ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1562–1565

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.32

КОНЕЧНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, НЕ СТРЕМЯЩЕЕСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ К СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ

А. Б. Плаченов[1], А. П. Киселев[2]

[1]*МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва*
[2]*Санкт-Петербургское отделение математического института имени В.А. Стеклова РАН*
[2]*Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург*
e-mail: [1]a_plachenov@mail.ru, [2]aleksei.kiselev@gmail.com

Поступила в редакцию 26.08.2024 г., после доработки 26.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Приведено решение волнового уравнения с тремя пространственными переменными, которое имеет конечный интеграл энергии, однако не стремится на бесконечности к сферической волне.

Ключевые слова: волновое уравнение, интеграл энергии, сферическая волна

DOI: 10.31857/S0374064124110113, EDN: JDQMIZ

Естественно ожидать, что решение волнового уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0,\quad c=\text{const}>0, \tag{1}$$

достаточно быстро убывающее в некоторый начальный момент $t=t_0$, имеет для больши́х времён и расстояний асимптотику в виде расходящейся сферической волны

$$u\approx\frac{F(R-ct,\mathbf{n})}{R},\quad R\to\infty,\quad t\to\infty. \tag{2}$$

Здесь $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — длина вектора $\mathbf{R}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, а $\mathbf{n}=\mathbf{R}/R$ — единичный вектор направления, в котором точка (x,y,z) удаляется на бесконечность.

Функция F, которую называют *диаграммой*, определяется как предел при согласованном росте R и t:

$$F(s,\mathbf{n})=\lim_{t\to\infty}[ctu(\mathbf{R},t)]\big|_{R=s+ct}. \tag{3}$$

Равномерной сходимости относительно параметра $s\in\mathbb{R}$ не предполагается.

Решение $u=u(\mathbf{R},t)$ удобно характеризовать начальными данными Коши $\varphi=\varphi(\mathbf{R})$ и $\psi=\psi(\mathbf{R})$:

$$u|_{t=t_0}=\varphi,\quad u_t|_{t=t_0}=\psi$$

для произвольно фиксированного t_0.

Существование предела (3) установлено для гладких быстро убывающих данных [1, 2] для случая, когда данные являются обобщёнными функциями с компакным носителем [3], и, наконец, для гладких данных в предположении, что ϕ, ψ и $|\nabla\psi|$ имеют при $R\to\infty$ оценку $O(R^{-3})$ [4]. Отметим, что в работе [1] для гладких быстро убывающих данных установлено, что если отношение R/t имеет предел, отличный от $\pm c$, то предел (3) равен нулю.

Функция (3) играет важную роль в разных разделах математической физики (см., например, [1–7]), причём особенно интересны решения с конечной энергией:

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+\frac{1}{c^2}\,|u_t|^2\right)dx\,dy\,dz<\infty.$$

Приведём простой пример решения уравнения (1) с конечной энергией, для которого конечного предела (3) не существует, и, следовательно, это решение не стремится на бесконечности к сферической волне.

Рассмотрим функцию

$$V(\mathbf{R},t)=\frac{1}{c^2t_*^2-R^2}, \tag{4}$$

где $t_*=t+i\tau$ и для определённости $\tau>0$. Выражение (4) является частным случаем сплэш импульса [8], широко используемого для моделирования коротких оптических импульсов. Легко убедиться (непосредственной подстановкой), что функция (4) удовлетворяет уравнению (1) в $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$.

Первообразная функции (4) по t

$$u(\mathbf{R},t)=\int\limits_{-\infty}^{t}V(\mathbf{R},t')\,dt'=\begin{cases}\dfrac{1}{2cR}\ln\dfrac{ct_*-R}{ct_*+R}, & R\neq 0,\\ -\dfrac{1}{c^2t_*}, & R=0,\end{cases} \tag{5}$$

очевидно, также удовлетворяет волновому уравнению (1).

Утверждение 1. *Для функции (5) передел (3) бесконечен.*

В самом деле, легко видеть, что при $R=ct+s$ (т.е. $\mathbf{R}=(ct+s)\mathbf{n}$)

$$u(\mathbf{R},t)=\frac{1}{2c(ct+s)}\ln\frac{ic\tau-s}{2ct+ic\tau+s}=-\frac{\ln(ct)}{2c^2t}+O\left(\frac{1}{t}\right),$$

тогда в (3) получаем

$$F(s,\mathbf{n})=\lim_{t\to\infty}[ctu((ct+s)\mathbf{n},t)]=-\frac{1}{2c}\lim_{t\to\infty}\ln(ct)=-\infty.$$

Утверждение 2. *Функция (5) имеет конечную энергию.*

Действительно, $u_t=V=O(R^{-2})$ при $R\to\infty$ и, следовательно, $|u_t|^2$ суммируема. Аналогичные элементарные выкладки показывают, что производные от u функции по пространственным переменным имеют порядок $O(R^{-2}\ln R)$, откуда вытекает суммируемость $|\nabla u|^2$.

