

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА*

Ниже публикуются аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2024 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференциальные уравнения”. 2024. Т. 60. № 6).**

А. Н. Ветохин (Москва) “К задаче Миллионщикова о классе Бэра миноранты старшего показателя Ляпунова” (27 сентября 2024 г.).

Для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$ в пространстве линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

с непрерывными ограниченными матрицами A и показателями Ляпунова $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ максимальная полунепрерывная снизу миноранта k -го показателя Ляпунова задаётся формулой

$$\underline{\lambda}_k(A) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|B\| < \varepsilon} \lambda_k(A+B), \quad \|B\| \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|B(t)\|.$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному ограниченному отображению

$$A: \mathcal{M} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n \tag{1}$$

построим функцию

$$\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)). \tag{2}$$

В.М. Миллионщиков поставил вопрос [1] о точном классе Бэра функции (2). Он же установил, что при любом $n \in \mathbb{N}$ миноранта младшего показателя Ляпунова совпадает с нижним центральным показателем [2], принадлежащим 3-му классу Бэра. В работе [3] было доказано, что при $n = 3$ функции $\underline{\lambda}_2$ и $\underline{\lambda}_3$ принадлежат 3-му классу Бэра. Оказалось [4], что аналогичный результат справедлив и для произвольных $n \geq 3$ и $k \in \{2, \dots, n\}$.

В статье [5] в случае когда $\mathcal{M}$ является множеством $\mathcal{B}$ иррациональных чисел с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, при $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n\}$ установлено существование отображения (1), для которого функция (2) не принадлежит 3-му классу Бэра. В [6] для любых $n \geq 2$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и метрического пространства $\mathcal{M}$, содержащего множество типа $F_{\sigma\delta}$, но не типа $G_{\delta\sigma}$, построено такое отображение (1), что функция (2) не принадлежит 2-му классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$. Этот результат дополняет

Теорема 1. *Для каждого $n \geq 2$, $k = n$ и метрического пространства $\mathcal{M}$, содержащего множество типа $F_{\sigma\delta}$, но не типа $G_{\delta\sigma}$, существует такое отображение (1), что функция (2) не принадлежит 2-му классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.*

* Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара — И.Н. Сергеев, И.В. Астахова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара — В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

** Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Дополним теорему 1 конструктивными примерами метрических пространств $\mathcal{M}$ и семейств неавтономных динамических систем, для которых справедливо её заключение. Пусть $\mathcal{M} \subset [0; 1]$ и $n \geq 2$. Тогда по произвольной непрерывной функции $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ построим последовательность функций

$$\alpha_m(\mu) = \max^{-1} \{1/m, \alpha^{\circ[\log_2(m+1)]}(\mu)\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

(где $[\cdot]$ — целая часть числа), и систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \text{diag}(a(\mu, t), -a(\mu, t), 0, \dots, 0)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

$$a(\mu, t) \equiv \begin{cases} 0, & \tau_m \leq t < t_m, \\ \sin \frac{\pi(t-t_m)}{\tau_{m+1}-t_m}, & t_m \leq t < \tau_{m+1}, \end{cases}$$

$$t_m \equiv \sum_{i=1}^m (i^2 + i), \quad \tau_m \equiv t_m - \alpha_m(\mu), \quad m \in \mathbb{N}.$$

На основании результатов [7] получена

Теорема 2 [5]. Если $k = n$, пространство $\mathcal{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ и $\alpha(\mu) = \{1/\mu\}$ (где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа), то для системы (3) функция (2) не принадлежит 2-му классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Из результатов диссертации [8, с. 114] выводятся

Теорема 3. Если $k = n$, $\mathcal{M} = [0, 1]$ и

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0, \\ \frac{\mu}{2} \left(1 - \sin \frac{1}{\mu}\right), & 0 < \mu \leq 1, \end{cases}$$

то для системы (3) функция (2) принадлежит 2-му, но не 1-му классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Теорема 4. Если $k = n$, $\mathcal{M} = [0, 1]$ и

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0, \\ \mu \left(1 - \sin \frac{1}{\mu}\right), & 0 < \mu \leq 1, \end{cases}$$

то для системы (3) функция (2) не принадлежит 2-му классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Литература. 1. Миллионщиков, В.М. Задачи о минорантах показателей Ляпунова / В.М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 11. — С. 2014–2015. 2. Миллионщиков, В.М. Доказательство достижимости центральных показателей / В.М. Миллионщиков // Сиб. мат. журн. — 1969. — Т. 10, № 1. — С. 99–104. 3. Сергеев, И.Н. К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 9. — С. 1600–1601. 4. Быков, В.В. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова / В.В. Быков, Е.Е. Салов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 1. — С. 33–40. 5. Ветохин, А.Н. Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова / А.Н. Ветохин // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 34, № 10. — С. 1313–1317. 6. Ветохин, А.Н. К задаче Миллионщикова о классе Бэра минорант показателей Ляпунова спустя 30 лет / А.Н. Ветохин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1576–1577. 7. Baire, R. Sur la representation des fonctions discontinues / R. Baire // Acta. Math. — 1906. — V. 30. — P. 1–48. 8. Шарковский, А.Н. Аттракторы траекторий и их бассейны. Киев : Наукова думка, 2013. — 319 с.

А. Х. Сташ (Майкоп) “Об отсутствии непосредственной зависимости между спектрами показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы её первого приближения” (4 октября 2024 г.).

Для заданного натурального $n > 1$ и заданной открытой окрестности G нуля в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря, нелинейную систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши. С системой (1) свяжем линейную систему её первого приближения

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f'_x(t, 0), \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

с условием $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f_t(t, x)| = o(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Через $x_f(\cdot, x_0)$ будем обозначать *непродолжаемое* решение системы (1) с начальным условием $x_f(0, x_0) = x_0$, а через G_* и G_{γ_1, γ_2} — множества всех значений $x_0 \in G$, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x_0 \neq 0$ и $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$. Для каждого из определяемых ниже показателей колеблемости $\varkappa = \hat{\nu}_\bullet^\alpha, \check{\nu}_\bullet^\alpha, \hat{\nu}_\circ^\alpha, \check{\nu}_\circ^\alpha$ при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ введём обозначение $\varkappa(f, M) \equiv \{\varkappa(x_f(\cdot, x_0)) : x_0 \in M\}$.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (соответственно неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–4]. Для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и вектор-функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$ обозначим:

$\nu^-(x, m, t)$ — число точек *строгой смены знака* функции $\langle x, m \rangle$ (скалярного произведения) на промежутке $(0, t]$

$\nu^\sim(x, m, t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$

$\nu^0(x, m, t)$ — число *нулей* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$

$\nu^+(x, m, t)$ — число *корней* (т.е. нулей с учётом их кратности) функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$

$\nu^*(x, m, t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$

Определение 3 [2–4]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$ зададим соответственно при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ формулами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right) \end{aligned}$$

и условимся о следующем:

— если одноимённые верхний и нижний показатели колеблемости имеют одинаковое значение, то будем называть его *точным*, записывая без знаков $\hat{}$ и $\check{}$;

— если одноимённые слабый и сильный показатели колеблемости имеют одинаковое значение, то будем называть его *абсолютным*, записывая без знаков $\circ$ и $\bullet$.

