
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2024 г. А. Д. Пирогова¹, В. Н. Четвериков²

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

e-mail: ¹pirogoва_arina@mail.ru, ²chetverikov.vl@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.07.2024 г., после доработки 02.10.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследована задача оптимального выбора параметров системы относительно заданного критерия качества управления. Для сравнения систем с разными значениями параметров введена количественная оценка управляемости, основанная на среднем значении функции, определяющей критерий качества. Для примера рассмотрена упрощённая модель подводного аппарата и изучена задача поиска такого расположения его управляющих винтов, при котором либо время движения, либо энергозатраты аппарата будут минимальными, при этом траектории подводного аппарата генерируются случайным образом. Проведено сравнение энергозатрат и времени движения по этим траекториям систем с разными значениями параметров и показателями.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, степень управляемости, критерий качества управления, локальная управляемость

DOI: 10.31857/S0374064124110076, EDN: JEBIUU

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих задач теории управления необходимо не только отвечать на вопрос, управляема система или нет, но также и оценивать, насколько она управляема. Такая необходимость возникает, например, при выборе параметров системы, оптимальной по управлению в том или ином смысле.

Основы теории управляемости систем были заложены Р.Э. Кальманом в 60-е годы XX в. В частности, в статье [1] был определён грамиан управляемости линейной системы, а его взвешенный след рассмотрен как мера управляемости этой системы. Такой подход позднее был развит в работах [2–10]. В качестве степени управляемости рассматривались максимальное собственное значение, след и определитель обратной матрицы Грама и другие величины. Связь определяемой степени управляемости с минимальной управляющей энергией, необходимой для перевода любого начального состояния в начало координат, исследовалась в [1, 2, 6, 8]. Связь с задачей выбора количества и расположения исполнительных механизмов системы управления рассматривалась в [2, 4–6]. Из недостатков подхода, основанного на грамиане управляемости, отметим возможность его применения только к линейным системам и вычислительную сложность. Хотя в работе [9] и предложен другой метод расчётов степени управляемости, вычисления всё равно остаются непростыми.

В статье [10] было отмечено, что “подавляющее большинство исследователей понимают количественные показатели управляемости как характеристики взаимосвязи двух множеств — множества $\mathcal{U}$ входных воздействий на систему и множества $\mathcal{X}$ её состояний, т.е. как характеристики “вход–состояние”, предполагая в общем случае, что чем теснее (в некотором смысле) связь между $\mathcal{U}$ и $\mathcal{X}$, тем более управляема система”. И далее: “существенным

недостатком большинства указанных работ является абсолютизация предлагаемых показателей, а также анализ количественных аспектов рассматриваемых характеристик вне связи с задачами синтеза систем управления". Последнее замечание нашло подтверждение и в наших исследованиях, а именно, введённая количественная оценка управляемости зависит от выбранного критерия качества управления, что показано далее. Для одного критерия более управляема система с одним набором параметров, а для другого — с иным набором параметров.

Подход в настоящей статье основан на предположении, что в малой окрестности каждого допустимого состояния любая траектория системы возможна и равновероятна. Из этого следует, в частности, локальная управляемость системы. Кроме того, функцию, определяющую критерий качества управления, считаем случайной величиной, а её математическое ожидание предлагаем использовать для количественного оценивания управляемости относительно выбранного критерия качества.

В работе [11] этот подход был применён к аффинным системам с неотрицательными входами и рассмотрен вариант предельного показателя управляемости. В этой статье мы исследуем общий случай и покажем, что определение количественного показателя управляемости зависит от вида критерия качества. Рассмотрены критерии двух видов и получены формулы для показателей в обоих случаях. В качестве демонстрации вводимых понятий приведён пример движения в вертикальной плоскости подводного аппарата, управляемого винтомоторными агрегатами (ВМА). Упрощённая система, описывающая такое движение, локально управляема только в случае трёх и более ВМА, расположенных определённым образом. Параметрами системы являются углы, определяющие расположение ВМА. Количественная оценка управляемости системы получена для двух критериев: быстродействия и энергопотребления. Для тестирования нашего подхода случайным образом сгенерирована достаточно длинная и сложная траектория, вычислены минимальное время движения и потребляемая энергия при движении по ней для разных значений параметров и проанализирована их связь со значениями полученных количественных показателей управляемости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — состояние системы, $u = (u_1, \dots, u_m)$ — её управление, $\mathcal{X}$ — область допустимых состояний, $\mathcal{U}$ — область допустимых управлений, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — набор параметров, $\dot{x} \equiv dx/dt$.

Для системы (1) будем решать задачу выбора параметров α , оптимальных относительно некоторого критерия качества. Пусть критерий качества представляет собой интегральный функционал, зависящий от решений системы (1). Рассмотрим два типа критериев: когда гладкая функция Φ , определяющая функционал, зависит от x , u или от x , $\dot{x}$. Приведём примеры таких критериев.

Пример 1. Управляющая энергия, необходимая для движения по заданной траектории $x(t)$, $t \in [0, T]$, оценивается функционалом

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt, \quad (2)$$

где векторная функция $u(t)$ в паре с траекторией $x(t)$ составляют решение системы (1). (Для упрощения считаем, что управляющие агрегаты однотипны.) Значение функционала (2) зависит от выбора параметров α , так как от α зависит $u(t)$: чем меньше значение функционала, тем меньше тратится управляющей энергии при движении по заданной траектории.

