ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 12, с. 1623–1639

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.923

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ ПРИ МАЛЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ КОЭФФИЦИЕНТОВ И АНАЛИЗЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Е. С. Паламарчук

Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", г. Москва
e-mail: e.palamarchuck@gmail.com

Поступила в редакцию 03.07.2024 г., после доработки 01.10.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Проведён анализ чувствительности решений уравнений Риккати к асимптотически малым изменениям матриц коэффициентов. Получена верхняя оценка для разности между решением алгебраического уравнения Риккати и решением соответствующего дифференциального уравнения Риккати. Результат применён для исследования оптимальности в задаче стохастического линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени для асимптотически автономной системы. Также изучен вопрос о качестве инвариантной стратегии управления.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Риккати, чувствительность решений, стохастический линейный регулятор, оптимальность

DOI: 10.31857/S0374064124120047, EDN: IPHTNI

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Статья посвящена исследованию чувствительности решений уравнений Риккати к малым изменениям матриц коэффициентов. Отметим, что анализ чувствительности характеристик уравнений относительно колебаний параметров относится к числу важных вопросов, возникающих при изучении динамических систем и систем управления. Рассмотрим алгебраическое уравнение Риккати

$$A'\bar{\Pi}+\bar{\Pi}A-\bar{\Pi}BR^{-1}B'\bar{\Pi}+Q=O, \tag{1}$$

где (и далее) A, B, $Q\geqslant O$, $R>O$ — постоянные матрицы, Q и R — симметричные матрицы, O — нулевая матрица; $'$ — знак транспонирования; запись $M\geqslant M_1$ ($M>M_1$) для симметричных матриц M и M_1 означает, что разность $M-M_1$ неотрицательно (положительно) определена; при этом матрицы A, Q и O имеют размерность $n\times n$, B — $n\times k$, R — $k\times k$; $\bar{\Pi}$ — неизвестная $n\times n$-матрица. Необходимо также подчеркнуть, что уравнение вида (1) возникает при анализе задач оптимального управления на бесконечном интервале времени для линейных систем с квадратичным целевым функционалом, когда закон управления включает $\bar{\Pi}$: $U^*=-R^{-1}B'\bar{\Pi}X^*$, здесь U^* — оптимальный инвариантный закон управления, X^* — текущее состояние системы. Точнее, требуется нахождение решений (1), обладающих свойством $\bar{\Pi}\geqslant O$ (см., например, [1, п. 3.4.2]). Хорошо известно [1, гл. 3; 2, гл. 4], что достаточные условия существования $\bar{\Pi}\geqslant O$ могут быть выражены в терминах стабилизируемости и выявляемости пар матриц, входящих в (1). Сформулируем соответствующее утверждение.

Предположение 1. *Пара матриц (A,B) экспоненциально стабилизируема, пара матриц (A,C) экспоненциально выявляема, где C — некоторая матрица, для которой $CC'=Q$.*

В общем случае для непрерывных и ограниченных при $t\geqslant 0$ матриц с зависящими от времени t элементами экспоненциальная стабилизируемость пары (A_t,B_t) означает существование ограниченной матрицы K_t с непрерывными элементами, при которой матрица $A_t+B_tK_t$ является экспоненциально устойчивой, пара (A_t,C_t) — экспоненциально выявляемой, если (A_t',C_t') экспоненциально стабилизируема (см. [2, п. 3.1]).

Определение 1 [1, гл. 1]. Матрица $\mathcal{A}_t$ экспоненциально устойчива, если соответствующая ей фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ допускает при некоторых константах $\kappa_0,\kappa>0$ оценку вида $\|\Phi(t,s)\|\leqslant\kappa_0e^{-\kappa(t-s)}$, $s\leqslant t$. При этом константа κ называется *темпом устойчивости матрицы* $\mathcal{A}_t$.

Напомним, что фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ определяется как решение задачи

$$\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial t}=\mathcal{A}_t\Phi(t,s),\quad \frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}=-\Phi(t,s)\mathcal{A}_s,\quad \Phi(t,t)=\Phi(s,s)=I,$$

где I — единичная матрица.

Далее введём в рассмотрение дифференциальное уравнение Риккати, соответствующее случаю возмущения коэффициентов (1) при помощи непрерывных и ограниченных матриц ΔA_t, ΔB_t, ΔQ_t и ΔR_t:

$$\dot{\Pi}_t+(A+\Delta A_t)'\Pi_t+\Pi_t(A+\Delta A_t)-\Pi_t(B+\Delta B_t)(R+\Delta R_t)^{-1}(B+\Delta B_t)'\Pi_t+(Q+\Delta Q_t)=O, \quad (2)$$

где точка обозначает производную функции по времени.

В книге [3, гл. 13] вопросы чувствительности решений алгебраических уравнений Риккати обсуждались для случая постоянных возмущающих матриц, в [4] при зависимых от времени коэффициентах анализ проводился на конечных временны́х интервалах и соответствующие верхние оценки разности решений выражались в терминах констант, ограничивающих матрицы. В работе [5] рассматривался скалярный частный случай уравнения (2) при возмущении коэффициента A переменной функций для анализа систем управления, включающих дисконтирование. Получена оценка разности решений дифференциального и алгебраического уравнений Риккати при стремлении параметра времени к бесконечности, имеющая вид функционала от темпа изменения дисконтирующей функции, называемого *ставкой дисконтирования*.

В данной статье рассмотрена ситуация асимптотически малого (при $t\to\infty$) возмущения коэффициентов. Здесь отметим связь уравнений Риккати и линейных систем управления и наблюдения. В частности, указанная выше специфика матриц возмущений может возникать в результате процедуры линеаризации для систем [6, 7], а также быть следствием различных модельных предположений (см. [8, 9]).

Предположение 2. *Матрицы ΔA_t, ΔB_t, ΔR_t, ΔQ_t являются ограниченными и непрерывными $(t\geqslant 0)$, матрицы ΔR_t, ΔQ_t симметричные и $R+\Delta R_t>\rho I$, $Q+\Delta Q_t\geqslant O$, $t\geqslant 0$ ($\rho>0$ — некоторая константа, I — единичная матрица). При этом выполняются условия*

$$\|\Delta A_t\|+\|\Delta B_t\|+\|\Delta R_t\|+\|\Delta Q_t\|\to 0,\quad t\to\infty,$$

где $\|\cdot\|$ — матричная евклидова норма, и существует конечный момент времени $t_0\geqslant 0$ такой, что для любого $t\geqslant t_0$

$$\int\limits_t^\infty(\|\Delta A_s\|+\|\Delta B_s\|+\|\Delta R_s\|+\|\Delta Q_s\|)\,ds>0. \quad (3)$$

Стоит отметить, что согласно условию (3) из дальнейшего рассмотрения исключается тривиальная ситуация $\|\Delta A_t\| \equiv \|\Delta B_t\| \equiv \|\Delta R_t\| \equiv \|\Delta Q_t\| \equiv 0$, $t \geqslant t_0$. В связи с последующими приложениями к теории оптимального управления рассматриваются только решения уравнений (1) и (2), обладающие стабилизирующими свойствами и являющиеся при этом ограниченными неотрицательно определёнными матрицами. Точнее, сформулируем следующее определение интересующих классов $\bar{\mathcal{P}}$ и $\mathcal{P}$ решений (1), (2).

Определение 2. Матрица $\bar{\Pi} \in \bar{\mathcal{P}}$, если $\bar{\Pi}$ является решением (1), $\bar{\Pi} \geqslant O$ и при этом матрица $A - BR^{-1}B'\bar{\Pi}$ является экспоненциально устойчивой. Матрица $\Pi_t \in \mathcal{P}$, если Π_t является непрерывным ограниченным решением (2), $\Pi_t \geqslant O$, $t \geqslant 0$, и при этом матрица $\mathcal{A}_t = A + \Delta A_t - (B + \Delta B_t)(R + \Delta R_t)^{-1}(B + \Delta B_t)'\Pi_t$ экспоненциально устойчива.

Существование решения $\Pi_t \geqslant O$ уравнения (2) устанавливается в п. 2 с учётом условий предположений 1 и 2, а также известной теоремы о существовании и единственности [2, теорема 17]. Целью работы является получение верхней оценки для разности $\|\Pi_t - \bar{\Pi}\|$ при $t \to \infty$ как функции от $\|\Delta A_t\|$, $\|\Delta B_t\|$, $\|\Delta R_t\|$, $\|\Delta Q_t\|$ и её последующем использовании для оценки качества инвариантной стратегии управления U^* для стохастического линейно-квадратического регулятора.

Статья организована следующим образом. В п. 2 формулируется основной результат о виде оценки $\|\Pi_t - \bar{\Pi}\|$, $t \to \infty$; в п. 3 анализируется задача стохастического линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени, при этом в п. 3.1 содержится ряд вспомогательных утверждений о поведении функционалов от решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), а в п. 3.2 приводится доказательство результата об оптимальном управлении и оценке качества инвариантной стратегии.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При сделанных в п. 1 предположениях относительно коэффициентов существует матрица $\Pi_t \in \mathcal{P}$, удовлетворяющая уравнению (2).

Теорема 1 [2, теорема 17]. *Если пара непрерывных ограниченных матриц (A_t, B_t) стабилизируема, пара (A_t, C_t) выявляема, матрица $R_t \geqslant \rho I$ при некотором $\rho > 0$, $t \geqslant 0$, то дифференциальное уравнение Риккати*

$$\dot{\Pi}_t + A_t'\Pi_t + \Pi_t A_t - \Pi_t B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t + C_t C_t' = O$$

имеет единственное решение Π_t со свойствами: $\Pi_t \geqslant O$; Π_t непрерывно и ограничено, $t \geqslant 0$; матрица $A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t$ экспоненциально устойчива.

Аналогичная теорема о существовании и единственности $\bar{\Pi} \in \bar{\mathcal{P}}$ для алгебраического уравнения Риккати приведена в [1, теорема 3.7]. Таким образом, согласно теореме 1, достаточно установить стабилизируемость пары $(A + \Delta A_t, B + \Delta B_t)$ и выявляемость пары $(A + \Delta A_t, C_t)$, где C_t — некоторая матрица, для которой $C_t C_t' = Q_t + \Delta Q_t$.

