ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 12, с. 1703–1712

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С НАГРУЖЕННЫМ ЧЛЕНОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. У. Уразбоев[1], М. М. Хасанов[2], О. Б. Исмоилов[3]

[1,2]Ургенчский государственный университет, Узбекистан

[1,3]Хорезмское отделение Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ургенч

e-mail: [1]gayrat71@mail.ru, [2]hmuzaffar@mail.ru, [3]bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Поступила в редакцию 06.12.2023 г., после доработки 10.03.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Найдены спектральные данные оператора Дирака с периодическим потенциалом, связанного с решением модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом. Методом обратной спектральной задачи построены решения этого уравнения в классе периодических функций. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина–Трубовица в классе трижды непрерывно дифференцируемых периодических функций.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка, нагруженный член, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина–Трубовица, формула следов, периодическая функция

DOI: 10.31857/S0374064124120094, EDN: IOUQYF

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье [1] показана применимость метода обратной задачи рассеяния к решению задачи Коши для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза (МУКдФ)

$$q_t-6q^2q_x+q_{xxx}=0,$$

которое широко используется для описания волн в изотропных средах.

В гемодинамике применяется модель [2], в которой артерия рассматривается как тонкостенная предварительно напряжённая упругая трубка с переменным радиусом (или со стенозом), а кровь — как идеальная жидкость. Эта модель описывается МУКдФ с переменным коэффициентом

$$q_t+\mu_2q^2q_x+\mu_3q_{xxx}+h(t)q_x=0,$$

где μ_2, μ_3 — коэффициенты, характеризующие свойства материала трубки, t — отмасштабированная координата вдоль оси сосуда после статической деформации, характеризующая осесимметричный стеноз на поверхности артериальной стенки, x — зависящая от времени и координаты вдоль оси сосуда переменная, $h(t)$ — форма стеноза, функция q характеризует усреднённую осевую скорость жидкости.

При $\mu_2=-6$, $\mu_3=1$ и нагружении $h(t)=\gamma(t)q(0,t)$ гемодинамическая модель в классе периодических функций была исследована в работе [3].

Применению метода (G'/G)-разложения для интегрирования нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза (УКдФ) и нагруженного МУКдФ посвящены работы [4, 5]. Интерес к интегрируемым уравнениям отрицательного порядка возрос после работы [6] об операторах рекурсии для симметрии эволюционных уравнений.

В работах [7, 8] методом обратной задачи рассеяния были проинтегрированы УКдФ и МУКдФ отрицательного порядка

$$q_{xt} = -2q\mu_t, \quad \mu_x = -q^2$$

в классе быстроубывающих функций. В [9] изучено МУКдФ отрицательного порядка в классе периодических функций.

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию МУКдФ отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций.

Рассмотрим МУКдФ

$$q_{xt} = -2q\mu_t + \gamma(t)q(0,t)q, \quad \mu_x = -q^2, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

со следующими условиями:

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x,t) - \mu_t(x,t)]|_{x=0} = \beta(t), \tag{2}$$

где $q_0(x)\in C^3(\mathbb{R})$, $\beta(t)\in C[0,\infty)$, $\gamma(t)\in C[0,\infty)$ и $\mu_0(t)\in C^1[0,\infty)$ — заданные действительные функции, $q_0(x)$ имеет период π, а функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ ограничены.

Требуется найти действительные решения $q(x,t)$ и $\mu(x,t)$ задачи (1), (2), удовлетворяющие условиям гладкости

$$q(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geqslant 0), \quad \mu(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geqslant 0) \tag{3}$$

и условиям периодичности по переменной x:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \quad \mu_t(x+\pi,t) = \mu_t(x,t), \quad t\geqslant 0, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

При изучении разрешимости задачи (1)–(4) будем использовать спектральную задачу для уравнения с оператором Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Условие периодичности $\mu_t(x+\pi,t) - \mu_t(x,t) = 0$ в (4), в силу π-периодичности по переменной x функции $q(x,t)$ и равенства $\mu(x,t) = \mu_0(t) - \int_0^x q^2(s,t)\,ds$, примет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^\pi q^2(s,t)\,ds = 0,$$

т.е. рассматриваемая система обладает тем же интегральным инвариантом, что и классическое МУКдФ.

2. ОПЕРАТОР ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Приведём некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическим коэффициентом (см. [10–13]).