Пример 2. Для критерия оптимальности по быстродействию имеем $\Phi \equiv 1$, а минимизируется время движения T . Однако наш подход предполагает, что функция Φ , определяющая функционал, зависит от выбора параметров α , а T фиксировано. Поэтому заметим, что наиболее быстрому движению по заданной траектории $x(t)$ соответствует максимальная скорость $\dot{x}$ изменения состояния. В качестве функции Φ возьмём $\Phi = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2$, где t не время, а параметр траектории: чем больше значение функционала, тем быстрее движение по заданной траектории.

В случае $\Phi = \Phi(x, u)$ нет какой-либо информации о возможных траекториях системы (1), поэтому будем считать, что $x(t)$ — случайный процесс, равномерно распределённый в области $\mathcal{X}$. Задачу поиска параметров модели, оптимальной по данному критерию, сформулируем как задачу поиска таких параметров системы, для которой экстремально (минимально или максимально, в зависимости от критерия) математическое ожидание

$$M[\Phi(x, u)] = \frac{1}{V(K_\alpha)} \int_{K_\alpha} \Phi(x, u) d\sigma \rightarrow \text{extr}_\alpha, \quad (3)$$

где интеграл берётся по множеству $K_\alpha = \{\dot{x} - f(x, u, \alpha) = 0 : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\}$, зависящему от параметров α , $V(K_\alpha)$ — объём K_α .

В случае $\Phi = \Phi(x, \dot{x})$ будем считать, что начальное состояние $x(0)$ — случайная величина, равномерно распределённая в области $\mathcal{X}$, а функция $u(t)$ — случайный процесс, равномерно распределённый в области $\mathcal{U}$. Задачу поиска параметров модели, оптимальной по такому критерию, сформулируем как задачу поиска таких параметров модели, для которой экстремально математическое ожидание

$$M[\Phi(x, \dot{x})] = \frac{1}{V(K)} \int_K \Phi(x, f(x, u, \alpha)) dx du \rightarrow \text{extr}_\alpha,$$

где $K = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, $V(K)$ — объём K .

Для линейной системы количественный показатель управляемости относительно критерия оптимальности по быстродействию вычисляется на основе следующей теоремы.

Теорема. Пусть для линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m,$$

$\mathcal{X} = \{|x_i| \leq \gamma_i, i = \overline{1, n}\}$ и $\mathcal{U} = \{|u_j| \leq \delta_j, j = \overline{1, m}\}$ — области допустимых состояний и допустимых управлений соответственно. Тогда математическое ожидание значения функции $\Phi = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2$ в случае равномерного распределения (x, u) на $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ равно

$$M[\Phi] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \gamma_i^2 + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \beta_{jj} \delta_j^2, \quad (4)$$

где α_{ii} и β_{jj} — диагональные компоненты матриц $A^T A$ и $B^T B$ соответственно.

Доказательство. Отметим, что объём $V(K)$ множества $K = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ равен произведению чисел $2\gamma_i$ ($i = \overline{1, n}$) и $2\delta_j$ ($j = \overline{1, m}$). Перепишем Φ в матричном виде: $\Phi = \dot{x}^T \dot{x}$, тогда

$$\begin{aligned} M[\dot{x}^T \dot{x}] &= \frac{1}{V(K)} \int_K (Ax + Bu)^T (Ax + Bu) dx du = \\ &= \frac{1}{V(K)} \int_K (x^T A^T Ax + x^T A^T Bu + u^T B^T Ax + u^T B^T Bu) dx du. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле является многочленом второй степени по $x_1, \dots, x_n$ и $u_1, \dots, u_m$. Так как область интегрирования $K = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ симметрична относительно замен x_i на $-x_i$ и u_j на $-u_j$, то интегралы от всех слагаемых, в которых эти переменные входят в первой степени, равны нулю. Ненулевыми являются только интегралы от вторых степеней указанных переменных, поэтому последний интеграл равен

$$\frac{1}{V(K)} \int_K \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{j=1}^m \beta_{jj} u_j^2 \right) dx du.$$

Вычислив его, с учётом формулы для объёма $V(K)$ получим утверждение теоремы.

Таким образом, для линейной системы количественный показатель управляемости относительно критерия оптимальности по быстродействию равен сумме взвешенных следов матриц Грама для столбцов матриц A и B (см. (4)). Аналогичный результат может быть получен для некоторых нелинейных систем (см. п. 3).

2. УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Изложенный подход применим к локально управляемым системам вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m. \quad (5)$$

Областью достижимости состояния $x_f \in \mathcal{X}$ в области $D \subset \mathcal{X}$ называют множество таких состояний $x_0 \in \mathcal{X}$, что существует решение $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_f]$, системы (5), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad x(t_f) = x_f, \\ x(t) &\in D, \quad u(t) \in \mathcal{U}, \quad \text{когда } t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Систему (5) называют *локально управляемой в точке* $x_f \in \mathcal{X}$, если область достижимости состояния x_f в области $\mathcal{X}$ содержит окрестность точки x_f . Система (5) *локально управляема в области* $\mathcal{X}$, если она локально управляема в любой точке $x_f \in \mathcal{X}$.

