

УДК 517.977.1

О РАСШИРЕНИИ МНОЖЕСТВА РАЗБИЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ДЛЯ УСТОЙЧИВОЙ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

© 2024 г. А. С. Фурсов¹, П. А. Крылов²¹Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай^{1,2}Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова¹Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, г. Москваe-mail: ¹fursov@cs.msu.ru, ²pavel@leftsystem.ru

Поступила в редакцию 14.07.2024 г., после доработки 01.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Для переключаемой аффинной системы, замкнутой стабилизирующей статической обратной связью, представлен метод построения параметрического семейства разбиений пространства состояний, относительно которого данная замкнутая система сохраняет устойчивость.

Ключевые слова: переключаемая аффинная система, переключающий сигнал, устойчивость, обратная связь, стабилизация

DOI: 10.31857/S0374064124110095, EDN: JDRZGZ

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается переключаемая аффинная система

$$\dot{x} = A_{\sigma}x + v_{\sigma} + b_{\sigma}u, \quad \sigma \in S(F), \quad (1)$$

порождаемая множеством F всевозможных пар (N, D) , задающих различные разбиения пространства состояний $\mathbb{R}^n$ на выпуклые замкнутые многогранники $\overline{M}_i$ (под выпуклым многогранником понимаем выпуклое множество, ограниченное некоторым числом гиперплоскостей, при этом в общем случае многогранник может быть неограниченным), $i = \overline{1, m}$. Здесь, следуя обозначениям работ [1, 2], $N = [n_{ijk}]$ — трёхмерная $m \times m \times n$ -матрица, для которой коэффициент n_{ijk} обозначает k -ю компоненту вектора нормали n_{ij} к плоскости $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle n_{ij}, x \rangle = d_{ij}, \quad d_{ij} \in \mathbb{R}\}$, содержащей общую грань многогранников $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$, направленного в сторону многогранника $\overline{M}_j$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^m$ — матрица из $\mathbb{R}^{m \times m}$. При этом очевидно, что $n_{ji} = -n_{ij}$, $d_{ji} = -d_{ij}$, и если $n_{ij} = 0$ (в случае, когда многогранники $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$ не имеют общей грани), то считаем, что $d_{ij} = d_{ji} = 1$, и для удобства полагаем $n_{ii} = 0$, $d_{ii} = 1$. Далее $S(F)$ — множество переключающих сигналов σ , где $\sigma(x; N, D): \mathbb{R}^n \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), задаваемая парой $(N, D) \in F$ и принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i ; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход; $A_{\sigma} = A \circ \sigma$ — композиция отображения $A: I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ ; $b_{\sigma} = b \circ \sigma$ и $v_{\sigma} = v \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $b: I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$, $v: I \rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$, причём считаем, что $v_1 = 0$, т.е. $0 \in M_1$. Через $\Gamma(N; D)$ будем обозначать множество граничных точек разбиения, задаваемого парой $(N, D) \in F$.

В упомянутых работах [1, 2] рассматривалась задача построения проверяемых условий устойчивости системы (1), замкнутой статической обратной связью $u = -\theta^T x$, т.е. замкнутой системы вида

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma \theta^T x, \quad \sigma \in S(F). \quad (2)$$

Нулевое решение замкнутой переключаемой системы (2) считаем глобально равномерно устойчивым [1], если для любого фиксированного $\sigma \in S(F)$ нулевое решение соответствующей кусочно-аффинной системы глобально асимптотически устойчиво.

В статье [1] сформулирована и доказана теорема о достаточном условии глобальной равномерной устойчивости нулевого решения системы (2), в [2] приведён эффективный метод численной проверки выполнения этого условия, позволяющий устанавливать факт глобальной устойчивости замкнутой системы (2) в случаях, когда множество разбиений $S(F)$ либо конечное, либо представляет собой линейно-параметризованное семейство разбиений вида

$$F(\kappa) = \{(N, D(\kappa))\},$$

где N — фиксированная трёхмерная матрица, а $D(\kappa)$ — матрица, элементы которой линейно зависят от параметров $\kappa_1, \dots, \kappa_r$, а именно,

$$d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^1 \kappa_1 + \dots + d_{ij}^r \kappa_r, \quad d_{ij}^k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, r},$$

где вектор $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_r)$ удовлетворяет линейным ограничениям

$$\Phi \kappa \leq \varphi, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{l \times r}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^l,$$

для некоторого натурального l . При этом если $n_{ij} = 0$, то $d_{ij}^0 = 1$ и $d_{ij}^1 = \dots = d_{ij}^r = 0$.