Пусть $c(x,\lambda)=(c_1(x,\lambda),c_2(x,\lambda))^{\text{т}}$ и $s(x,\lambda)=(s_1(x,\lambda),s_2(x,\lambda))^{\text{т}}$ — решения уравнения Дирака

$$Ly\equiv\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&q(x)\\q(x)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad x\in\mathbb{R},\tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$c(0,\lambda)=(1,\ 0)^{\text{т}},\quad s(0,\lambda)=(0,\ 1)^{\text{т}},\tag{7}$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная π-периодическая функция из класса $C^1(\mathbb{R})$, а λ — комплексный параметр.

Через λ_n, $n\in\mathbb{Z}$, обозначим собственные значения, пронумерованные в порядке возрастания, либо периодической $(y_1(0)=y_1(\pi),\ y_2(0)=y_2(\pi))$, либо антипериодической $(y_1(0)=-y_1(\pi),\ y_2(0)=-y_2(\pi))$ задачи (6), (7).

Спектр оператора (6) имеет вид

$$\mathbb{E}=\{\lambda\in\mathbb{R}\colon\ -2\leqslant\Delta(\lambda)\leqslant 2\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right\},$$

где $\Delta(\lambda)=c_1(\pi,\lambda)+s_2(\pi,\lambda)$ называется *функцией Ляпунова*. Интервалы $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n\in\mathbb{Z}$, называются *лакунами*.

Нули ξ_n, $n\in\mathbb{Z}$, уравнения $s_1(\pi,\lambda)=0$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле с условиями $y_1(0)=0$, $y_1(\pi)=0$ для уравнения (6) и, более того, $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Наборы чисел $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n\in\mathbb{Z}$, и знаков $\sigma_n=\operatorname{sign}\{s_2(\pi,\xi_n)-c_1(\pi,\xi_n)\}$, $n\in\mathbb{Z}$, называются *спектральными параметрами задачи* (6), (7). Множества спектральных параметров ξ_n, σ_n, $n\in\mathbb{Z}$, и границ спектра λ_n, $n\in\mathbb{Z}$, называются *спектральными данными задачи*. Нахождение спектральных данных задачи (6), (7) является *прямой задачей*, а восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным — *обратной задачей*.

Если в задаче (6), (7) вместо $q(x)$ рассмотреть $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ: $\lambda_n(\tau)\equiv\lambda_n$, $n\in\mathbb{Z}$, а спектральные параметры зависят от τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n\in\mathbb{Z}$, и удовлетворяют системе уравнений типа Дубровина–Трубовица

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi)\xi_n,\quad n\in\mathbb{Z},$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\left[\prod_{k=-\infty,\ k\neq n}^{+\infty}(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)(\xi_k-\xi_n)^{-2}\right]^{1/2}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина–Трубовица, а также формула следов

$$q(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau)),$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Теорема 1. *Для действительных непрерывно-дифференцируемых функций $q(x)$ компоненты $(y_1(x),\ y_2(x))^{\text{т}}$ решения (6) удовлетворяют уравнениям*

$$-y_1''+[q^2(x)+q'(x)]y_1=\lambda^2y_1,\quad -y_2''+[q^2(x)-q'(x)]y_2=\lambda^2y_2.$$

Следствие 1. *Если* $(y_{n,1}(x),\, y_{n,2}(x))^{\mathrm{т}}$ *— собственная вектор-функция задачи (6),* $y_1(0)=0$, $y_1(\pi)=0$, *соответствующая собственному значению* $\xi_n\neq 0$, *то* $y_{n,1}(x)$ *является собственной функцией граничной задачи*

$$-y_1''+[q^2(x)+q'(x)]y_1=\nu y_1,\quad y_1(0)=0,\quad y_1(\pi)=0,$$

соответствующей собственному значению ξ_n^2. *Здесь* ν *— спектральный параметр.*

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть вектор-функция* $(y_1,\ y_2)^{\mathrm{т}}$ *является решением уравнения (6). Тогда справедливы следующие тождества:*

$$2y_2y_1=\frac{1}{2\lambda}[y_2^2-y_1^2]'+\frac{1}{\lambda}q(y_1^2+y_2^2),\quad \frac{1}{2}[y_2^2+y_1^2]'=q(y_1^2-y_2^2).$$

3. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 2. *Если набор* $(q(x,t),\mu(x,t))$ *является решением задачи (1)–(4), то спектр оператора (5) не зависит от параметра* t, *а спектральные параметры* $\xi_n=\xi_n(t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, *удовлетворяют системе уравнений типа Дубровина–Трубовица*

$$\dot{\xi}_n=\frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\left[q_t(0,t)-\mu_t(0,t)+\frac{\gamma(t)q(0,t)}{2}\right],\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{8}$$

При этом знаки $\sigma_n(t)=\pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ и выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0}=\xi_n^0,\quad \sigma_n(t)|_{t=0}=\sigma_n^0,\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{9}$$

где ξ_n^0, σ_n^0 — спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Следуя работе [9], можно доказать, что если $q(x,t)$ — решение системы

$$q_{xt}=-2q\mu_t+G(x,t),\quad \mu_x=-q^2, \tag{10}$$

то справедливы равенства

$$\dot{\xi}_n(t)=\frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)][q_t(0,t)-\mu_t(0,t)]-\frac{1}{2\xi_n}\int\limits_0^\pi(y_{n,2}^2-y_{n,1}^2)G(x,t)\,dx,\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{11}$$

где $y_n(x,t)$ — ортонормированные собственные функции задачи Дирихле (5) $y(0)=0$, $y(\pi)=0$, соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

В соответствии с (1) положим $G(x,t)=\gamma(t)q(0,t)q(x,t)$ и вычислим интеграл в (11):

$$-\frac{\gamma(t)q(0,t)}{2\xi_n}\int\limits_0^\pi(y_{n,2}^2-y_{n,1}^2)q\,dx=\frac{1}{4\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)]\gamma(t)q(0,t).$$

В результате уравнение (11) запишем как

$$\dot{\xi}_n(t)=\frac{1}{2\xi_n}[y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)]\left[q_t(0,t)-\mu_t(0,t)+\frac{\gamma(t)q(0,t)}{2}\right],\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{12}$$

Из (12) и равенства $y_{n,2}^2(\pi,t)-y_{n,2}^2(0,t)=2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)$ получим уравнение (8).

Если заменить граничные условия Дирихле периодическими $y(\pi)=y(0)$ или антипериодическими $y(\pi)=-y(0)$ условиями, то вместо (12) получим уравнения $\dot{\lambda}_n=0$. Таким образом, собственные значения λ_n, $n\in\mathbb{Z}$, периодической и антипериодической задач не зависят от параметра t. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задач не зависят от параметров τ и t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ, t, т.е. $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n=\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}$. В этом случае задача (8), (9) примет вид*

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=\frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\left[q_t(\tau,t)-\mu_t(\tau,t)+\frac{\gamma(t)q(0,t)}{2}\right],\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{13}$$

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\tag{14}$$

Из формулы следов

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\tag{15}$$

и равенства $\mu_x=-q^2$ получаем

$$q_t(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t},$$

$$\mu(\tau,t)=\mu_0(t)-\int\limits_0^\tau q^2(s,t)\,ds,\tag{16}$$

$$\mu_t(\tau,t)=\mu_0'(t)-2\int\limits_0^\tau q(s,t)q_t(s,t)\,ds.$$

Замечание 2. Исследуем существование и единственность решения задачи (13), (14) в случае, когда $q_0(x)\in C^3(\mathbb{R})$. Перепишем систему (13) в виде

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau,t))}\,g_n(\xi(\tau,t))f_n(\xi(\tau,t)),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{17}$$

где

$$g_n(\xi)=\frac{\beta(t)}{2\xi_n}\exp\left\{2\int\limits_0^x q(\tau,t)d\tau\right\}+\frac{\gamma(t)q(0,t)}{2\xi_n},$$

$$f_n(\xi)=\left[\prod_{k=-\infty,\,k\neq n}^{+\infty}(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))(\xi_n(\tau,t)-\xi_k(\tau,t))^{-2}\right]^{1/2}.$$

В системе уравнений (17) введём замену переменных

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{18}$$

и на основании равенств

$$\dot{\xi}_n=(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin(2x_n)\dot{x}_n,\quad \sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}=\frac{1}{2}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})|\sin(2x_n)|$$

запишем её в виде

$$\dot{x}_n(\tau,t)=(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\,\mathrm{sign}\{\sin x_n\cos x_n\}g_n(x)f_n(x),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\tag{19}$$