Замечание. Вычисление любого показателя колеблемости непродолжаемого решения нелинейной системы возможно только в случае, когда это решение определено на всей полуоси.

В 1930 г. О. Перрон [5] открыл эффект инверсии знака показателей Ляпунова для решений специальных классов нелинейных систем дифференциальных уравнений и их первых приближений: им была построена нелинейная система, у которой почти все решения имели положительные показатели, а у системы её первого приближения — отрицательные. В 2003 г. [6] был открыт антиперроновский эффект смены знака показателей: решение системы первого приближения имело положительный показатель, а решение исходной системы с теми же начальными данными — отрицательный. Различные модификации контрпримера О. Перрона изучались в работах [7–10], в частности, в [8] доказано существование двумерной нелинейной дифференциальной системы с континуальным спектром и линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные показатели.

В связи с этим возникает естественный вопрос: насколько произвольными могут быть спектры показателей колеблемости нелинейной системы при фиксированном спектре системы её первого приближения? Ответ на него уже в двумерном случае дают следующие теоремы.

Теорема 1. Для любого непустого подмножества $X \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ существуют системы (1) и (2) с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, удовлетворяющие условиям

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f_t(t, x)| \leq |x|^2, \quad x \in G \equiv \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

$$\nu^\alpha(f_t, G_*) = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \quad \nu^\alpha(f, G_*) = \begin{cases} X \cup \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ X \cup \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \quad (4)$$

причём при каждом $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ и $\varepsilon > 0$ множества $\nu^\alpha(f, G_{0,\varepsilon})$ и $\nu^\alpha(f, G_*)$ совпадают.

Теорема 2. Для любого $X = (a, b) \subset [0, 1]$ или $X = [0, 1]$ существуют системы (1) и (2) с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, удовлетворяющие условиям (3) и (4), причём при каждом $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ и $\varepsilon > 0$ множество $\nu^\alpha(f, G_{0,\varepsilon})$ имеет мощность континуума.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-03-2024-074/5).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2006. — № 25. — С. 249–294. **2.** Сергеев, И.Н. Определение полных частот решений линейной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 908. **3.** Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138. **4.** Сергеев, И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2016. — № 31. — С. 177–219. **5.** Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Zeitschr. — 1930. — Bd. 32, Hf. 1. — S. 703–728. **6.** Леонов, Г.А. Об одной модификации контрпримера Перрона / Г.А. Леонов // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1566–1567. **7.** Ильин, А.В. Бесконечный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей дифференциальных систем / А.В. Ильин, Н.А. Изобов // Докл. РАН. — 2014. — Т. 457, № 2. — С. 147–151. **8.** Изобов, Н.А. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1427–1439. **9.** Изобов, Н.А. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 464–472. **10.** Барабанов, Е.А. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности / Е.А. Барабанов, В.В. Быков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 31–43.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение мер колеблемости, блуждаемости и вращаемости дифференциальной системы” (11 октября 2024 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (при $n > 1$) с мерой Лебега mes рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad 0, x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \quad (1)$$

Через $x_f(\cdot, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0, x_0) = x_0$, а через B_δ — множество начальных значений x_0 , удовлетворяющих неравенствам $0 < |x_0| < \delta$.

Определение 1 [1]. Каждому значению $t \in \mathbb{R}_+$ и непрерывно-дифференцируемой функции $u: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ поставим в соответствие значения *функционалов* $K = P, N, \Theta$ *блуждаемости, колеблемости и вращаемости* (неопределённые, если функция u определена не на всём отрезке $[0, t]$):

а) $K(t, u) = P(t, u)$ — *вариация следа* функции u на единичной сфере за время t , задаваемая формулой

$$P(t, u) \equiv \int_0^t |(u(\tau)/|u(\tau)|)'| d\tau;$$

б) $K(t, u) = N(t, u)$ — *нормированное* (т.е. умноженное на π) *число нулей* на промежутке $(0, t]$ функции $P_1 u$, где P_1 — ортогональный проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$, причём если хотя бы один из нулей $\tau \in [0, t]$ *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1 u)'$), то считаем выражение $N(t, u)$ *неопределённым*;

в) $K(t, u) = \Theta(t, u) \equiv |\varphi(t, P_2 u)|$ — *модуль ориентированного угла* $\varphi(t, P_2 u)$ (непрерывного по t , с начальным условием $\varphi(0, P_2 u) = 0$) между вектором $P_2 u(t)$ и начальным вектором $P_2 u(0)$, где P_2 — ортогональный проектор на фиксированную плоскость в $\mathbb{R}^n$, причём если $P_2 u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0, t]$, то считаем выражение $\Theta(t, u)$ *неопределённым*.

С помощью этих функционалов определяются показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости как линейных [1], так и нелинейных [2] дифференциальных систем. Известны и другие функционалы, отвечающие за аналогичные свойства решений, не связанные с их нормой [1, 3, 4], например, за *неориентированную, частотную или плоскую вращаемость*, а также за *поворачиваемость* данного ранга.

Определение 2. Для системы (1):

а) *мерой блуждаемости, колеблемости или вращаемости* назовём соответственно такое наибольшее число

$$\mu_{\varkappa}(f) \in [0, 1], \quad \varkappa = \rho, \nu, \theta,$$

что для каждого $\mu < \mu_{\varkappa}(f)$ при некоторых $\varepsilon > 0$ и $T \in \mathbb{R}_+$ имеют место оценки снизу для *шаровой меры* соответственно *блуждаемости, колеблемости или вращаемости*

$$\mu_{\varkappa}(f, \varepsilon, t) \equiv \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_{\varkappa}(f, \varepsilon, t, \delta)}{\text{mes } B_\delta} > \mu, \quad t > T,$$

где $M_{\varkappa}(f, \varepsilon, t, \delta)$ — множество всех значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему условию

$$\inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} K(Lx_f(\cdot, x_0), t) > \varepsilon t, \quad K = P, N, \Theta; \quad (2)$$

б) *мерой неблуждаемости, неколеблемости или невращаемости* назовём соответственно такое наибольшее число

$$\mu_{\varkappa}(f) \in [0, 1], \quad \varkappa = \rho, \nu, \theta,$$

что для каждого $\mu < \mu_{\bar{\kappa}}(f)$ и $\varepsilon > 0$ при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ имеют место оценки снизу для шаровой меры соответственно *неблуждаемости*, *неколеблемости* или *невращаемости*

$$\mu_{\bar{\kappa}}(f, \varepsilon, t) \equiv \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_{\bar{\kappa}}(f, \varepsilon, t, \delta)}{\text{mes } B_{\delta}} > \mu, \quad t > T,$$

где $M_{\bar{\kappa}}(f, \varepsilon, t, \delta)$ — множество всех значений $x_0 \in B_{\delta}$, удовлетворяющих соответствующему (противоположному (2)) условию

$$\inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} K(Lx_f(\cdot, x_0), t) \leq \varepsilon t, \quad K = P, N, \Theta.$$