В настоящей работе рассматривается задача в некотором смысле обратная той, которая исследовалась в [1, 2], а именно: пусть статическая обратная связь в форме регулятора переменной структуры вида

$$u(x) = -\theta_\sigma^T x - w_\sigma \quad (3)$$

обеспечивает глобальную равномерную устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma \theta_\sigma^T) x + v_\sigma - b_\sigma w_\sigma, \quad \sigma \in S(F), \quad (4)$$

причём множество разбиений состоит из одного переключающего сигнала $S(F) = \{\sigma_0\}$ ($\sigma_0 \sim (N_0, D_0)$). Требуется разработать метод построения линейно-параметризованного семейства разбиений

$$F_0(\kappa) = \{(N_0, D(\kappa))\}, \quad (5)$$

где

$$D(\kappa) = D_0 + D_1 \kappa_1 + \dots + D_r \kappa_r \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad D(\kappa) = \{d_{ij}(\kappa)\}, \quad D_l = \{d_{ij}^l\}, \\ \kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_r) \in K \subset \mathbb{R}^r, \quad D(0) = D_0,$$

относительно которого замкнутая система (4) при $S(F) = S(F_0(\kappa))$ глобально равномерно устойчива.

Отметим, что данная задача может возникать при кусочно-линейной аппроксимации нелинейной аффинной системы на заданном множестве по известному конечному набору значений, вычисляемых по её правой части (имеются в виду значения самой правой части и её частных производных в некотором конечном наборе точек, при этом в остальных точках значения правой части считаются неизвестными).

Для решения сформулированной задачи будут использоваться результаты работ [1, 2], в частности, предлагается строить Γ -инвариантное расширение (некоторые определения см. в п. 1) множества разбиений $S(F)$, что позволит применить к нему предложенные в [2] подходы для проверки глобальной равномерной устойчивости переключаемой аффинной системы с линейно-параметризованным семейством разбиений. Ниже будут сформулированы необходимые определения и уточнена постановка задачи.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

Пусть $(N; D) \in F$ — некоторое разбиение пространства состояний для системы (1). В соответствии с работой [1] для каждого набора $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такого, что $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \{1, \dots, m\}$, $2 \leq p \leq m$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, введём множество граничных точек (граней рассматриваемого разбиения) $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \bigcap_{i=1}^p \overline{M}_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \overline{M}_k$. Тогда

$$\Gamma(N; D) = \bigcup_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_p) \\ \alpha_1 < \dots < \alpha_p}} \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}.$$

Несжимаемой гранью $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ будем называть грань, определяемую набором $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ таким, что для любого набора $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$, $q > p$, содержащего $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \emptyset$.

Заметим, что по построению $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ является объединением всех $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ таких, что $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ содержится в $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$, поэтому грань $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ является несжимаемой тогда и только тогда, когда она совпадает со своим замыканием $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. Несложно заметить, что (по построению) ограниченная грань совпадает со своим замыканием только в том случае, когда она состоит из одной точки. Основываясь на этом, сформулируем следующее определение: ограниченную несжимаемую грань $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ будем называть *угловой точкой грани* $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, если $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ содержится в $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$.

Замечание 1. Известно [3], что выпуклый компакт в конечномерном пространстве является выпуклой оболочкой своих экстремальных точек. Отсюда следует, что замыкание любой ограниченной грани $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ является выпуклой оболочкой её угловых точек.

Любой луч, принадлежащий замыканию любой грани, будем называть её *угловым лучом*.

Замечание 2. Из [4, с. 11] следует, что замыкание любой неограниченной грани является выпуклой оболочкой некоторого конечного семейства её угловых лучей.

Заметим, что любая точка выпуклой оболочки k лучей вида $l_i = x_i + \lambda_i y_i$ ($\lambda_i \geq 0$) может быть представлена как

$$\sum_{i=1}^k \mu_i (x_i + \lambda_i y_i), \quad \sum_{i=1}^k \mu_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \mu_i \geq 0.$$

Здесь каждый луч l_i определяется точкой x_i и направляющим вектором y_i .

Значение функции $\sigma(x; N, D)$ в каждой точке $x \notin \Gamma(N; D)$ определяет активный режим (подсистему) функционирования переключаемой системы (4), описываемый аффинной системой

$$\dot{x} = (A_i - b_i \theta_i^T) x + v_i - b_i w_i, \quad i \in I. \quad (6)$$

Доопределение значения переключающего сигнала на множестве $\Gamma(N; D)$ зависит от выбора обратной связи (3), которую, по аналогии с работой [1], определим как допустимую, если выполнено следующее

Условие А. Для любой пары $(N, D) \in F$ и любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ такого, что $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \neq \emptyset$, верно, что для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, для которого $n_{\alpha_i \alpha_k} \neq 0$, выполняется неравенство

$$\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} - b_{\alpha_i} w_{\alpha_i} \rangle < 0,$$

где $\bar{A}_{\alpha_i} = A_{\alpha_i} - b_{\alpha_i} \theta^T$.

