
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

© 2024 г. Г. Г. Петросян

Воронежский государственный педагогический университет

e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.05.2024 г., после доработки 26.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Найдены условия управляемости для систем, описываемых полулинейными дифференциальными включениями дробного порядка с обратной связью в виде sweeping процесса в гильбертовом пространстве. Используются топологические методы нелинейного анализа для многозначных уплотняющих отображений.

Ключевые слова: задача управляемости, дифференциальное включение, sweeping процесс, дробная производная, уплотняющее отображение, мера некомпактности

DOI: 10.31857/S0374064124110067, EDN: JEFZNE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача управляемости требует существования функции управления, переводящей систему из заданного начального состояния в требуемое конечное состояние, причём эти состояния могут выбираться произвольно в фазовом пространстве. Для решения этой задачи в случае бесконечномерного банахова пространства весьма эффективны методы многозначного анализа (см., например, статью [1] и библиографию в ней). В работах [2, 3] получены результаты об управляемости для систем, которые можно описать в терминах полулинейных дифференциальных и функционально-дифференциальных включений в бесконечномерных банаховых пространствах.

Актуальной задачей современной математики является моделирование процессов в системах управления с обратной связью. Зачастую это достигается с помощью дифференциальных включений и вариационных неравенств различного типа в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Большой интерес представляет исследование систем управления, динамика которых описывается дифференциальными или функционально-дифференциальными уравнениями или включениями с управляющим параметром в бесконечномерном банаховом пространстве. Во многих случаях налагаемые на выбор управления ограничения обратной связи рассматриваются как решения так называемых sweeping процессов в гильбертовых пространствах. Фундаментальные результаты о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений для таких процессов были получены в [4–7].

В то же время имеется большое число работ, посвящённых теории дробного анализа и дифференциальных уравнений и включений дробного порядка, имеющей многочисленные приложения в различных областях прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см. монографии [8, 9]). В [10–13] исследованы вопросы разрешимости дифференциальных уравнений, включений и краевых задач для них в случае дробного порядка производной из интервала $(0, 1)$.

С использованием теории топологической степени уплотняющих мультиотображений в настоящей статье устанавливается общий принцип управляемости для систем с обратной связью, описываемых полулинейным дифференциальным включением дробного порядка и sweeping процессом в гильбертовом пространстве.

Пусть E — банахово пространство и H — гильбертово пространство. Рассматривается система управления с обратной связью, описываемая следующими дифференциальным включением и sweeping процессом:

$${}^C D_0^\alpha x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t), y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, a], \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$-y'(t) \in N_{C(t)}(y(t)) + g(t, x(t), y(t)) + ly(t), \quad t \in [0, a], \quad (3)$$

$$y(0) = y_0 \in C(0), \quad (4)$$

$$x(a) = x_1, \quad (5)$$

где ${}^C D_0^\alpha$ — дробная производная Капуто–Герасимова порядка $\alpha \in (0, 1)$, $C: [0, a] \rightrightarrows H$ — многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми значениями, $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ — линейный замкнутый оператор, порождающий равномерно ограниченную C_0 -полугруппу операторов $\{T(t), t \geq 0\}$ в E . Функция внешнего управления $u(\cdot)$ принадлежит пространству $L^\infty([0, a]; U)$, U — банахово пространство управлений, $B: U \rightarrow E$ — ограниченный линейный оператор. Для внутреннего управления y через $N_{C(t)}(y)$ обозначается нормальный конус, определённый по выпуклому замкнутому множеству $C(t) \subset H$ как

$$N_{C(t)}(y) = \begin{cases} \{\xi \in H: \langle \xi, c - y \rangle \leq 0 \text{ для всех } c \in C(t)\}, & \text{если } y \in C(t), \\ \emptyset, & \text{если } y \notin C(t), \end{cases} \quad (6)$$

$F: [0, a] \times E \times H \rightrightarrows E$ — многозначное отображение типа Каратеодори, $g: [0, a] \times E \times H \rightarrow H$ — нелинейное однозначное отображение, $x_0, x_1 \in E$ и $y_0 \in H$ наперёд заданы, число $l > 0$.

