

УДК 517.977.5

СЕМЕЙСТВО ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СПИРАЛЕЙ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ РАЗМЕРНОСТИ 8 С УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ КРУГА

© 2024 г. М. И. Ронжина¹, Л. А. Манита²¹Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина,
г. Москва²Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, г. Москва
e-mail: ¹ronzhina.m@gubkin.ru, ²lmanita@hse.ru

Поступила в редакцию 27.03.2024 г., после доработки 05.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Изучена окрестность особого режима второго порядка в задачах оптимального управления, аффинных по управлению из круга. Рассмотрен случай, когда гамильтонова система имеет размерность 8 и является малым (в смысле действия группы Фуллера) возмущением гамильтоновой системы обобщённой задачи Фуллера с управлением из круга. Показано, что для такого класса задач существуют экстремали в виде логарифмических спиралей, которые приходят на особую экстремаль второго порядка за конечное время, при этом управление совершает бесконечное число оборотов вдоль окружности.

Ключевые слова: двумерное управление из круга, особая экстремаль, раздутие особенно-сти, логарифмическая спираль, гамильтонова система принципа максимума Понтрягина

DOI: 10.31857/S0374064124110085, EDN: JDYXQP

ВВЕДЕНИЕ

Экстремали в виде логарифмических спиралей могут возникать в окрестности особых экстремалей второго порядка в аффинных по ограниченному управлению задачах. Для задач, аффинных по скалярному управлению u , гамильтониан имеет вид

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) + uH_1(q, p),$$

где q и p — фазовая и сопряжённая переменные соответственно. Говорят, что экстремаль $(q(t), p(t))$ является *особой* на непустом промежутке (t_1, t_2) , если $H_1(q(t), p(t)) = 0$ для всех $t \in (t_1, t_2)$. Особая экстремаль *второго* порядка задаётся условиями

$$\begin{aligned} H_1 &= 0, \quad (\text{ad } H_k)H_1 = 0, \quad \text{ad } H_l(\text{ad } H_k)H_1 = 0, \\ \text{ad } H_j(\text{ad } H_l)(\text{ad } H_k)H_1 &= 0, \quad \text{ad } H_1(\text{ad } H_0)^3 H_1 \neq 0, \quad j, l, k = 0, 1. \end{aligned}$$

Если эти условия выполнены в окрестности особой экстремали, то экстремаль имеет глобальный второй порядок, а если только в точках самой экстремали, то локальный второй порядок. Здесь $(\text{ad } F)G = \{F, G\}$ — скобка Пуассона функций F и G . На оптимальной особой экстремали второго порядка также должно быть выполнено условие Келли (в строгой форме) [1]

$$\text{ad } H_1(\text{ad } H_0)^3 H_1 < 0.$$

Согласно теореме Келли–Коппа–Мойера [2] если особая экстремаль имеет глобальный второй порядок и выполнено строгое условие Келли, то любая неособая экстремаль, выходящая на особую, должна быть *четтеринг-экстремалью*, т.е. экстремалью с бесконечным числом точек переключения управления за конечное время.

Было показано, что для задач, аффинных по ограниченному скалярному управлению, для которых решение содержит особые экстремали второго порядка, структура решений определяется оптимальным синтезом в следующей модельной задаче (задача Фуллера) [3, 4]:

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = y^0, \quad x, y, u \in \mathbb{R}.$$

Здесь начало координат является единственной особой экстремалью и имеет второй глобальный порядок. Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет размерность 4 и сводится к виду

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -u, \quad u = \operatorname{sgn} z_1. \quad (1)$$

В задаче Фуллера построен полный оптимальный синтез, содержащий четтеринг-траектории и особую экстремаль второго порядка (см., например, [3]). Оптимальные четтеринг-траектории попадают в начало координат за конечное время, при этом управления на них совершают бесконечное число переключений с 1 на -1 (рис. 1).

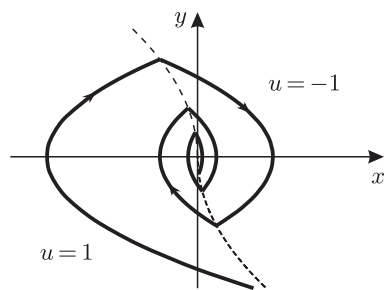


Рис. 1. Оптимальные четтеринг-траектории

В работах [3; 5, гл. 3] была доказана фундаментальная теорема о расслоении в окрестности особой экстремали второго порядка (в том числе локального), дающая полное описание оптимального синтеза, и показано, что фазовое пространство расслаивается над многообразием особых траекторий на двумерные слои, заполненные оптимальными четтеринг-траекториями, аналогичными решениям в модельной задаче.