Корректность введенных в определении 1 понятий обосновывает

Теорема 1. Для любой системы (1) и любых $K = P, N, \Theta$, $t > 0$, $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ и ненулевого $x_0 \in G$ величина $K(Lx_f(\cdot, x_0), t)$ если определена, то конечна, а при любых $\kappa = \rho, \nu, \theta$, $\varepsilon > 0$ и всех достаточно малых $\delta > 0$ множества $M_{\kappa}(f, \varepsilon, t, \delta)$, $M_{\bar{\kappa}}(f, \varepsilon, t, \delta)$ измеримы по Лебегу и удовлетворяют равенствам

$$M_{\kappa}(f, \varepsilon, t, \delta) \cup M_{\bar{\kappa}}(f, \varepsilon, t, \delta) = B_{\delta}, \quad \text{mes } M_{\kappa}(f, \varepsilon, t, \delta) + \text{mes } M_{\bar{\kappa}}(f, \varepsilon, t, \delta) = \text{mes } B_{\delta}.$$

Конкретные формулы для всех мер свойств из определения 2 даёт

Теорема 2. Меры *блуждаемости*, *колеблемости* и *вращаемости* любой системы (1) задаются соответственно формулами

$$\mu_{\kappa}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_{\kappa}(f, \varepsilon, t), \quad \kappa = \rho, \nu, \theta, \quad (3)$$

а меры *неблуждаемости*, *неколеблемости* и *невращаемости* —

$$\mu_{\bar{\kappa}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_{\bar{\kappa}}(f, \varepsilon, t), \quad \kappa = \rho, \nu, \theta, \quad (4)$$

причём в формулах (3) предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ можно заменить точной верхней гранью по $\varepsilon > 0$, а в формулах (4) — аналогичной нижней.

Для мер из определения 2 имеют место естественные неравенства и даже отдельные равенства (тесно связанные с результатами работы [5]), которые демонстрирует

Теорема 3. Для любой системы (1) справедливы соотношения

$$0 \leq \mu_{\theta}(f) \leq \mu_{\nu}(f) = \mu_{\rho}(f) \leq 1, \quad 1 \geq \mu_{\bar{\theta}}(f) \geq \mu_{\bar{\nu}}(f) = \mu_{\bar{\rho}}(f) \geq 0, \\ 0 \leq \mu_{\kappa}(f) + \mu_{\bar{\kappa}}(f) \leq 1, \quad \kappa = \rho, \nu, \theta.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-03-2024-074/5).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2016. — № 31. — С. 177–219. 2. Сергеев, И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2021. — № 3. — С. 41–46. 3. Сергеев, И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2019. — № 32. — С. 325–348. 4. Сергеев, И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1353–1361. 5. Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138.

И. Н. Сергеев (Москва) “Связь между устойчивостью и радиальной устойчивостью дифференциальной системы” (18 октября 2024 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \quad (1)$$

Пусть $B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_0| \leq \delta\}$, а $S_\delta(f)$ и $S_{\delta, x_0}(f) \subset S_\delta(f)$ — множества непродолжаемых решений системы (1) с начальными значениями $x(0) \in B_\delta$ и, соответственно, с дополнительным ограничением $x(0) = cx_0$, $c > 0$.

Определение [1]. Скажем, что система (1) (точнее, её *нулевое решение*, о чём мы в дальнейшем не будем упоминать) обладает *ляпуновской*, *перроновской* или *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответствующему условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| \leq \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq \varepsilon, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq \varepsilon \quad (2)$$

(предполагающему по умолчанию, что это решение определено на всём луче $\mathbb{R}_+$, в противном случае считаем это требование невыполненным);

2) *асимптотической устойчивостью*:

— *перроновской* или *верхнепредельной*, если существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответствующему условию (2) при $\varepsilon = 0$;

— *ляпуновской*, если система обладает одновременно ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной асимптотической устойчивостью;

3) *полной неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет соответствующему условию (2);

4) *радиальной устойчивостью*, *радиальной асимптотической устойчивостью* или *радиальной полной неустойчивостью* в направлении вектора $x_0 \in \mathbb{R}_*^n$, если она обладает соответствующим свойством из 1)–3) с заменой в их описании всюду множества $S_\delta(f)$ множеством $S_{\delta, x_0}(f)$;

5) *тотальным радиальным свойством*: *устойчивостью*, *асимптотической устойчивостью* или *полной неустойчивостью*, если она обладает этим свойством в каждом направлении.

Наличие по меньшей мере односторонней логической связи между свойствами 1)–3) и их тотальными радиальными аналогами из 5) показывает

Теорема 1. Если система (1) обладает устойчивостью, асимптотической устойчивостью или полной неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает соответственно и тотальным радиальным свойством того же типа: устойчивостью, асимптотической устойчивостью или полной неустойчивостью.

В одномерном и линейном случаях теорема 1 допускает усиление, в смысле справедливости обратной импликации, которую и демонстрируют следующие утверждения.

Теорема 2. Если при $n = 1$ система (1) обладает тотальным радиальным свойством какого-либо типа: устойчивостью, асимптотической устойчивостью или полной неустойчивостью, то она обладает соответственно и устойчивостью, асимптотической устойчивостью или полной неустойчивостью того же типа.

Теорема 3. Если линейная система (1) обладает тотальной радиальной асимптотической устойчивостью какого-либо типа, то она обладает и асимптотической устойчивостью того же типа.

Теорема 4. Если линейная система (1) обладает тотальной радиальной полной неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает и полной неустойчивостью того же типа.

Теорема 5. Если линейная система (1) обладает тотальной радиальной устойчивостью ляпуновского или верхнепредельного типа, то она обладает и устойчивостью обоих этих типов сразу.

Замечание. Доказательство теоремы 5 опирается на равносильность и ляпуновской, и верхнепредельной устойчивости линейной системы наличию у неё фундаментальной системы ограниченных решений. Вопрос о возможности распространить утверждение этой теоремы также и на аналогичные свойства 1) и 5) устойчивости перроновского типа пока остаётся открытым.

Литература. 1. Сергеев, И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2023. — № 33. — С. 353–423.

А. А. Бондарев (Москва) “Три контрпримера двумерных автономных дифференциальных систем с тотальными радиальными свойствами” (25 октября 2024 г.).

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ (с нормой $|\cdot|$ и мерой Лебега mes) рассматриваем автономные системы вида

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

с правой частью $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условиям

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad f(0) = 0. \quad (2)$$

Условия (2) обеспечивают существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Пусть $\mathcal{S}_*(f)$ и $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ — множества всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1) и, значит, удовлетворяющих дополнительному условию $|x(0)| < \delta$.

В дополнение к определению из доклада [1] дадим

Определение. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение) обладает:

1) *частичной крайней (перроновской) неустойчивостью* [2, 3], если для любого $\delta > 0$ существует решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty; \quad (3)$$

2) *почти устойчивостью, почти асимптотической устойчивостью или почти полной неустойчивостью ляпуновского, перроновского или верхнепредельного типа* [4], если условия 1)–3) определения из [1] выполнены соответственно для почти любых (не обязательно для любых) решений $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$, т.е. с почти всеми начальными значениями $x(0) \in B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^2: 0 < |x_0| \leq \delta\}$ с точностью до множества нулевой меры mes .

Замечание 1. Приведённое в определении свойство частичной крайней неустойчивости представляет собой разновидность её крайней неустойчивости [2]:

- усиленную тем, что предел (3) в ней является бесконечным;
- ослабленную тем, что условие (3) здесь, в отличие от полной крайней неустойчивости, выполнено не обязательно для всех, а хотя бы для одного решения $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$.