Замечание. В определении локальной управляемости рассматриваются траектории системы, которые начинаются в произвольной точке $x_0 \in \mathcal{X}$ и заканчиваются в заданной точке x_f , а не наоборот. Такой выбор объясняется тем, что в начальный момент, как правило, определены значения u , а в конечный момент можно считать компоненты u произвольными.

3. ПРИМЕР ПОИСКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Рассмотрим подводный аппарат цилиндрической формы с закруглёнными концами, имеющий один винтовой двигатель (двигатель 1) для движения вперёд и два винтовых двигателя для разворота (двигатели 2 и 3). Двигатель 1 расположен на конце аппарата и направ-

лен вдоль его корпуса. Двигатели 2 и 3 расположены на цилиндрической поверхности, их расположение и направление определяются углами ϕ_2 , ψ_2 , ϕ_3 , ψ_3 . Движение аппарата в вертикальной плоскости описывает следующая система (см., например, [11; 12, с. 48]):

$$\ddot{\xi} = Q_{\theta} M u - B_0, \quad (6)$$

где $\xi = (x, z, J\theta/(md))^T$, x, z — координаты центра масс аппарата в системе координат, связанной с землёй, θ — угол наклона корпуса аппарата относительно земли, m — масса подводного аппарата, J — момент инерции аппарата относительно оси, ортогональной вертикальной плоскости движения, d — радиус цилиндрической поверхности аппарата, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ — столбец управлений, пропорциональных тягам F_1, F_2, F_3 трёх двигателей: $u_l = F_l/m$, верхний индекс T означает транспонирование матриц,

$$Q_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \cos \phi_2 & \cos \phi_3 \\ 0 & \sin \phi_2 & \sin \phi_3 \\ 0 & \frac{\sin \psi_2}{|\sin(\psi_2 + \phi_2)|} & \frac{\sin \psi_3}{|\sin(\psi_3 + \phi_3)|} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa g \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\kappa = (m - m_w)/m$, m_w — масса воды, вытесненной подводным аппаратом, g — ускорение свободного падения. Углы $\phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3$ являются параметрами системы (6).

Выведем условия локальной управляемости системы (6). Если матрица M невырождена, то система (6) записывается в виде

$$u = M^{-1} Q_{-\theta} (\ddot{\xi} + B_0). \quad (7)$$

Пусть δ — такое число, что u — допустимое управление при $|u| \leq \delta$. Предположим, что

$$\kappa g \|M^{-1}\|_2 < \delta, \quad (8)$$

где $\|M^{-1}\|_2$ — спектральная норма матрицы M^{-1} : $\|M^{-1}\|_2 = \sqrt{\max_i(\sigma_i)}$, σ_i — собственные значения симметричной матрицы $(M^{-1})^T M^{-1}$. Так как $Q_{-\theta}$ — ортогональная матрица, а $|B_0| = \kappa g$, то из свойств спектральной нормы следует, что $|M^{-1} Q_{-\theta} B_0| \leq \|M^{-1}\|_2 |B_0| < \delta$. Тогда $\delta_1 = \delta - |M^{-1} Q_{-\theta} B_0| > 0$.

Рассмотрим граничные условия для системы (6) с произвольным конечным состоянием $(\xi_f, \dot{\xi}_f)$ в момент времени $t=0$ и начальным состоянием $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ в момент $t=t_0 < 0$. Векторная функция

$$\xi(t) = \xi_f \left(1 - 3 \frac{t^2}{t_0^2} + 2 \frac{t^3}{t_0^3} \right) + t_0 \dot{\xi}_f \left(\frac{t}{t_0} - 2 \frac{t^2}{t_0^2} + \frac{t^3}{t_0^3} \right) + \xi_0 \left(3 \frac{t^2}{t_0^2} - 2 \frac{t^3}{t_0^3} \right) + t_0 \dot{\xi}_0 \left(-\frac{t^2}{t_0^2} + \frac{t^3}{t_0^3} \right)$$

удовлетворяет этим граничным условиям. Имеем

$$\ddot{\xi}(t) = \frac{\xi_f - \xi_0}{t_0^2} \left(-6 + 12 \frac{t}{t_0} \right) + \frac{\dot{\xi}_f - \dot{\xi}_0}{t_0} \left(2 - 6 \frac{t}{t_0} \right) + \frac{\dot{\xi}_f}{t_0} \left(-6 + 12 \frac{t}{t_0} \right).$$

Используя неравенство треугольника и оценку линейных выражений в скобках при $t \in [t_0, 0]$, получаем

$$|\ddot{\xi}(t)| \leq \frac{6|\xi_f - \xi_0|}{t_0^2} + \frac{4|\dot{\xi}_f - \dot{\xi}_0|}{|t_0|} + \frac{6|\dot{\xi}_f|}{|t_0|}, \quad t \in [t_0, 0]. \quad (9)$$

Пусть $t_0 = -18|\dot{\xi}_f| \|M^{-1}\|_2 / \delta_1$, а состояние $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ лежит в окрестности

$$U = \{(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in \mathbb{R}^6 : 18\|M^{-1}\|_2 |\xi_f - \xi_0| < \delta_1 t_0^2, \quad 12\|M^{-1}\|_2 |\dot{\xi}_f - \dot{\xi}_0| < \delta_1 |t_0|\}.$$