В системе (19) знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны, при этом выражение $\sin x_n(\tau,t)\cos x_n(\tau,t)$ также меняет знак на противоположный. Будем выбирать начальные условия в виде

$$x_n(\tau,0)=x_n^0(\tau)=\arcsin\sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau)-\lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}},\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{20}$$

следовательно, $\sigma_n(\tau,t)\,\mathrm{sign}\{\sin x_n\cos x_n\}=\sigma_n^0(\tau)$. Таким образом, уравнение (20) приводится к виду

$$\dot{x}_n=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)g_n(x)f_n(x),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

а с помощью обозначения

$$H_n(x)=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)g_n(x)f_n(x)$$

запишем его как

$$\frac{dx_n(\tau,t)}{dt}=H_n(\ldots,x_{-1}(\tau,t),x_0(\tau,t),x_1(\tau,t),\ldots),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{21}$$

В банаховом пространстве $\mathbb{K}=\big\{x(\tau,t)=(\ldots,x_{-1}(\tau,t),x_0(\tau,t),x_1(\tau,t),\ldots)\colon \|x(\tau,t)\|= =\sum_{n=-\infty,\,n\neq0}^{+\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})|x_n(\tau,t)|<\infty\big\}$ система (21) приводится к одному уравнению

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),$$

а условия (20) — к

$$x_n(\tau,t)|_{t=0}=x_n^0(\tau),\quad x^0\in\mathbb{K},$$

где $H(x)=(\ldots,H_{-1}(x),H_0(x),H_1(x),\ldots)$.

Известно [14, с. 181], что для того чтобы задача Коши $y'=F(y)$, $y(0)=y^0$ в банаховом пространстве $\mathbb{K}$ имела единственное решение, достаточно выполнения условия Липшица для функции $F(y)$, т.е.

$$\|F(x)-F(y)\|\leqslant\mathrm{const}\cdot\|x-y\|\quad \text{для любых } x,y\in\mathbb{K}.$$

Поэтому достаточно показать, что функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве $\mathbb{K}$.

Из условия $q_0(x)\in C^3(\mathbb{R})$ вытекает, что $q_0^2(x)+q_0'(x)\in C^2(\mathbb{R})$. В силу следствия 1 и асимптотики (см. [15, с. 75]) собственных значений оператора Штурма–Лиувилля получим следующие асимптотики:

$$\lambda_{2n-1}=n+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\frac{\varepsilon_n^-}{n^2},\quad \lambda_{2n}=n+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\frac{\varepsilon_n^+}{n^2},$$

где c_1, c_2 — постоянные числа и $\{\varepsilon_n^\pm\}\in l_2$, $\zeta_n\equiv\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$.

Так как $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, то $\inf_{k\neq n}|\xi_n-\xi_k|\geqslant a>0$. С учётом последнего неравенства и (18) оценим функции $|f_n(x)|$, $|\partial f_n(x)/\partial x_m|$ и $|g_n(x)|$, $|\partial g_n(x)/\partial x_m|$.

Лемма 2 [16]. *Справедливы следующие оценки:*

$$C_1\leqslant|f_n(x)|\leqslant C_2,\quad \left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right|\leqslant C_3\zeta_m,\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

где положительные константы C_1, C_2 и C_3 не зависят от m и n.

Лемма 3. *Справедливы следующие оценки:*

$$|g_n(x)|\leqslant\frac{C_4}{|n|},\quad \left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right|\leqslant C_5\frac{\zeta_m}{n},$$

где C_4 и C_5 — положительные постоянные, не зависящие от m и n.

Доказательство. Поскольку функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ ограничены, то найдутся такие действительные числа M_1 и M_2, что выполняются неравенства $|\beta(t)|\leqslant M_1$, $|\gamma(t)|\leqslant M_2$. С учётом (18) получим следующие оценки:

$$|g_n(x)|\leqslant\frac{1}{2|\lambda_{2n-1}+\zeta_n\sin^2 x_n|}\bigg[M_1\exp\bigg\{\int\limits_0^\tau\bigg|\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{+\infty}(-1)^{k-1}\zeta_k\sigma_k^0(s)\sin(2x_k(s,t))f_k(x(s,t))\,ds\bigg|\bigg\}+$$

$$+M_2\bigg|\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{+\infty}(-1)^{k-1}\zeta_k\sigma_k^0(0)\sin(2x_k(0,t))f_k(x(0,t))\bigg|\bigg]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2A_1|n|}\bigg[M_1\exp\bigg\{\int\limits_0^\tau\bigg|\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{+\infty}C_2\zeta_k\,ds\bigg|\bigg\}+M_2\bigg|\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{+\infty}C_2\zeta_k\bigg|\bigg]\leqslant\frac{C_4}{|n|},$$