Обратная импликация в формулировке теоремы 1 из [1], вообще говоря, не имеет места, как показывают (см. также контрастные примеры [5]) следующие теоремы.

Теорема 1. Существует система (1), обладающая одновременно и тотальной радиальной асимптотической устойчивостью всех трёх типов, и частичной крайней неустойчивостью, но не обладающая почти устойчивостью никакого типа.

Теорема 2. *Существует система (1), обладающая одновременно и тотальной радиальной полной неустойчивостью всех трёх типов, и частичной крайней неустойчивостью, но не обладающая почти полной неустойчивостью никакого типа.*

Теорема 1 допускает некоторое усиление, состоящее в добавлении свойств почти устойчивости, что и осуществляет

Теорема 3. *Существует система (1), обладающая одновременно и тотальной радиальной асимптотической устойчивостью всех трёх типов, и частичной крайней неустойчивостью, а также перроновской и верхнепредельной почти асимптотической устойчивостью.*

Замечание 2. Усилить теорему 3 добавлением в ней почти устойчивости ещё и ляпуновского типа не представляется возможным, поскольку из ляпуновской почти устойчивости системы вытекает её ляпуновская устойчивость (см. теорему 3 в [4]).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 22-8-10-3-1).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Связь между устойчивостью и радиальной устойчивостью дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 11. — С. 1572–1573. 2. Сергеев, И.Н. Определение и свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 858–859. 3. Бондарев, А.А. Два примера неоднородных дифференциальных систем, обладающих ляпуновской крайней неустойчивостью / А.А. Бондарев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 859–861. 4. Сергеев И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2023. — № 33. — С. 353–423. 5. Бондарев, А.А. Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств / А.А. Бондарев, И.Н. Сергеев // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 506. — С. 25–29.

Н. В. Денисов, В. Д. Васильев (Москва) “Реализуемость неединичной суммы мер устойчивости и неустойчивости дифференциальной системы и их непрерывность по начальному моменту” (25 октября 2024 г.).

Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и области G (содержащей нуль) евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега mes рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times G, \quad (1)$$

правая часть которой удовлетворяет условиям

$$f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, f' \in C(\mathbb{R}_+ \times G),$$

обеспечивающим наличие нулевого решения, а также существование и единственность решения $x(\cdot, x_0)$ задачи Коши с произвольным начальным значением $x(0, x_0) = x_0 \in G$.

Пусть $B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n: 0 < |x_0| \leq \delta\}$, а $M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)$ (или $M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta)$) — множество значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих (или, наоборот, не удовлетворяющих, в частности, когда решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём временном луче) одному из следующих условий:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon,$$

ассоциируемому с соответствующим значением $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$.

Определение 1 [1]. Ляпуновскую, перроновскую и верхнепредельную меры устойчивости и неустойчивости системы (1) (точнее, её нулевого решения) зададим соответственно при ассоциированном значении $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ формулами

$$\mu_\varkappa(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } B_\delta}, \quad \mu_{\bar{\varkappa}}(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } B_\delta}. \quad (2)$$

Многие свойства введённых в определении 1 мер подробно изучены в работе [2]. Однако, несмотря на очевидное равенство $\text{mes } M_{\varkappa}(f, \varepsilon, \delta) + \text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta) = \text{mes } B_{\delta}$, возникает естественный вопрос, может ли сумма мер (2) устойчивости и неустойчивости какого-либо типа оказаться меньшей единицы. Положительный ответ на него уже в автономном двумерном случае даёт

Теорема 1. При $n = 2$ существует автономная система (1), все меры (2) которой удовлетворяют соотношениям

$$\mu_{\lambda}(f) = \mu_{\sigma}(f) = \mu_{\pi}(f), \quad \mu_{\bar{\lambda}}(f) = \mu_{\bar{\sigma}}(f) = \mu_{\bar{\pi}}(f), \quad \mu_{\varkappa}(f) + \mu_{\bar{\varkappa}}(f) < 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Определение 2 [3]. Ляпуновскую, перроновскую и верхнепредельную меры устойчивости и неустойчивости системы (1) с начальным моментом $t_0 \in \mathbb{R}_+$ зададим соответственно формулами

$$\mu_{\varkappa}(f, t_0) \equiv \mu_{\varkappa}(f_{t_0}), \quad \mu_{\bar{\varkappa}}(f, t_0) \equiv \mu_{\bar{\varkappa}}(f_{t_0}), \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma, \quad (3)$$

где $f_{t_0}(t, x) \equiv f(t - t_0, x)$ — правая часть сдвинутой системы (1) (её начальный момент фактически сдвинут в точку t_0).

Введённая в определении 2 зависимость мер устойчивости и неустойчивости фиксированной системы от выбора начального момента оказывается довольно содержательной (по крайней мере в неодномерном нелинейном неавтономном случае [4]). Но тогда особенно интересным становится вопрос, может ли у какой-либо системы какая-то из этих мер терпеть разрыв в какой-нибудь начальной точке. На него однозначно, причём отрицательно, отвечает

Теорема 2. Для каждой системы (1) все функции (3) непрерывны по $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 851–852. 2. Сергеев, И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 895–904. 3. Сергеев, И.Н. О возможной зависимости мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы от начального момента / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 6. — С. 853–854. 4. Сергеев, И.Н. Зависимость от начального момента мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2024. — Т. 34, № 1. — С. 80–90.

И. В. Астахова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “О гладкой управляемости в параболической задаче управления с точечным наблюдением” (8 ноября 2024 г.).

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$u_t = (a(x)u_x)_x + b(x)u_x + h(x)u, \quad (x, t) \in Q_T \equiv (0, 1) \times (0, T), \quad T > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

с достаточно гладкими в $\bar{Q}_T$ коэффициентами a, b, h , граничными функциями $\varphi, \psi \in W_2^2(0, T)$, где $0 < a_1 \leq a(x) \leq a_2 < +\infty$, $x \in [0, 1]$.

Различные экстремальные задачи для параболических уравнений рассматривались в многочисленных работах (см. обзоры [1, 2]), при этом наиболее изучены задачи с финальным или распределённым наблюдением. Мы изучаем задачу управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ на левом конце отрезка при фиксированной функции ψ , стараемся приблизить температуру $u(x_0, t)$ в некоторой точке $x_0 \in (0, 1)$ к заданной функции $z \in W_2^1(0, T)$ при всех $t \in (0, T)$. Продолжая исследования [3–5], рассматриваем некоторый специальный функционал качества, востребованный в приложениях, обеспечивающий, в том

числе, равномерную близость решения к целевой функции и реализуемый нормой в пространстве $W_2^1(0, T)$, где

$$\|\varphi\|_{W_2^1(0, T)} \equiv (\|\varphi'\|_{L_2(0, T)}^2 + \|\varphi\|_{L_2(0, T)}^2)^{1/2}.$$

Поскольку в прикладных задачах время T управления и наблюдения достаточно велико, влияние начальной функции относительно мало и им можно пренебречь, положив начальную функцию равной нулю.

Напомним основные обозначения и определения: $V_2^{1,0}(Q_T)$ — банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(0, 1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых $t \mapsto u(\cdot, t)$ — непрерывное отображение $[0, T] \rightarrow L_2(0, 1)$ [6, с. 15], а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ — множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x, T) = 0$, $\eta(0, t) = 0$.