Тогда каждое слагаемое в правой части неравенства (9) меньше $\delta_1/(3\|M^{-1}\|_2)$, а значит, $\|M^{-1}\|_2 |\ddot{\xi}(t)| < \delta_1$. Соответствующее управление $u(t) = M^{-1}Q_{-\theta}(\ddot{\xi}(t) + B_0)$ допустимое, так как

$$|u(t)| \leq \|M^{-1}Q_{-\theta}\ddot{\xi}(t)\| + \|M^{-1}Q_{-\theta}B_0\| \leq \|M^{-1}\|_2 |\ddot{\xi}(t)| + \|M^{-1}Q_{-\theta}B_0\| < \delta_1 + \|M^{-1}Q_{-\theta}B_0\| = \delta.$$

Поэтому окрестность U лежит в области достижимости состояния $(\xi_f, \dot{\xi}_f)$, а значит, при выполнении (8) система (6) локально управляема в этом состоянии. Так как это произвольное состояние системы, то (8) — достаточное условие локальной управляемости системы (6).

Пример (минимизации времени движения). Пусть область допустимых управлений $\mathcal{U}$ симметрична относительно замен u_i на $-u_i$ для $i = 1, 2, 3$ (например, когда $\mathcal{U}$ — брус с центром в начале координат). Состояние системы (6) составляют векторы ξ и $\dot{\xi}$, квадрат скорости изменения состояния равен $\dot{x}^2 = \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \ddot{\xi}^T \ddot{\xi}$ (здесь и далее под квадратом вектора будем понимать скалярный квадрат вектора). Тогда

$$M[\dot{x}^2] = \frac{1}{V(K)} \left(\int_K \dot{\xi}^T \dot{\xi} d\xi d\dot{\xi} du + \int_K \ddot{\xi}^T \ddot{\xi} d\xi d\dot{\xi} du \right), \quad (10)$$

где первый интеграл и объём $V(K)$ не зависят от параметра α , а второй интеграл равен

$$\begin{aligned} & \int_K (Q_\theta M u - B_0)^T (Q_\theta M u - B_0) d\xi d\dot{\xi} du = \\ & = \int_K (u^T M^T Q_\theta^T Q_\theta M u - u^T M^T Q_\theta^T B_0 - B_0^T Q_\theta M u + B_0^T B_0) d\xi d\dot{\xi} du. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле зависит только от u_1, u_2, u_3, θ и является многочленом второй степени от u_1, u_2, u_3 . Произведение $Q_\theta^T Q_\theta$ есть единичная матрица, так как Q_θ — ортогональная матрица. Поэтому слагаемые второй степени от u_i составляют квадратичную форму $u^T M^T M u$. Обозначим коэффициенты матрицы $M^T M$ через a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Так как область интегрирования $K = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ симметрична относительно замен u_i на $-u_i$, то интегралы от всех слагаемых с $u_i u_j$ при $i \neq j$ и с u_i , $i, j = 1, 2, 3$, равны нулю, а последний интеграл равен

$$\int_K \left(\sum_{i=1}^3 a_{ii} u_i^2 + B_0^T B_0 \right) d\xi d\dot{\xi} du.$$

Вычисляя его в случае $\mathcal{U} = \{u: |u_i| \leq \delta_i\}$, получаем

$$M[\dot{x}^2] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_{ii} \delta_i^2 + b, \quad (11)$$

где слагаемое b содержит первый интеграл из (10) и интеграл от $B_0^T B_0$, которые не зависят от параметров. Таким образом, один из вариантов построения оптимальной по быстродействию модели — выбор параметров $\alpha = (\phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3)$, для которых максимально $M_v = \sum_{i=1}^3 a_{ii} \delta_i^2$.

Матрица $M^T M$ является матрицей Грама, её элемент a_{ij} равен стандартному скалярному произведению i -го и j -го столбцов матрицы M . Учитывая вид матрицы M , получаем экстремальную задачу

$$M_v = \delta_1^2 + \delta_2^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \psi_2}{\sin^2(\psi_2 + \phi_2)} \right) + \delta_3^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \psi_3}{\sin^2(\psi_3 + \phi_3)} \right) \rightarrow \max_{\alpha}. \quad (12)$$

Пример (минимизации энергопотребления). Как известно, потребляемая энергия ВМА пропорциональна его тяге. Предположим, что все три двигателя аппарата однотипны. Тогда потребляемая ими энергия при движении по заданной траектории $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, пропорциональна величине

$$\Phi_u = \int_0^T (|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|) dt, \quad (13)$$

где набор $(\xi(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ — решение системы (6). Однако для упрощения вычислений интеграла в (3), а также следуя работам [1, 2, 6, 8], где при минимизации потребляемой управляющей энергии исследуется интеграл от квадрата вектора управлений, в качестве критерия выбираем функционал (2).

Используя соотношение (7), получаем для математического ожидания квадрата вектора управлений выражение

$$M[u^2] = \frac{1}{V(K_1)} \int_{K_1} (\ddot{\xi} + B_0)^T Q_{-\theta}^T M^{-1T} M^{-1} Q_{-\theta} (\ddot{\xi} + B_0) d\dot{\xi} d\dot{\xi} d\ddot{\xi}, \quad (14)$$

где K_1 — область допустимых значений ξ , $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$, а $V(K_1)$ — объём K_1 . Пусть

$$K_1 = \{|\xi_i| \leq \alpha_i, |\dot{\xi}_i| \leq \beta_i, |\ddot{\xi}_i| \leq \varepsilon_i, i = 1, 2, 3\}.$$

Так как подынтегральное выражение в (14) зависит только от $\ddot{\xi}$, θ , то интегрирование по остальным переменным — это интегрирование постоянных функций. Поэтому после интегрирования по ним формула для $M[u^2]$ примет тот же вид (14), только K_1 следует заменить брусом K_2 размерности 4: $K_2 = \{|\theta| \leq \alpha, |\ddot{\xi}_i| \leq \varepsilon_i, i = 1, 2, 3\}$ с некоторым $\alpha > 0$.

