ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 5–12

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956.32+517.929

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА В ПОЛОСЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

 Н. В. Зайцева

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 01.10.2024 г., после доработки 01.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследован вопрос существования классического решения начальной задачи в полосе с неполными данными на одной её границе для гиперболического дифференциально-разностного уравнения, содержащего суперпозицию дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси. Решение задачи получено в явном виде с помощью операционной схемы Гельфанда–Шилова.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, оператор сдвига, начальная задача, операционная схема, преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S0374064125010011, EDN: IATTRM

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Интерес к исследованию функционально-дифференциальных и, в частности, дифференциально-разностных уравнений и задач для них обусловлен двумя причинами. Во-первых, для таких обобщений дифференциальных уравнений оказываются неприменимыми некоторые методы, "хорошо работающие" для классических уравнений, а также возникают качественно новые эффекты в решениях, не имеющие места в классических случаях. Во-вторых, такие уравнения встречаются в разнообразных приложениях (механика деформируемого твёрдого тела, процессы вихреобразования и формирования сложных когерентных пятен, моделирование колебаний кристаллической решетки, нелинейная оптика, нейронные сети и др.), включая те, которые невозможно описать классическими моделями математической физики. Существенные результаты в исследовании задач для функционально-дифференциальных уравнений различных классов были получены А.Л. Скубачевским [1, 2], В.В. Власовым [3, 4], А.Б. Муравником [5], А.В. Разгулиным [6], Л.Е. Россовским [7], В.Ж. Сакбаевым [8] и другими авторами.

Будем называть согласно [1] *дифференциально-разностным* уравнение, содержащее как дифференциальные операторы, так и операторы сдвига.

К настоящему времени подробно изучены задачи для эллиптических (как в ограниченных, так и в неограниченных областях) и параболических дифференциально-разностных уравнений. В значительно меньшей степени исследованы гиперболические дифференциально-разностные уравнения. В работах [9, 10] впервые рассмотрены двумерные гиперболические уравнения с оператором сдвига в старшей производной, действующим по пространственной переменной. Цель настоящей статьи — построить в явном виде с помощью известной операционной схемы [11] решение модельной начальной задачи в полосе для такого уравнения.

Обозначим через $D=\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0<t<T\}$ область координатной плоскости Oxt, где $T>0$ — заданное действительное число, пусть $\overline{D}=\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t\leqslant T\}$.

Требуется найти функцию $u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x-h,t)}{\partial x^2},\quad (x,t)\in D, \tag{1}$$

где $a>0$, $h\neq 0$ — заданные действительные числа, и начальному условию

$$u(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Определение. *Классическим решением задачи* (1), (2) будем называть функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по переменным x и t в множестве $\overline{D}$; дважды непрерывно дифференцируемую по x и t в D; удовлетворяющую в каждой точке области D соотношению (1); такую, что для каждой точки $x_0\in\mathbb{R}$ предел функции $u(x_0,t)$ при $t\to+0$ существует и равен нулю.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для нахождения решения задачи (1), (2) согласно операционной схеме [11] применим к уравнению (1) и начальному условию (2) (формально) преобразование Фурье по переменной x, действующее по правилу

$$\widehat{u}(\xi,t):=F_x[u(x,t)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{i\xi x}\,dx.$$

В результате получим задачу в образах Фурье

$$\frac{d^2\widehat{u}(\xi,t)}{dt^2}+a^2\xi^2e^{ih\xi}\widehat{u}(\xi,t)=0, \tag{3}$$

$$\widehat{u}(\xi,0)=0,\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Характеристические корни уравнения, соответствующего уравнению (3), определяются по формуле

$$k_{1,2}=\pm i\,a\xi e^{ih\xi/2},$$

тогда общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\widehat{u}(\xi,t)=C_1(\xi)\cos(a\xi e^{ih\xi/2}t)+C_2(\xi)\sin(a\xi e^{ih\xi/2}t),$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ — произвольные постоянные, зависящие от параметра $\xi\in\mathbb{R}$. Подставив данную функцию в начальное условие (4), получим $C_1(\xi)=0$. Так как задача (3), (4) — задача с неполными начальными данными, положим

$$C_2(\xi)=(a\xi e^{ih\xi/2})^{-1}$$

и запишем окончательный вид её решения:

$$\widehat{u}(\xi,t)=\frac{\sin(a\xi e^{ih\xi/2}t)}{a\xi e^{ih\xi/2}},\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Применив теперь к найденной функции (формально) обратное преобразование Фурье, получим по аналогии с [12] следующие соотношения:

$$F_\xi^{-1}[\widehat{u}(\xi,t)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(\xi,t)e^{-ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(a\xi te^{ih\xi/2})}{\xi e^{ih\xi/2}}e^{-ix\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\left[\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(a\xi e^{-ih\xi/2}t\right)}{\xi}e^{i(x+h/2)\xi}\,d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(a\xi e^{ih\xi/2}t\right)}{\xi}e^{-i(x+h/2)\xi}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{\sin\left((at\cos\left(h\xi/2\right)+x+h/2)\xi\right)}{\xi e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}} + \frac{\sin\left((at\cos\left(h\xi/2\right)-x-h/2)\xi\right)}{\xi e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}}\right]d\xi. \tag{5}$$