Задача управляемости формулируется следующим образом: для данных x_0, x_1 исследовать вопрос существования решений $x \in C([0, a]; E)$, $y \in C([0, a]; H)$ системы (1)–(4) и функции управления $u \in L^\infty([0, a]; U)$ таких, чтобы выполнялось условие (5).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. ПОНЯТИЯ ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА И ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Определение 1. Дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ от функции $g: [0, a] \rightarrow E$ называется функция

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds,$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ — гамма-функция Эйлера.

Определение 2. Дробной производной Капуто–Герасимова порядка $\alpha \in (0, 1)$ функции $g \in C^1([0, a]; E)$ называется функция

$${}^C D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g'(s) ds.$$

2.2. МЕРЫ НЕКОМПАКТНОСТИ

Введём следующие обозначения множеств: $P(E) = \{A \subseteq E : A \neq \emptyset\}$; $Pb(E) = \{A \in P(E) : A \text{ — ограниченно}\}$; $Pv(E) = \{A \in P(E) : A \text{ — выпукло}\}$; $J(E) = \{A \in P(E) : A \text{ — замкнуто}\}$; $Jb(E) = \{A \in P(E) : A \text{ — замкнуто и ограничено}\}$; $Jv(E) = \{A \in P(E) : A \text{ — замкнуто и выпукло}\}$; $K(E) = \{A \in Pb(E) : A \text{ — компактно}\}$; $Kv(E) = Pv(E) \cap K(E)$.

Определение 3. Пусть $(\mathcal{A}, \geq)$ — частично упорядоченное множество. Тогда функция $\beta: Pb(E) \rightarrow \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (далее МНК) в E , если для любого $\Omega \in Pb(E)$ выполняется равенство $\beta(\overline{\text{co}} \Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\text{co}} \Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω .

МНК β называется:

- *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(E)$ из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
- *несингулярной*, если для любого $a \in E$ и любого $\Omega \in Pb(E)$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$;
- *инвариантной относительно объединения с компактным множеством*, если $\beta(\Omega \cup K) = \beta(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(E)$ и относительно компактного множества $K \subset E$;
- *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то МНК β называется:

- *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(E)$;
- *правильной*, если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω .

Примером вещественной МНК в пространстве E , обладающей всеми перечисленными выше свойствами, является МНК Хаусдорфа

$$\chi_E(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\},$$

которая удовлетворяет также свойству полуоднородности $\chi_E(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi_E(\Omega)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in Pb(E)$. Более того, если $\mathcal{L}: E \rightarrow E$ — линейный ограниченный оператор, то $\chi_E(\mathcal{L}(\Omega)) \leq \|\mathcal{L}\|\chi_E(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(E)$.

Норма множества $M \in Pb(E)$ определяется по формуле $\|M\| = \sup_{x \in M} \|x\|_E$.

2.3. МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [14, 15].

Определение 4. Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F}: X \rightarrow P(E)$ называется:

- *полунепрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset E$;
- *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times E$;
- *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ относительно компактно в E .

Определение 5. Мультиотображение $\mathcal{F}: X \subseteq E \rightarrow K(E)$ называется *уплотняющим относительно МНК β (β -уплотняющим)*, если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено условие $\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \not\leq \beta(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений.

Теорема 1. Пусть M — выпуклое замкнутое подмножество E и $\mathcal{F}: M \rightarrow Kv(M)$ — замкнутое β -уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная мера некомпактности в E . Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F}: \text{Fix } \mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ непустое.

2.4. ИЗМЕРИМЫЕ МУЛЬТИФУНКЦИИ

Сформулируем необходимые далее понятия (см., например, [14, 15]).

Определение 6. Мультифункция $G: [0, a] \rightarrow K(E)$ для $p \geq 1$ называется:

- L^p -интегрируемой, если она допускает L^p -интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p([0, a]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п.в. $t \in [0, a]$;
- L^p -интегрально ограниченной, если существует функция $\xi \in L^p([0, a])$ такая, что

$$\|G(t)\| := \sup\{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\} \leq \xi(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0, a].$$

Множество всех L^p -интегрируемых сечений мультифункции $G: [0, a] \rightarrow K(E)$ обозначается $\mathcal{S}_G^p$.