Подынтегральное выражение в (14) является многочленом второй степени по $\ddot{\xi}_i$, причём слагаемые второй степени от $\ddot{\xi}_i$ составляют квадратичную форму $\ddot{\xi}^T Q_{-\theta}^T M^{-1T} M^{-1} Q_{-\theta} \ddot{\xi}$. Обозначим коэффициенты произведения матриц $Q_{-\theta}^T M^{-1T} M^{-1} Q_{-\theta}$ через c_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Так как область интегрирования K_2 симметрична относительно замен $\ddot{\xi}_i$ на $-\ddot{\xi}_i$, то интегралы от всех слагаемых с $\ddot{\xi}_i \ddot{\xi}_j$ при $i \neq j$ и с $\ddot{\xi}_i$, $i, j = 1, 2, 3$, равны нулю. Учитывая это и вид столбца B_0 , получаем

$$M[u^2] = \frac{1}{V(K_2)} \int_{K_2} \left(\sum_{i=1}^3 c_{ii} \ddot{\xi}_i^2 + c_{22} \kappa^2 g^2 \right) d\theta d\ddot{\xi}.$$

Предположим, что угол θ принимает все возможные значения, т.е. $|\theta| \leq \pi$, и проинтегрируем последнее выражение по $\ddot{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$M[u^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 c_{ii} \varepsilon_i^2 + c_{22} \kappa^2 g^2 \right) d\theta.$$

Заметим, что c_{ij} — коэффициенты матрицы Грама столбцов матрицы $M^{-1} Q_{-\theta}$. Обозначая через b_1, b_2, b_3 столбцы матрицы M^{-1} , найдём выражения для c_{ii} , $i = 1, 2, 3$, и проинтегрируем их по θ . Получим

$$M[u^2] = \frac{1}{6} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 3\kappa^2 g^2) (b_1^2 + b_2^2) + \frac{1}{3} \varepsilon_3^2 b_3^2, \quad (15)$$

где b_i^2 — квадрат длины вектора-столбца b_i , $\varepsilon_i = \max |\ddot{\xi}_i|$, $i = 1, 2, 3$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для тестирования предлагаемого подхода мы случайным образом сгенерировали достаточно длинную и сложную траекторию, вычислили минимальное время движения и потребляемую энергию при движении по ней для разных значений параметров и проанализировали их связь со значениями математических ожиданий (12) и (15).

Генерация каждой компоненты x, z, θ траектории выполнялась по следующему алгоритму.

Построение случайного процесса $\xi(\tau) \in \mathbb{R}$. Используем обозначения: τ — параметр (может не совпадать со временем), T — конечное значение параметра, N — количество опорных точек, $\Delta = T/N$ — величина одного шага, $\xi^0 = \xi(0)$ — заданное значение, $[-a, a]$ — отрезок изменения приращения ξ , т.е. $\xi(\tau + \Delta) - \xi(\tau) \in [-a, a]$.

Этап генерации опорных точек.

Шаг 0. Полагаем $p(0) = \xi^0$, $\tau = \Delta$.

Шаг $s > 0$.

1. Вычисляем $p(\tau) = p(\tau - \Delta) - a + 2a\eta$, где $\eta \in [0, 1]$ — число, полученное датчиком случайных чисел.

2. Полагаем $\tau := \tau + \Delta$. Если $\tau > T$, то выходим с ответом $\{p(\tau): \tau = 0, \Delta, \dots, T\}$, иначе переходим к п. 1 шага $s + 1$.

Этап сглаживания Строим кубический сплайн $S(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, по опорным точкам $\{p(\tau): \tau = 0, h, \dots, T\}$. Полагаем в точках между опорными $p(\tau) = S(\tau)$.

Данный алгоритм был применён для построения: $x(\tau)$ с параметром $a = 10$ м, $z(\tau)$ с $a = 2$ м и $\theta(\tau)$ с $a = 0.2$ рад, при этом $N = 100$, $T = 1000$ для всех трёх функций. Сгенерированная траектория приведена на рис. 1.