Утверждение следующей леммы касается сохранения базовых свойств матриц систем при асимптотически малых возмущениях параметров.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда пара матриц $(A + \Delta A_t, B + \Delta B_t)$ экспоненциально стабилизируема, пара матриц $(A + \Delta A_t, C_t)$ экспоненциально выявляема, где C_t — некоторая матрица, для которой $C_t C_t' = Q + \Delta Q_t$.*

Доказательство. По определению стабилизируемости для пары (A, B) существует ограниченная матрица K_t, при которой матрица $A + BK_t$ является экспоненциально устойчивой. Используем матрицу K_t для проверки свойства стабилизируемости пары $(A + \Delta A_t, B + \Delta B_t)$. Рассмотрим матрицу $\mathcal{A}_t = A + \Delta A_t + (B + \Delta B_t)K_t = A + BK_t + D_t$, где $D_t = \Delta A_t + \Delta B_t K_t$ и по условию $\|D_t\| \to 0$, $t \to \infty$. Тогда (см., например, [10, теорема 4.4.6]) матрица $\mathcal{A}_t$ также обладает свойством экспоненциальной устойчивости с темпом $\kappa - \epsilon$ при сколь угодно малом $\epsilon > 0$, а для случая $\int_0^\infty (\|A_t\| + \|B_t\|)\,dt < \infty$ можно положить $\epsilon = 0$ (см. [11, гл. 5]). Следовательно, пара матриц $(A + \Delta A_t, B + \Delta B_t)$ будет являться экспоненциально стабилизируемой.

Перейдём к анализу свойства выявляемости, т.е. экспоненциальной стабилизируемости пары (A'_t, C'_t) при $C_t C'_t = Q + \Delta Q_t$, где $A_t = A + \Delta A_t$. По предположению (A', C') стабилизируема, откуда следует, что алгебраическое уравнение Риккати $A\hat{\Pi} + \hat{\Pi}A' - \bar{\Pi}C'C\hat{\Pi} + I = O$ имеет решение $\hat{\Pi} > O$, при этом матрица $A' - C'C\hat{\Pi}$ экспоненциально устойчива, $CC' = Q$ (см. [1, теорема 3.7]). Положим $K_t = -C_t\hat{\Pi}$, $\mathcal{A}'_t = A' + \Delta A'_t + C'_t K_t$ и запишем $\mathcal{A}'_t = A' + \Delta A'_t - C'_t C_t \hat{\Pi} = A' - C'C\hat{\Pi} + \Delta A'_t - \Delta Q_t \bar{\Pi} = A' - C'C\hat{\Pi} + \hat{D}'_t$, где $\hat{D}_t = \Delta A_t - \hat{\Pi}\Delta Q_t$ и $\|\hat{D}_t\| \to 0$, $t \to \infty$. Тогда $\mathcal{A}'_t$ будет экспоненциально устойчивой матрицей и пара (A'_t, C'_t) — экспоненциально стабилизируемой, а значит, $(A + \Delta A_t, C_t)$ — выявляемой. Лемма доказана.

Основной результат о чувствительности решений уравнений Риккати к асимптотически малым возмущениям параметров сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1, 2 и матрицы $\bar{\Pi} \in \bar{\mathcal{P}}$, $\Pi_t \in \mathcal{P}$ удовлетворяют уравнениям (1) и (2). Тогда справедливо соотношение*

$$\limsup_{t\to\infty} \{\|\Pi_t - \bar{\Pi}\|/p_t\} < \infty, \quad p_t \to 0, \quad t \to \infty,$$

и функция p_t имеет вид

$$p_t = \int_t^\infty e^{-2\kappa(1-\mu)(s-t)} (\|\Delta A_s\| + \|\Delta B_s\| + \|\Delta R_s\| + \|\Delta Q_s\|)\,ds, \tag{4}$$

где $\kappa > 0$ — темп устойчивости матрицы $A - BR^{-1}B'\bar{\Pi}$, $\mu > 0$ — сколь угодно малое число; в случае $\int_0^\infty (\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta R_t\| + \|\Delta Q_t\|)\,dt < \infty$ можно положить $\mu = 0$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $D_t = \Pi_t - \bar{\Pi}$ и найдём из (1), (2) уравнение динамики

$$\dot{D}_t + \mathcal{A}'_t D_t + D_t \tilde{\mathcal{A}}_t + \mathcal{B}_t + \mathcal{Q}_t + \mathcal{R}_t = O, \tag{5}$$

где $\mathcal{A}_t = A_t - BR_t^{-1}B'\bar{\Pi}$, $\tilde{\mathcal{A}}_t = A_t - BR_t^{-1}B'\Pi_t$, $\mathcal{Q}_t = \Delta Q_t + \Delta A'_t\bar{\Pi} + \bar{\Pi}\Delta A_t$, $R_t = R + \Delta R_t$, $\mathcal{B}_t = \Pi_t BR_t^{-1}\Delta B'_t\Pi_t + \Pi_t \Delta B_t R_t^{-1}B'\Pi_t + \Pi_t\Delta B_t R_t^{-1}\Delta B'_t\Pi_t$, $\mathcal{R}_t = \bar{\Pi}B(R^{-1} - (R + \Delta R_t)^{-1})B'\bar{\Pi}$. Замечаем, что $\|\mathcal{Q}_t\| \leqslant c(\|\Delta A_t\| + \|\Delta Q_t\|)$, $\|\mathcal{R}_t\| \leqslant \tilde{c}\|(R + \Delta R_t)^{-1}\|\,\|\Delta R_t\|$. Здесь и далее через c, $\tilde{c}$ обозначены некоторые положительные константы, конкретное значение которых несущественно и может меняться от формулы к формуле. Из предположений $R > O$, $R + \Delta R_t > \rho I$ и $\Delta R_t \to 0$, $t \to \infty$, также следует ограниченность $\|(R + \Delta R_t)^{-1}\|$, $t \geqslant 0$. Тогда

$$\|\mathcal{B}_t\| + \|\mathcal{Q}_t\| + \|\mathcal{R}_t\| \leqslant c(\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta Q_t\| + \|\Delta R_t\|). \tag{6}$$

Уравнение (5) — линейное матричное дифференциальное уравнение Сильвестра. Для существования его решения на бесконечном интервале времени требуется проверить устойчивость матриц $\mathcal{A}_t$, $\tilde{\mathcal{A}}_t$. Для них можно выписать представления $\mathcal{A}_t = A - BR^{-1}B'\bar{\Pi} + \Delta\mathcal{A}_t$, $\tilde{\mathcal{A}}_t = A_t - B_t R_t^{-1}B'_t\Pi_t + \Delta\tilde{\mathcal{A}}_t$, где $\Delta\mathcal{A}_t = \Delta A_t + B(R^{-1} - (R + \Delta R_t)^{-1})B'\bar{\Pi}$, $\Delta\tilde{\mathcal{A}}_t = BR_t^{-1}\Delta B'_t\Pi_t + \Delta B_t R_t^{-1}B'\Pi_t + \Delta B_t R_t^{-1}\Delta B'_t\Pi_t$. При этом $A - BR^{-1}B'\bar{\Pi}$ и $A_t - B_t R_t^{-1}B'_t\Pi_t$ являются экспоненциально устойчивыми матрицами с темпами κ, $\tilde{\kappa}$. Наряду с этим $\Delta\mathcal{A}_t \to 0$, $\Delta\tilde{\mathcal{A}}_t \to 0$, $t \to \infty$, вследствие выписанного выше представления и предположения 2. Тогда и $\mathcal{A}_t$, и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ будут обладать свойством экспоненциальной устойчивости с темпами $\kappa - \epsilon$, $\tilde{\kappa} - \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Поэтому решение уравнения (5) записывается в виде

$$D_t = D_t^{(0)} = \int_t^\infty \Phi'(s,t)[\mathcal{B}_s + \mathcal{Q}_s + \mathcal{R}_s]\tilde{\Phi}(s,t)\,ds, \tag{7}$$

где $\Phi(t,s)$ и $\tilde{\Phi}(t,s)$ — фундаментальные матрицы для $\mathcal{A}_t$ и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ соответственно. Покажем, что $D_t = D_t^{(0)}$ вида (7) действительно удовлетворяет уравнению (5). Во-первых, отметим, что несобственные интегралы в (7) существуют в силу экспоненциальной устойчивости $\mathcal{A}_t$, $\tilde{\mathcal{A}}_t$, оценки (6) и предположения 2. Таким образом, (7) задаёт ограниченную матрицу. Перепишем (7) как $D_t^{(0)} = \Phi'(0,t)\eta_\infty\tilde{\Phi}(0,t) - \Phi'(0,t)\eta_t\tilde{\Phi}(0,t)$, где $\eta_t = \int_0^t \Phi'(s,0)[\mathcal{B}_s + \mathcal{Q}_s + \mathcal{R}_s]\tilde{\Phi}(s,0)\,ds$. Дифференцируя и используя определение фундаментальной матрицы, получаем, что $\dot{D}_t^{(0)} = -\mathcal{A}_t'\Phi'(0,t)\eta_\infty\tilde{\Phi}(0,t) - \Phi'(0,t)\eta_\infty\tilde{\Phi}(0,t)\tilde{\mathcal{A}}_t - \mathcal{A}_t'\Phi'(0,t)\eta_t\tilde{\Phi}(0,t) - [\mathcal{B}_t + \mathcal{Q}_t + \mathcal{R}_t] - \Phi'(0,t)\eta_t\tilde{\Phi}(0,t)\tilde{\mathcal{A}}_t = -\mathcal{A}_t'D_t^{(0)} - D_t^{(0)}\tilde{\mathcal{A}}_t - [\mathcal{B}_t + \mathcal{Q}_t + \mathcal{R}_t]$, т.е. приходим к (5).