Замечание 1. Если положим в (5) $h=0$, то получим $\theta(at-|x|)/(2a)$ — *фундаментальное решение* волнового оператора $\partial^2/\partial t^2 - a^2\partial^2/\partial x^2$, где θ — функция Хевисайда.

Так как полученный несобственный интеграл в (5) расходится, введём согласно [11] *регуляризатор* $f(\xi)$ для выражения (5) — функцию, удовлетворяющую условиям:

1) $f(\xi)$ положительно определена и непрерывна на множестве $[0,+\infty)$;

2) для любого числа $\varepsilon>0$ имеют место равенства

$$\lim_{\xi\to+\infty} f(\xi)e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\xi^\varepsilon = 0, \quad \lim_{\xi\to+\infty} f(\xi)e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\xi^\varepsilon = 0; \tag{6}$$

3) при любом значении $t\in[0,T]$ сходятся интегралы

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(\xi)e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi, \quad \int\limits_{0}^{+\infty} f(\xi)e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi; \tag{7}$$

4) при любом значении $t\in(0,T]$ сходятся интегралы

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(\xi)\xi e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi, \quad \int\limits_{0}^{+\infty} f(\xi)\xi e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi. \tag{8}$$

Примером такой функции, удовлетворяющей условиям 1)–4), является, например, функция $f(\xi)=\xi^\beta e^{-CT\xi}$, где $\beta\geqslant 0$ и $C>a>0$ — любые вещественные константы.

Замечание 2. Выполнение равенств (6) влечёт за собой [13, с. 102] сходимость несобственных интегралов

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi}e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi, \quad \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi}e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}\,d\xi. \tag{9}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма. *При выполнении условий 1)–4) функция*

$$G(x,t) := \int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{f(\xi)\sin\big((at\cos\left(h\xi/2\right)+x+h/2)\xi\big)}{\xi e^{-at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}} + \frac{f(\xi)\sin\big((at\cos\left(h\xi/2\right)-x-h/2)\xi\big)}{\xi e^{at\xi\sin\left(h\xi/2\right)}}\right]d\xi \tag{10}$$

удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле.

Доказательство. Подынтегральная функция в (10) непрерывна на множестве $[0,+\infty)$ как композиция непрерывных функций (в точке $\xi=0$ особенности нет в силу предельного соотношения $\sin\alpha/\alpha\to 0$ при $\alpha\to 0$).

Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} F(x,t;\xi)\,d\xi := \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi)\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)}{\xi e^{-at\xi\sin(h\xi/2)}}\,d\xi. \tag{11}$$

Так как с учётом условия 1)

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} F(x,t;\xi)\,d\xi\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi,$$

то в силу выполнения условия 2) и, как следствие, замечания 2 интеграл (11) сходится.

Проверим теперь, что функция (11) удовлетворяет уравнению (1). Для этого продифференцируем (11) формально под знаком интеграла по переменным t и x до второго порядка:

$$\int\limits_0^{+\infty} F_x(x,t;\xi)\,d\xi = \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\cos\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi; \tag{12}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} F_{xx}(x,t;\xi)\,d\xi = -\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi,$$

тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} F_{xx}(x-h,t;\xi)\,d\xi = -\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x-h/2)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi. \tag{13}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} F_t(x,t;\xi)\,d\xi = a\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\Big[\cos(h\xi/2)\cos\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)+ \\ +\sin(h\xi/2)\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x+h/2)\xi\big)\Big]e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi = \\ = a\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\cos\big((at\cos(h\xi/2)+x)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi;\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} F_{tt}(x,t;\xi)\,d\xi = -a^2\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi\Big[\cos(h\xi/2)\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x)\xi\big)- \\ -\sin(h\xi/2)\cos\big((at\cos(h\xi/2)+x)\xi\big)\Big]e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi = \\ = -a^2\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi\sin\big((at\cos(h\xi/2)+x-h/2)\xi\big)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi.\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя найденные производные (13) и (15) в соотношение (1), убеждаемся в его справедливости.