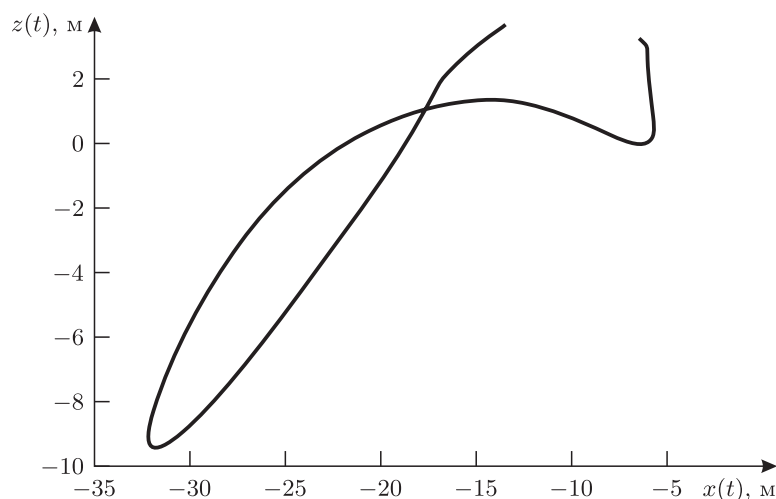


Рис. 1. Сгенерированная траектория

Пройти по заданной траектории можно за разное время — увеличение скорости приводит к уменьшению времени. Однако неограниченно повышать скорость невозможно из-за ограниченности мощности двигателей. Минимальное время движения при ограничениях $|u_i| \leq \delta_i$, $i = 1, 2, 3$, вычисляем по следующему алгоритму.

Вычисление минимального времени движения по заданной траектории. Известные данные: матрица M , соответствующая заданным параметрам; траектория $\{\xi_i(sh): s = -1, 0, 1, \dots, N_0, i = 1, 2, 3\}$, при этом $\xi_i(-h) = 0 = \xi_i(0)$, $i = 1, 2, 3$; $[-\delta_i, \delta_i]$ — область допустимых значений управления u_i . Здесь h — малая величина, определяющая точность аппроксимации второй производной ξ .

Шаг 0. Вычисляем обратную матрицу M^{-1} . Полагаем $s=1$, $\tau=h$, $D_t=0$ (D_t — счётчик времени движения).

Шаг $s > 0$.

1. Для $i=1, 2, 3$ вычисляем

$$\alpha_i = \frac{1}{h^2} M_i^{-1} Q_{-\theta} (\xi(\tau) - 2\xi(\tau-h) + \xi(\tau-2h)), \quad \beta_i = M_i^{-1} Q_{-\theta} B_0,$$

где M_i^{-1} — i -я строка матрицы M^{-1} .

2. Проверяем условие $|\beta_i| < \delta_i$, $i=1, 2, 3$. Если оно выполняется, то переходим к п. 3, иначе выходим из алгоритма с выводом, что система не является локально управляемой (условие (8) не выполняется).

3. Находим

$$b = \max_i \frac{|\alpha_i|}{\delta_i - \beta_i \operatorname{sgn} \alpha_i}, \quad dt = h\sqrt{b}, \quad Dt := Dt + dt,$$

здесь $\operatorname{sgn} \alpha_i$ — знак α_i , dt — минимальное время движения на шаге s .

4. Полагаем $\tau := \tau + h$. Если $\tau > T$, то выходим с минимальным временем движения D_t . Иначе переходим к п. 1 шага $s+1$.

Для вычисления показателей (12) и (15), а также минимального времени движения и потребляемой энергии использовались следующие значения фиксированных параметров: $d=0.15$ м, $L=1.5$ м (радиус и длина цилиндрической поверхности аппарата), $m=131.4$ кг, $m_w=120$ кг, $J=35.1$ кг·м², $\delta_i=1$ м/с², $\varepsilon_i=0.6$ м/с², $i=1, 2, 3$. Из условия, что второй и третий ВМА располагаются на цилиндрической поверхности, следуют ограничения: $|\operatorname{tg}(\psi_j + \phi_j)| \geq \geq 2d/L = 0.2$, $j=1, 2$, а из условия локальной управляемости (8) — условие $|\beta_i| < \delta_i$, $i=1, 2, 3$, на каждом шаге вычисления минимального времени движения.

Для наборов параметров $(\phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3)$, удовлетворяющих указанным выше ограничениям, вычислили: M_v — показатель управляемости относительно критерия быстродействия, вычисляемый по формуле (12), M_u — показатель управляемости относительно критерия энергопотребления (см. формулу (15)), Φ_t — минимальное время движения по траектории, изображенной на рис. 1 (вычисляется по алгоритму, приведённому выше), Φ_u — потребляемая энергия аппаратом при движении по этой траектории (см. (13)). Полученные значения приведены на рис. 2 и в таблице.

