_j(1)=c/a^2$, поэтому при $D_j(1)\neq -1$ и $c\neq -a^2$ существует число $\rho>0$ такое, что

$$|1+D_j(1)|\geqslant\rho,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Пользуясь неравенствами (21) и (22), получим равномерные оценки для $T_j(t)$ и $T_j'(t)$:

$$|T_j(t)|\leqslant C_1\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^n|v_j|,\quad t\in[n,n+1), \tag{23}$$

$$|T_j'(t)|\leqslant C_2\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^n\pi^2j^2|v_j|,\quad t\in[n,n+1), \tag{24}$$

где

$$C_1=1+\frac{|b|}{a^2}+\frac{|c|}{a^2}\frac{1+|b|/a^2}{\rho},\quad C_2=a^2+|b|+|c|\frac{1+|b|/a^2}{\rho}.$$

Пусть $m = 1 + \sup_{(x,t)\in\overline{\Lambda}} t$. Тогда из (23) и (24) для всех $(x,t)\in\overline{\Lambda}$ ряды (17)–(19) оцениваются следующим образом:

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty} T_j(t)\sin(j\pi x)\right| \leqslant C_1\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^m \sum_{j=1}^{+\infty}|v_j|, \quad \left|\sum_{j=1}^{+\infty} T_j'(t)\sin(j\pi x)\right| \leqslant C_2\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^m \pi^2\sum_{j=1}^{+\infty} j^2|v_j|,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty} \pi^2 j^2 T_j(t)\sin(j\pi x)\right| \leqslant C_1\left(\frac{1+|b|/a^2}{\rho}\right)^m \pi^2\sum_{j=1}^{+\infty} j^2|v_j|.$$

Отсюда и из (20) получаем равномерную сходимость рядов (17)–(19) в любом замкнутом множестве $\overline{\Lambda}\subset[0,1]\times\mathbb{R}_+$.

Таким образом, функция $u(x,t) = \sum_{j=1}^{+\infty} T_j(t)\sin(j\pi x)$ является непрерывной на множестве $\Omega = [0,1]\times\mathbb{R}_+$ и частные производные $u_t = \sum_{j=1}^{+\infty} T_j'(t)\sin(j\pi x)$, $u_{xx} = \sum_{j=1}^{+\infty}\pi^2 j^2 T_j(t)\sin(j\pi x)$ существуют и являются непрерывными на Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$, где односторонние производные существуют по второму аргументу.

Так как $D_j(1)\neq -1$ для каждого $j\in\mathbb{N}$, то по теореме 1 задача (5), (6) имеет единственное решение $T_j(t)$ для каждого $j\in\mathbb{N}$. Следовательно, функция $u(x,t)$, определяемая формулой (4), удовлетворяет равенствам (1)–(3) в Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$ и является единственным решением задачи (1)–(3).

Доказательство теоремы 4. 1. Пусть $D_{j_0}(1) = -1$ и $E_{j_0}(1) = 0$ для некоторого $j = j_0$. Тогда $D_j(1) > -1$ при $j < j_0$ и $D_j(1) < -1$ при $j > j_0$. Отсюда имеем

$$|1 + D_j(1)| \geqslant \rho_1$$

для некоторого числа $\rho_1 > 0$ и для всех $j\in\mathbb{N}\setminus\{j_0\}$.

По теореме 1 задача (5), (6) разрешима для $j\neq j_0$ и решение $T_j(t)$ при $j\neq j_0$ имеет вид (7). Поскольку $D_{j_0}(1) = -1$ и $E_{j_0}(1) = 0$, то по п. 1 теоремы 2 задача (5), (6) имеет бесконечно много решений. Обозначим через $T_{j_0}(\cdot)$ решение задачи (5), (6) для $j = j_0$. Тогда из (4) решение краевой задачи (1)–(3) имеет вид (12). Равномерная сходимость этого ряда к непрерывной функции $u(x,t)$ в любом замкнутом множестве $\overline{\Lambda}\subset[0,1]\times\mathbb{R}_+$ и существование непрерывных частных производных u_t и u_{xx} на Ω с возможным исключением в точках $(x,[t])\in\Omega$, где односторонние производные существуют по второму аргументу, доказываются аналогично как в доказательстве теоремы 3.

2. Если $D_{j_0}(1) = -1$, $E_{j_0}(1)\neq 0$ и $v_{j_0}\neq 0$, то по теореме 2 задача (5), (6) не имеет решения при $j = j_0$. Следовательно, согласно (4), краевая задача (1)–(3) не имеет решения.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hale, J.K. Introduction to Functional Differential Equations / J.K. Hale, S.M.V. Lunel. — New York : Springer Science Business Media, 2013. — 449 p.
2. Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces / Y. Hino, T. Naito, N.V. Minh, J.S. Shin. — London ; New York : Taylor & Francis, 2002. — 249 p.
3. Wiener, J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations / J. Wiener. — Singapore ; New Jersey ; London ; Hong Kong : World Scientific, 1993. — 410 p.
4. Cooke, K.L. A survey of differential equations with piecewise continuous arguments / K.L. Cooke, J. Wiener // Delay Differential Equations and Dynamical Systems, Proc. of a Conf. in Honor