Осталось установить, что матрица $D_t = \Pi_t - \bar{\Pi}$, удовлетворяющая (5), и решение $D_t = D_t^{(0)}$ вида (7) совпадают. Исходя из (5), дифференциальное уравнение для разности $\Delta D_t = (\Pi_t - \bar{\Pi}) - D_t^{(0)}$ является при $t \geqslant 0$ матричным дифференциальным линейным однородным уравнением

$$\Delta\dot{D}_t + \mathcal{A}_t'\Delta D_t + \Delta D_t\tilde{\mathcal{A}}_t = O,$$

имеющим единственное ограниченное решение при краевом условии $\Delta D_T = (\Pi_T - \bar{\Pi}) - D_T^{(0)}$. Точнее, $\Delta D_t = \Phi'(T,t)[(\Pi_T - \bar{\Pi}) - D_T^{(0)}]\tilde{\Phi}(T,t)$, где $\Phi(t,s)$, $\tilde{\Phi}(t,s)$ — фундаментальные матрицы, соответствующие экспоненциально устойчивым матрицам $\mathcal{A}_t$, $\tilde{\mathcal{A}}_t$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Тогда с учётом этих свойств, а также ограниченности матриц $\Pi_t - \bar{\Pi}$, $D_t^{(0)}$, $t \geqslant 0$, будем иметь оценку $\|\Delta D_t\| \leqslant \hat{c}e^{-\alpha(T-t)}$, где $\hat{c}, \alpha > 0$ — некоторые константы, не зависящие от T. Переходя к пределу при $T \to \infty$, приходим к соотношению $\|\Delta D_t\| = 0$, $t \geqslant 0$. Следовательно, $\Pi_t - \bar{\Pi} = D_t^{(0)}$ является единственным ограниченным решением D_t уравнения (5). Далее (7) оценивается как

$$\|D_t\| \leqslant \tilde{c}\int_t^\infty e^{-(\kappa+\tilde{\kappa})(1-\epsilon)(s-t)}(\|\Delta A_s\| + \|\Delta B_s\| + \|\Delta Q_s\| + \|\Delta R_s\|)\,ds. \tag{8}$$

Правая часть неравенства (8) в силу предположения 2 и оценки (6) асимптотически стремится к нулю. Следовательно, $\|D_t\| \to 0$, $t \to \infty$. Воспользуемся этим свойством для уточнения темпа устойчивости матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_t$. Представление для $\tilde{\mathcal{A}}_t$ принимает вид $\tilde{\mathcal{A}}_t = A - BR^{-1}B'\bar{\Pi} + \Delta_1\tilde{\mathcal{A}}_t$, где $\Delta_1\tilde{\mathcal{A}}_t = \Delta A_t + BR_t^{-1}B'D_t + B(R^{-1} - (R + \Delta R_t)^{-1})B'\Pi_t$, и также $\Delta_1\tilde{\mathcal{A}}_t \to 0$, $t \to \infty$. Тогда темп устойчивости матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_t$ будет равен $\kappa - \epsilon$. С учётом этого, возвращаясь к оценке для (7), приходим к (4). Как отмечалось ранее, полагаем $\epsilon = 0$, если $\int_0^\infty(\|\Delta\mathcal{A}_t\| + \|\Delta_1\tilde{\mathcal{A}}_t\|)\,dt < \infty$, что имеет место при выполнении условия $\int_0^\infty(\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta R_t\| + \|\Delta Q_t\|)\,dt < \infty$. Кроме того, замечаем, что условие (3) также позволяет сделать вывод, что $p_t > 0$, $t \geqslant t_0$, и тогда получаем утверждение теоремы.

3. АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Как отмечалось в п. 1, уравнения Риккати (1) и (2) возникают при рассмотрении задач стохастического линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени.

Пусть все вводимые далее случайные процессы заданы на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$. Сначала описывается система управления с постоянными матрицами — так называемая *автономная система*. Состояние системы определяет n-мерный управляемый случайный процесс X_t, $t \geqslant 0$, динамика которого удовлетворяет уравнению

$$dX_t = AX_t dt + BU_t dt + GdW_t, \qquad X_0 = x, \tag{9}$$

где x — неслучайное начальное состояние (n-мерный вектор); $W_t,\ t\geqslant 0,$ — d-мерный стандартный винеровский процесс; $U_t,\ t\geqslant 0,$ — допустимое управление или k-мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},\ \mathcal{F}_t=\sigma\{W_s,\ s\leqslant t\},\ E\int_0^t\|U_s\|^2\,ds<\infty,\ t\geqslant 0$ ($\sigma(\cdot)$ — знак σ-алгебры, $E(\cdot)$ означает математическое ожидание); $G\neq O$ — матрица диффузии. Множество допустимых управлений обозначим через $\mathcal{U}$. Интегральный квадратичный целевой функционал имеет вид

$$J_T(U)=\int\limits_0^T(X_t'QX_t+U_t'RU_t)\,dt, \tag{10}$$

где $U\in\mathcal{U}$ — допустимое управление на $[0,T]$. Тогда, если выполнено предположение 1 (см. [1, гл. 3]), существует закон управления

$$U_t^*=-R^{-1}B'\bar\Pi X_t^*, \tag{11}$$

где $\bar\Pi\in\bar{\mathcal{P}}$ является решением алгебраического уравнения Риккати (1), процесс $X_t^*,\ t\geqslant 0,$ удовлетворяет линейному СДУ вида

$$dX_t^*=(A-BR^{-1}B'\bar\Pi)X_t^*dt+GdW_t,\quad X_0^*=x. \tag{12}$$

Управление U_t^* является инвариантным законом (так как в явном виде не зависит от параметра времени t) и обладает свойством оптимальности на бесконечном интервале времени (см., например, [12]). Точнее, U^* является решением двух задач:

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U)}{T}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}\quad\text{и}\quad\limsup_{T\to\infty}\frac{J_T(U)}{T}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}\quad\text{с вероятностью 1.} \tag{13}$$

Критерии оптимальности в (13) называются *долговременными средними*. Также стоит отметить (см., например, [12]), что

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U^*)}{T}=\limsup_{T\to\infty}\frac{J_T(U^*)}{T}=\operatorname{tr}(G'\bar\Pi G)\quad\text{с вероятностью 1,}$$

где $\operatorname{tr}(\cdot)$ — обозначение следа матрицы. Возникновение матричного дифференциального уравнения (2) связано с анализом системы управления, получаемой из (9), (10) путём возмущения матриц коэффициентов:

$$d\tilde X_t=(A+\Delta A_t)\tilde X_tdt+(B+\Delta B_t)\tilde U_tdt+\tilde G_tdW_t,\quad \tilde X_0=\tilde x, \tag{14}$$

где $\tilde x$ — неслучайный вектор; матрица диффузии $\tilde G_t=G+\Delta G_t$, ΔG_t — ограниченная матрица с кусочно-непрерывными элементами; допустимое управление $\tilde U_t$ определяется по аналогии с проделанным для (9). При этом целевой функционал имеет вид

$$\tilde J_T(\tilde U)=\int\limits_0^T[\tilde X_t'(Q+\Delta Q_t)\tilde X_t+\tilde U_t'(R+\Delta R_t)\tilde U_t]\,dt. \tag{15}$$

Тогда из результатов леммы 1 и [12] следует, что существует закон управления

$$\tilde U_t^*=-(R+\Delta R_t)^{-1}(B+\Delta B_t)'\Pi_t\tilde X_t^*, \tag{16}$$

где $\Pi_t \in \mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению Риккати (2), процесс $\tilde{X}_t^*$, $t \geqslant 0$, задаётся линейным СДУ

$$d\tilde{X}_t^* = (A + \Delta A_t - (B + \Delta B_t)(R + \Delta R_t)^{-1}(B + \Delta B_t)'\Pi_t)\tilde{X}_t^* dt + \tilde{G}_t dW_t, \quad \tilde{X}_0^* = \tilde{x}. \tag{17}$$

При этом, как показано в [12], управление $\tilde{U}_t^*$ оптимально в смысле решения задач

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2\, dt} \to \inf_{\tilde{U}\in\mathcal{U}} \quad \text{и} \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2\, dt} \to \inf_{\tilde{U}\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью 1}, \tag{18}$$

и значения соответствующих критериев при этом равны

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U})}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2\, dt} = \limsup_{T\to\infty} \frac{\tilde{J}_T(\tilde{U})}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2\, dt} = \limsup_{T\to\infty} \frac{\int_0^T \operatorname{tr}(\tilde{G}_t'\Pi_t\tilde{G}_t)\, dt}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2\, dt} \quad \text{с вероятностью 1}. \tag{19}$$

Введём в рассмотрение инвариантный закон управления вида (11), соответствующий системе управления (14), (15):

$$\bar{U}_t^* = -R^{-1}B'\bar{\Pi}\bar{X}_t^*, \tag{20}$$

$$d\bar{X}_t^* = (A + \Delta A_t - (B + \Delta B_t)R^{-1}B'\bar{\Pi})\bar{X}_t^* dt + \tilde{G}_t dW_t, \quad \bar{X}_0^* = \tilde{x}. \tag{21}$$

Очевидно, что реализация (20) проще, чем (16), так как включает нахождение решения алгебраического уравнения Риккати вместо дифференциального. Ниже будет показано, что при условии $\Delta G_t \to 0$, $t \to \infty$, и ранее введённых предположениях 1 и 2, управление $\bar{U}^*$ даёт такой же результат, как и $\tilde{U}^*$ при $T \to \infty$. Для конечного T будет найдена оценка качества управления $\bar{U}^*$ по сравнению с применением $\tilde{U}^*$ с точки зрения ожидаемых значений функционалов, а также в потраекторном смысле (с вероятностью 1). Следует отметить, что при этом потребуется привлечение результатов п. 1 и доказательств ряда вспомогательных утверждений, касающихся поведения разности интегральных квадратичных функционалов от решений линейных СДУ. Ранее в [13] был рассмотрен случай (14), (15) в предположении $\int_0^\infty (\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta Q_t\| + \|\Delta R_t\|)\, dt < \infty$, $\Delta G_t \equiv O$, и была показана оптимальность управления вида (20) по критерию из (13), связанному с минимизацией ожидаемых значений. Очевидно, что указанное выше условие абсолютной интегрируемости на бесконечности матриц возмущений является весьма ограничительным, хотя и распространённым для прикладных моделей (см. [7, 8]). Вместе с тем может иметь место гораздо более медленное убывание отклонения ΔA_t матрицы при состоянии с ростом времени, например, для классов систем с "почти постоянными матрицами" из [14] или при изучении систем, получаемых при алгоритмической оптимизации [15]. Также важно учесть и возможные "погрешности" в поведении матрицы диффузии (см. [16]) для непостоянной матрицы $\tilde{G}_t$, но имеющей предел G при $t \to \infty$.