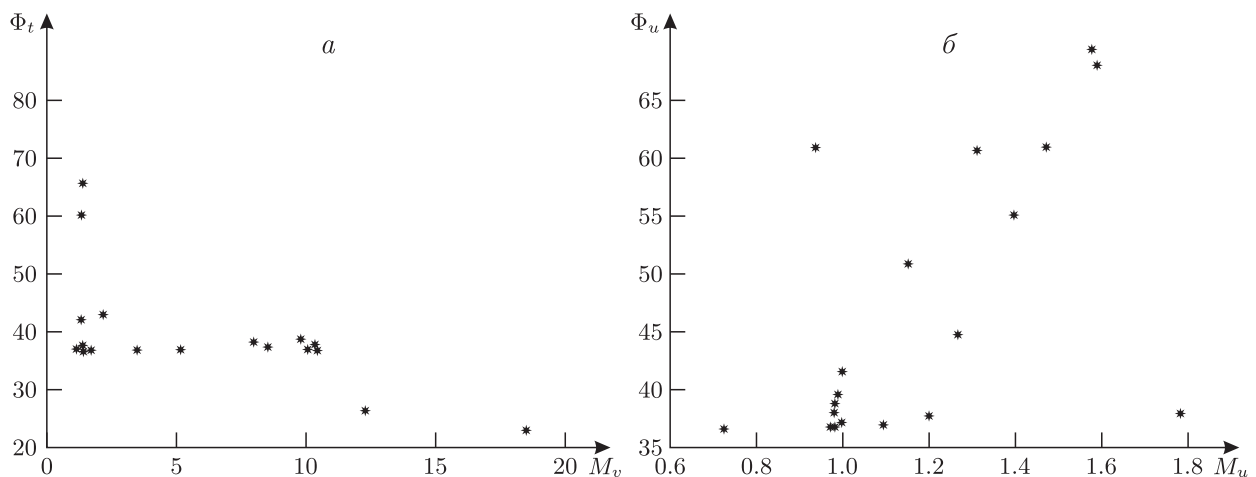


Рис. 2. Распределения значений $\Phi_t(M_v)$ (а) и $\Phi_u(M_u)$ (б)

Таблица. Результаты численных расчётов параметров модели

Номер набора	$(\psi_2, \psi_3, \phi_2, \phi_3)$	M_v	M_u	Φ_t	Φ_u
1	(1.77, 4.51, 1.57, 1.57)	18.47	0.72	22.98	36.55
2	(1.57, 1.11, 1.82, 5.41)	12.28	0.94	26.27	60.98
3	(1.57, 3.14, 1.37, 4.71)	10.44	0.97	36.85	36.73
4	(1.52, 6.24, 1.82, 4.76)	10.32	0.98	37.71	38.78
5	(1.57, 3.14, 1.37, 4.71)	10.06	0.97	36.82	36.73
6	(1.32, 3.23, 2.02, 4.62)	9.78	1.00	38.80	41.44
7	(1.62, 6.26, 1.30, 4.74)	8.51	0.98	37.33	37.93
8	(1.71, 6.23, 1.66, 4.77)	7.97	0.99	38.14	39.51
9	(1.29, 3.14, 2.14, 4.71)	5.19	0.98	36.82	36.68
10	(2.91, 3.14, 3.14, 4.71)	3.53	1.00	36.84	37.05
11	(0.35, 3.14, 2.98, 4.39)	2.21	1.15	43.04	50.89
12	(1.43, 3.14, 2.54, 4.71)	1.73	1.09	36.82	36.90
13	(1.48, 6.12, 0.47, 5.07)	1.50	1.58	88.50	69.50
14	(1.39, 6.00, 3.14, 4.65)	1.47	1.31	37.24	60.76
15	(0.78, 6.28, 0.00, 4.71)	1.44	1.20	36.82	37.66
16	(0.94, 6.28, 3.14, 4.22)	1.44	1.47	65.66	61.01
17	(1.19, 6.07, 0.38, 4.93)	1.41	1.59	60.19	68.17
18	(0.88, 6.22, 0.10, 4.78)	1.39	1.27	37.69	44.75
19	(1.01, 6.15, 0.24, 4.85)	1.37	1.40	42.00	55.12
20	(0.39, 3.14, 1.96, 4.71)	1.19	1.78	36.99	37.89

Зависимость минимального времени движения Φ_t от показателя M_v отражена на рис. 2, а. Видно, что с ростом M_v минимальное время движения, как правило, уменьшается. Аналогичная тенденция прослеживается на графике $\Phi_u(M_u)$ (рис. 2, б): при убывании M_u потребление энергии снижается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для двух видов критерия качества определены количественные показатели управляемости. Полученные формулы для показателей были протестированы на примере движения в вертикальной плоскости подводного аппарата относительно критериев быстродействия и энергопотребления. В случае критерия быстродействия показатель (12) есть взвешенный след матрицы Грама для столбцов матрицы M (см. (11)), а в случае критерия энергопотребления показатель (15) есть взвешенный след матрицы Грама для столбцов M^{-1} . Похожие факты были установлены в [1–10] для линейных систем.

Рассмотрены фиксированные параметры подводного аппарата, для которых коэффициент κ (см. (11)) оказался относительно большим, что привело к значительному сужению области параметров $\phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3$, для которых система (6) локально управляема.

Установлено, что введённый показатель управляемости зависит от выбранного критерия качества. Это следует, например, из сравнения строк 13 и 18 таблицы (у набора 13 хуже показатель M_u , но лучше показатель M_v).