Как показано в [1], при выполнении условия А можно так доопределить значение переключающего сигнала в каждой точке границы многогранников, что для любого начального условия $x(0)$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ соответствующее решение системы (4) существует и единственно [5, с. 59].

Для каждого разбиения $\sigma \in S(F)$ обозначим через H_σ множество квадратных матриц H порядка m таких, что $h_{ij} = 0$, если $\Gamma_{ij} = \emptyset$ для данного σ , а остальные элементы равны -1 или 1 .

Далее, при фиксированных $\sigma \in S(F)$, управлении u вида (3) и $H \in H_\sigma$ для соответствующей замкнутой системы (4) введём показатель грубости

$$\varepsilon(\sigma, u, H) = \min_{i=1, m} \inf_{x \in \Gamma_i(\sigma)} \varepsilon_i(x),$$

где

$$\varepsilon_i(x) = \min_{j: x \in \bar{\Gamma}_{ij}(\sigma)} \varepsilon_{ij}(x), \quad x \in \Gamma_i(\sigma) = \bar{M}_i(\sigma) \setminus M_i(\sigma),$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = h_{ij} \langle n_{ij}, (A_i - k_i b_i)x + v_i - w_i b_i \rangle, \quad x \in \bar{\Gamma}_{ij}(\sigma), \quad h_{ij} \in \{-1, 1\}.$$

По аналогии с [2] семейство разбиений (5), при некотором фиксированном разбиении σ_0 , будем называть Γ -инвариантным, если выполнено следующее

Условие Б. Если для некоторого набора $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \{1, \dots, m\}$) и некоторого $\kappa^* \in K$ соответствующее множество $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\kappa^*)$ не пусто, то для всех $\kappa \in K$ множества $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\kappa)$ не пусты. И обратно, если для некоторого набора $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \{1, \dots, m\}$) и некоторого $\kappa^* \in K$ соответствующее множество $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\kappa^*)$ пусто, то для всех $\kappa \in K$ множества $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\kappa)$ пусты.

Фактически Γ -инвариантность линейно-параметризованного семейства разбиений (5) означает, что любое разбиение $(N_0, D(\kappa)) \in F_0(\kappa)$ ($\kappa \neq 0$) получается из (N_0, D_0) параллельным переносом его граней с сохранением их конфигурации. Для Γ -инвариантных семейств разбиений выполняется следующее свойство.

Лемма 1. Пусть для переключающего сигнала σ_0 и допустимого управления u при некоторой матрице $H \in H_{\sigma_0}$ выполнено неравенство $\varepsilon(\sigma_0, u, H) > 0$. Тогда если для переключающего сигнала $\sigma \in S(F_0(\kappa))$, где $S(F_0(\kappa))$ является Γ -инвариантным семейством, показатель грубости $\varepsilon(\sigma, u, H) > 0$, то управление u является допустимым для σ .

Доказательство. Из определения показателя грубости можно заметить, что $\varepsilon(\sigma, u, H) > 0$ тогда и только тогда, когда для всех x из любого непустого множества $\bar{\Gamma}_{ij}$ выполняется неравенство $h_{ij} \langle n_{ij}, \bar{A}_i x + v_i - w_i b_i \rangle > 0$, т.е. скалярное произведение $\langle n_{ij}, \bar{A}_i x + v_i - w_i b_i \rangle$ сохраняет знак h_{ij} на $\bar{\Gamma}_{ij}$. По условию для σ_0 управление u является допустимым, а значит, для любой непустой грани $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, для которого $n_{\alpha_i \alpha_k} \neq 0$, выполняется неравенство $\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} - b_{\alpha_i} w_{\alpha_i} \rangle < 0$ или, в терминах показателя грубости, $h_{\alpha_i \alpha_k} = -1$ и $h_{\alpha_i \alpha_j} = 1$ для $\alpha_j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \setminus \{\alpha_i, \alpha_k\}$. Так как σ и σ_0 принадлежат одному Γ -инвариантному семейству, то для них совпадают множества возможных наборов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, отвечающих непустым

граням. Для каждого такого набора существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, для которого $n_{\alpha_i \alpha_k} \neq 0$, $h_{\alpha_i \alpha_k} = -1$ и показатель грубости $\varepsilon(\sigma, u, H) > 0$, значит условие А выполнено для переключающего сигнала $\sigma \in S(F_0(\kappa))$. Лемма доказана.

Замечание 3. Условия леммы 1 обеспечивают также равенства

$$\sigma(\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}; N_0, D(\kappa)) = \sigma_0(\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p})$$

для всех $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \neq \emptyset$.