3.1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим n-мерные процессы Z_t и $\tilde{Z}_t$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющие линейным СДУ с переменными коэффициентами

$$dZ_t = \mathcal{A}_t Z_t dt + \mathcal{G}_t dW_t, \quad Z_0 = z, \tag{22}$$

$$d\tilde{Z}_t = \tilde{\mathcal{A}}_t \tilde{Z}_t dt + \tilde{\mathcal{G}}_t dW_t, \quad \tilde{Z}_0 = \tilde{z}, \tag{23}$$

где z, $\tilde z$ — n-мерные неслучайные векторы; $\mathcal{A}_t$, $\tilde{\mathcal{A}}_t$ — ограниченные экспоненциально устойчивые $n\times n$-матрицы; матрицы $\mathcal{G}_t$, $\tilde{\mathcal{G}}_t$ имеют размерность $n\times d$ и ограничены, $t\geqslant 0$, как и ранее W_t — стандартный d-мерный винеровский процесс. Интегральные функционалы имеют вид

$$\mathcal{J}_T=\int\limits_0^T Z_t'\mathcal{M}_tZ_t\,dt,\quad \tilde{\mathcal{J}}_T=\int\limits_0^T \tilde Z_t'\tilde{\mathcal{M}}_t\tilde Z_t\,dt, \tag{24}$$

где $\mathcal{M}_t,\tilde{\mathcal{M}}_t\geqslant O$ — ограниченные симметричные матрицы порядка $n\times n$, $t\geqslant 0$. Тогда (см. [17]) для (24) справедливы представления

$$\mathcal{J}_T=z'P_0z-Z_T'P_TZ_T+\int\limits_0^T \mathrm{tr}(\mathcal{G}_t'P_t\mathcal{G}_t)\,dt+2\int\limits_0^T Z_T'P_t\mathcal{G}_t\,dW_t, \tag{25}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_T=\tilde z'\tilde P_0\tilde z-\tilde Z_T'\tilde P_T\tilde Z_T+\int\limits_0^T \mathrm{tr}(\tilde{\mathcal{G}}_t'\tilde P_t\tilde{\mathcal{G}}_t)\,dt+2\int\limits_0^T \tilde Z_T'\tilde P_t\tilde{\mathcal{G}}_t\,dW_t, \tag{26}$$

где $P_t,\tilde P_t\geqslant O$ — ограниченные симметричные $n\times n$-матрицы, являющиеся решениями уравнений Ляпунова

$$\dot P_t+\mathcal{A}_t'P_t+P_t\mathcal{A}_t+\mathcal{M}_t=O, \tag{27}$$

$$\dot{\tilde P}_t+\tilde{\mathcal{A}}_t'\tilde P_t+\tilde P_t\tilde{\mathcal{A}}_t+\tilde{\mathcal{M}}_t=O. \tag{28}$$

Далее нас интересует оценка разности между $\mathcal{J}_T$ и $\tilde{\mathcal{J}}_T$ в терминах функционала от матриц коэффициентов (22)–(24). Здесь также рассматривается нетривиальный случай разности коэффициентов (27) и (28), т.е. предполагается, что

$$\int\limits_t^\infty (\|\mathcal{A}_s-\tilde{\mathcal{A}}_s\|+\|\mathcal{M}_s-\tilde{\mathcal{M}}_s\|)\,ds>0\quad \text{для любого}\quad t>t_0. \tag{29}$$

Лемма 2. *Для матриц $P_t,\tilde P_t\geqslant O$, удовлетворяющих (27) и (28) при условии (29), справедливо соотношение*

$$\limsup_{t\to\infty}\{\|P_t-\tilde P_t\|/\bar p_t\}<\infty, \tag{30}$$

а функция $\bar p_t$ имеет вид

$$\bar p_t=\int\limits_t^\infty e^{-(\kappa+\tilde\kappa)(s-t)}(\|\mathcal{A}_s-\tilde{\mathcal{A}}_s\|+\|\mathcal{M}_s-\tilde{\mathcal{M}}_s\|)\,ds, \tag{31}$$

где $\kappa>0$ и $\tilde\kappa>0$ — темпы устойчивости матриц $\mathcal{A}_t$ и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ соответственно.

Доказательство. В силу наложенных условий на матрицы коэффициентов уравнения (27) и (28) имеют ограниченные решения вида

$$P_t=\int\limits_t^\infty \Phi'(s,t)\mathcal{M}_s\Phi(s,t)\,ds\quad \text{и}\quad \tilde P_t=\int\limits_t^\infty \tilde\Phi'(s,t)\tilde{\mathcal{M}}_s\tilde\Phi(s,t)\,ds$$

с фундаментальными матрицами $\Phi(t,s)$ и $\tilde\Phi(t,s)$, определёнными для матриц $\mathcal{A}_t$ и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ соответственно.

Найдём уравнение динамики для $D_t = P_t - \tilde{P}_t$, которое является уравнением Сильвестра

$$\dot{D}_t + \mathcal{A}_t' D_t + D_t \tilde{\mathcal{A}}_t + (\mathcal{M}_t - \tilde{\mathcal{M}}_t) + P_t(\mathcal{A}_t - \tilde{\mathcal{A}}_t) + (\mathcal{A}_t' - \tilde{\mathcal{A}}_t')\tilde{P}_t = O. \tag{32}$$

Уравнение (32) имеет единственное ограниченное решение (см. пояснения для (7)), представимое в виде

$$D_t = \int\limits_t^\infty \Phi'(s,t)\big[(\mathcal{M}_s - \tilde{\mathcal{M}}_s) + P_s(\mathcal{A}_s - \tilde{\mathcal{A}}_s) + (\mathcal{A}_s' - \tilde{\mathcal{A}}_s')\tilde{P}_s\big]\tilde{\Phi}(s,t)\,ds$$

и оцениваемое как

$$\|D_t\| \leqslant \bar{c}\int\limits_t^\infty e^{-(\kappa+\tilde{\kappa})(s-t)}(\|\mathcal{A}_s - \tilde{\mathcal{A}}_s\| + \|\mathcal{M}_s - \tilde{\mathcal{M}}_s\|)\,ds,$$

при некоторой константе $\bar{c} > 0$, т.е. получаем, что справедливо соотношение (30) для функции $\bar{p}_t$ из (31). Лемма доказана.

Теорема 3. *Для функционалов (24) справедливы соотношения*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\|\mathcal{J}_T - \tilde{\mathcal{J}}_T\|}{\int_0^T (\|\Delta\mathcal{A}_t\| + \|\Delta\mathcal{M}_t\| + \|\Delta\mathcal{G}_t\|)\,dt} < \hat{c} < \infty;$$

$$\text{п.н.}\quad \limsup_{T\to\infty}\frac{\|E\mathcal{J}_T - E\tilde{\mathcal{J}}_T\|}{\int_0^T (\|\Delta\mathcal{A}_t\| + \|\Delta\mathcal{M}_t\| + \|\Delta\mathcal{G}_t\|)\,dt} < \infty, \tag{33}$$

где $\Delta\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t - \tilde{\mathcal{A}}_t$, $\Delta\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_t - \tilde{\mathcal{M}}_t$, $\Delta\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t - \tilde{\mathcal{G}}_t$. *При этом* $\hat{c} > 0$ *— некоторая константа при* $\int_0^T (\|\Delta\mathcal{A}_t\| + \|\Delta\mathcal{M}_t\| + \|\Delta\mathcal{G}_t\|)\,dt \to \infty$, $T\to\infty$, *и* $\hat{c} > 0$ *— п.н. конечная случайная величина, если* $0 < \int_0^\infty (\|\Delta\mathcal{A}_t\| + \|\Delta\mathcal{M}_t\| + \|\Delta\mathcal{G}_t\|)\,dt < \infty$.

Здесь и далее п.н. — почти наверное, т.е. с вероятностью 1.

Доказательство. Воспользовавшись (25) и (26), можно записать представление для процесса разности $\Delta\mathcal{J}_T = \mathcal{J}_T - \tilde{\mathcal{J}}_T$ в виде

$$\Delta\mathcal{J}_T = S^{(0)} + S_T^{(1)} + S_T^{(2)} + S_T^{(3)}, \tag{34}$$

где

$$S^{(0)} = -z'\Delta P_0 z - 2z'\tilde{P}_0\Delta z - \Delta z\tilde{P}_0\Delta z,$$

$$S_T^{(1)} = -\int\limits_0^T \big[\mathrm{tr}(\mathcal{G}'{}_t\Delta P_t\mathcal{G}_t) + 2\,\mathrm{tr}(\mathcal{G}'{}_t\tilde{P}_t\Delta\mathcal{G}_t) + \mathrm{tr}(\Delta\mathcal{G}'{}_t\tilde{P}_t\Delta\mathcal{G}_t)\big]\,dt,$$

$$S_T^{(2)} = 2\int\limits_0^T \Delta Z_t' P_t\mathcal{G}_t\,dW_t - 2\int\limits_0^T \tilde{Z}_t' P_t\Delta\mathcal{G}_t\,dW_t - 2\int\limits_0^T \tilde{Z}_t'\Delta P_t\mathcal{G}_t d\,W_t,$$

$$S_T^{(3)} = Z_T'\Delta P_T Z_T + 2Z_T'\tilde{P}_T\Delta Z_T + \Delta Z_T\tilde{P}_T\Delta Z_T$$

при $\Delta P_t = P_t - \tilde{P}_t$, $\Delta z = z - \tilde{z}$, $\Delta Z_t = Z_t - \tilde{Z}_t$.

Учитывая ограниченность матриц P_t, $\tilde{P}_t$, $\mathcal{G}_t$ и $\tilde{\mathcal{G}}_t$, а также свойство $\int_0^T \|\Delta P_t\|\,dt \leqslant c\int_0^T (\|\Delta\mathcal{A}_t\| + \|\Delta\mathcal{M}_t\|)\,dt$ вследствие оценки (31), слагаемые $S^{(0)}$ и $S_T^{(1)}$ мажорируются следующим образом: $\|S^{(0)}\|+\|S_T^{(1)}\|\leqslant\tilde c\int_0^T(\|\Delta\mathcal{A}_t\|+\|\Delta\mathcal{M}_t\|+\|\Delta\mathcal{G}_t\|)\,dt+\tilde c\|z\|^2+\tilde c\|\Delta z\|^2$. Далее будет показано, что функция

$$\hat\Gamma_T=\int\limits_0^T(\|\Delta\mathcal{A}_t\|+\|\Delta\mathcal{M}_t\|+\|\Delta\mathcal{G}_t\|)\,dt \tag{35}$$

также задаёт верхнюю оценку для стохастических слагаемых $S_T^{(2)}$ и $S_T^{(3)}$ в (34).

Слагаемое $S_T^{(2)}$ представляет собой стохастический интеграл Ито и известно [12], что п.н. $S_T^{(2)}/\Gamma_T\to\xi$, $T\to\infty$, если $E(S_T^{(2)})^2\leqslant c\Gamma_T$, при этом случайная величина (с.в.) $\xi=0$ при $\Gamma_T\to\infty$, $T\to\infty$, ξ — некоторая п.н. конечная с.в. для $\Gamma_\infty<\infty$. Здесь $\Gamma_T>0$ — некоторая неубывающая детерминированная нормирующая функция.