Слабым решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0, t) = \varphi(t)$ и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (a(x)u_x\eta_x - b(x)u_x\eta - h(x)u\eta - u\eta_t) dx dt = a(1) \int_0^T \psi(t) \eta(1, t) dt, \quad \eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T).$$

Теорема 1. Если $\varphi, \psi \in W_2^2(0, T)$ и $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, то задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём $u_t \in V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} + \|u_t\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C(\|\varphi\|_{W_2^2(0, T)} + \|\psi\|_{W_2^2(0, T)}),$$

где постоянная C не зависит от функций φ и ψ .

Обозначим через $\Phi \subset W_2^2(0, T)$ некоторое множество управляющих функций φ , удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$, а через $Z \subset W_2^1(0, T)$ — множество целевых функций z , удовлетворяющих условию $z(0) = 0$. Рассмотрим функционал

$$J[z, \varphi] = \|u_\varphi(x_0, \cdot) - z(\cdot)\|_{W_2^1(0, T)}^2, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ — решение задачи (1), (2) с заданной управляющей функцией φ . Считая функцию z фиксированной, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z, \Phi] \equiv \inf_{\varphi \in \Phi} J[z, \varphi]. \quad (3)$$

Теорема 2. Если множество Φ замкнуто, выпукло и ограничено в $W_2^2(0, T)$, то для любого $z \in W_2^1(0, T)$ существует единственная такая функция $\varphi_0 \in \Phi$, что $m[z, \Phi] = J[z, \varphi_0]$.

Будем говорить, что задача (1)–(3) плотно управляема из множества Φ во множество Z (см. [7, 8]), если для всех $z \in Z$ выполнено равенство $m[z, \Phi] = 0$.

Теорема 3. Задача (1)–(3) плотно управляема из множества $\Phi = \{\varphi \in W_2^2(0, T) : \varphi(0) = 0\}$ во множество $Z = \{z \in W_2^1(0, T) : z(0) = 0\}$.

Параболические экстремальные задачи с функционалом качества другого вида, в том числе в неограниченных классах управлений, рассматривались в работах [4, 9–11].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltzsch, F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications / F. Troltzsch. — Providence : AMS, 2010. — 408 p. 2. Lurie, K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems / K.A. Lurie. — Berlin : Springer, 2013. — 511 p. 3. Astashova, I.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy // Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — V. 71. — P. 9–25. 4. Astashova, I.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy // Opuscula Math. — 2019. — V. 39, № 5. — P. 595–609. 5. Astashova, I. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation / I. Astashova, A. Filinovskiy, D. Lashin // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. — 2021. — V. 16. — P. 187–192. 6. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с. 7. Астапова, И.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией / И.В. Астапова, Д.А. Лапин, А.В. Филиновский // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 258–274. 8. Астапова, И.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения / И.В. Астапова, Д.А. Лапин, А.В. Филиновский // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 504. — С. 28–31. 9. Astashova, I.V. On properties of the control function in an control problem with a point observation for a parabolic equation / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy, D.A. Lashin // Funct. Differ. Equat. — 2021. — V. 28, № 3–4. — P. 99–102. 10. Astashova, I. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation / I. Astashova, A. Filinovskiy, D. Lashin // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. — 2021. — V. 16. — P. 187–192. 11. Астапова, И.В. О задачах экстремума и оценках управляющей функции для параболического уравнения / И.В. Астапова, Д.А. Лапин, А.В. Филиновский // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2024. — № 1. — С. 40–50.

В. В. Башуров (Москва) “О колеблемости решений одного дифференциального уравнения нейтрального типа” (15 ноября 2024 г.).

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка нейтрального типа с постоянными запаздываниями

$$(y(t) - py(t - \tau))'' + q(t)f(y(t - \sigma)) = 0, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (1)$$

где $0 < p < 1$, $\tau, \sigma > 0$, $q \in C[t_0, +\infty)$, $q \geq 0$.

Определение 1. Решением уравнения (1) будем называть удовлетворяющую ему функцию $y \in C[t_0 - \rho, +\infty)$, $\rho \equiv \max\{\tau, \sigma\}$, при условии $y(\cdot) - py(\cdot - \tau) \in C^2[t_0, +\infty)$.

Определение 2. Решение y уравнения (1) называется *колеблющимся*, если для любого $t_1 \geq t_0$ существует такое $t_2 > t_1$, что $y(t_2) = 0$.

Определение 3. Скажем, что функция f , для которой $f'(y) \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, и $yf(y) > 0$, $y \neq 0$, удовлетворяет условию:

— *суперлинейности*, если при любом $\varepsilon > 0$ верны оценки

$$0 < \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dy}{f(y)} < +\infty, \quad 0 < - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} < +\infty;$$

— *сублинейности*, если при любом $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$0 < \int_0^{\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} < +\infty, \quad 0 < - \int_{-\varepsilon}^0 \frac{dy}{f(y)} < +\infty.$$

В случае когда $p = \tau = \sigma = 0$ и $f(y) = |y|^\gamma \operatorname{sgn} y$, уравнение (1) является уравнением типа Эмдена–Фаулера

$$y'' + q(t)|y|^\gamma \operatorname{sgn} y = 0. \quad (2)$$

Известны следующие критерии колеблемости всех его решений.

Теорема Аткинсона [1]. Если $q \in C[0, +\infty)$, $q \geq 0$ и $\gamma = 2n - 1$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, то все решения уравнения (2) являются колеблющимися тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{+\infty} tq(t) dt = +\infty. \quad (3)$$

Теорема Белогорца [2]. Если $q_j \in C[0, +\infty)$, $q_j \geq 0$ и $\gamma_j = p_j/r_j \in (0, 1)$, где p_j и r_j — натуральные нечётные числа, $j \in \mathbb{N}$, то все решения уравнения

$$y'' + \sum_{j=1}^n q_j(t)y^{\gamma_j} = 0$$

являются колеблющимися тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^n t^{\gamma_j} q_j(t) dt = +\infty.$$

Усиление теоремы Аткинсона для всех действительных $\gamma > 1$ доказано в [3], колеблемость решений уравнений типа Эмдена–Фаулера высоких порядков исследована в [4]. Более общий случай уравнения (2) был рассмотрен в [5].

В работе [6] доказаны критерии колеблемости всех решений уравнения (1) в случаях суперлинейности и сублинейности функции f . Ниже представлены результаты, дополняющие и уточняющие эти критерии.

Теорема 1. Пусть функция $f \in C(\mathbb{R})$ суперлинейна. Тогда:

- 1) если выполнено условие (3), то любое решение уравнения (1) либо является колеблющимся, либо стремится к нулю на бесконечности;
- 2) если все решения уравнения (1) колеблющиеся, то выполнено условие (3).

Замечание. Условие (3) не гарантирует (вопреки утверждению из [6]) колеблемости всех решений уравнения (1). Например, функция $y(t) = e^{-t}$ является частным решением уравнения

$$(y(t) - y(t-1)/2)'' + (e/2 - 1)e^{2t-3}y^3(t-1) = 0,$$

причём $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ и выполнено условие (3), где $q(t) \equiv t(e/2 - 1)e^{2t-3}$.