of Kenneth Cooke Held in Claremont, California / Eds. S. Busenberg, M. Martelli. — Berlin : Springer-Verlag, 1991. — P. 1–15.
5. Muminov, M.I. On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments / M.I. Muminov // Advances in Difference Equations. — 2017. — V. 336. — P. 1–17.
6. Muminov, M.I. Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments / M.I. Muminov, Ali H.M. Murid // Open Math. — 2020. — V. 18, № 1. — P. 93–105.
7. Wiener, J. Boundary-value problems for partial differential equations with piecewise constant delay / J. Wiener // Int. J. Math. Math. Sci. — 1991. — V. 14. — P. 301–321.
8. Wiener, J. Partial differential equations with piecewise constant delay / J. Wiener, L. Debnath // Int. J. Math. Math. Sci. — 1991. — V. 14. — P. 485–496.
9. Wiener, J. Oscillatory and periodic solutions to a diffusion equation of neutral type / J. Wiener, W. Heller // Int. J. Math. Math. Sci. — 1999. — V. 22, № 2. — P. 313–348.
10. Wiener, J. Boundary value problems for the diffusion equation with piecewise continuous time delay / J. Wiener, L. Debnath // Int. J. Math. Math. Sci. — 1997. — T. 20, № 1. — C. 187–195.
11. Buyukkahraman, M.L. On a partial differential equation with piecewise constant mixed arguments / M.L. Buyukkahraman, H. Bereketoglu // Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci. — 2020. — V. 44. — P. 1791–1801.
12. Veloz, T. Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument / T. Veloz, M. Pinto // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — V. 426, № 1. — P. 330–339.
13. Wang, Q. Analytical and numerical stability of partial differential equations with piecewise constant arguments / Q. Wang, J. Wen // Numer. Methods Partial Differ. Equat. — 2014. — V. 30, № 1. — P. 1–16.
14. Muminov, M.I. Forced diffusion equation with piecewise continuous time delay / M.I. Muminov, T.A. Radjabov // Adv. Math. Sci. J. — 2021. — V. 10, № 4. — P. 2269–2283.
15. Muminov, M.I. On existence conditions for periodic solutions to a differential equation with constant argument / M.I. Muminov, T.A. Radjabov // Nanosystems: Phys. Chem. Math. — 2022. — V. 13, № 5. — P. 491–497.
16. Muminov, M.I. Existence conditions for 2-periodic solutions to a non-homogeneous differential equations with piecewise constant argument / M.I. Muminov, T.A. Radjabov // Examples and Counterexamples. — 2024. — V. 5. — Art. 100145.

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DIFFUSION EQUATION WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENTS

 M. I. Muminov[1], T. A. Radjabov[2]

[1] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
[1,2] Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Uzbekistan
[2] Kimyo International University in Tashkent, Uzbekistan
e-mail: [1] mmuminov@mail.ru, [2] radjabovtirkash@yandex.com

In this paper the boundary value problem (BVP) for diffusion equation with piecewise constant arguments is studied. By using the separation of variables method, the considered BVP is reduced to the investigation of the existence conditions of solutions of initial value problems for differential equation with piecewise constant arguments. Existence conditions of infinitely many solutions or emptiness for considered differential equation are established and explicit formula for these solutions are obtained. Several examples are given to illustrate the obtained results.

Keywords: diffusion equation, piecewise constant argument, periodic solution

REFERENCES

1. Hale, J.K. and Lunel, S.M.V., *Introduction to Functional Differential Equations*, New York: Springer Science Business Media, 2013.
2. Hino, Y., Naito, T., Minh, N.V., and Shin, J.S. *Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, London; New York: Taylor & Francis, 2002.
3. Wiener, J., *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 1993.
4. Cooke, K.L. and Wiener, J., A survey of differential equations with piecewise continuous arguments, in: *Delay Differential Equations and Dynamical Systems, Proc. of a Conf. in Honor of Kenneth Cooke Held in Claremont, California*, Eds. S. Busenberg, M. Martelli, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
5. Muminov, M.I., On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments, *Advances in Difference Equations*, 2017, vol. 336, pp. 1–17.
6. Muminov, M.I. and Murid, Ali H.M., Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments, *Open Math.*, 2020, vol. 18, no. 1, pp. 93–105.
7. Wiener, J., Boundary-value problems for partial differential equations with piecewise constant delay, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1991, vol. 14, pp. 301–321.
8. Wiener, J. and Debnath, L., Partial differential equations with piecewise constant delay, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1991, vol. 14, pp. 485–496.
9. Wiener, J. and Heller, W., Oscillatory and periodic solutions to a diffusion equation of neutral type, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1999, vol. 22, no. 2, pp. 313–348.
10. Wiener, J. and Debnath, L., Boundary value problems for the diffusion equation with piecewise continuous time delay, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 1, pp. 187–195.
11. Buyukkahraman, M.L. and Bereketoglu, H., On a partial differential equation with piecewise constant mixed arguments, *Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, 2020, vol. 44, pp. 1791–1801.
12. Veloz, T. and Pinto, M., Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, vol. 426, no. 1, pp. 330–339.
13. Wang, Q. and Wen, J., Analytical and numerical stability of partial differential equations with piecewise constant arguments, *Numer. Methods Partial Differ. Equat.*, 2014, vol. 30, no. 1, pp. 1–16.
14. Muminov, M.I. and Radjabov, T.A., Forced diffusion equation with piecewise continuous time delay, *Adv. Math. Sci. J.*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 2269–2283.
15. Muminov, M.I. and Radjabov, T.A., On existence conditions for periodic solutions to a differential equation with constant argument, *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 2022, vol. 13, no. 5, pp. 491–497.
16. Muminov, M.I. and Radjabov, T.A., Existence conditions for 2-periodic solutions to a non-homogeneous differential equations with piecewise constant argument, *Examples and Counterexamples*, 2024, vol. 5, art. 100145.