Находим $E(S_T^{(2)})^2\leqslant c\int_0^T(E\|\Delta Z_T\|^2\,dt+\|\Delta P_t\|^2+\|\Delta\mathcal{G}_t\|^2)\,dt$. Из оценки (31) следует, что $\int_0^T\|\Delta P_t\|^2\,dt\leqslant c\int_0^T(\|\Delta\mathcal{A}_t\|^2+\|\Delta\mathcal{M}_t\|^2)\,dt$. Для определения $E\|\Delta Z_T\|^2$ сначала выписывается уравнение динамики ΔZ_t, $t\geqslant 0$, вида

$$d\Delta Z_t=\mathcal{A}_t\Delta Z_t\,dt+(\Delta\mathcal{A}_t)\tilde Z_t\,dt+\Delta\mathcal{G}_t dW_t,\quad \Delta Z_0=\Delta z, \tag{36}$$

где $\tilde Z_t$, $t\geqslant 0$, задаётся в (23). Уравнение (36) — линейное неоднородное СДУ и его решение представимо в виде $\Delta Z_t=\hat Z_t+\bar Z_t$, где процессы $\hat Z_t$ и $\bar Z_t$, $t\geqslant 0$, удовлетворяют уравнениям

$$d\hat Z_t=\mathcal{A}_t\hat Z_t\,dt+\Delta\mathcal{G}_t dW_t,\quad \hat Z_0=0, \tag{37}$$

$$d\bar Z_t=\mathcal{A}_t\bar Z_t\,dt+(\Delta\mathcal{A}_t)\tilde Z_t\,dt,\quad \bar Z_0=\Delta z, \tag{38}$$

т.е. отдельно выделены процесс $\hat Z_t$, уравнение которого содержит только аддитивный шум (см. (37)), и процесс $\bar Z_t$ с неоднородным слагаемым в динамике (см. (38)). Тогда для (37) (см., например, утверждение леммы в [18]) справедлива оценка $E\|\hat Z_t\|^2\leqslant c\int_0^T e^{-2\kappa(t-s)}\|\Delta\mathcal{G}_s\|^2\,ds$, где $\kappa>0$ — темп устойчивости матрицы $\mathcal{A}_t$. Анализируя (38), запишем решение этого уравнения в виде $\bar Z_t=\Phi(t,0)\Delta z+\int_0^t\Phi(t,s)(\Delta\mathcal{A}_s)\tilde Z_s\,ds$, где $\Phi(t,s)$ — фундаментальная матрица, соответствующая $\mathcal{A}_t$. Оценку для квадрата нормы решения получим с помощью неравенства Коши–Буняковского: $\|\bar Z_t\|^2\leqslant c\eta_t$, где

$$\eta_t=e^{-2\kappa(1-\epsilon)t}\|\Delta z\|^2+\int\limits_0^t e^{-2\kappa(1-\epsilon)(t-s)}\|\Delta\mathcal{A}_s\|^2\|\tilde Z_s\|^2\,ds\,, \tag{39}$$

при этом $\epsilon>0$ — сколь угодно малое число. Учитывая ограниченность $E\|\tilde Z_t\|^2$, $t\geqslant 0$, при взятии математического ожидания от обеих частей (39) (также см. [18]), приходим к оценке

$$E\|\bar Z_t\|^2\leqslant\tilde c e^{-2(1-\epsilon)\kappa t}\|\Delta z\|^2+\tilde c\int\limits_0^t e^{-2\kappa(1-\epsilon)(t-s)}\|\Delta\mathcal{A}_s\|^2\,ds.$$

Тогда $E(S_T^{(2)})^2\leqslant c\Gamma_T$ при $\Gamma_T=\int_0^T(\|\Delta\mathcal{A}_t\|^2+\|\Delta\mathcal{M}_t\|^2+\|\Delta\mathcal{G}_t\|^2)\,dt$ и $\Gamma_T\leqslant\tilde c\hat\Gamma_T$, $T>0$, для $\hat\Gamma_T$ из (35). При применении нормировки $\hat\Gamma_T$ из (35) получается, что п.н. $\|S_T^{(2)}\|/\hat\Gamma_T\to\hat\xi$. Также при этом $\hat\xi=0$, если $\hat\Gamma_T\to\infty$, $T\to\infty$, $\hat\xi$ — некоторая п.н. конечная с.в., когда $\hat\Gamma_\infty<\infty$.

При анализе поведения $S_T^{(3)}$ из (34), $T\to\infty$, каждое из слагаемых, входящих в $S_T^{(3)}$, рассматривается отдельно и используется (36). Запишем $\|S_T^{(3)}\|\leqslant c\bar p_T\|Z_T\|^2+c\|\Delta Z_T\|^2+c\sqrt{\|Z_T'\Delta Z_T\|^2}$ и оценим

$$\|S_T^{(3)}\|\leqslant\tilde c p_T^{(0)}\|Z_T\|^2+\tilde c\|\bar Z_T\|^2+\tilde c\|\hat Z_T\|^2+\tilde c\sqrt{\|Z_T\|^2\eta_T}+\tilde c\sqrt{\|Z_T'\hat Z_T\|^2}\,, \tag{40}$$

где $p_t^{(0)}$ — функция, определяемая (31) с заменой $\kappa+\tilde{\kappa}$ на константу $2\bar{\kappa}$ такую, что выполняется неравенство $2\bar{\kappa}<\min\{2\kappa,\kappa+\tilde{\kappa}\}$, где κ и $\tilde{\kappa}$ — темпы устойчивости матриц $\mathcal{A}_t$ и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ в уравнениях (22) и (23). При этом процессы $\bar{Z}_t$, $\hat{Z}_t$ и η_t, $t\geqslant 0$, задаются при помощи (37), (38) и (39) соответственно.

Сначала проанализируем $D_T^{(1)}=p_T^{(0)}\|Z_T\|^2$ из (40). С учётом (22), уравнения динамики $dp_t^{(0)}=2\bar{\kappa}p_t^{(0)}dt-(\|\mathcal{A}_t\|+\|\mathcal{M}_t\|)dt$ и формулы Ито, интегральное представление для процесса разности $D_T^{(1)}-ED_T^{(1)}$ примет вид

$$D_T^{(1)}-ED_T^{(1)}=\|z\|^2p_0^{(0)}+I_T^{(1)}+I_T^{(2)}+M_T^{(3)}, \tag{41}$$

где

$$I_T^{(1)}=\int\limits_0^T p_t^{(0)}\big[Z_t'(\mathcal{A}_t+\mathcal{A}_t'+2\bar{\kappa}I)Z_t-E[Z_t'(\mathcal{A}_t+\mathcal{A}_t'+2\bar{\kappa}I)Z_t]\big]\,dt,$$

$$I_T^{(2)}=\int\limits_0^T p_t^{(0)}(\|\mathcal{A}_t\|+\|\mathcal{M}_t\|)[\|Z_t\|^2-E\|Z_t\|^2]\,dt$$

— интегралы типа Римана, а

$$M_T^{(3)}=2\int\limits_0^T p_t^{(0)}Z_t'\mathcal{G}_t\,dW_t$$

— стохастический интеграл Ито.

Оценив $E\big(I_T^{(1)}\big)^2$, $E\big(I_T^{(2)}\big)^2$ и $E\big(M_T^{(3)}\big)^2$ при помощи монотонной функции $\Gamma_T>0$, далее можно применить утверждения лемм 1–3 из [12] для получения сходимостей отношений $I_T^{(1)}/\Gamma_T$, $I_T^{(2)}/\Gamma_T$ и $M_T^{(1)}/\Gamma_T$ к случайным величинам п.н. при $T\to\infty$. В силу гауссовости распределений процесса Z_t, $t\geqslant 0$, и определения функции $p_t^{(0)}$ можно записать $E\big(I_T^{(1)}\big)^2\leqslant$ $\leqslant c\int_0^T p_t^{(0)}\,dt\leqslant\tilde{c}\int_0^T(\|\mathcal{A}_t\|+\|\mathcal{M}_t\|)\,dt=\Gamma_T$, $E\big(I_T^{(2)}\big)^2\leqslant c\Gamma_T$, а для интеграла $M_T^{(3)}$ имеет место оценка $E\big(M_T^{(3)}\big)^2\leqslant c\int_0^T(p_t^{(0)})^2\,dt\leqslant c\int_0^T(\|\mathcal{A}_t\|^2+\|\mathcal{M}_t\|^2)\,dt\leqslant\tilde{c}\Gamma_T$ при определённой выше функции Γ_T. Тогда $I_T^{(1)}/\Gamma_T\to\xi^{(1)}$, $I_T^{(2)}/\Gamma_T\to\xi^{(2)}$, $M_T^{(3)}/\Gamma_T\to\xi^{(3)}$, где $\xi^{(i)}=0$, если $\Gamma_T\to\infty$, $T\to\infty$, или же $\xi^{(i)}$ — п.н. конечная с.в. при $\Gamma_\infty<\infty$, $i=\overline{1,3}$. Таким образом, $\big\{D_T^{(1)}-ED_T^{(1)}\big\}/\Gamma_T\to\xi^{(0)}$, где $\xi^{(0)}=0$ или $\xi^{(0)}$ — п.н. конечная с.в. Кроме того, функция $ED_T^{(1)}$ ограничена, $T\geqslant 0$. Точнее, по построению $ED_T^{(1)}\leqslant ce^{-2(\kappa-\bar{\kappa})T}p_0^{(0)}\|z\|^2+c\int_0^T e^{-2(\kappa-\bar{\kappa})(T-s)}(p_s^{(0)}\|\mathcal{G}_s\|^2+\|\Delta\mathcal{A}_s\|+\|\Delta\mathcal{M}_s\|)\,ds\leqslant$ $\leqslant\tilde{c}e^{-2(\kappa-\bar{\kappa})T}\|z\|^2+\tilde{c}\int_0^T e^{-2(\kappa-\bar{\kappa})(T-s)}(\|\Delta\mathcal{A}_s\|+\|\Delta\mathcal{M}_s\|)\,ds$ и при этом $\kappa-\bar{\kappa}>0$. Также при условии $\int_0^T(\|\Delta\mathcal{A}_s\|+\|\Delta\mathcal{M}_s\|)\,ds<\infty$ (см. утверждение леммы в [18]) справедливо $ED_T^{(1)}\to 0$, $T\to\infty$. Следовательно, $D_T^{(1)}/\Gamma_T\to 0$ п.н. для $\Gamma_T\to\infty$, $T\to\infty$. В случае $\Gamma_\infty<\infty$ будет наблюдаться сходимость $D_T^{(1)}/\Gamma_T\to\xi^{(0)}$ с вероятностью 1 к случайной величине $\xi^{(0)}$, а также сходимость $D_T^{(1)}/\Gamma_T\to 0$ в среднем порядка 1, и тогда (см. [19, гл. 3.5]) случайные величины совпадают с вероятностью 1, т.е. п.н. $\xi^{(0)}=0$. Объединяя оба результата и используя нормировку $\hat{\Gamma}_T$, $\Gamma_T\leqslant c\hat{\Gamma}_T$ (см. (35)), заключаем, что $p_T^{(0)}\|Z_T\|^2/\hat{\Gamma}_T\to 0$ п.н. и $E\{p_T^{(0)}\|Z_T\|^2/\hat{\Gamma}_T\}\to 0$, $T\to\infty$.