$$\bigg|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\bigg|\leqslant\frac{1}{2|\lambda_{2n-1}+\zeta_n\sin^2 x_n|}\bigg[M_1\exp\bigg\{\int\limits_0^\tau\bigg|\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{+\infty}(-1)^{k-1}\zeta_k\sigma_k^0(s)\sin(2x_k(s,t))f_k(x(s,t))\,ds\bigg|\bigg\}\times$$

$$\times\bigg(\bigg|\int\limits_0^\tau(-1)^{m-1}\zeta_m\sigma_m^0(s)\bigg(2\cos(2x_m(s,t))f_m(x(s,t))+\sin(2x_k(s,t))\frac{\partial f_k(x(s,t))}{\partial x_m}\bigg)\,ds\bigg|+$$

$$+\int\limits_0^\tau\bigg|\sum_{k=-\infty,\,k\neq m}^{+\infty}(-1)^{k-1}\zeta_k\sigma_k^0(s)\sin(2x_k(s,t))\frac{\partial f_k(x(s,t))}{\partial x_m}\,ds\bigg|\bigg)+$$

$$+M_2\bigg|(-1)^{m-1}\zeta_m\sigma_m^0(0)\bigg(2\cos(2x_m(0,t))f_m(x(0,t))+\sin(2x_k(0,t))\frac{\partial f_k(x(0,t))}{\partial x_m}\bigg)\bigg|+$$

$$+M_2\sum_{k=-\infty,\,k\neq m}^{+\infty}(-1)^{k-1}\zeta_k\sigma_k^0(0)\sin(2x_k(0,t))\frac{\partial f_k(x(0,t))}{\partial x_m}\bigg]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2A_1|n|}\bigg[M_1\exp\bigg\{\int\limits_0^\tau\bigg|\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{+\infty}C_2\zeta_k\,ds\bigg|\bigg\}\bigg(d_1\zeta_m|\tau|+d_2\zeta_m^2|\tau|+\zeta_m\int\limits_0^\tau\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{+\infty}C_3\zeta_k\,ds\bigg)+$$

$$+M_2d_3\zeta_m+M_2d_4\zeta_m^2+M_2\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{+\infty}C_3\zeta_k\bigg]\leqslant C_5\frac{\zeta_m}{|n|}.$$

Лемма доказана.

Используя результаты лемм 2 и 3, оценим производную функции $F_n(x)=g_n(x)f_n(x)$:

$$\bigg|\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_m}\bigg|\leqslant\bigg|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}f_n(x)+\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}g_n(x)\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\bigg|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\bigg||f_n(x)|+\bigg|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\bigg||g_n(x)|\leqslant C_3\zeta_m\frac{C_4}{|n|}+C_2C_5\frac{\zeta_m}{|n|}\leqslant C\frac{\zeta_m}{|n|},$$

где постоянная $C>0$ не зависит от m и n.

Лемма 4. *Вектор-функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховым пространстве $\mathbb{K}$, т.е. существует константа $L=\mathrm{const}>0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t),y(\tau,t)\in\mathbb{K}$ выполняется неравенство*

$$\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\|\leqslant L\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\|.$$

Доказательство. С учётом формулы $H_n(x)=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)F_n(x),\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, имеем

$$|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))|=|F_n(x(\tau,t))-F_n(y(\tau,t))|.$$

Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t)=F_n(x+t(y-x))$ на отрезке $t\in[0,1]$, получаем

$$F_n(x)-F_n(y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}(x_m-y_m),$$

где $\theta=x+t(y-x)$. Таким образом,

$$|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))|=|F_n(x(\tau,t))-F_n(y(\tau,t))|\leqslant\sum_{m=-\infty,\ m\neq 0}^{+\infty}\left|\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}\right||x_m(\tau,t)-y_m(\tau,t)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=-\infty,\ m\neq 0}^{+\infty}\frac{C}{|n|}|\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}||x_m-y_m|=\frac{C}{|n|}\|x-y\|.$$

Теперь оценим норму

$$\|H(x)-H(y)\|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}|\,|H_n(x)-H_n(y)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{C}{n}|\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}|\,\|x-y\|=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{C}{n}|\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}|\,\|x-y\|=L\|x-y\|,$$

где

$$L=\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty}\frac{C}{|n|}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})=C\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty}\frac{\zeta_n}{|n|}<\infty,\quad \zeta_n\equiv\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1},$$

т.е. условие Липшица выполнено.