Отметим также, что исследован только случай, когда сдвиг из любого состояния в любом направлении возможен и равновероятен. Однако в реальной ситуации вероятность сдвига в каком-либо направлении зависит от решаемой аппаратом задачи. Закон распределения вероятности сдвига в направлении может быть определён при дополнительном исследовании траекторий аппарата, при этом изменение закона распределения приведёт к изменению зависимости коэффициента локальной управляемости от параметров.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана в рамках реализации программы “Приоритет 2030”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman, R.E. Controllability of linear dynamical systems / R.E. Kalman, Y.C. Ho, K.S. Narendra // *Contribut. to the Theory of Differ. Equat.* — 1963. — V. 1, № 2. — P. 189–213.
2. Muller, P.C. Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems / P.C. Muller, H.I. Weber // *Automatica.* — 1972. — V. 8, № 3. — P. 237–246.
3. Rhodes, I.B. Some quantitative measures of controllability and observability and their implications / I.B. Rhodes // *Contr. Int. Fed. Autom. Contr.* — Kyoto, Japan, 24–28 August 1981. — P. 24–28.
4. Schulz, G. Dislocated actuator/sensor positioning and feedback design for flexible structures / G. Schulz, G.J. Heimbald // *Guid. Control Dyn.* — 1983. — V. 6. — P. 361–367.
5. Kondon, S. The positioning of sensors and actuators in the vibration control of flexible systems / S. Kondon, C. Yatom, K. Inoue // *JSME Int. J.* — 1990. — V. 33. — P. 145–152.
6. Xing, G.Q. Actuator placement using degree of controllability for discrete-time systems / G.Q. Xing, P.M. Bainum // *J. Dyn. Syst. Meas. Control.* — 1996. — V. 79. — P. 51–88.
7. Кириллов, О.Е. Количественный анализ управляемости и его применение к приближенной декомпозиции линейных динамических систем / О.Е. Кириллов, В.Г. Лисиенко // *Автоматика и телемеханика.* — 1997. — № 1. — С. 47–56.
8. Lee, H. Degree of controllability for linear unstable systems / H. Lee, Y. Park // *J. Vib. Control.* — 2016. — V. 22. — P. 1928–1934.
9. Zhang, L. A new method for determining the degree of controllability of state variables for the LQR problem using the duality theorem / L. Zhang, K.A. Neusylin, M.S. Selezneva // *Appl. Sci.* — 2020. — V. 10. — Art. 5234.
10. Воронин, А.В. Квалиметрия достижимости и возмущаемости линейных динамических систем / А.В. Воронин // *Изв. Томск. политех. ун-та.* — 2013. — Т. 323, № 5. — С. 74–78.
11. Велищанский, М.А. Поиск параметров модели с наилучшей локальной управляемостью / М.А. Велищанский, В.Н. Четвериков // *Дифференц. уравнения.* — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1692–1701.
12. Fossen, T.I. *Guidance and Control of Ocean Vehicles* / T.I. Fossen. — Chichester : John Wiley and Sons, 1994. — 480 p.

QUANTITATIVE CONTROLLABILITY INDEXES OF NONLINEAR SYSTEMS

© 2024 / A. D. Pirogova¹, V. N. Chetverikov²

Bauman Moscow State Technical University, Russia
 e-mail: ¹pirogova_arina@mail.ru, ²chetverikov.vl@yandex.ru

The problem of optimal choice of system parameters with respect to a given control quality criterion is studied. To compare systems with different parameter values, a quantitative estimation of controllability is introduced. This estimation is based on the average value of the function that defines the quality criterion. As an example, a very simplified model of an underwater vehicle is considered. The problem of finding an arrangement of its control propellers, in which either the movement time or the energy consumption of the vehicle is minimal is investigated. To test the used approach, the trajectories of the underwater vehicle are randomly generated. The energy consumption and the movement time along these trajectories of systems with different parameter values and different indexes are compared.

Keywords: nonlinear dynamic system, degree of controllability, control quality criterion, local controllability

FUNDING

This work was carried out with financial support from Bauman Moscow State Technical University within the framework of the program "Priority 2030".

REFERENCES

1. Kalman, R.E., Ho, Y.C., and Narendra, K.S., Controllability of linear dynamical systems, *Contribut. to the Theory of Differ. Equat.*, 1963, vol. 1, no. 2, pp. 189–213.
2. Muller, P.C. and Weber, H.I., Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems, *Automatica*, 1972, vol. 8, no. 3, pp. 237–246.
3. Rhodes, I.B., Some quantitative measures of controllability and observability and their implications, *Contr. Int. Fed. Autom. Contr., Kyoto, Japan, 24–28 August*, 1981, pp. 24–28.
4. Schulz, G. and Heimbold, G., Dislocated actuator/sensor positioning and feedback design for flexible structures, *J. Guid. Control Dyn.*, 1983, vol. 6, pp. 361–367.
5. Kondon, S., Yatomi, C., and Inoue, K., The positioning of sensors and actuators in the vibration control of flexible systems, *JSME Int. J.*, 1990, vol. 33, pp. 145–152.
6. Xing, G.Q. and Bainum, P.M., Actuator placement using degree of controllability for discrete-time systems, *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 1996, vol. 79, pp. 51–88.
7. Kirillov, O.E. and Lisienko, V.G., Quantitative analysis of controllability and its application in approximate decomposition of linear dynamic systems, *Automation and Remote Control*, January 1997, vol. 1, no. 1, pp. 47–56.
8. Lee, H. and Park, Y., Degree of controllability for linear unstable systems, *J. Vib. Control*, 2016, vol. 22, pp. 1928–1934.
9. Zhang, L., Neusypin, K.A., and Selezneva, M.S., A new method for determining the degree of controllability of state variables for the LQR problem using the duality theorem, *Appl. Sci.*, 2020, vol. 10, art. 5234.
10. Voronin, A.V., Qualimetry of accessibility and disturbance of linear dynamic systems, *Izv. Tomsk. politeh. univ. (Proceedings of the Tomsk Polytechnic University)*, 2013, vol. 323, no. 5, pp. 74–78.
11. Velishchanskiy, M.A. and Chetverikov, V.N., Searching for parameters of a model with the best local controllability, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1758–1768.
12. Fossen, T.I. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*, Chichester: John Wiley and Sons, 1994.