Исследуем на равномерную сходимость интеграл (12). Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} |F_x(x,t;\xi)|\,d\xi \leqslant \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi.$$

Так как интеграл в правой части неравенства сходится ввиду условия 3), а подынтегральное выражение в нём не зависит от переменной x, то в силу признака Вейерштрасса интеграл (12) сходится равномерно по переменной x на любом конечном промежутке $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$.

Аналогично из оценки

$$\int\limits_0^{+\infty} |F_{xx}(x-h,t;\xi)|\,d\xi \leqslant \int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi,$$

условия 4) и независимости подынтегральной функции от x в правой части последнего неравенства вытекает равномерная сходимость интеграла (13) по переменной x на любом отрезке $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$. Это значит, что дифференцирование под знаком интеграла в (11) по переменной x до второго порядка включительно было законным.

Оценим теперь интеграл (14):

$$\int\limits_0^{+\infty} |F_t(x,t;\xi)|\,d\xi \leqslant a\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi \leqslant \begin{cases} a\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at_2\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi, & \sin(h\xi/2)\geqslant 0,\\ a\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)e^{at_1\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi, & \sin(h\xi/2)<0.\end{cases}$$

Интегралы в правой части соотношений сходятся согласно условию 3), а подынтегральные выражения в них не зависят от t, следовательно, интеграл (14) сходится равномерно на любом промежутке $[t_1,t_2]\subset[0,T]$.

Из оценки

$$\int\limits_0^{+\infty} |F_{tt}(x,t;\xi)|\,d\xi \leqslant \begin{cases} a^2\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi e^{at_2\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi, & \sin(h\xi/2)\geqslant 0,\\ a^2\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\xi e^{at_1\xi\sin(h\xi/2)}\,d\xi, & \sin(h\xi/2)<0\end{cases}$$

и условия 4) вытекает, что интеграл (15) сходится равномерно на любом отрезке $[t_1,t_2]\subset(0,T]$. Таким образом, справедливо дифференцирование (15) под знаком интеграла по переменной t до второго порядка включительно.

Аналогично можно показать, ввиду условий 1) и 2), что сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} H(x,t;\xi)\,d\xi := \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi)\sin\big((at\cos(h\xi/2)-x-h/2)\xi\big)}{\xi e^{at\xi\sin(h\xi/2)}}\,d\xi \tag{16}$$

и что функция (16) удовлетворяет уравнению (1), дифференцируя непосредственно (16) под знаком интеграла по переменным x и t до второго порядка включительно и подставляя найденные производные $H_{tt}(x,t;\xi)$ и $H_{xx}(x-h,t;\xi)$ в (1). При этом в силу условий 3) и 4) интегралы $H_x(x,t;\xi)$ и $H_{xx}(x,t;\xi)$ сходятся равномерно по переменной x на любом отрезке $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$ и интегралы $H_t(x,t;\xi)$ и $H_{tt}(x,t;\xi)$ равномерно сходятся на любом отрезке $[t_1,t_2]$ множества $[0,T]$ и $(0,T]$ соответственно.

Таким образом, показано, что функция (10) существует в каждой точке области D и удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле. Лемма доказана.

На основании леммы справедлива следующая

Теорема. *При выполнении условий 1)–4) функция*

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x-\tau,t)u_0(\tau)\,d\tau, \tag{17}$$

где $G(x,t)$ определяется равенством (10), $u_0(x)$ — любая интегрируемая на всей числовой прямой функция, удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле и предельному соотношению

$$\lim_{t\to+0} u(x_0,t)=0$$

для любого значения $x_0\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Функция (17) имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)\int\limits_{0}^{+\infty}\biggl[\frac{\sin\bigl((at\cos(h\xi/2)+x-\tau+h/2)\xi\bigr)}{\xi e^{-at\xi\sin(h\xi/2)}}+$$
$$+\frac{\sin\bigl((at\cos(h\xi/2)-x+\tau-h/2)\xi\bigr)}{\xi e^{at\xi\sin(h\xi/2)}}\biggr]\,d\xi\,d\tau.$$

Так как $u_0(x)\in L_1(\mathbb{R})$, то для существования в области D функции (17) достаточно показать, что $|G(x-\tau,t)|\leqslant\mathrm{const}$, что верно в силу условия 2) и замечания 2. Ввиду доказанной леммы функция (17) является классическим решением уравнения (1). Отметим также, что в силу этой же леммы функция (17) принадлежит классу $C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$ (подынтегральная функция в (17) непрерывна), интегралы $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ сходятся равномерно по переменной x на любом конечном отрезке $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$, интегралы $u_t(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$ сходятся равномерно по t на любом конечном отрезке $[t_1,t_2]$ из множеств $[0,T]$ и $(0,T]$ соответственно (интеграл $u_t(x,t)$ сходится на границе $t=0$).