Аналогично [1] каждому переключающему сигналу $\sigma \in S(F)$ системы (4), замкнутой допустимым управлением (3), сопоставим ориентированный граф дискретных состояний $G(\sigma)$, вершинами которого являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \rightarrow j$ означает существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j . В работе [2] получен критерий существования ребра $i \rightarrow j$ (для произвольных i, j) у графа состояний замкнутой системы, который для систем с положительным показателем грубости может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. Пусть выполнено условие леммы 1, тогда в системе (4) существует траектория, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j тогда и только тогда, когда найдётся набор $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, содержащий i и j , для которого $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \neq \emptyset$, выполнено равенство $\sigma(\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}; N, D) = j$ и $h_{i \alpha_k} = 1$ для всех $k \in \{1, \dots, p\}$ таких, что $n_{i \alpha_k} \neq 0$.

Лемма 2. Пусть выполнено условие леммы 1, тогда $G(\sigma) = G(\sigma_0)$.

Доказательство. Из теоремы 1, леммы 1 и замечания 3 следует, что для каждого сигнала $\sigma \in S(F_0(\kappa))$ наборы вершин и рёбер графов состояний совпадают, откуда и вытекает утверждение леммы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полученное в работе [1] достаточное условие глобальной равномерной устойчивости нулевого решения системы (1), замкнутой статической обратной связью $u = -\theta^T x$, практически без изменений может быть переформулировано для систем, замкнутых обратной связью (3). А именно, верна следующая

Теорема 2. Пусть для системы (4), замкнутой допустимым управлением (3), все матрицы $A_i - b_i \theta^T$ ($i = \overline{1, m}$) не имеют собственных значений на мнимой оси и для любого переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ соответствующий ориентированный граф $G(\sigma)$ слабо-связный и не содержит циклов. Пусть подсистема системы (4) с индексом 1 асимптотически устойчива, а для остальных режимов ($i = \overline{2, m}$) и для любого $\sigma \in S(F)$ выполнены следующие условия:

1) матрица $A_i - b_i \theta^T$ устойчива или область функционирования режима i (многогранник M_i) ограничена;

2) $x_0^i \notin \Gamma(N, D)$, где $x_0^i \equiv (A_i - b_i \theta^T)^{-1} v_i$ — стационарное решение аффинной системы, являющейся i -м режимом переключаемой системы (2);

3) $\sigma(x_0^i; N, D) \neq i$.

Тогда нулевое решение системы (4) глобально равномерно устойчиво.

Итак, рассмотрим систему (4), замкнутую допустимым управлением u при $S(F) = \{\sigma_0\}$ (т.е. множество переключающих сигналов состоит из одного сигнала σ_0). Пусть данная система удовлетворяет теореме 2 и пусть для некоторой матрицы $H_0 \in H_{\sigma_0}$ соответствующий показатель грубости удовлетворяет для некоторого фиксированного ε_0 неравенству

$$\varepsilon(\sigma_0, u, H_0) \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Поставим теперь задачу расширения множества переключающих сигналов (множества соответствующих разбиений): для рассматриваемой замкнутой системы (4) построить линейно-параметризованное семейство разбиений вида (5) со следующими свойствами:

- z1) семейство $S(F_0(\kappa))$ является Γ -инвариантным;
- z2) при всех $i = \overline{2, m}$ выполнены условия $\sigma(x_0^i; N_0, D(\kappa)) \neq i$ и $x_0^i \notin \Gamma(N_0, D(\kappa))$, где $\kappa \in K$, а $x_0^i \equiv (A_i - b_i \theta^T)^{-1} v_i$;
- z3) $0 \in M_1$;
- z4) $\varepsilon(\sigma, u, H_0) \geq \varepsilon_0 > 0$ для всех $\sigma \in S(F_0(\kappa))$.

Можно показать, что нулевое решение замкнутой системы (5) с линейно-параметризованным семейством переключаемых сигналов $S(F_0(\kappa))$, удовлетворяющим свойствам z1)–z4), является глобально равномерно устойчивым. А именно, верна следующая

Теорема 3. Пусть для системы (4) с $S(F) = \{\sigma_0\}$ и допустимым управлением и выполнены условия теоремы 2. Тогда нулевое решение системы (4) с множеством переключающих сигналов $S(F) = S(F_0(\kappa))$, $\kappa \in K$, удовлетворяющим условиям z1)–z4), глобально равномерно устойчиво.

Доказательство. Поскольку для переключающего сигнала σ_0 выполнены условия теоремы 2, то все матрицы $A_i - b_i \theta^T$ ($i = \overline{1, m}$) не имеют собственных значений на мнимой оси. В силу Γ -инвариантности семейства $S(F_0(\kappa))$ и леммы 1 рассматриваемое управление u является допустимым для любого сигнала $\sigma \in S(F_0(\kappa))$ и выполнено условие 1) теоремы 2. В силу условия z2) для любого $\sigma \in S(F_0(\kappa))$ выполнены условия 2), 3) теоремы 2, а в силу условия z4) и леммы 2 имеем равенство $G(\sigma) = G(\sigma_0)$ при всех $\sigma \in S(F_0(\kappa))$. Отсюда следует, что для всех $\sigma \in S(F_0(\kappa))$ выполнены условия теоремы 2. Значит, система (4) с множеством переключающих сигналов $S(F) = S(F_0(\kappa))$ глобально равномерно устойчива. Теорема доказана.