Теорема 2. Пусть функция $f \in C(\mathbb{R})$ сублинейна и $f(uv) \geq f(u)f(v)$ при $uv \geq 0$. Тогда:

- 1) если

$$\int_0^{+\infty} f(t)q(t) dt = +\infty, \quad (4)$$

то любое решение уравнения (1) либо является колеблющимся, либо стремится к нулю на бесконечности;

- 2) если все решения уравнения (1) колеблющиеся, то выполнено условие (4).

Теорема 3. Если функция $f \in C(\mathbb{R})$ сублинейна, $\sigma > \tau$ и $\int_0^{+\infty} q(t) dt = +\infty$, то все решения уравнения (1) являются колеблющимися.

Литература. 1. Atkinson, F.V. On second order nonlinear oscillation / F.V. Atkinson // Pacific J. Math. — 1955. — P. 643–647. 2. Belohorec, S. Oscillatory solutions of certain nonlinear differential equations of second order / S. Belohorec // Mat. Fyz. Casopis Sloven Akad. Vied. — 1961. — P. 250–255. 3. Кигурадзе, И.Т. Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Cas. Pest. Mat. — 1962. — V. 87, № 4. — P. 492–495. 4. Кигурадзе, И.Т. О колеблемости решений уравнения $d^m u/dt^m + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Мат. сб. — 1964. — Т. 65, № 2. — С. 172–187.

5. Astashova, I. On existence of nonoscillatory solutions to quasilinear differential equations / I. Astashova // Georgian Math. J. — 2007. — V. 14, № 2. — P. 223–238. 6. Wong, J.S.W. Necessary and sufficient conditions for oscillation of second-order neutral differential equations / J.S.W. Wong // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — P. 342–352.

Д. А. Габидуллин (Москва) “Об условиях устойчивости некоторой нелинейной биологической модели развития эпидемий” (22 ноября 2024 г.).

Рассматривается динамическая система

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-p)a - dS - \frac{\beta IS}{1+\sigma I^k} + \delta V, & \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{1+\sigma I^k} - (d+\varepsilon+\eta)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (d+\tau)I, & \frac{dV}{dt} &= pa + \tau I + \eta E - (d+\delta)V, \end{aligned} \quad (1)$$

возникающая в эпидемиологической математической модели с учётом инкубационного периода и временного иммунитета. В этой модели всё население N делится на 4 категории: восприимчивые S , инфицированные E , заражённые I и вакцинированные/выздоровевшие V . Все параметры системы (1) неотрицательны, а их биологическое значение интерпретируется следующим образом: люди рождаются со скоростью a и вступают в класс S , а доля новорождённых эффективно вакцинируется со скоростью p , восприимчивые люди заражаются со скоростью β , временный иммунитет (вызванный идеальной вакциной, болезнью и бессимптомными инфекциями) уменьшается со скоростью δ , все люди в каждом классе имеют одинаковую естественную смертность d , люди из класса E могут переходить в класс I со скоростью ε , а также в класс V со скоростью η (из-за приобретения естественного иммунитета), инфицированные люди эффективно выздоравливают со скоростью τ , параметры σ и k описаны ниже.

Модели SEIVS, SIRS с различными показателями инцидентности изучались в работах [1–8]: в [1–4] к моделям SEIVS применялся геометрический подход для установления асимптотической устойчивости и глобальной асимптотической устойчивости положений равновесия в зависимости от контрольного числа репродукции R_c , в [5] обобщён геометрический критерий глобальной асимптотической устойчивости; в [6, 7] учтены диффузионные эффекты распространения эпидемий в популяции для моделей SIRS, в [8] исследована такая модель с инфекционной силой специального вида.

Пусть новая инфекционная сила определяется по формуле

$$\varphi(I) \equiv \frac{\beta I}{1+\sigma I^k},$$

где параметры σ и k оценивают ингибирующие или психологические эффекты, обусловленные информационными кампаниями, проводимыми в популяции.

Система (1) при любых значениях параметров имеет положение равновесия

$$Q_0 = (S_0, 0, 0, V_0), \quad S_0 \equiv \frac{a((1-p)d+\delta)}{d(d+\delta)}, \quad V_0 \equiv \frac{pa}{d+\delta},$$

соответствующее отсутствию заболевших в популяции. Система (1) допускает биологически возможную область

$$\mathcal{D} = \{(S, E, I, V) \in \mathbb{R}_+^4 : S \leq S_0, V \leq V_0, E+I \leq S_0+V_0, S+E+I+V \leq a/d\},$$

являющуюся положительно инвариантной. Введём зависящее от параметров модели контрольное репродуктивное число

$$R_c \equiv \frac{\varepsilon S_0 \varphi'(0)}{(d+\tau)(d+\varepsilon+\eta)}.$$

Определение. Положение равновесия x^* называется:

— *асимптотически устойчивым*, если все начинающиеся достаточно близко к нему решения не только всё время остаются вблизи x^* , но и стремятся к нему при неограниченном росте времени;

— *глобально асимптотически устойчивым*, если каждое решение, независимо от начального условия, стремится к x^* при неограниченном росте времени.

Теорема 1. Положение равновесия Q_0 системы (1) является глобально асимптотически устойчивым при $R_c \leq 1$ и неустойчивым при $R_c > 1$.

Доказательство теоремы 1 базируется на построении функции Ляпунова системы (1) и применении принципа инвариантности [9].

Теорема 2. Если $R_c > 1$, то система (1) имеет в области $\mathcal{D}$ ещё одно, отличное от Q_0 , положение равновесия Q^* , которое асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы 2 основывается на линеаризации в окрестности особой точки системы (1) и исследовании корней характеристического уравнения матрицы коэффициентов соответствующей линейной системы.

Положение равновесия Q^* называется *эндемическим* (в популяции остаются заражённые и инфицированные).

Литература. 1. Cai, L.M. Analysis of a SEIV epidemic model with a nonlinear incidence rate / L.M. Cai, X.Z. Li // Appl. Math. Model. — 2009. — V. 33, № 7. — P. 2919–2926. 2. Sahu, G.P. Analysis of an SEIVS epidemic model with partial temporary immunity and saturation incidence rate / G.P. Sahu, J. Dhar // Appl. Math. Model. — 2012. — V. 36, № 3. — P. 908–923. 3. Li, M.Y. A geometric approach to the global-stability problems / M.Y. Li, J.S. Muldowney // SIAM J. Math. Anal. — 1996. — V. 27, № 4. — P. 1070–1083. 4. Liu, J.L. Global stability for a tuberculosis model / J.L. Liu, T.L. Zhang // Math. Comput. Model. — 2011. — V. 54. — P. 836–845. 5. Lu, G.C. Geometric approach to global asymptotic stability for the SEIRS models in epidemiology / G.C. Lu, Z.Y. Lu // Nonlin. Anal. Real World Appl. — 2017. — V. 36. — P. 20–43. 6. Astashova, I. Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application PhaPI / I. Astashova, V. Chebotaeva, A. Cherepanov // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2018. — V. 15, № 12. — P. 112–118. 7. Chebotaeva, V. Erlang-distributed SEIR epidemic models with cross-diffusion / V. Chebotaeva, P.A. Vasquez // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 9. — Art. 2167. 8. Xiao, D. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate / D. Xiao, S. Ruan // Math. Biosci. — 2007. — V. 208. — P. 419–429. 9. LaSalle, J.P. The Stability of Dynamical Systems / J.P. LaSalle. — Philadelphia ; Pennsylvania : SIAM, 1976. — 81 p.