Слагаемое $D_T^{(2)}=\|\bar{Z}_T\|^2$ из (40), согласно (39), можно оценить в виде $D_T^{(2)}\leqslant c\int_0^T(\|\Delta\mathcal{A}_t\|^2+$ $+\|\Delta\mathcal{M}_t\|^2)\|\tilde{Z}_t\|^2\,dt$ и, как и ранее (см. случай анализа $I_T^{(2)}$), показать, что $\int_0^T(\|\Delta\mathcal{A}_t\|^2+$ $+\|\Delta\mathcal{M}_t\|^2)[\|\tilde{Z}_t\|^2-E\|\tilde{Z}_t\|^2]\,dt/\hat{\Gamma}_T\to\xi^{(4)}$, где $\xi^{(4)}=0$ или $\xi^{(4)}$ — п.н. конечная с.в. Поэтому с учётом ограниченности $E\|\tilde{Z}_t\|^2$, $t\geqslant 0$, будем иметь соотношение $\lim_{T\to\infty}\sup\{D_T^{(2)}/\hat{\Gamma}_T\}\leqslant c_1$, где $c_1=0$ при условии $\hat{\Gamma}_T\to\infty$, $T\to\infty$, или же $c_1>0$ — п.н. конечная с.в., если $\hat{\Gamma}_T<\infty$. В данном случае также стоит уточнить, что в силу ранее полученной оценки для $ED_T^{(2)}=E\|\bar{Z}_T\|^2$ величина $ED_T^{(2)}$ ограничена, $T>0$. Если $\hat{\Gamma}_\infty<\infty$, то $ED_T^{(2)}\to 0$, поэтому по аналогии с рассмотренным выше процессом $D_T^{(1)}$ оказывается, что $D_T^{(2)}\to 0$ п.н. при $\hat{\Gamma}_\infty<\infty$.

Для $D_T^{(3)}=\|\hat{Z}_T\|^2$ из (40), удовлетворяющего линейному СДУ (37), известно (см. утверждение теоремы 1 в [17]), что $D_T^{(3)}/\int_0^T\|\Delta\mathcal{G}_t\|^2\,dt\to 0$ с вероятностью 1 и в среднем порядка 1, $T\to\infty$. Следовательно, $D_T^{(3)}/\hat{\Gamma}_T\to 0$ п.н. и также при этом $ED_T^{(3)}/\hat{\Gamma}_T\to 0$, $T\to\infty$, для случая нормировки $\hat{\Gamma}_T$ из (35).

Далее, для четвёртого слагаемого в (40) запишем $\sqrt{D_T^{(4)}}=\sqrt{\|Z_T\|^2\eta_T}$ и с учётом (22), (39) интегральное уравнение для $D_T^{(4)}$, $T\geqslant 0$, будет иметь вид

$$D_T^{(4)}=\|\Delta z\|^2\|z\|^2+I_T^{(4)}+I_T^{(5)}+I_T^{(6)}+M_T^{(7)},$$

где, как и ранее (см. (41)), рассматриваются интегралы двух типов:

$$I_T^{(4)}=\int\limits_0^T\eta_t\big[Z_t'(\mathcal{A}_t+\mathcal{A}_t')Z_t-2\kappa(1-\epsilon)\|Z_t\|^2\big]\,dt,\quad I_T^{(5)}=\int\limits_0^T\|\Delta\mathcal{A}_t\|\|\tilde{Z}_t\|^2\|Z_t\|^2\,dt,$$

$$I_T^{(6)}=\int\limits_0^T\eta_t\,\mathrm{tr}(\mathcal{G}_t'\mathcal{G}_t)\,dt,\quad M_T^{(7)}=2\int\limits_0^T\eta_tZ_t'\mathcal{G}_t\,dW_t.$$

Как и при анализе (41), вид нормировки $\tilde{\Gamma}_T$, достаточный для асимптотической сходимости нормированных процессов, определяется на основе оценки вторых моментов интегралов. Точнее,

$$E(I_T^{(4)})^2\leqslant c\bigg(\int\limits_0^T\sqrt{E(\eta_t^2\|Z_t\|^4)}\,dt\bigg)^2\leqslant\tilde{c}\bigg(\int\limits_0^Te^{-2\kappa(1-\epsilon)t}\int\limits_0^te^{2\kappa(1-\epsilon)s}\|\Delta A_s\|^2\,ds\,dt\bigg)^2\leqslant\bar{c}\bigg(\int\limits_0^T\|\Delta\mathcal{A}_t\|^2\,dt\bigg)^2,$$

при этом были использованы свойства ограниченности $E\|Z_t\|^4$ и $E\|\tilde{Z}_t\|^4$, а также (39), $t\geqslant 0$. Поэтому полагаем $\tilde{\Gamma}_T=\big(\int_0^T\|\Delta\mathcal{A}_t\|\,dt\big)^2$.

Аналогично определяем границы $E(I_T^{(5)})^2\leqslant\big(\int_0^T\|\Delta\mathcal{A}_t\|\sqrt{E\|\tilde{Z}_t\|^4}\sqrt{E\|Z_t\|^4}\,dt\big)^2\leqslant\tilde{c}\,\tilde{\Gamma}_T$ и $E(I_T^{(6)})^2\leqslant c\big(\int_0^T\sqrt{E\eta_t^2}\,dt\big)^2\leqslant\tilde{c}\,\tilde{\Gamma}_T$. Наконец, $E(M_T^{(7)})^2\leqslant\int_0^T\sqrt{E(\eta_t^2\|Z_t\|^4)}\,dt\leqslant\tilde{c}\,\tilde{\Gamma}_T$. Соответственно имеем, что п.н. $D_T^{(4)}/\tilde{\Gamma}_T\to\hat{\xi}^{(4)}$, $T\to\infty$, где $\hat{\xi}^{(4)}\geqslant 0$ — п.н. конечная с.в. Кроме того, $\hat{\xi}^{(4)}=0$, если $\tilde{\Gamma}_T\to\infty$, $T\to\infty$. Тогда с учётом неравенства $\sqrt{\tilde{\Gamma}_T}\leqslant\hat{\Gamma}_T$ при $\hat{\Gamma}_T$ из (35) приходим к соотношению $\sqrt{D_T^{(4)}}/\hat{\Gamma}_T\to\sqrt{\hat{\xi}^{(4)}}$ п.н., вид $\hat{\xi}^{(4)}\geqslant 0$ зависит от поведения $\hat{\Gamma}_T$ при $T\to\infty$. Так как $E\sqrt{D_T^{(4)}}\leqslant\sqrt{ED_T^{(4)}}\leqslant\sqrt[4]{E\eta_T^2}\sqrt[4]{E\|Z_T\|^4}$ и при этом из (39) следует, что $E\eta_T^2\leqslant ce^{-4\kappa(1-\epsilon)T}\|\Delta z\|^2+c\int_0^Te^{-4\kappa(1-\epsilon)(T-s)}\|\Delta\mathcal{A}_s\|^4\,ds$, то получаем ограниченность $E\sqrt{D_T^{(4)}}$, $T\geqslant 0$. Кроме того, имеет место свойство сходимости $E\sqrt{D_T^{(4)}}\to 0$, $T\to\infty$, для случая $\int_0^\infty\|\Delta\mathcal{A}_s\|^4\,ds\leqslant\tilde{c}\int_0^\infty\|\Delta\mathcal{A}_s\|\,ds<\infty$ и, как следствие, $\sqrt{D_T^{(4)}}\to 0$ п.н. Таким образом, для ожидаемых значений $E\sqrt{D_T^{(4)}}/\hat{\Gamma}_T\to 0$, $T\to\infty$, при функции $\hat{\Gamma}_T$ из (35).

В оценке (40) осталось рассмотреть поведение слагаемого $\sqrt{D_T^{(5)}}=\sqrt{\|Z_T\|^2\|\hat{Z}_T\|^2}$, $T\to\infty$. Для этого также выписывается интегральное представление на основе (22) и (37) вида

$$D_T^{(5)}=I_T^{(8)}+I_T^{(9)}+I_T^{(10)}+M_T^{(11)},$$

где

$$I_T^{(8)} = \int\limits_0^T \big[Z_t'(\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t')Z_t\|\hat{Z}_t\|^2 + \hat{Z}_t'(\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t')\hat{Z}_t\|Z_t\|^2\big]\,dt \leqslant c\int\limits_0^T \|Z_t\|^2\|\hat{Z}_t\|^2\,dt,$$

$$I_T^{(9)} = \int\limits_0^T \big[\|\hat{Z}_t\|^2\operatorname{tr}(\mathcal{G}_t'\mathcal{G}_t) + \|Z_t\|^2\operatorname{tr}(\Delta\mathcal{G}_t'\Delta\mathcal{G}_t)\big]\,dt \leqslant c\int\limits_0^T (\|Z_t\|^2\|\Delta\mathcal{G}_t\|^2 + \|\hat{Z}_t\|^2\|\mathcal{G}_t\|^2)\,dt,$$

$$I_T^{(10)} = 4\int\limits_0^T Z_t'\mathcal{G}_t'\Delta\mathcal{G}_t\hat{Z}_t\,dt \leqslant c\int\limits_0^T (\|Z_t\|^2\|\Delta\mathcal{G}_t\|^2 + \|\hat{Z}_t\|^2\|\mathcal{G}_t\|^2)\,dt,$$

$$M_T^{(11)} = 2\int\limits_0^T (\|Z_t\|^2\hat{Z}_t'\Delta\mathcal{G}_t + \|\hat{Z}_t\|^2 Z_t'\mathcal{G}_t)\,dW_t.$$

Находим оценки для вторых моментов интегралов:

$$E(I_T^{(8)})^2 \leqslant \bigg(\int\limits_0^T \sqrt{E(\|Z_t\|^4\|\hat{Z}_t\|^4)}\,dt\bigg)^2 \leqslant c\bigg(\int\limits_0^T E\|\hat{Z}_t\|^2\,dt\bigg)^2 \leqslant \tilde{c}\bigg(\int\limits_0^T \|\Delta\mathcal{G}_t\|^2\,dt\bigg)^2 = \tilde{c}\bar{\Gamma}_T,$$

$$E(I_T^{(9)})^2 \leqslant \bigg(\int\limits_0^T \Big(\|\Delta\mathcal{G}_t\|^2\sqrt{E\|Z_t\|^4} + \sqrt{E\|\hat{Z}_t\|^4}\Big)\,dt\bigg)^2 \leqslant \tilde{c}\bar{\Gamma}_T.$$

Здесь также были использованы соотношения $E(\|Z_t\|^k\|\hat{Z}_t\|^k) \leqslant \sqrt{E(\|Z_t\|^{2k})}\sqrt{E(\|Z_t\|^{2k})}$, свойство моментов гауссовской с.в. χ: $E(\chi)^{2k} \leqslant c(E\chi^2)^k$ (см. [20, теорема 5.3.2]), а также ограниченность $E\|Z_t\|^2$ и приведённая ранее оценка для $E\|\hat{Z}_t\|^2$, $t \geqslant 0$. По аналогии $E\big(I_T^{(10)}\big)^2 \leqslant c\bar{\Gamma}_T$.