Таким образом, показано, что решение волнового уравнения в важном классе функций с конечной энергией может не иметь асимптотики (3). Вопрос о необходимых условиях существования такой асимптотики остаётся открытым.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Санкт-Петербургского международного математического института имени Леонарда Эйлера по соглашению № 075-15-2022-289.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благовещенский, А.С. О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения / А.С. Благовещенский // Тр. V Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. — Л. : Наука, 1971. — С. 29–35.
2. Moses, R.N. Acoustic and electromagnetic bullets: derivation of new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equations / R.N. Moses, H.E. Prosser // SIAM J. Appl. — 1990. — V. 50, № 5. — P. 1325–1340.
3. Благовещенский, А.С. О поведении на бесконечности решения обобщённой задачи Коши для волнового уравнения / А.С. Благовещенский, А.А. Новицкая // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2002. — Т. 285. — С. 33–38.
4. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения. Обзор / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. — 2007. — Т. 102, № 4. — С. 697–717.
5. Friedlander, F.G. On the radiation field of pluse solution of the wave equation. II / F.G. Friedlander // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Math. Phys. Sci. — 1964. — V. 279, № 1378. — P. 386–394.
6. Плаченов, А.Б. Выражение энергии акустического, электромагнитного и упругого волнового поля через его асимптотику на больших временах и расстояниях / А.Б. Плаченов // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2020. — Т. 493. — С. 269–287.
7. Плаченов, А.Б. Однонаправленные импульсы: относительно неискажающиеся квазисферические волны, интегралы Фурье–Бесселя и разложения по плоским волнам / А.Б. Плаченов, А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. — 2024. — Т. 132, № 4. — С. 429–433.
8. Ziolkowski, R.W. Exact solutions of the wave equation with complex source locations / R.W. Ziolkowsky // J. Math. Phys. — 1985. — V. 26, № 4. — P. 861–863.

FINITE-ENERGY SOLUTION OF THE WAVE EQUATION THAT DOES NOT TEND TO A SPHERICAL WAVE AT INFINITY

A. B. Plachenov[1], A. P. Kiselev[2]

[1]MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia
[2]St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS, St. Petersburg, Russia
[2]Institute of Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Russia
e-mail: [1]a_plachenov@mail.ru, [2]aleksei.kiselev@gmail.com

A solution of the wave equation with three spatial variables is given, which has a finite energy integral, but does not tend to a spherical wave at infinity.

Keywords: wave equation, energy integral, spherical wave

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Saint Peterburg International Mathematical Institute named after Leonhard Euler under agreement no. 075-15-2022-289.

REFERENCES

1. Blagoveshchenskii, A.S. On some new correct problems for the wave equation, in: *Proc. 5th All-Union Symp. on Wave Diffr. Propag.*, Leningrad: Nauka, 1971, pp. 29–35.
2. Moses, R.N. and Prosser, H.E. Acoustic and electromagnetic bullets: derivation of new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equations, *SIAM J. Appl.*, 1990, vol. 50, no. 5, pp. 1325–1340.

3. Blagoveshchenskii, A.S. and Novitskaya, A.A., On behavior of the solution of a generalized Cauchy problem for the wave equation at infinity, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2004, vol. 122, no. 5, pp. 3470–3472.
4. Kiselev, A.P., Localized light waves: paraxial and exact solutions of the wave equation (a review), *Optics and Spectroscopy*, 2007, vol. 102, no. 4, pp. 603–622.
5. Friedlander, F.G., On the radiation field of pluse solution of the wave equation. II, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Math. Phys. Sci.*, 1964, vol. 279, no. 1378, pp. 386–394.
6. Plachenov, A.B., Energy of waves (acoustic, electromagnetic, elastic) via their far-field asymptotics at large time, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2023, vol. 277, no. 4, pp. 653–665.
7. Plachenov, A.B. and Kiselev, A.P., Unidirectional pulses: relatively undistorted quasi-spherical waves, Fourier–Bessel integrals, and plane-waves decompositions, *Optics and Spectroscopy*, 2024, vol. 132, no. 4, pp. 394–398.
8. Ziolkowski, R.W., Exact solutions of the wave equation with complex source locations, *J. Math. Phys.*, 1985, vol. 26, no. 4, pp. 861–863.