Теорема о расслоении применима в случае, когда гамильтонова система задачи в окрестности особой экстремали второго порядка сводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + f_1(z, w, u), & \dot{z}_2 &= z_3 + f_2(z, w, u), & \dot{z}_3 &= z_4 + f_3(z, w, u), \\ \dot{z}_4 &= \alpha(w) + \beta(w)u + f_4(z, w, u), & \dot{w} &= F(z, w, u), & u &= \operatorname{sgn} z_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функции $f_i(z, w, u)$ по сравнению с z_{i+1} имеют малый порядок относительно действия группы Фуллера $g_\lambda(z) = (\lambda^4 z_1, \lambda^3 z_2, \lambda^2 z_3, \lambda z_4)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|f_i(g_\lambda(z), w, u)|}{\lambda^{5-i}} < C, \quad i = \overline{1, 4},$$

где C — некоторая положительная константа. При этом функции $\alpha(w)$ и $\beta(w)$ таковы, что выполнены условие Келли в строгой форме и ограничение на управление $|u| \leq 1$. Заметим, что уравнения на переменные z системы (2) являются возмущением гамильтоновой системы (1) задачи Фуллера. Цель данной работы — показать, что результаты такого же типа можно получить и в случае векторного управления.

Рассмотрим задачу оптимального управления, аффинную по *двумерному* управлению. Соответствующий гамильтониан можно записать в виде

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) + u_1 H_1(q, p) + u_2 H_2(q, p),$$

где q и p — фазовая и сопряжённая переменные соответственно. Будем называть (q_s, p_s) *особой экстремалью второго порядка*, если:

1) функции H_i , $(\text{ad } H_k)H_i$, $\text{ad } H_l(\text{ad } H_k)H_i$, $\text{ad } H_j(\text{ad } H_l)(\text{ad } H_k)H_i$, $i = 1, 2$, $j, k, l = \overline{0, 2}$, обращаются в нуль в точках (q_s, p_s) , набор их дифференциалов в точках (q_s, p_s) имеет постоянный ранг;

2) билинейная форма $B_{ij} = \text{ad } H_i(\text{ad } H_0)^3 H_j|_{(q_s, p_s)}$, $i, j = 1, 2$, имеет ранг 2, симметрическая и отрицательно определённая;

3) остальные (независимые от перечисленных) скобки пятого порядка от функций H_j , $j = \overline{0, 2}$, обращаются в нуль в точках (q_s, p_s) .

Модельной задачей с двумерным управлением и особой экстремалью второго порядка будем называть обобщение задачи Фуллера на случай управления из круга:

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad \|u\| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^2$. В задаче (3), так же как и в задаче Фуллера, начало координат является единственной особой экстремалью и имеет второй глобальный порядок. Доказано, что оптимальная траектория задачи (3) попадает в начало координат за конечное время [5, гл. 7]. Но, в отличие от задачи Фуллера, полный оптимальный синтез в (3) не известен. Известны два семейства решений: логарифмические спирали (рис. 2) и четтеринг-траектории [5, гл. 7; 6].

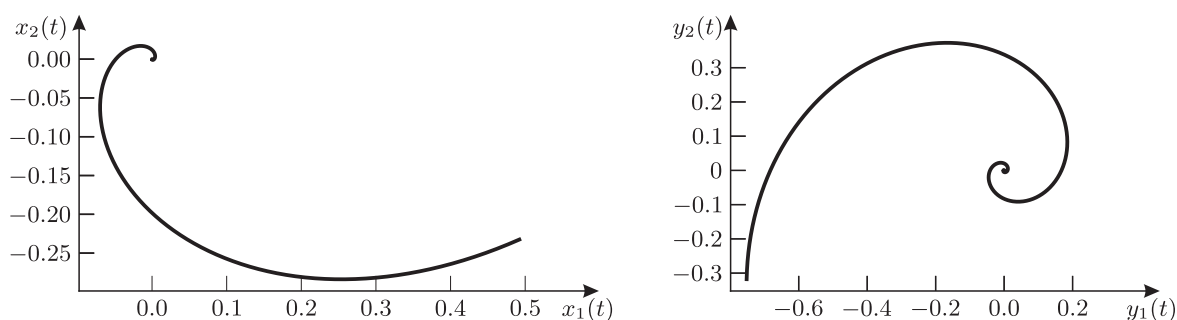


Рис. 2. Логарифмические спирали в модельной задаче

Для задач, аффинных по управлению из круга, с гамильтоновыми системами достаточно большой размерности (32 и выше) доказано [7, 8], что в окрестности особой экстремали второго порядка существует семейство экстремалей в форме логарифмических спиралей, которые попадают на особую экстремаль за конечное время, при этом управление совершает счётное число оборотов по границе круга. В случае когда размерность гамильтоновой системы меньше 32, решения в виде логарифмических спиралей найдены только для некоторых конкретных задач оптимального управления: стабилизация перевёрнутого сферического маятника [9], управление балкой Тимошенко [10], управление космической ракетой на орбите [11].

В настоящей работе исследуется окрестность особого режима второго порядка в задаче, аффинной по управлению из круга, для которой гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет ту же размерность 8, что и гамильтонова система модельной задачи (3). Аналогично случаю со скалярным управлением рассматриваемая задача является малым возмущением задачи (3) относительно действия группы Фуллера. Будет показано, что в возмущённой задаче сохраняется семейство экстремалей в виде логарифмических спиралей. Непосредственно применить результаты работ [7, 8] здесь нельзя, тем не менее можно адаптировать разработанный подход и к данной задаче.