В. В. Алексеев (Ярославль) “Периодическое решение уравнения Мэки–Гласса и анализ его сходимости к решению соответствующего предельного релейного уравнения” (29 ноября 2024 г.).

Рассмотрим уравнение Мэки–Гласса [1, 2]

$$\dot{v} = -bv + \frac{a\theta^\gamma v_\tau}{\theta^\gamma + (v_\tau)^\gamma}, \quad (1)$$

где $v = v(t) > 0$ — скалярная функция, $v_\tau(t) \equiv v(t - \tau)$, $a, b, \theta, \tau, \gamma > 0$ — параметры, причём τ задаёт запаздывание по времени, а γ определяет форму нелинейности.

После замен $v(t)/\theta = u(t/\tau)$, $a\tau = \alpha$, $b\tau = \beta$, $\ln u = x$ и переобозначения величины t/τ (нормированного времени) через t уравнение (1) примет вид

$$\dot{x} = -\beta + \alpha \frac{e^{x_1 - x}}{1 + e^{\gamma x_1}}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2)$$

а при $\gamma \rightarrow +\infty$ будет иметь вид *релейного* уравнения

$$\dot{x} = -\beta + \alpha e^{x_1-x} H(e^{x_1}), \quad H(u) \equiv \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+u^\gamma} = \begin{cases} 0, & u > 1, \\ 1/2, & u = 1, \\ 1, & u < 1. \end{cases} \quad (3)$$

Изучим вопрос о существовании периодического решения уравнения (3) и сходимости решения уравнения (2) к соответствующему решению уравнения (3).

Определение. Точками переключения решения уравнения (3) будем называть моменты времени t , для которых $x_1(t) = 0$ (т.е. множитель $H(e^{x_1})$ меняет значение).

Будем искать периодическое решение уравнения (3) с наименьшим числом точек переключения на периоде. В качестве множества начальных функций рассмотрим множество

$$S \equiv \{\varphi \in C[-1, 0]: \varphi(0) = x_0 > 0, \quad 0 < p \leq \varphi(t) \leq q < +\infty, \quad t \in [-1, 0]\}, \quad (4)$$

где x_0, p, q — положительные параметры.

Теорема 1 [3]. Если $\alpha > e^\beta + e^{-\beta}$, $t_0 = x_0/\beta + 1$ и $t_2 = t_0 + T$, где

$$T = \beta^{-1} \ln(\alpha^2 e^{2\beta}(t_1 - t_0 - 1)^2/2 + \alpha e^\beta(t_1 - t_0) + 1),$$

$t_1 > t_0$ — корень уравнения $e^{\beta(t_1 - t_0)} = \alpha e^\beta(t_1 - t_0 - 1) + 1$, то уравнение (3) с начальной функцией из множества (4) имеет T -периодическое решение

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 - \beta t, & t \in [0, t_0], \\ x_0 - \beta t + \ln(\alpha e^\beta(t - t_0) + 1), & t \in [t_0, t_0 + 1], \\ x_0 - \beta t + \ln(\alpha^2 e^{2\beta}(t - t_0 - 1)^2/2 + \alpha e^\beta(t - t_0) + 1), & t \in [t_0 + 1, t_1], \\ x_0 - \beta t + \ln(\alpha^2 e^{2\beta}(t_1 - t_0 - 1)^2/2 + \alpha e^\beta(t_1 - t_0) + 1), & t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

На основе данного результата найдём асимптотические формулы, описывающие решение уравнения (2), и покажем его близость к решению релейного уравнения (3). Для краткости формулировки основного результата введём обозначения

$$\xi \equiv -\beta + \frac{\alpha e^\beta}{\alpha e^\beta(t_1 - t_0 - 1) + 1}, \quad \zeta \equiv \frac{\alpha^2}{2} e^{2\beta}(t_1 - t_0 - 1)^2 + \alpha e^\beta(t_1 - t_0) + 1,$$

$$w_0(s) \equiv -\beta s + \frac{\alpha e^\beta}{\beta} \ln(e^{\beta s} + 1), \quad w_1(s) \equiv -\beta s - \frac{\alpha e^\beta(\alpha e^\beta(t_1 - t_0 - 1) + 1)}{\xi \zeta} \ln(e^{-\xi s} + 1).$$

Теорема 2. Если $\alpha > e^\beta + e^{-\beta}$, $\beta > 0$, $\gamma \gg 1$, $\sigma = \gamma^{-\nu}$ и $\nu \in (1/2, 1)$, то уравнение (2) с произвольной начальной функцией φ из класса (4) имеет решение $x_\gamma^*(t)$, представимое при $\gamma \rightarrow +\infty$ в виде

$$x_\gamma^*(t) = \begin{cases} x_0 - \beta t + O(\gamma^{-1} e^{-\beta \sigma \gamma}), & t \in [0, t_0 - \sigma], \\ -\beta + \gamma^{-1} w_0(\gamma(t - t_0)) + O(\gamma^{-2\nu}), & t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma], \\ x_0 - \beta t + \ln(\alpha e^\beta(t - t_0) + 1) + O(\gamma^{-2\nu}), & t \in [t_0 + \sigma, t_0 + 1], \\ x_0 - \beta t + \ln(\alpha^2 e^{2\beta}(t - t_0 - 1)^2/2 + \alpha e^\beta(t - t_0) + 1) + O(\gamma^{-2\nu}), & t \in [t_0 + 1, t_1 - \sigma], \\ x_0 - \beta t_1 + \ln \zeta + \gamma^{-1} w_1(\gamma(t - t_1)) + O(\gamma^{1-3\nu}), & t \in [t_1 - \sigma, t_1 + \sigma], \\ x_0 - \beta t + \ln \zeta + O(\gamma^{1-3\nu}), & t \in [t_1 + \sigma, t_2 - \sigma], \end{cases}$$

где остаточные члены равномерны по $\varphi \in S$ и t из соответствующих промежутков. Более того, существуют такие x_0 , p , q и такое (достаточно большое) γ_0 , что для произвольной начальной функции из множества (4) и каждого $\gamma > \gamma_0$ уравнение (2) обладает периодическим решением x_γ^* с периодом T_γ , причём

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq T_\gamma} |x_\gamma^*(t) - x^*(t)| = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} T_\gamma = T.$$

Метод доказательства теоремы 2 описан в работах [4, 5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

Литература. 1. Mackey, M.C. Oscillation and chaos in physiological control systems / M.C. Mackey, L. Glass // Science. — 1977. — V. 197, № 4300. — P. 287–289. 2. Glass, L. From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life / L. Glass, M. Mackey. — Princeton : Princeton Univ. Press, 1988. — 248 p. 3. Алексеев, В.В. Анализ асимптотической сходимости периодического решения уравнения Мэки–Гласса к решению предельного релейного уравнения / В.В. Алексеев, М.М. Преображенская // Теор. и мат. физика. — 2024. — Т. 220, № 2. — С. 1297–1317. 4. Колесов, А.Ю. Об одной модификации уравнения Хатчинсона / А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 12. — С. 2099–2112. 5. Глызин, С.Д. Об одном способе математического моделирования химических синапсов / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 10. — С. 1227–1244.