Ниже будет приведён метод построения для замкнутой системы (4) с $S(F) = \{\sigma_0\}$ семейства переключающих сигналов $S(F) = S(F_0(\kappa))$, удовлетворяющего свойствам z1)–z4). Данный метод на основании теоремы 3 гарантирует глобальную равномерную устойчивость рассматриваемой системы с полученным расширенным множеством переключающих сигналов.

3. ОБЕСПЕЧЕНИЕ Γ -ИНВАРИАНТНОСТИ РАСШИРЕНИЯ

Построение Γ -инвариантного линейно-параметризованного семейства разбиений для системы (4) с $S(F) = \{\sigma_0\}$ фактически состоит в определении допустимого параллельного переноса граней разбиения (N_0, D_0) , при котором сохраняется конфигурация получаемых граней в смысле выполнения условия Б, т.е. для любого упорядоченного набора индексов $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$ такого, что $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \{1, \dots, m\}$, $2 \leq p \leq m$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, должно выполняться условие

$$\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\sigma_0) \neq \emptyset \iff \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\sigma) \neq \emptyset \quad \text{для любого } \sigma \in S(F_0(\kappa)).$$

Поскольку каждое разбиение данного семейства имеет вид $(N_0, D(\kappa))$, где

$$D(\kappa) = D_0 + D_1 \kappa_1 + \dots + D_r \kappa_r \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \kappa \in \mathbb{R}^r, \quad D_i \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

необходимо разработать алгоритм построения матриц $D_1, \dots, D_r$, обеспечивающих Γ -инвариантность получаемого семейства.

Итак, предположим, что для разбиения (N_0, D_0) существует непустая грань $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. По построению она вложена в пересечение плоскостей

$$\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \subset \bigcap_{i < j, i, j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}} P_{ij}$$

и, следовательно, данное пересечение не пусто. Наличие такого непустого пересечения приводит к возникновению ограничений на параллельный перенос плоскостей, а именно: каждая плоскость P_{ij} с учётом переноса описывается уравнением

$$\langle n_{ij}, x \rangle = d_{ij}^0 + \mu_{ij},$$

где величина μ_{ij} характеризует величину параллельного сдвига соответствующей плоскости. Существование грани $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ после параллельного переноса плоскостей эквивалентно совместности системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \langle n_{\alpha_1 \alpha_2}, x \rangle = d_{\alpha_1 \alpha_2}^0 + \mu_{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \dots, \quad \langle n_{\alpha_1 \alpha_p}, x \rangle = d_{\alpha_1 \alpha_p}^0 + \mu_{\alpha_1 \alpha_p}, \quad \dots \\ \dots, \quad \langle n_{\alpha_{p-1} \alpha_p}, x \rangle = d_{\alpha_{p-1} \alpha_p}^0 + \mu_{\alpha_{p-1} \alpha_p} \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} n_{\alpha_1 \alpha_2}^T \\ \vdots \\ n_{\alpha_1 \alpha_p}^T \\ \vdots \\ n_{\alpha_{p-1} \alpha_p}^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} d_{\alpha_1 \alpha_2}^0 \\ \vdots \\ d_{\alpha_1 \alpha_p}^0 \\ \vdots \\ d_{\alpha_{p-1} \alpha_p}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{\alpha_1 \alpha_2} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_1 \alpha_p} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_{p-1} \alpha_p} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Совместность (7) нужно исследовать при различных μ_{ij} . При этом, так как по построению $\langle n_{ij}, x \rangle = d_{ij}^0$, её совместность эквивалентна совместности следующей системы:

$$\begin{pmatrix} n_{\alpha_1 \alpha_2}^T \\ \vdots \\ n_{\alpha_1 \alpha_p}^T \\ \vdots \\ n_{\alpha_{p-1} \alpha_p}^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \mu_{\alpha_1 \alpha_2} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_1 \alpha_p} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_{p-1} \alpha_p} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ввиду утверждения теоремы Фредгольма [6, с. 313] система (8) совместна тогда и только тогда, когда её правая часть ортогональна всем решениям сопряжённой системы. Итак, пусть $N_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = (n_{\alpha_1 \alpha_2} \dots n_{\alpha_1 \alpha_p} \dots n_{\alpha_{p-1} \alpha_p}) \in \mathbb{R}^{n \times p(p-1)/2}$. Обозначим через $Y_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ фундаментальную систему решений (ФСР) системы

$$N_{\alpha_1 \dots \alpha_p} y = 0.$$

Таким образом, ограничение на взаимное изменение величин μ_{ij} можно выразить системой уравнений

$$Y_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^T \begin{pmatrix} \mu_{\alpha_1 \alpha_2} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_1 \alpha_p} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_{p-1} \alpha_p} \end{pmatrix} = 0.$$