Изложение построено следующим образом. В п. 1 описывается семейство логарифмических спиралей в модельной задаче (3) с управлением из круга. В п. 2 рассматривается задача, аффинная по управлению из круга, гамильтонова система которой является малым возмущением гамильтоновой системы модельной задачи относительно действия группы Фуллера; доказывается теорема о существовании семейства решений гамильтоновой системы в виде логарифмических спиралей.

1. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ В МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ КРУГА

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина задачи (3) имеет вид

$$\dot{\psi} = -\phi, \quad \dot{\phi} = x, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u = \psi / \|\psi\|, \quad (4)$$

где ϕ и ψ — сопряжённые переменные.

Введём новые координаты $z_i \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1, 4}$, сводящие гамильтонову систему (4) модельной задачи к удобному виду

$$z_{1i} = H_i, \quad z_{2i} = (\text{ad} H_0) H_i, \quad z_{3i} = (\text{ad} H_0)^2 H_i, \quad z_{4i} = (\text{ad} H_0)^3 H_i, \quad i = 1, 2,$$

где

$$H_0 = -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle + \langle \phi, y \rangle, \quad H_1 = \psi_1, \quad H_2 = \psi_2.$$

В координатах z система (4) записывается как

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -u, \quad u = z_1 / \|z_1\|. \quad (5)$$

Система (5) обладает решениями в форме логарифмических спиралей [5, 6], которые могут быть записаны следующим образом:

$$z_m^*(t) = -A_{m-1}(T^* - t)^{5-m} e^{i\alpha \ln |T^* - t|}, \quad u^*(t) = e^{i\alpha \ln |T^* - t|}, \quad 0 \leq t < T^*, \quad m = \overline{1, 4}. \quad (6)$$

Здесь i — мнимая единица; $A_0 = -1/126$, $A_{l+1} = -A_l(4 - l + i\alpha)$, $l = 0, 1, 2$, угол между $z_3(0)$ и $z_4(0)$ равен $2 \arctg \alpha$, $\alpha^2 = 5$, и $|z_4(0)|^2 = (\sqrt{6}/2)|z_3(0)|$. Траектории $z_m^*(t)$ попадают в нуль за конечное время T^* , и оптимальное управление $u^*(t)$ совершает бесконечное число оборотов вдоль окружности S^1 .

2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ В ВОЗМУЩЁННОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим задачу оптимального управления, аффинную по управлению из круга, гамильтонова система которой является малым возмущением гамильтоновой системы модельной задачи относительно действия группы Фуллера:

$$\int_0^\infty (g_0(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x)) dx \rightarrow \inf_u, \quad \dot{x} = h_0(x) + u_1 h_1(x) + u_2 h_2(x), \quad u = (u_1, u_2): \|u\| \leq 1. \quad (7)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^4$, $x(0) = x_0$, $g_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $i = 0, 1, 2$. Функции g_i и h_i предполагаются достаточно гладкими. Допустимые управления — измеримые функции, допустимые траектории абсолютно непрерывны. Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет размерность 8 и записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \nabla_\psi (H_0(x, \psi) + u_1 H_1(x, \psi) + u_2 H_2(x, \psi)), \quad u = (H_1, H_2) / \sqrt{H_1^2 + H_2^2}, \\ \dot{\psi} &= -\nabla_x (H_0(x, \psi) + u_1 H_1(x, \psi) + u_2 H_2(x, \psi)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\psi \in (\mathbb{R}^4)^*$ — сопряжённые переменные, $H_i(x, \psi) = \psi h_i(x) - \lambda_0 g_i(x)$, $i = 0, 1, 2$.

Пусть система (8) имеет особую экстремаль второго порядка. Предположим, что в окрестности особой экстремали существует невырожденная замена переменных $(x, \psi) \rightarrow z$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, в результате которой систему (8) можно записать как

$$\dot{z}_1 = z_2 + f_1(z, u), \quad \dot{z}_2 = z_3 + f_2(z, u), \quad \dot{z}_3 = z_4 + f_3(z, u), \quad \dot{z}_4 = \beta(z)u + f_4(z, u), \quad u = z_1/\|z_1\|, \quad (9)$$

здесь функции $f_i: \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1, 4}$, малы относительно действия группы Фуллера:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|f_i(g_\lambda(z), u)\|}{\lambda^{5-i}} < C, \quad \text{т.е.} \quad f_i(g_\lambda(z), u) = (\lambda^{5-i} + o(\lambda^{5-i}))F_i(z, u) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 0,$$

$F_i: \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — ограниченные вектор-функции; матрица $\beta(z) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\beta(g_\lambda(z)) = B + (\lambda + o(\lambda))b(z), \quad \lambda \rightarrow 0,$$

где $B = \beta(0)$ — симметричная отрицательно определённая матрица, $b(z)$ — ограниченная матрица. Если выполнены сформулированные выше условия, то верна следующая

Теорема. В достаточно малой окрестности начала координат существует семейство решений системы (9) в форме логарифмических спиралей:

$$z_m(t) = k_m(t) (T-t)^{5-m} e^{i\alpha \ln |T-t|} e^{i\varphi_m(t)}, \quad m = \overline{1, 4},$$

$$u(t) = e^{i\alpha \ln |T-t|} e^{i\varphi_0(t)}, \quad t \leq T,$$

$$z_m(t) = u(t) = 0, \quad t \geq T,$$

и все их возможные повороты. Здесь $T > 0$, $\alpha = \pm\sqrt{5}$, функции $k_m(t)$, $\varphi_m(t)$ и $\varphi_0(t)$ ограничены.