Е. А. Барабанов (Минск), **В. В. Быков** (Москва) “Старший показатель Ляпунова параметрических семейств двумерных линейных дифференциальных гамильтоновых систем как функция параметра” (6 декабря 2024 г.).

Для заданного чётного натурального числа $n = 2m$ обозначим через $\mathcal{H}_n$ класс линейных дифференциальных гамильтоновых систем

$$\dot{x} = JB(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = B^T(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с непрерывными и ограниченными на временной полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами, а показатели Ляпунова [1, с. 27; 2, с. 21] системы (1) обозначим через $\lambda_1(JB) \leq \dots \leq \lambda_n(JB)$.

Пусть M — метрическое пространство. Рассмотрим класс $\mathcal{H}_n(M)$ таких параметрических семейств линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M, \quad (2)$$

что при каждом $\mu \in M$ система (2) имеет непрерывные ограниченные коэффициенты и является гамильтоновой, причём отображение $\mu \mapsto A(\cdot, \mu)$ непрерывно в топологии равномерной на полуоси $\mathbb{R}_+$ сходимости коэффициентов, т.е. выполнено равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow \mu} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|A(t, \nu) - A(t, \mu)\| = 0.$$

Отождествляя семейство (2) и матрицу его коэффициентов, будем писать $A \in \mathcal{H}_n(M)$, а показатели Ляпунова системы (2) обозначим через $\lambda_1(\mu, A) \leq \dots \leq \lambda_n(\mu, A)$.

Поставим задачу полного описания класса $\lambda_i \mathcal{H}_n(M) \equiv \{\lambda_i(\cdot, A) : A \in \mathcal{H}_n(M)\}$, состоящего из функций $\lambda_i(\cdot, A) : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, определяемых семействами (2) для произвольного чётного n , номера $i \in \{1, \dots, n\}$ и метрического пространства M . Аналогичная задача для

семейств (2) более общих линейных систем, т.е. обладающих теми же свойствами, но задаваемых не обязательно гамильтоновыми матрицами $A(t, \mu)$, решена ранее в работах [3, 4].

Напомним [5, с. 223–224], что функция $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $(*, G_\delta)$, если для каждого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $h^{-1}([r, +\infty))$ полуинтервала $[r, +\infty)$ является G_δ -множеством в метрическом пространстве M . В частности, класс $(*, G_\delta)$ является собственным подклассом второго класса Бэра [5, с. 249]. Полное описание класса $\lambda_2 \mathcal{H}_2(M)$ содержит следующая

Теорема. Для каждого метрического пространства M функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $\lambda_2 \mathcal{H}_2(M)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет трём условиям:

- 1) при всех $\mu \in M$ неотрицательна;
- 2) имеет непрерывную мажоранту;
- 3) принадлежит классу $(*, G_\delta)$.

Литература. 1. Ляпунов, А.М. Собрание сочинений. Т. 2 / А.М. Ляпунов. — М.: Изд-во Академии наук СССР, 1956. — 473 с. 2. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с. 3. Быков, В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси / В.В. Быков // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 12. — С. 1579–1592. 4. Барабанов, Е.А. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси / Е.А. Барабанов, В.В. Быков, М.В. Карпук // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 12. — С. 1579–1588. 5. Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф; под ред. и с доп. П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова. — М.-Л.: ОНТИ. Глав. ред. техн.-теоретич. лит-ры, 1937. — 304 с.

Н. А. Изобов (Минск), **А. В. Ильин** (Москва) “О числе экспоненциально убывающих решений возмущённой дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте” (13 декабря 2024 г.).

Антиперроновский эффект [1–3] (противоположный известному перроновскому [4, 5]) предполагает смену всех положительных характеристических показателей $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ линейного приближения

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами на отрицательные у некоторых нетривиальных решений дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

с бесконечно дифференцируемой вектор-функцией f из известных классов малых возмущений. Этот эффект представляет интерес своими возможными приложениями по построению с помощью малых возмущений устойчивых или условно устойчивых дифференциальных систем с вполне неустойчивым линейным приближением.

При реализации антиперроновского эффекта в классе линейных экспоненциально убывающих возмущений

$$f(t, y) \equiv Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad \lambda[Q] \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|Q(t)\| < 0,$$

установлено [1], что необходимые экспоненциально убывающие решения системы (2) образуют $(n-1)$ -мерное линейное подпространство всего множества решений рассматриваемой линейной системы (2).

Для линейных исчезающих на бесконечности возмущений f доказано [2] существование необходимых линейных систем (1) и (2) с характеристическими показателями: младшим $\lambda_1(A) > 0$ системы (1) и старшим $\lambda_n(A+Q) < 0$ линейной системы (2).

В более сложном случае возмущений высшего порядка $m > 1$ — так называемых m -возмущений, определяемых условием

$$|f(t, y)| \leq C_f |y|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \text{const}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0,$$

двумерный антиперроновский эффект реализован [3] на системе (1) с совпадающими показателями $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda > 0$ и *единственном* построенном решении $Y(t)$ системы (2) с показателем $\lambda[Y] = -\lambda(\theta + 1)/(m\theta - 1) < 0$, $\theta > 1$. Поэтому возникает вопрос о реализации антиперроновского эффекта смены показателей в классе возмущений высшего порядка на *большом* числе решений возмущённой системы (2) с отрицательными показателями. Ответ на него содержит приведённая ниже теорема.

Для векторов $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ и временной полуоси $T_0 = [t_0, +\infty)$, $t_0 \geq 0$, определим пространственно-временные октанты

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_1^2 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1, y_2 \geq 0\} \times T_0, & \mathbb{R}_2^2 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq 0 \leq y_2\} \times T_0, \\ \mathbb{R}_3^2 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1, y_2 \leq 0\} \times T_0, & \mathbb{R}_4^2 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0 \geq y_2\} \times T_0. \end{aligned}$$

Теорема. Для любых параметров $\lambda > 0$, $m_4 \geq m_3 \geq m_2 \geq m_1 > 1$ и $\theta > 1$ существуют двумерная линейная система (1) с показателями $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda > 0$ и бесконечно дифференцируемое m_1 -возмущение $f: [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, одновременно являющееся m_i -возмущением в октанте $\mathbb{R}_i^2$ при $i = \overline{1, 4}$, такие, что возмущённая система (2) имеет решения $Y_i \subset \mathbb{R}_i^2$ с показателями $\lambda[Y_i] = -\lambda_1(\theta + 1)/(m_i\theta - 1) < 0$, $i = \overline{1, 4}$.

Замечание. Выбором величины m_i можно получить соответствующие различные отрицательные значения показателей $\lambda[Y_i]$.

Литература. 1. Изобов, Н.А. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1450–1457. 2. Изобов, Н.А. Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1443–1452. 3. Изобов, Н.А. Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1599–1605. 4. Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Mathematische Zeitschrift. — 1930. — Bd. 32, H. 5. — S. 702–728. 5. Леонов, Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения / Г.А. Леонов. — М.: Ин-т компьютер. исследований; Ижевск: R&C Dynamics, 2006. — 167 с.