Значит, решение задачи Коши (17), (14) для всех $t>0$ существует и единственно. Лемма доказана.

Замечание 3. Покажем, что пара функций $q(x,t)$, $\mu(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Для этого используем систему Дубровина–Трубовица (13) и вторую формулу следов

$$q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right). \tag{22}$$

Дифференцируя по t формулу (22), получаем

$$2qq_t(\tau,t)+q_{\tau t}(\tau,t)=-2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\xi_k(\tau,t)\frac{\partial\xi_k(\tau,t)}{\partial t}. \tag{23}$$

Далее, подставив систему уравнений (13) в (23), будем иметь

$$2qq_t(\tau,t)+q_{\tau t}(\tau,t)=2\left(q_t(\tau,t)-\mu_t(\tau,t)+\frac{\gamma(t)q(0,t)}{2}\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi).$$

С учётом (15) отсюда заключаем, что

$$2qq_t(\tau,t)+q_{\tau t}(\tau,t)=2q(q_t(\tau,t)-\mu_t(\tau,t))+\gamma(t)q(0,t)q,$$

$$q_{\tau t}(\tau,t)=-2q\mu_t(\tau,t)+\gamma(t)q(0,t)q.$$

Дифференцируя равенство (16) по τ, находим $\mu_\tau=-q^2$.

Следствие 3. *Теорема 2 даёт способ решения задачи (1)–(4). Сначала находим спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, оператора Дирака, соответствующие потенциалу $q_0(x+\tau)$. Далее, решая при $\tau=0$ задачу Коши (13), (14), находим $\xi_n(0,t)$ и $\sigma_n(0,t)$, $n \in \mathbb{Z}$. По этим данным определяем $q(0,t)$. После этого подставляем $q(0,t)$ в уравнение (13) и, решая задачу Коши при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. По формуле следов (15) определяем $q(x,t)$ и затем из формулы (16) определяем $\mu(x,t)$.*

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wadati, M. The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation / M. Wadati // J. Phys. Soc. of Japan. — 1972. — V. 33, № 5. — P. 1456–1458.
2. Demiray, H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves / H. Demiray // Chaos Soliton Fract. —2009. — V. 42, № 1. — P. 358–364.
3. Хасанов, М.М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций / М.М. Хасанов // Узбек. мат. журн. — 2016. — Т. 4. — С. 139–147.
4. Уразбоев, Г.У. Обобщённый метод (G'/G)-расширения для нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза / Г.У. Уразбоев, И.И. Балтаева, И.Д. Рахимов // Сиб. журн. индустр. математики. — 2021. — Т. 24, № 4. — С. 139–147.
5. Балтаева, И.И. Точные решения бегущей волны нагруженного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза / И.И. Балтаева, И.Д. Рахимов, М.М. Хасанов. // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2022. — Т. 41. — С. 85–95.
6. Olver, P.J. Evolution equations possessing in nitely many symmetries / P.J. Olver // J. Math. Phys. — 1977. — V. 18. — P. 1212–1215.
7. Уразбоев, Г.У. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния / Г.У. Уразбоев, И.И. Балтаева, О.Б. Исмоилов // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки — 2023. — Т. 33, № 3. — С. 523–533.
8. Уразбоев, Г.У. Солитонообразные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка / Г.У. Уразбоев, И.И. Балтаева, Ш.Э. Атаназарова // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2024. — Т. 47. — С. 63–77.
9. Уразбоев, Г.У. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций / Г.У. Уразбоев, А.Б. Яхшимуратов, М.М. Хасанов // Теор. и мат. физика. — 2023. — Т. 217, № 2. — С. 317–328.
10. Левитан, Б.М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. — М. : Наука, 1988. — 431 с.
11. Мисюра, Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. I / Т.В. Мисюра // Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1978. — № 30. — С. 90–101.
12. Хасанов, А.Б. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом / А.Б. Хасанов, А.М. Ибрагимов // Узбек. мат. журн. — 2001. — № 3. — С. 48–55.
13. Джаков, П.Б. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / П.Б. Джаков, Б.С. Митягин // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, № 4. — С. 77–182.
14. Левитан, Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б.М. Левитан. — М. : Наука, 1984. — 240 с.
15. Марченко, В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 332 с.
16. Муминов, У.Б. Интегрирование дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами / У.Б. Муминов, А.Б. Хасанов // Теор. и мат. физика. — 2022. — Т. 211, № 1. — С. 84–104.