Схема доказательства.

1. Для гамильтоновой системы задачи (7) проводится разрешение особенности (раздутие особенности) в окрестности особой экстремали второго порядка.

2. Показывается, что существует инвариантное подпространство, на котором раздутие системы для задачи (7) совпадает с раздутием системы для задачи (3).

3. Доказывается, что периодическое решение для задачи (3) является гиперболическим циклом для задачи (7).

4. Проводится обратный ход процедуры раздутия особенности.

Заметим, что схема доказательства совпадает с этапами вывода аналогичного результата для случая большой размерности. Однако сами доказательства существенно различаются.

Доказательство. Шаг 1 (раздутие особенности). Раздутием особенности в начале координат для системы (9) назовём отображение $B: z \mapsto (\mu, \tilde{z})$:

$$\tilde{z}_4 = \frac{z_4}{\mu}, \quad \tilde{z}_3 = \frac{z_3}{\mu^2}, \quad \tilde{z}_2 = \frac{z_2}{\mu^3}, \quad \tilde{z}_1 = \frac{z_1}{\mu^4},$$

$$4\mu^{24} = \frac{\langle -B^{-1}z_4, z_4 \rangle^{12}}{|A_3|^{24}} + \frac{\langle -B^{-1}z_3, z_3 \rangle^6}{|A_2|^{12}} + \frac{\langle -B^{-1}z_2, z_2 \rangle^4}{|A_1|^8} + \frac{\langle -B^{-1}z_1, z_1 \rangle^3}{|A_0|^6}, \quad (10)$$

где $\mu \in \mathbb{R}_+$, A_j , $j = \overline{0, 3}$, определены в (6), $\tilde{z} \in \mathbb{R}^8$ лежит на сфере

$$S = \left\{ \frac{\langle -B^{-1}\tilde{z}_4, \tilde{z}_4 \rangle^{12}}{|A_3|^{24}} + \frac{\langle -B^{-1}\tilde{z}_3, \tilde{z}_3 \rangle^6}{|A_2|^{12}} + \frac{\langle -B^{-1}\tilde{z}_2, \tilde{z}_2 \rangle^4}{|A_1|^8} + \frac{\langle -B^{-1}\tilde{z}_1, \tilde{z}_1 \rangle^3}{|A_0|^6} = 4 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что замена (10) индуцирована действием группы Фуллера g_λ с параметром $\lambda = 1/\mu$: $\tilde{z} = g_{1/\mu}(z)$, что эквивалентно $z = g_\mu(\tilde{z})$, и сопоставляет точке $z = 0$ сферу S .

Система (9) обыкновенных дифференциальных уравнений в координатах $(\mu, \tilde{z})$ принимает вид

$$\begin{aligned}\mu' &= \mu \mathcal{M}, \quad u = \tilde{z}_1 / \|\tilde{z}_1\|, \quad \tilde{z}'_1 = \tilde{z}_2 - 4\tilde{z}_1 \mathcal{M} + f_1(g_\mu(\tilde{z}), u) / \mu^3, \quad \tilde{z}'_2 = \tilde{z}_3 - 3\tilde{z}_2 \mathcal{M} + f_2(g_\mu(\tilde{z}), u) / \mu^2, \\ \tilde{z}'_3 &= \tilde{z}_4 - 2\tilde{z}_3 \mathcal{M} + f_3(g_\mu(\tilde{z}), u) / \mu, \quad \tilde{z}'_4 = \beta(g_\mu(\tilde{z}))u - \tilde{z}_4 \mathcal{M} + f_4(g_\mu(\tilde{z}), u),\end{aligned}\quad (11)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной s :

$$ds = \frac{1}{\mu} dt, \quad (12)$$

а $\mathcal{M}$ задаётся условием

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mu, \tilde{z}) &= \frac{1}{96} \left(\frac{24}{|A_3|^{24}} \langle B^{-1} \tilde{z}_4, \tilde{z}_4 \rangle^{11} \left\langle B^{-1} \tilde{z}_4, \beta(g_\mu(\tilde{z})) \frac{\tilde{z}_1}{\|\tilde{z}_1\|} + f_4(g_\mu(\tilde{z}), u) \right\rangle + \right. \\ &+ \frac{12}{|A_2|^{12}} \langle B^{-1} \tilde{z}_3, \tilde{z}_3 \rangle^5 \left\langle B^{-1} \tilde{z}_3, \tilde{z}_4 + \frac{f_3(g_\mu(\tilde{z}), u)}{\mu} \right\rangle + \frac{8}{|A_1|^8} \langle B^{-1} \tilde{z}_2, \tilde{z}_2 \rangle^3 \left\langle B^{-1} \tilde{z}_2, \tilde{z}_3 + \frac{f_2(g_\mu(\tilde{z}), u)}{\mu^2} \right\rangle - \\ &\left. - \frac{6}{|A_0|^6} \langle B^{-1} \tilde{z}_1, \tilde{z}_1 \rangle^2 \left\langle B^{-1} \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 + \frac{f_1(g_\mu(\tilde{z}), u)}{\mu^3} \right\rangle \right).\end{aligned}$$