Для мартингала $M_T^{(11)}$ справедлива оценка

$$E(M_T^{(11)})^2 \leqslant c\int\limits_0^T \Big(\|\Delta\mathcal{G}_t\|^2\sqrt{E\|Z_t\|^4}\sqrt{E\|\hat{Z}_t\|^4} + \sqrt{E\|Z_t\|^4}\sqrt{E\|\hat{Z}_t\|^8}\Big)\,dt \leqslant \tilde{c}\int\limits_0^T \|\Delta\mathcal{G}_t\|^2\,dt \leqslant \bar{c}\bar{\Gamma}_T, \quad \bar{c} > 0.$$

Тогда $D_T^{(5)}/\,\bar{\Gamma}_T \to \xi^{(5)} \geqslant 0$ п.н. при $T \to \infty$. Учитывая, что $\bar{\Gamma}_T \leqslant c(\hat{\Gamma}_T)^2$, получаем сходимость $\sqrt{D_T^{(5)}}/\,\hat{\Gamma}_T \to \sqrt{\xi^{(5)}}$ п.н., где $\xi^{(5)} = 0$ при $\hat{\Gamma}_T \to \infty$, $t \to \infty$, в противном случае $\xi^{(5)} \geqslant 0$ — некоторая п.н. конечная с.в. Относительно динамики ожидаемых значений величина $E\sqrt{D_T^{(5)}} = \sqrt[4]{E\|Z_T\|^4}\sqrt[4]{E\|\hat{Z}_T\|^4}$, $T \geqslant 0$, будет ограничена и $E\sqrt{D_T^{(5)}} \to 0$, если $\hat{\Gamma}_\infty < \infty$, в силу имеющейся оценки $E\|\hat{Z}_T\|^4 \leqslant c\int_0^T e^{-4(1-\epsilon)(T-t)}\|\Delta\mathcal{G}_t\|^4\,dt$. Объединяя все полученные ранее результаты, касающиеся поведения слагаемых в $S_T^{(3)}$, $T \to \infty$ (см. (40)), получаем, что $ES_T^{(3)}/\,\hat{\Gamma}_T \to 0$, $\lim_{T\to\infty}\sup\{S_T^{(3)}/\,\hat{\Gamma}_T\} \leqslant s^{(3)}$ п.н., $T \to \infty$, где $s^{(3)} = 0$ при $\hat{\Gamma}_T \to \infty$, и $s^{(3)} \geqslant 0$ — п.н. конечная с.в. для случая $\hat{\Gamma}_\infty < \infty$, что также можно уточнить до $s^{(3)} = 0$ (см. выше).

Таким образом, показано, что для всех составляющих разложения (34) функция $\hat{\Gamma}_T$ вида (35) будет являться верхней функцией в потраекторном смысле (т.е. мажорировать с вероятностью 1), а также оценивать сверху и ожидаемые значения. Тем самым соотношения (33) установлены и теорема доказана.

3.2. ОПТИМАЛЬНОСТЬ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИНВАРИАНТНОЙ СТРАТЕГИИ

В следующем утверждении устанавливается свойство оптимальности стратегий управления (16) и (20) на бесконечном интервале времени по критериям долговременных средних. Кроме того, приводится оценка качества инвариантной стратегии (20) по сравнению с применением управления (16).

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения 1, 2 и $\Delta G_t \to O$, $t\to\infty$. Тогда управления $\tilde U_t^*$ вида (16), (17) и $\bar U_t^*$ вида (20), (21) являются решениями задач*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{E\tilde J_T(\tilde U)}{T}\to\inf_{\tilde U\in\mathcal U}\quad и\quad \limsup_{T\to\infty}\frac{\tilde J_T(\tilde U)}{T}\to\inf_{\tilde U\in\mathcal U}\quad с\ вероятностью\ 1. \tag{42}$$

При этом

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{E\tilde J_T(\tilde U^*)}{T}=\limsup_{T\to\infty}\frac{E\tilde J_T(\bar U^*)}{T}=\operatorname{tr}(G'\bar\Pi G),$$

$$п.н.\quad \limsup_{T\to\infty}\frac{\tilde J_T(\tilde U^*)}{T}=\limsup_{T\to\infty}\frac{\tilde J_T(\bar U^*)}{T}=\operatorname{tr}(G'\bar\Pi G),$$

где $\bar\Pi\in\bar{\mathcal P}$ — решение алгебраического уравнения Риккати (1).

Также при $h_T=\int_0^T(\|\Delta A_t\|+\|\Delta B_t\|+\|\Delta Q_t\|+\|\Delta R_t\|)\,dt$ выполняются соотношения

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\|\tilde J_T(\bar U^*)-\tilde J_T(\tilde U^*)\|}{h_T}<c_J<\infty\quad с\ вероятностью\ 1, \tag{43}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\|E\tilde J_T(\bar U^*)-E\tilde J_T(\tilde U^*)\|}{h_T}<\infty, \tag{44}$$

где $c_J>0$ — неслучайная константа, если $h_T\to\infty$, $T\to\infty$, и $c_J>0$ — конечная с.в., если $h_\infty<\infty$.

Доказательство. Оптимальность $\tilde U^*$ по критериям долговременных средних (42) следует из (18), (19), условия $\Delta G_t\to 0$, $t\to\infty$, и предположения 2, влекущего за собой наличие свойства $\|\Delta\Pi_t\|=\|\Pi_t-\bar\Pi\|\to 0$, $t\to\infty$ (см. теорему 2). Действительно, для нормировки в (18) выполняется $\int_0^T\|\tilde G_t\|^2\,dt/T\to 1$, $T\to\infty$, а величина предела в (19) будет равной $\lim_{T\to\infty}\sup\big(\int_0^T[\operatorname{tr}(\tilde G_t'\bar\Pi\tilde G_t)+\operatorname{tr}(\tilde G_t'\Delta\Pi_t\tilde G_t)]\,dt/T\big)=\operatorname{tr}(G'\bar\Pi G)$.

Для доказательства оптимальности стратегии $\bar U^*$ достаточно показать, что при использовании этого управления значения критериев долговременных средних в (42) также окажутся равны $\operatorname{tr}(G'\bar\Pi G)$. Во-первых, заметим, что уравнение (21) для процесса $\bar X_t$ имеет вид (22) при матрицах $\mathcal A_t=A+\Delta A_t-(B+\Delta B_t)R^{-1}B'\bar\Pi$, $\mathcal G_t=\tilde G_t$, а функционал $\tilde J_T(\bar U^*)$ совпадает с $\mathcal J_T$ из (24), если положить $\mathcal M_t=Q+\Delta Q_t+\bar\Pi BR^{-1}(R+\Delta R_t)R^{-1}B'\bar\Pi$. Также нетрудно заметить, что при этом матрица $\mathcal A_t$ является экспоненциально устойчивой. Оптимальный процесс $\tilde X_t^*$ из (17) задаётся (23) при $\mathcal A_t=A+\Delta A_t-(B+\Delta B_t)(R+\Delta R_t)^{-1}(B+\Delta B_t)'\Pi_t$, $\tilde{\mathcal G}_t=\tilde G_t$. Функционал $\tilde J_T$ имеет вид $\tilde{\mathcal J}_T$ при матрице $\tilde{\mathcal M}_t=Q+\Delta Q_t+\Pi_t(B+\Delta B_t)(R+\Delta R_t)^{-1}(B+\Delta B_t)'\Pi_t$. Тогда [17]

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{E\tilde J_T(\bar U^*)}{T}=\limsup_{T\to\infty}\frac{\tilde J_T(\bar U)}{T}=\limsup_{T\to\infty}\frac{\int\limits_0^T\operatorname{tr}(G'P_tG)\,dt}{T} \tag{45}$$

с вероятностью 1, где P_t удовлетворяет уравнению (27), а для матрицы $\Pi_t\in\mathcal P$ из (19) имеет место равенство $\Pi_t=\tilde P_t$, $\tilde P_t\geqslant O$ является решением (28). При этом, согласно лемме 2, $\|P_t-\Pi_t\|\to 0$, $t\to\infty$, ввиду оценок $\|\Delta\mathcal A_t\|+\|\Delta\mathcal M_t\|\leqslant c(\|\Delta A_t\|+\|\Delta B_t\|+\|\Delta R_t\|+\|\Delta\Pi_t\|)$,

$\|\Delta\Pi_t\| \leqslant \tilde{c}p_t$ и утверждения теоремы 2. Получаем предельное значение (45) равным $\mathrm{tr}(G'\bar{\Pi}G)$. Здесь же отметим, что $\int_0^T(\|\Delta\mathcal{A}_t\|+\|\Delta\mathcal{M}_t\|)\,dt \leqslant c\int_0^T(\|\Delta A_t\|+\|\Delta B_t\|+\|\Delta R_t\|+p_t)\,dt \leqslant \leqslant \tilde{c}\int_0^T(\|\Delta A_t\|+\|\Delta B_t\|+\|\Delta R_t\|+\|\Delta Q_t\|)\,dt = \tilde{c}h_T$. Тогда для оценки разности целевых функционалов применяется теорема 3 и соотношение (33) в случае $\Delta\mathcal{G}_t \equiv O$. При этом мажорантой знаменателя (33) выступает функция h_T. Таким образом, приходим к (43) и (44). Теорема доказана.