INTEGRATION OF THE NEGATIVE ORDER MODIFIED KORTEWEG–DE VRIES EQUATION WITH A LOADED TERM IN THE CLASS OF PERIODIC FUNCTIONS

G. U. Urazboev[1], M. M. Khasanov[2], O. B. Ismoilov[3]

[1,2]*Urgench State University, Uzbekistan*
[1,3]*Khorezm Branch of V.I. Romanovski Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Science, Urgench, Uzbekistan*
e-mail: [1]gayrat71@mail.ru, [2]hmuzaffar@mail.ru, [3]bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Spectral data of the Dirac operator with periodic potential are found. This operator is associated with the negative order modified Korteweg–de Vries equation with a loaded term. The obtained results make it possible to construct a solution to the negative order modified Korteweg–de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions using the inverse spectral problem method. The solvability of the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovin–Trubovitz differential equations in the class of three times continuously differentiable periodic functions is proved.

Keywords: negative-order modified Korteweg–de Vries equation, loaded term, Dirac operator, inverse spectral problem, Dubrovin–Trubowitz system of equations, trace formula, periodic function

REFERENCES

1. Wadati, M., *The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation*, J. Phys. Soc. of Japan, 1972, vol. 33, no. 5, pp. 1456–1458.
2. Demiray, H., Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: solitary waves, *Chaos Soliton Fract*, 2009, vol. 42, no. 1, pp. 358–364.
3. Khasanov, M.M., Integration of the loaded modified Korteweg–de Vries equation in the class of periodic functions, *Uzbek Math. J.*, 2016, vol. 4, pp. 139–147.
4. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I., and Rakhimov, I.D., A generalized (G'/G)-expansion method for the loaded Korteweg–de Vries equation, *Sib. Zhurn. Industr. Matematiki*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 139–147.
5. Baltaeva, I.I., Rakhimov, I.D., and Khasanov, M.M., Exact traveling wave solutions of the loaded modified Korteweg–de Vries equation, *Bull. of Irkutsk State Univ. Ser. Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 85–95.
6. Olver, P.J., Evolution equations possessing in nitely many symmetries, *J. Math. Phys.*, 1977, vol. 18, pp. 1212–1215.
7. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I., and Ismoilov, O.B., Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method, *Vestn. Udmurt. Univ. Matematika. Mekhanika. Komp. Nauki*, 2023, vol. 33, no. 3, pp. 523–533.
8. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I., and Atanazarova, Sh.E., Soliton solutions of the negative order modified Korteweg–de Vries equation, *Bull. of Irkutsk State Univ. Ser. Mathematics*, 2024, vol. 47, pp. 63–77.
9. Urazboev, G.U., Yakhshimuratov, A.B., and Khasanov, M.M., Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions, *Theor. Math. Phys.*, 2023, vol. 217, no. 2, pp. 1689–1699.
10. Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S., *Sturm–Liouville and Dirac Operators*, Dordrecht: Springer, 1990.
11. Misjura, T.V., Characterization of the spectra of the periodic and antiperiodic boundary value problems that are generated by the Dirac operator, *Theory of Functions, Functional Analysis and their Applications*, 1978, no. 30, pp. 90–101.
12. Khasanov, A.B. and Ibragimov, A.M., On the inverse problem for the Dirac operator with periodic potential, *Uzbek Math. J.*, 2001, no. 3, pp. 48–55.
13. Djakov, P.B. and Mityagin, B.S., Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators, *Russ. Math. Surv.*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–766.
14. Levitan, B.M., *Obratnyye zadachi Shturma–Liuvillya* (The Inverse Problems of Sturm–Liouville), Moscow: Nauka, 1984.
15. Marchenko, V.A., *Operatory Shturma–Liuvillya i ikh prilozheniya* (Sturm–Liouville Operators and their Applications), Kyiv: Naukova dumka, 1977.
16. Muminov, U.B. and Khasanov, A.B., Integration of a defocusing nonlinear Schrodinger equation with additional terms, *Theor. Math. Phys.*, 2022, vol. 211, no. 1, pp. 514–534.