Решения системы (11) лежат на цилиндре $Q = S \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$.

Шаг 2 (инвариантное подпространство решений). Опишем решения (11) на нулевом сечении цилиндра $Q_0 = Q \cap \{\mu = 0\}$. Для этого сначала применим разложение Тейлора к правой части (11) в окрестности нулевого сечения Q_0 :

$$\begin{aligned}\mu' &= \mu \mathcal{M}, \quad u = \tilde{z}_1 / \|\tilde{z}_1\|, \quad \tilde{z}'_1 = \tilde{z}_2 - 4\tilde{z}_1 \mathcal{M} + (\mu + o(\mu)) F_1(\tilde{z}, u), \quad \tilde{z}'_2 = \tilde{z}_3 - 3\tilde{z}_2 \mathcal{M} + (\mu + o(\mu)) F_2(\tilde{z}, u), \\ \tilde{z}'_3 &= \tilde{z}_4 - 2\tilde{z}_3 \mathcal{M} + (\mu + o(\mu)) F_3(\tilde{z}, u), \quad \tilde{z}'_4 = Bu - \tilde{z}_4 \mathcal{M} + (\mu + o(\mu)) F_4(\tilde{z}, u),\end{aligned}\quad (13)$$

где $\mathcal{M}(\mu, \tilde{z}) = \mathcal{M}_0(\tilde{z}) + \mu \mathcal{M}_1(\tilde{z})$,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(\tilde{z}) &= \frac{1}{96} \left(\frac{24}{|A_3|^{24}} \langle B^{-1} \tilde{z}_4, \tilde{z}_4 \rangle^{11} \left\langle \tilde{z}_4, \frac{\tilde{z}_1}{\|\tilde{z}_1\|} \right\rangle + \frac{12}{|A_2|^{12}} \langle B^{-1} \tilde{z}_3, \tilde{z}_3 \rangle^5 \langle B^{-1} \tilde{z}_3, \tilde{z}_4 \rangle + \right. \\ &+ \frac{8}{|A_1|^8} \langle B^{-1} \tilde{z}_2, \tilde{z}_2 \rangle^3 \langle B^{-1} \tilde{z}_2, \tilde{z}_3 \rangle - \frac{6}{|A_0|^6} \langle B^{-1} \tilde{z}_1, \tilde{z}_1 \rangle^2 \langle B^{-1} \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle \left. \right).\end{aligned}$$

Подставляя $\mu = 0$ в систему (13), получаем систему уравнений на Q_0

$$\begin{aligned}\mu' &= 0, \quad u = \tilde{z}_1 / \|\tilde{z}_1\|, \quad \tilde{z}'_1 = \tilde{z}_2 - 4\tilde{z}_1 \mathcal{M}_0, \quad \tilde{z}'_2 = \tilde{z}_3 - 3\tilde{z}_2 \mathcal{M}_0, \\ \tilde{z}'_3 &= \tilde{z}_4 - 2\tilde{z}_3 \mathcal{M}_0, \quad \tilde{z}'_4 = Bu - \tilde{z}_4 \mathcal{M}_0.\end{aligned}\quad (14)$$

Отсюда следует, что нулевое сечение цилиндра Q_0 является инвариантным подпространством для системы (11). С точностью до линейной замены переменных система (14) совпадает с раздутием системы для задачи (3). Действительно, применив к системе (14) замену

$$\hat{z}_1 = G^{-1} \tilde{z}_1, \quad \hat{z}_2 = G^{-1} \tilde{z}_2, \quad \hat{z}_3 = G^{-1} \tilde{z}_3, \quad \hat{z}_4 = G^{-1} \tilde{z}_4, \quad \hat{u} = Gu, \quad G = \sqrt{-B}, \quad (15)$$

имеем

$$\begin{aligned}\mu' &= 0, \quad \hat{u} = G \hat{z}_1 / \|\hat{z}_1\|, \quad \hat{z}'_1 = \hat{z}_2 - 4\hat{z}_1 \mathcal{M}_0, \quad \hat{z}'_2 = \hat{z}_3 - 3\hat{z}_2 \mathcal{M}_0, \\ \hat{z}'_3 &= \hat{z}_4 - 2\hat{z}_3 \mathcal{M}_0, \quad \hat{z}'_4 = -\hat{u} - \hat{z}_4 \mathcal{M}_0,\end{aligned}\quad (16)$$