Пусть $x_0\in\mathbb{R}$. В (17) сделаем замену переменной по формуле $(x_0-\tau)/t=\eta$ и получим

$$u(x_0,t)=\frac{t}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t\eta,t)u_0(x_0-t\eta)d\eta,$$

откуда при $t\to+0$ следует оценка $|u(x_0,t)|<\varepsilon$ для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$. Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skubachevskii, A.L. Elliptic Functional-Differential Equations and Applications / A.L. Skubachevskii. — Basel ; Boston ; Berlin : Birkhäuser, 1997. — 294 p.
2. Скубачевский, А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, № 5 (431). — С. 3–122.
3. Власов, В.В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В.В. Власов, Д.А. Медведев // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2008. — Т. 30. — С. 3–173.
4. Власов, В.В. Дифференциально-разностные уравнения / В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М. : МАКС Пресс, 2016. — 488 с.
5. Муравник, А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А.Б. Муравник // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2014. — Т. 52. — С. 3–143.
6. Разгулин, А.В. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием / А.В. Разгулин, Т.Е. Романенко // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2013. — Т. 53, № 11. — С. 42–60.
7. Россовский, Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции / Л.Е. Россовский // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2014. — Т. 54. — С. 3–138.
8. Акбари Фаллахи, А. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием / А. Акбари Фаллахи, А. Йаакбариех, В.Ж. Сакбаев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 352–365.
9. Зайцева, Н.В. О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н.В. Зайцева // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491, № 2. — С. 44–46.
10. Зайцева, Н.В. Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н.В. Зайцева // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 6. — С. 745–751.
11. Гельфанд, И.М. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов // Успехи мат. наук. — 1953. — Т. 30, № 6 (58). — С. 3–173.
12. Zaitseva, N.V. On one Cauchy problem for a hyperbolic differential-difference equation / N.V. Zaitseva // Differ. Equat. — 2023. — V. 59, № 12. — P. 1787–1792.
13. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Часть II / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — 4-е изд. — М. : Наука, 2002. — 464 с.

MODEL PROBLEM IN A STRIP FOR THE HYPERBOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATION

© 2025 / N. V. Zaitseva

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

The paper investigates the question of the existence of a classical solution to the initial value problem with incomplete initial data on the boundary of the strip for a hyperbolic differential-difference equation. The equation contains a superposition of a differential operator and a translation operator with respect to a spatial variable that varies along the entire real axis. Using the Gelfand–Shilov operational scheme, a solution to the problem was obtained in explicit form.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, translation operator, initial problem, operational scheme, Fourier transform

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Skubachevskii, A.L., *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
2. Skubachevskii, A.L., Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications, *Russ. Math. Surv.*, 2016, vol. 71, no. 5, pp. 801–906.
3. Vlasov, V.V. and Medvedev, D.A., Functional-differential equations in Sobolev spaces and related problems of spectral theory, *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 164, no. 5, pp. 659–841.
4. Vlasov, V.V. and Rautian, N.A., *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* (Spectral Analysis of Functional Differential Equations), Moscow: MAKS Press, 2016.
5. Muravnik, A.B., Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem, *J. Math. Sci.*, 2016, vol. 216, no. 3, pp. 345–496.
6. Razgulin, A.V. and Romanenko, T.E., Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 11, pp. 1626–1643.
7. Rossovskii, L.E., Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function, *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 223, no. 4, pp. 351–493.
8. Akbari Fallahi, A., Yaakbariev, A., and Sakbaev, V.Zh., Weel-posedness of a problem with initial conditions for hyperbolic differential-difference equations with shifts in the time argument, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 3, pp. 346–360.
9. Zaitseva, N.V., On global classical solutions of hyperbolic differential-difference equations, *Dokl. Math.*, 2020, vol. 101, no. 2, pp. 115–116.
10. Zaitseva, N.V., Global classical solutions of some two-dimensional hyperbolic differential-difference equations, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 734–739.
11. Gel'fand, I.M. and Shilov, G.E., Fourier transforms of rapidly growing functions and questions of uniqueness of the solution of the Cauchy problem, *Usp. Mat. Nauk*, 1953, vol. 8, no. 6 (58), pp. 3–54.
12. Zaitseva, N.V., On one Cauchy problem for a hyperbolic differential-difference equation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1787–1792.
13. Il'in, V.A. and Poznyak, E.G., *Osnovy matematicheskogo analiza* (Fundamentals of Mathematical Analysis), Moscow: Nauka, 2002.