Замечание. В оценках (43) и (44) отсутствует ΔG_t, т.е. характеристика возмущений матрицы диффузии G, в силу того что оптимальный инвариантный закон управления $\bar{U}^*$ подставляется в уравнение динамики (14). Если же стоит задача сравнить качества оптимальных законов управления U^* и $\tilde{U}^*$ из невозмущённой, т.е. номинальной (см. (11), (12)), и возмущённой, асимптотически автономной (см. (16), (17)), систем соответственно, то при помощи теоремы 3 также показывается, что

$$\limsup_{T\to\infty}\{\|EJ_T(U^*)-E\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)\|/h_T^*\}<\infty, \quad \limsup_{T\to\infty}\{\|J_T(U^*)-\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)\|/h_T^*\}<c_J^*<\infty$$

для $h_T^* = h_T + \int_0^T\|\Delta G_t\|\,dt$, где c_J^* обладает свойствами, аналогичными c_J из формулировки теоремы 3, при использовании условия на h_T^* вместо h_T, $T\to\infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведён анализ чувствительности решений уравнений Риккати к асимптотически малым изменениям матриц коэффициентов и найдены верхние оценки для разности решений (теорема 2). Далее результат теоремы 2 был использован при оценке качества инвариантной стратегии управления в задаче стохастического линейного квадратического регулятора на бесконечном интервале времени для системы с возмущением параметров. Получен вид верхней границы для разности квадратичных целевых функционалов, задаваемых на решениях линейных СДУ (теорема 3). Установлена оптимальность инвариантной стратегии, а также определена чувствительность регулятора в терминах интегральной меры отклонения возмущающих матриц от нулевых (теорема 4).

Исследование выполнено в рамках научно-исследовательской работы Центрального экономико-математического института Российской академии наук.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Квакернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван ; пер. с англ. под ред. В.А Васильева, Ю.А. Николаева — М. : Наука, 1977. — 650 с.
2. Dragan, V. Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems / V. Dragan, T. Morozan, A.M. Stoica. — New York : Springer, 2006. — 324 p.
3. Perturbation Theory for Matrix Equations / M. Konstantinov, D.W. Gu, V. Mehrmann, P. Petkov. — Amsterdam : Elsevier, 2003. — 524 p.
4. Konstantinov, M.M. Sensitivity of the solutions to differential matrix Riccati equations / M.M. Konstantinov, G.B. Pelova // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1991. — V. 36, № 2. — P. 213–215.
5. Паламарчук, Е.С. Теорема сравнения для одного класса дифференциальных уравнений Риккати и её приложение / Е.С. Паламарчук // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1020–1025.
6. Wang, B. Consensus of discrete-time multi-agent systems with decaying multiplicative uncertainties / B. Wang, Y.P. Tian // 2018 Chinese Automation Congress (CAC). — New York : IEEE, 2018. — P. 2247–2252.

7. Design of autonomous cruise controller with linear time varying model / H.J. Chang, T.K. Yoon, H.C. Lee [et al.] // J. Electrical Engineering and Technology. — 2015. — V. 10, № 5. — P. 2162–2169.
8. Models of continuous-time linear time-varying systems with fully adaptable system modes / M.A.G. De Anda, A.S. Reyes, R. Kaszynski, J. Piskorowski // New Approaches in Automation and Robotics / Ed. H. Aschemann. — Rijeka : IntechOpen, 2008. — P. 345–346.
9. Zhang, H.Y. Explicit symplectic-precise iteration algorithms for linear quadratic regulator and matrix differential Riccati equation / H.Y. Zhang, J.Z. Luo, Y. Zhou // IEEE Access. — 2021. — V. 9. — P. 105424–105438.
10. Адрианова, Л.В. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений / Л.В. Адрианова. — СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1992. — 239 с.
11. Harris, C.J. Some Aspects of Kinematic Similarity and the Stability of Linear Systems / C.J. Harris, J.F. Miles. — London : Academic Press, 1980. — 236 p.
12. Паламарчук, Е.С. Асимптотическое поведение решения линейного стохастического дифференциального уравнения и оптимальность почти наверное для управляемого случайного процесса / Е.С. Паламарчук // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 89–103.
13. Czornik, A. On time-varying LQG / A. Czornik // IFAC Proceedings Volumes. — 1998. — V. 31, № 18. — P. 411–415.
14. On stability of linear time-varying second-order differential equations / L. Duc, A. Ilchmann, S. Siegmund, P. Taraba // Quarterly of Appl. Math. — 2006. — V. 64, № 1. — P. 137–151.
15. Distributed gradient descent: nonconvergence to saddle points and the stable-manifold theorem / B. Swenson, R. Murray, H.V. Poor, S. Kar // 2019 57th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). — New York : IEEE, 2019. — P. 595–601.
16. Ekman, T. Adaptive prediction of mobile radio channels utilizing a filtered random walk model for the coefficients / T. Ekman // Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems: 7th Int. Conf., KES 2003. Oxford, September 2003, Proceedings, Part I / Ed. V. Palade. — Berlin : Springer, 2011. — P. 1326–1333.
17. Паламарчук, Е.С. О верхних функциях для интегральных квадратичных функционалов от процесса Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами / Е.С. Паламарчук // Теория вероятностей и ее применения. — 2020. — Т. 65, № 1. — С. 23–41.
18. Белкина, Т.А. О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями / Т.А. Белкина, Е.С. Паламарчук // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 4. — С. 110–128.
19. Крамер, Г. Стационарные случайные процессы: свойства выборочных функций и их приложения / Г. Крамер, М. Лидбеттер ; пер. с англ. под. ред. Ю.А. Беляева — М. : Мир, 1969. — 398 с.
20. Song, I. Probability and Random Variables: Theory and Applications / I. Song, S.R. Park, S. Yoon. — Cham : Springer, 2022. — 505 p.

ON SENSITIVITY OF SOLUTIONS OF RICCATI EQUATIONS UNDER SMALL PARAMETER PERTURBATIONS AND OPTIMALITY IN LINEAR STOCHASTIC CONTROL SYSTEMS

© 2024 / E. S. Palamarchuk

Central Economic Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
e-mail: e.palamarchuck@gmail.com

We investigate sensitivity of solutions of Riccati equations under asymptotically small perturbations of their coefficients. Upper bound on the difference between solutions of algebraic and differential Riccati equations is derived. The result is applied to study optimality in the stochastic linear-quadratic control problem over an infinite time-horizon for an asymptotically autonomous system. We also treat an issue related to performance of invariant control strategy.

Keywords: Riccati differential equation, sensitivity of solutions, stochastic linear-quadratic controller, optimality

REFERENCES

1. Kwakernaak, H. and Sivan, R., *Linear Optimal Control Systems*, New York: Wiley-interscience, 1972.
2. Dragan, V., Morozan, T., and Stoica, A.M., *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*, New York: Springer, 2006.
3. Konstantinov, M., Gu, D.W., Mehrmann, V., and Petkov, P., *Perturbation Theory for Matrix Equations*, Amsterdam: Elsevier, 2003.
4. Konstantinov, M.M. and Pelova, G.B., Sensitivity of the solutions to differential matrix Riccati equations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 213–215.
5. Palamarchuk, E.S., Comparison theorem for a class of Riccati differential equations and its application, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 8, pp. 981–986.
6. Wang, B. and Tian, Y.P., Consensus of discrete-time multi-agent systems with decaying multiplicative uncertainties, in: *2018 Chinese Automation Congress (CAC)*, New York: IEEE, 2018, pp. 2247–2252.
7. Chang, H.J., Yoon, T.K., Lee, H.C. [et al.], Design of autonomous cruise controller with linear time varying model, *J. Electrical Engineering and Technology*, 2015, vol. 10, no. 5, pp. 2162–2169.
8. De Anda, M.A.G., Reyes, A.S., Kaszynski, R. and Piskorowski, J., Models of continuous-time linear time-varying systems with fully adaptable system modes, in: *New Approaches in Automation and Robotics*, ed. H. Aschemann, Rijeka: IntechOpen, 2008, pp. 345–346.
9. Zhang, H.Y., Luo, J.Z., and Zhou, Y., Explicit symplectic-precise iteration algorithms for linear quadratic regulator and matrix differential Riccati equation, *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 105424–105438.
10. Adrianova L., *Introduction to Linear Systems of Differential Equations*, Providence: American Mathematical Society, 1995.
11. Harris, C.J. and Miles, J.F., *Some Aspects of Kinematic Similarity and the Stability of Linear Systems*, London: Academic Press, 1980.
12. Palamarchuk, E.S., Asymptotic behavior of the solution to a linear stochastic differential equation and almost sure optimality for a controlled stochastic process, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, pp. 83–96.
13. Czornik, A., On time-varying LQG, *IFAC Proceedings Volumes*, 1998, vol. 31, no. 18, pp. 411–415.
14. Duc, L., Ilchmann, A., Siegmund, S., and Taraba, P., On stability of linear time-varying second-order differential equations, *Quarterly of Appl. Math.*, 2006, vol. 64, no. 1, pp. 137–151.
15. Swenson B., Murray, R., Poor, H.V., and Kar, S., Distributed gradient descent: nonconvergence to saddle points and the stable-manifold theorem, in: *2019 57th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton)*, New York: IEEE, 2019, pp. 595–601.
16. Ekman, T., Adaptive prediction of mobile radio channels utilizing a filtered random walk model for the coefficients, in: *Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems: 7th International Conference, KES 2003*, Oxford, September 3–5, 2003, Proceedings, Part I, ed. V. Palade, Berlin: Springer, 2011, pp. 1326–1333.
17. Palamarchuk, E.S., On upper functions for integral quadratic functionals based on time-varying Ornstein–Uhlenbeck process, *Theory of Probability & its Applications*, 2020, vol. 65, no. 1, pp. 17–31.
18. Belkina, T.A. and Palamarchuk, E.S., On stochastic optimality for a linear controller with attenuating disturbances, *Automat. Remote Contr.*, 2013, vol. 74, no. 4, pp. 628–641.
19. Cramer, H. and Leadbetter, M.R., *Stationary and Related Stochastic Processes: Sample Function Properties and their Applications*, New York: Wiley, 1967.
20. Song, I., Park, S.R., and Yoon, S., *Probability and Random Variables: Theory and Applications*, Cham: Springer, 2022.