где

$$\mathcal{M}_0(\hat{z}) = \frac{1}{96} \left(-\frac{24\|\hat{z}_4\|^{22}}{|A_3|^{24}} \left\langle \hat{z}_4, \frac{G\hat{z}_1}{\|\hat{z}_1\|} \right\rangle + \frac{12\|\hat{z}_3\|^{10}}{|A_2|^{12}} \langle \hat{z}_3, \hat{z}_4 \rangle + \frac{8\|\hat{z}_2\|^6}{|A_1|^8} \langle \hat{z}_2, \hat{z}_3 \rangle + \frac{6\|\hat{z}_1\|^4}{|A_0|^6} \langle \hat{z}_1, \hat{z}_2 \rangle \right).$$

Система (16) совпадает с раздутием гамильтоновой системы задачи (3) в случае, когда управление меняется в эллипсе, заданном матрицей G . Используя (6), (10) и (12), получаем частное решение системы (16):

$$\mu^*(s) = 0, \quad \hat{z}_m^*(s) = GA_{m-1}e^{-i\alpha s}, \quad m = \overline{1, 4}, \quad \hat{u}^*(s) = Ge^{-i\alpha s}. \quad (17)$$

Таким образом, применив обратную замену (15) к (17), найдём частное решение систем (14) и (11):

$$\mu^*(s) = 0, \quad \tilde{z}_m^*(s) = G^2 A_{m-1} e^{-i\alpha s}, \quad m = \overline{1, 4}, \quad u^*(s) = e^{-i\alpha s}.$$

Заметим, что это решение является циклом. Обозначим его через $\xi^0(s) = (0, \tilde{z}^*(s))$.

Шаг 3 (гиперболичность периодического решения). Докажем следующее утверждение.

Лемма. *Периодическое решение $\xi^0(s)$ является гиперболическим циклом.*

Доказательство. Исследуем систему уравнений в вариациях на решении $\xi^0(s)$ для (11):

$$h' = F_\xi(\xi^0(s))h. \quad (18)$$

Здесь F — правая часть (11), а F_ξ — якобиан для F . Так как F не зависит явно от s и $\xi^0(s)$ — периодическая траектория, то $F_\xi(\xi^0(s))$ — непрерывная периодическая матрица. Следовательно, по теореме Ляпунова [12, теорема 2.2.6] существует такое невырожденное периодическое преобразование $\hat{h} = P(s)h$ (преобразование Ляпунова), что в координатах $\hat{h}$ система (18) принимает вид

$$\hat{h}' = J\hat{h}, \quad (19)$$

где J — постоянная матрица. При этом собственные значения матрицы J являются характеристическими показателями цикла $\xi^0(s)$. Для (18) матрица $P(s) \in M_{9 \times 9}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$P(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_* & 0 \end{pmatrix}, \quad P_* = \begin{pmatrix} \cos(\alpha s) & -\sin(\alpha s) \\ \sin(\alpha s) & \cos(\alpha s) \end{pmatrix},$$

здесь 0 — нулевая матрица соответствующего размера. Идея выбора матрицы P основана на форме решения $\xi^0(s)$, а именно, преобразование P переводит цикл $\xi^0(s)$ в неподвижную точку. В результате прямых вычислений получаем матрицу системы (19):

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 9 & -\frac{7\sqrt{5}}{4} & -\frac{127}{252} & -\frac{25\sqrt{5}}{63} & \frac{67}{252} & \frac{73\sqrt{5}}{252} & \frac{53}{252} & -\frac{47\sqrt{5}}{252} \\ * & \sqrt{5} & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -15 & \frac{9\sqrt{5}}{4} & \frac{631}{84} & \frac{4\sqrt{5}}{21} & \frac{17}{84} & -\frac{73\sqrt{5}}{84} & -\frac{53}{84} & \frac{47\sqrt{5}}{84} \\ * & -\frac{15\sqrt{5}}{4} & \frac{45}{16} & \frac{715\sqrt{5}}{336} & \frac{377}{84} & -\frac{67\sqrt{5}}{336} & -\frac{29}{336} & -\frac{53\sqrt{5}}{336} & \frac{235}{336} \\ * & \frac{35}{2} & -\frac{21\sqrt{5}}{8} & -\frac{379}{72} & -\frac{25\sqrt{5}}{18} & \frac{211}{72} & \frac{\sqrt{5}}{72} & \frac{125}{72} & -\frac{47\sqrt{5}}{72} \\ * & \frac{35\sqrt{5}}{2} & -\frac{105}{8} & -\frac{379\sqrt{5}}{72} & -\frac{125}{18} & \frac{139\sqrt{5}}{72} & \frac{509}{72} & \frac{53\sqrt{5}}{72} & -\frac{163}{72} \\ * & \frac{105}{4} & -\frac{63\sqrt{5}}{16} & -\frac{379}{48} & -\frac{25\sqrt{5}}{12} & \frac{67}{48} & \frac{73\sqrt{5}}{48} & \frac{101}{48} & -\frac{95\sqrt{5}}{48} \\ * & -\frac{105\sqrt{5}}{4} & -\frac{1701}{16} & \frac{379\sqrt{5}}{48} & \frac{125}{12} & -\frac{67\sqrt{5}}{48} & -\frac{365}{48} & -\frac{5\sqrt{5}}{48} & \frac{283}{48} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы J имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1, & \lambda_2 &= 0, & \lambda_3 &= 4, & \lambda_4 &= 5, & \lambda_5 &= 24, \\ \lambda_{6,7} &= \frac{1}{2} \left(5 + \sqrt{47 \pm 12\sqrt{34}i} \right) \approx 4.65903 \pm 4.0511i, \\ \lambda_{8,9} &= \frac{1}{2} \left(5 - \sqrt{47 \pm 12\sqrt{34}i} \right) \approx 0.340974 \pm 4.0511i.\end{aligned}$$