Получив аналогичные системы из условия существования каждой непустой грани разбиения (N_0, D_0) , можно записать получившиеся ограничения в виде единой системы

$$Y^T \mu = 0, \quad (9)$$

где μ — вектор-столбец из всех рассматриваемых коэффициентов μ_{ij} .

Пусть ФСР системы (9) содержит r векторов $D'_1, \dots, D'_r$, т.е. её общее решение можно представить в виде

$$\mu = c_1 D'_1 + \dots + c_r D'_r. \quad (10)$$

Построим по этой ФСР матрицы $D_1, \dots, D_r$ следующим образом: в матрице D_1 размещаем элементы из D'_1 в соответствии с индексами i, j у элементов μ в левой части формулы (10), остальные элементы полагаем нулями и достраиваем матрицу до кососимметричной. Таким образом, для каждого разбиения из семейства $F_0(\kappa) = (N_0, D(\kappa))$, где

$$D(\kappa) = D_0 + \sum_{i=1}^r \kappa_i D_i, \quad \kappa \in \mathbb{R}^r,$$

будет верна первая часть условия Б.

Найдём теперь ограничения на κ , при которых выполняется вторая часть условия Б. Итак, пусть для некоторого набора $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$ при $\kappa = 0$ выполнено $\bar{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \emptyset$. Определим условия на κ , при которых $\bar{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\kappa) = \emptyset$.

Если $\bar{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\kappa) = \emptyset$, то по определению несовместна система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} n_{\alpha_1 \alpha_2}^T \\ \vdots \\ n_{\alpha_1 \alpha_p}^T \\ \vdots \\ n_{\alpha_{p-1} \alpha_p}^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} d_{\alpha_1 \alpha_2}^0 \\ \vdots \\ d_{\alpha_1 \alpha_p}^0 \\ \vdots \\ d_{\alpha_{p-1} \alpha_p}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{\alpha_1 \alpha_2}^1 & \cdots & d_{\alpha_1 \alpha_2}^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{\alpha_1 \alpha_p}^1 & \cdots & d_{\alpha_1 \alpha_p}^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{\alpha_{p-1} \alpha_p}^1 & \cdots & d_{\alpha_{p-1} \alpha_p}^r \end{pmatrix} \kappa \quad (11)$$

или в матричной форме

$$N_{\alpha_1 \dots \alpha_p} x = d_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^0 + \hat{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \kappa.$$

Пусть Y — матрица, составленная по столбцам из ФСР однородной системы

$$N_{\alpha_1 \dots \alpha_p} x = 0.$$

По теореме Фредгольма система (11) совместна тогда и только тогда, когда

$$Y^T (d_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^0 + \hat{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \kappa) = 0,$$

т.е. когда κ удовлетворяет уравнению

$$Y^T \hat{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \kappa = -Y^T d_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^0. \quad (12)$$

Обозначим через $L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ линейное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^r$, представляющее множество решений системы (12), и рассмотрим объединение $L = \bigcup L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ по всем наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, соответствующим пустым граням разбиения (N_0, D_0) . Поскольку для выполнения второй части условия Б требуется несовместность системы (11), то, учитывая полученные выше условия для выполнения первой части условия Б, искомое Γ -инвариантное семейство разбиений можем представить в следующем виде:

$$F_0(\kappa) = (N_0, D(\kappa)), \quad D(\kappa) = D_0 + \sum_{i=1}^r \kappa_i D_i, \quad \kappa \in K = \mathbb{R}^r \setminus L. \quad (13)$$

4. ИНВАРИАНТНОСТЬ РАСПОЛОЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК РЕЖИМОВ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Нетрудно заметить, что выполнение условия z2) для семейства (13) эквивалентно выполнению для каждого $\kappa \in K$ и каждой точки x_0^i следующей совокупности линейных неравенств:

$$\langle n_{i1}, x_0^i \rangle > d_{i1}(\kappa) = d_{i1}^0 + (d_{i1}^1 \cdots d_{i1}^l) \kappa, \quad \dots, \quad \langle n_{im}, x_0^i \rangle > d_{im}(\kappa) = d_{im}^0 + (d_{im}^1 \cdots d_{im}^l) \kappa$$