Получаем, что периодическое решение $\xi^0(s)$ имеет один характеристический показатель с отрицательной действительной частью, семь характеристических показателей с положительной действительной частью и один нулевой характеристический показатель. Лемма доказана.

В силу гиперболичности цикла $\xi^0(s)$ имеет место сжатие по направлению μ и растяжение по остальным направлениям [12]. Применяя к $\xi^0(s)$ теорему об инвариантных многообразиях [13], получаем, что система (11) имеет решение $\xi(s) = (\mu(s), \tilde{z}(s)) \in \mathbb{R}^9$, удовлетворяющее условию

$$\|\xi(s+s_0) - \xi^0(s)\| e^{cs} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow +\infty \quad (20)$$

для некоторых s_0 и $c > 0$.

Таким образом, построено двумерное устойчивое многообразие цикла $\xi^0(s)$ для системы (10) (рис. 3). Далее покажем, что это многообразие состоит из логарифмических спиралей.

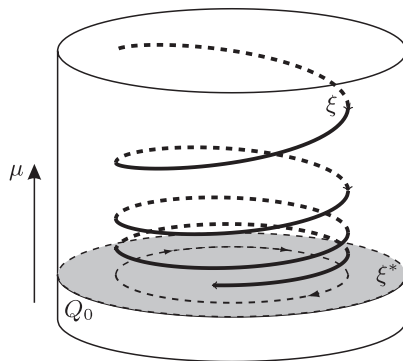


Рис. 3. Решения системы (10)

Шаг 4 (обратный ход процедуры раздутия особенности). Пусть T — момент попадания решения $z(t)$ системы (9) в начало координат и $\xi(s)$ — решение системы (11), удовлетворяющее условию (20). Из условия (20) могут быть получены следующие оценки [9]:

$$\begin{aligned}\mu(s) &= \kappa e^{-s} (1 + o(e^{-c_\mu s})) \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty, \\ e^{-s(t)} &= \kappa^{-1} (T-t) (1 + o(e^{-c_\mu s(t)})) \quad \text{при} \quad t \rightarrow T-0, \\ e^{-i\alpha s(t)} &= e^{i\alpha \ln(T-t)} e^{-i\alpha (\ln \kappa + o((T-t)^{c_\mu}))} \quad \text{при} \quad t \rightarrow T-0,\end{aligned} \quad (21)$$

где κ и c_μ — некоторые положительные постоянные.

Применяя (21) (аналогично [7]) к решению $\xi(s)$ системы (11), получаем окончательные асимптотические формулы для решения $z(t)$ гамильтоновой системы (9) в форме логарифмических спиралей:

$$\begin{aligned}z_m(t) &= |G^2 A_{m-1}| (T-t)^{5-m} (1 + o((T-t)^\sigma)) e^{i \operatorname{Arg}(G^2 A_{m-1})} e^{i\alpha \ln(T-t)} e^{i\alpha (\gamma + o((T-t)^\sigma))}, \\ u(t) &= e^{i \operatorname{Arg}(A_0)} e^{i\alpha \ln(T-t)} e^{i\alpha (\gamma + o((T-t)^\sigma))} \quad \text{при} \quad t \rightarrow T-0,\end{aligned}$$

где $\sigma > 0$, $\gamma = s_0 - \ln \kappa \in \mathbb{R}$. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась окрестность особого режима второго порядка в задачах оптимального управления, аффинных по управлению из круга. Рассмотрен случай, когда гамильтонова система имеет размерность 8 и является малым (в смысле действия группы Фуллера) возмущением гамильтоновой системы обобщённой задачи Фуллера с управлением из круга. Показано, что для такого класса задач сохраняются экстремали в виде логарифмических спиралей. Мы надеемся, что полученный результат может быть полезен не только с теоретической точки зрения, но и в приложениях (см. [9–11]).

Авторы благодарны рецензенту за полезные комментарии.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kelley, H.J. A second variation test for singular extremals / H.J. Kelley // AIAA J. — 1964. — V. 2, № 8. — P. 1380–1382.
2. Kelley, H.J. Singular extremals / H.J. Kelley, R.E. Kopp, H.G. Moyer // Topics in Optimization / Ed. G. Leitmann. — New York : Academic, 1967. — P. 63–103.
3. Зеликин, М.И. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления / М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов // Тр. МИАН СССР. — 1991. — Т. 197. — С. 85–166.
4. Kupka, I. The ubiquity of Fuller's phenomenon / I. Kupka // Nonlinear Controllability and Optimal Control / Ed. H.J. Sussmann. — New York : Dekker, 1990. — P. 313–350.
5. Zelikin, M.I. Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering / M.I. Zelikin, V.F. Borisov. — Boston : Birkhäuser, 1994. — 244 p.
6. Chukanov, S.V. Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem / S.V. Chukanov, A.A. Milyutin // Russ. J. Math. Phys. — 1994. — V. 2, № 1. — P. 31–48.
7. Ронжина, М.И. Окрестность особого режима второго порядка в задачах с управлением из круга / М.И. Ронжина, Л.А. Манита, Л.В. Локуцкий // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2021. — Т. 315. — С. 222–236.
8. Ронжина, М.И. Решения гамильтоновой системы с двумерным управлением в окрестности особой экстремали второго порядка / М.И. Ронжина, Л.А. Манита, Л.В. Локуцкий // Успехи мат. наук. — 2021. — Т. 76, № 5. — С. 201–202.
9. Manita, L.A. Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem / L.A. Manita, M.I. Ronzhina // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2022. — V. 27, № 6. — P. 3325–3343.
10. Ronzhina, M.I. Singularity of optimal control for a Timoshenko beam / M.I. Ronzhina, L.A. Manita // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — V. 1740. — Art. 012068.
11. Ronzhina, M.I. Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem / M.I. Ronzhina, L.A. Manita // Regul. Chaotic Dyn. — 2023. — V. 28, № 2. — P. 148–161.
12. Farkas, M. Periodic Motions / M. Farkas. — New York : Springer, 1994. — 577 p.
13. Hartman, Ph. Ordinary Differential Equations / Ph. Hartman. — New York : Wiley, 1964. — 612 p.

**FAMILY OF LOGARITHMIC SPIRALS IN HAMILTONIAN SYSTEMS OF DIMENSION 8
WITH CONTROL IN A DISK**

© 2024 / M. I. Ronzhina¹, L. A. Manita²

¹National University of Oil and Gas "Gubkin University", Moscow, Russia

²National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

e-mail: ¹ronzhina.m@gubkin.ru, ²lmanita@hse.ru

We study the neighbourhood of a singular second-order extremal in optimal control problems that are affine in control in a disk. We consider the case when the Hamiltonian system has dimension 8 and is a small (in the sense of the action of the Fuller group) perturbation of the Hamiltonian system of the generalized Fuller problem with control in a disk. For this class of problems we prove the existence of extremals in the form of logarithmic spirals, which reach the singular second-order extremal in a finite time, while the control performs an infinite number of rotations around the circle.

Keywords: two-dimensional control in a disk, singular extremal, blow-up of a singularity, logarithmic spiral, Hamiltonian system of Pontryagin's maximum principle

REFERENCES

1. Kelley, H.J., A second variation test for singular extremals, *AIAA J.*, 1964, vol. 2, no. 8, pp. 1380–1382.
2. Kelley, H.J., Kopp, R.E., and Moyer, H.G., Singular extremals, in: *Topics in Optimization*, ed. G. Leitmann, New York: Academic, 1967, pp. 63–103.
3. Zelikin, M.I. and Borisov, V.F., Regimes with frequented switches in the problems of optimal control, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1993, vol. 197, pp. 95–186.
4. Kupka, I., The ubiquity of Fuller's phenomenon, in: *Nonlinear Controllability and Optimal Control*, ed. H.J. Sussmann, New York: Dekker, 1990, pp. 313–350.
5. Zelikin, M.I. and Borisov, V.F., *Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering*, Boston: Birkhäuser, 1994.
6. Chukanov, S.V. and Milyutin, A.A., Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem, *Russ. J. Math. Phys.*, 1994, vol. 2, no. 1, pp. 31–48.
7. Ronzhina, M.I., Manita, L.A., and Lokutsievskiy, L.V., Neighborhood of the second-order singular regime in problems with control in a disk, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 315, pp. 209–222.
8. Ronzhina, M.I., Manita, L.A., and Lokutsievskiy, L.V., Solutions of a Hamiltonian system with two-dimensional control in a neighbourhood of a singular second-order extremal, *Russ. Math. Surv.*, 2021, vol. 76, no. 5, pp. 936–938.
9. Manita, L.A. and Ronzhina, M.I., Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, 2022, vol. 27, no. 6, pp. 3325–3343.
10. Ronzhina, M.I. and Manita, L.A., Singularity of optimal control for a Timoshenko beam, *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, vol. 1740, art. 012068.
11. Ronzhina, M.I. and Manita, L.A., Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2023, vol. 28, no. 2, pp. 148–161.
12. Farkas, M., *Periodic Motions*, New York: Springer, 1994.
13. Hartman, Ph., *Ordinary Differential Equations*, New York: Wiley, 1964.