или

$$(d_{i1}^1 \cdots d_{i1}^l) \kappa < \langle n_{i1}, x_0^i \rangle - d_{i1}^0, \quad \dots, \quad (d_{im}^1 \cdots d_{im}^l) \kappa < \langle n_{im}, x_0^i \rangle - d_{im}^0. \quad (14)$$

Обозначим через E_i ($i = \overline{1, m}$) множество решений i -го неравенства совокупности (14). Тогда получим дополнительное ограничение для множества K вида

$$K = \mathbb{R}^r \setminus (L \cup E), \quad E = \bigcup_{i=1}^m E_i.$$

В свою очередь, условие z3), в соответствии с определением принадлежности точки многограннику M_1 , выражается системой неравенств $d_{1i}(\kappa) > 0$, $i = \overline{1, m}$, или системой в координатной форме относительно κ :

$$(d_{11}^1 \cdots d_{11}^r) \kappa > -d_{11}^0, \quad \dots, \quad (d_{m1}^1 \cdots d_{m1}^r) \kappa > -d_{m1}^0.$$

Обозначая через T множество решений данной системы, ограничения на множество K запишем в виде

$$K = T \setminus (L \cup E), \quad E = \bigcup_{i=1}^m E_i. \quad (15)$$

5. ПОКАЗАТЕЛЬ ГРУБОСТИ РАСШИРЯЕМОГО СЕМЕЙСТВА РАЗБИЕНИЙ

Перейдём теперь к обеспечению условия z4). Согласно определению показателя грубости верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma(\kappa)) \geq \varepsilon_0 &\iff \varepsilon_{ij}(x) \geq \varepsilon_0, \quad x \in \bar{\Gamma}_{ij}(\kappa), \quad i, j = \overline{1, m}, \\ \varepsilon_{ij}(x) \geq \varepsilon_0, \quad x \in \bar{\Gamma}_{ij}(\kappa) &\iff h_{ij} \langle n_{ij}, \bar{A}_i x + v_i - w_i b_i \rangle \geq \varepsilon_0, \quad x \in \bar{\Gamma}_{ij}(\kappa). \end{aligned}$$

Ввиду замечаний 1 и 2 замыкание грани $\bar{\Gamma}_{ij}(\kappa)$ является выпуклой оболочкой её угловых точек и угловых лучей, поэтому выполнение неравенства

$$h_{ij} \langle n_{ij}, \bar{A}_i x + v_i - w_i b_i \rangle \geq \varepsilon_0 \quad (16)$$

для всех точек $\bar{\Gamma}_{ij}(\kappa)$ эквивалентно выполнению данного неравенства для всех угловых точек данной грани и на её угловых лучах. Обозначим через $x_l(\kappa)$ угловые точки грани $\bar{\Gamma}_{ij}(\kappa)$.

Угловая точка $x_l(\kappa)$, в свою очередь, однозначно определяется как пересечение n некоторых плоскостей $P_{ij}(\kappa)$. Пусть эти плоскости имеют номера $(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)$. Тогда $x_l(\kappa)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} n_{i_1 j_1}^T \\ \vdots \\ n_{i_n j_n}^T \end{pmatrix} x_l(\kappa) = \begin{pmatrix} d_{i_1 j_1}^0 \\ \vdots \\ d_{i_n j_n}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{i_1 j_1}^1 & \cdots & d_{i_1 j_1}^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i_n j_n}^1 & \cdots & d_{i_n j_n}^r \end{pmatrix} \kappa.$$

Обозначая матрицу нормалей через $\hat{N}_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а матрицу правых частей через $\hat{D}_l \in \mathbb{R}^{n \times r}$, перепишем данную систему в матричной форме:

$$x_l = \hat{N}_l^{-1}(\hat{d}_l^0 + \hat{D}_l \kappa).$$

Тогда неравенство (16) для угловой точки принимает вид

$$h_{ij} \langle n_{ij}, \overline{A_i} \hat{N}_l^{-1}(\hat{d}_l^0 + \hat{D}_l \kappa) + v_i - w_i b_i \rangle \geq \varepsilon_0. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь угловые лучи. Заметим, что если грань имеет угловые точки, то семейство угловых лучей всегда может быть выбрано таким образом, что началом лучей являются угловые точки, более того, каждый луч будет замыканием некоторой грани $\bar{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, которая вложена в прямую, являющуюся пересечением плоскостей $\bigcap_{i < j, i, j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}} P_{ij}$. В таком случае угловой луч можно описать как $x_l(\kappa) + \lambda y_l$, $\lambda \geq 0$, где $x_l(\kappa)$ — угловая точка, y_l — направляющий вектор углового луча. При этом направляющий вектор однозначно определяется набором нормалей к упомянутым плоскостям и не зависит от κ . В результате неравенство (16) для углового луча принимает вид

$$h_{ij} \langle n_{ij}, \overline{A_i}(x_l(\kappa) + \lambda y_l) + v_i - w_i b_i \rangle \geq \varepsilon_0$$

или

$$h_{ij} \langle n_{ij}, \overline{A_i} x_l(\kappa) + v_i - w_i b_i \rangle + h_{ij} \langle n_{ij}, \overline{A_i} \lambda y_l \rangle \geq \varepsilon_0,$$

где первое слагаемое больше или равно ε_0 в силу условия (17) для отдельной угловой точки, поэтому

$$h_{ij} \langle n_{ij}, \overline{A_i} y_l \rangle \geq 0.$$

Данное условие не зависит от κ и выполнено в силу условия А для σ_0 , т.е. условие z4) обеспечивается только выполнением неравенств (17). Следовательно, итоговая система неравенств относительно κ , обеспечивающая условие z4), принимает вид

$$\langle h_{ij} \hat{D}_l^T (\hat{N}_l^{-1})^T \overline{A_i}^T n_{ij}, \kappa \rangle \geq \varepsilon_0 - \langle n_{ij}, \overline{A_i} \hat{N}_l^{-1} \hat{d}_l^0 + v_i - w_i b_i \rangle, \quad i, j \in \overline{1, m}, \quad n_{ij} \neq 0, \quad l \in \overline{1, r}. \quad (18)$$

Остаётся отдельно рассмотреть случай, когда неограниченная грань не содержит угловых точек, а значит, целиком содержит некоторую прямую. Построим произвольную гиперплоскость $\hat{P}$, пересекающую данную грань ортогонально данной прямой. Теперь рассматриваемую грань можно представить как объединение двух выпуклых множеств, лежащих по разные стороны по отношению к данной гиперплоскости. Описанную процедуру следует повторять для каждого из полученных множеств до тех пор, пока у всех новых множеств не появятся угловые точки. В результате исходную грань можно будет описать как выпуклую оболочку всех угловых точек и угловых лучей построенных множеств (очевидно, что такое описание не единственно) и, таким образом, данный случай сводится к уже разобранным выше.

Обозначив через Q множество решений системы линейных неравенств (18), с учётом (15) получим искомое множество K в следующем виде:

$$K = (Q \cap T) \setminus (L \cup E). \quad (19)$$

Таким образом, разработан метод расширения множества переключающих сигналов (множества соответствующих разбиений) для замкнутой системы (4), позволяющий построить линейно-параметризованное семейство разбиений вида (5), где множество K можно получить по формуле (19), численно решая соответствующие системы линейных уравнений и неравенств.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурсов, А.С. Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов / А.С. Фурсов, П.А. Крылов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 554–562.
2. Фурсов, А.С. О построении графа дискретных состояний переключаемой аффинной системы / А.С. Фурсов, П.А. Крылов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1541–1549.
3. Krein, M. On extreme points of regular convex sets / M. Krein, D. Milman // *Studia Mathematica*. — 1940. — № 9. — Р. 133–138.
4. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. — М. : Наука, 1968. — 488 с.
5. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 224 с.
6. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности “Прикладная математика” / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. — 2-е изд. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2002. — 320 с.

ON THE EXPANSION OF THE STATE SPACE PARTITIONS SET
FOR A STABLE SWITCHED AFFINE SYSTEM

© 2024 / A. S. Fursov¹, P. A. Krylov²

¹*Department of Mathematics, School of Science, Hangzhou Dianzi University,
Hangzhou, Zhejiang, China*

^{1,2}*Lomonosov Moscow State University, Russia*

¹*Kharkevich Institute for Information Transmission Problems of RAS, Moscow, Russia*
e-mail: ¹fursov@cs.msu.ru, ²pavel@leftsystem.ru

For a switched affine system closed by stabilizing static feedback, a method is presented for constructing a parametric family of partitions of the state space, relative to which this closed system remains stable.

Keywords: switched affine system, switching signal, stability, feedback, stabilization

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2019-1621.

REFERENCES

1. Fursov, A.S. and Krylov, P.A., On the stability of a switched affine system for a class of switching signals, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 563–571.
2. Fursov, A.S. and Krylov, P.A., On the construction of the graph of discrete states of a switched affine system, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 11, pp. 1547–1556.

3. Krein, M. and Milman, D., On extreme points of regular convex sets, *Studia Mathematica*, 1940, no. 9, pp. 133–138.
4. Chernikov, S.N., *Lineinye neravenstva* (Linear Inequalities), Moscow: Nauka, 1968.
5. Filippov, A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoï chast'yu* (Differential Equations with a Discontinuous Right Side), Moscow: Nauka, 1985.
6. Il'in, V.A. and Kim, G.D., *Lineinaya algebra i analiticheskaya geometriya* (Linear Algebra and Analytic Geometry), Moscow: MSU Press, 2002.