Определение 7. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0, a]; E)$, $p \geq 1$, называется L^p -полукompактной, если она L^p -интегрально ограничена, т.е.

$$\|\xi_n(t)\|_E \leq v(t) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N} \text{ и п.в. } t \in [0, a],$$

где $v \in L^p_+([0, a])$ и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0, a]$.

Определение 8. Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0, a]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$.

Для L^p -интегрируемой мультифункции G определён многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s) ds := \left\{ \int_0^t g(s) ds : g \in \mathcal{S}_G^p \right\} \quad \text{для любого } t \in [0, a].$$

Лемма 1 (см. [14], теорема 4.2.1). Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0, a]; E)$ является L^1 -интегрально ограниченной. Предположим, что $\chi_E(\{\xi_n\}(t)) \leq k(t)$ для п.в. $t \in [0, a]$ и для всех $n \in \mathbb{N}$, где $k \in L^1_+([0, a])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют компактное множество $K_\delta \subset E$, множество $m_\delta \subset [0, a]$ с лебеговой мерой $\text{mes } m_\delta < \delta$ и множество функций $G_\delta \subset L^1([0, a]; E)$ со значениями в K_δ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2k(t) + \delta, \quad t \in [0, a] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2.5. SWEEPING ПРОЦЕССЫ

Напомним некоторые понятия и определения, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть M — непустое замкнутое множество в гильбертовом пространстве H и $x \in H$, тогда расстояние от x до M , обозначаемое как $d(x, M)$, определяется по формуле

$$d(x, M) = \inf\{\|x - z\| : z \in M\},$$

а проекция элемента x на M как

$$pr_M(x) = \{z \in M : d(x, M) = \|x - z\|\}.$$

Если $z \in pr_M(x)$ и $c \geq 0$, то вектор $c(x - z)$ называется проксимально нормальным для M в точке z . Множество всех таких векторов образует конус, называемый проксимальным

нормальным конусом для M в точке z . Он обозначается как $N_M^P(z)$. Предельный нормальный конус определяется как

$$N_M^L(z) = \{\eta \in H : \eta_n \rightharpoonup \eta, \eta_n \in N_M^P(z_n), z_n \rightarrow z\}.$$

Для фиксированного $r > 0$ множество M называется r -прох регулярным, если для каждого $z \in M$ и произвольного $\eta \in N_M^L(z)$ такого, что $\|\eta\| < 1$, выполняется $z = pr_M(z + r\eta)$. Если M является r -прох регулярным, то справедливы следующие свойства (см. [6]):

– для каждого $z \in M$ все нормальные конусы, определённые выше, совпадают (в таком случае их обозначают более просто $N_M(z)$);

– для любого $z \in H$ такого, что $d(z, M) < r$, множество $pr_M(z)$ является одноэлементным.

Пусть мультифункция $C: [0, a] \rightarrow J(H)$ такова, что

(A1) для каждого $t \in [0, a]$ множество $C(t)$ является r -прох регулярным;

(A2) существует абсолютно непрерывная функция $\vartheta: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для каждого $x \in H$ и $s, t \in [0, a]$

$$|d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leq |\vartheta(t) - \vartheta(s)|.$$

Теорема 2 [6]. Предположим, что мультифункция $C(\cdot)$ удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Пусть $h: [0, a] \rightarrow H$ — интегрируемое отображение. Тогда для каждого $\eta_0 \in C(0)$ sweeping процесс с возмущением

$$-y'(t) \in N_{C(t)}(y(t)) + h(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0, a], \quad y(0) = \eta_0,$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение y . Более того, справедлива оценка

$$\|y'(t) + h(t)\| \leq \|h(t)\| + |\vartheta'(t)| \quad \text{для п.в. } t \in [0, a]. \quad (7)$$

Теорема 3 [6]. Предположим, что мультифункция $C(\cdot)$ удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Пусть $f: [0, a] \times H \rightarrow H$ удовлетворяет условиям:

– для каждого $x \in H$ функция $f(\cdot, x): [0, a] \rightarrow H$ измерима;

– для любого $\delta > 0$ существует неотрицательная функция $k_\delta \in L^1[0, a]$ такая, что для каждого $(x, y) \in B_\delta(0) \times B_\delta(0)$ имеем

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_\delta(t) \|x - y\| \quad \text{для п.в. } t \in [0, a];$$

– существует неотрицательная функция $\varsigma \in L^1[0, a]$ такая, что для каждого $x \in \bigcup_{s \in [0, a]} C(s)$

$$\|f(t, x)\| \leq \varsigma(t)(1 + \|x\|) \quad \text{для п.в. } t \in [0, a].$$

Тогда для любого $\eta_0 \in C(0)$ возмущённый sweeping процесс

$$-y'(t) \in N_{C(t)}(y(t)) + f(t, y(t)) \quad \text{для п.в. } t \in [0, a], \quad y(0) = \eta_0,$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение y .

Для мультифункции $C: [0, a] \rightarrow Jv(H)$ рассмотрим следующий sweeping процесс с возмущением:

$$-y'(t) \in N_{C(t)}(y(t)) + h(t) + ly(t), \quad (8)$$

где $h: [0, a] \rightarrow H$ — ограниченная измеримая функция и $l > 0$.

Будем полагать, что мультифункция C удовлетворяет следующим свойствам:

(A2') существует $L_C > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in [0, a]$ выполняется оценка

$$d_H(C(t_1), C(t_2)) \leq L_C |t_1 - t_2|, \quad (9)$$

где $d_H(C_1, C_2)$ — хаусдорфово расстояние между $C_1, C_2 \subset H$, определённое как

$$d_H(C_1, C_2) = \max \left\{ \sup_{a \in C_2} d(a, C_1), \sup_{b \in C_1} d(b, C_2) \right\};$$

(A3) множество $\bigcup_{t \in [0, a]} C(t)$ относительно компактно.

Заметим, что условие (A2') является частным случаем (A2), где $v(t) = L_C t$.

При выполнении условия (A2') для начального условия $y(0) \in C(0)$ sweeping процесс (8) допускает единственное абсолютно непрерывное решение $y(t)$, удовлетворяющее (8) для п.в. $t \in [0, a]$ (теорема 3).

Пусть отображение $g: [0, a] \times E \times H \rightarrow H$ при всех фиксированных $(x, y) \in E \times H$ является измеримой на отрезке $[0, a]$ функцией и подчиняется следующим условиям:

(g1) существуют константы $m_1, m_2 > 0$ такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in E$ и $y_1, y_2 \in H$

$$\|g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)\|_H \leq m_1 \|x_1 - x_2\|_E + m_2 \|y_1 - y_2\|_H, \quad t \in [0, a];$$

(g2) существует функция $\sigma \in L_+^1([0, a])$ такая, что

$$\|g(t, x, y)\|_H \leq \sigma(t)(1 + \|x\|_E + \|y\|_H) \quad \text{для п.в. } t \in [0, a].$$

Из теорем 2 и 3 следует, что при выполнении условий (A1), (A2'), (A3), (g1), (g2) для каждого $x \in C([0, a]; E)$ задача (3), (4) имеет единственное решение $y_x \in C([0, a]; H)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем полагать, что мультиотображение $F: [0, a] \times E \times H \rightarrow Kv(E)$ задачи (1), (2) удовлетворяет следующим условиям:

(B1) для всех $(x, y) \in E \times H$ мультифункция $F(\cdot, x, y): [0, a] \rightarrow Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

(B2) для п.в. $t \in [0, a]$ многозначное отображение $F(t, \cdot, \cdot): E \times H \rightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху;

(B3) для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L_+^\infty([0, a])$ такая, что $\|F(t, x, y)\|_E \leq \omega_r(t)$ для всех $(x, y) \in E \times H$, $\|x\|_E < r$, $\|y\|_H < r$;

(B4) существует функция $\mu \in L_+^\infty([0, a])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$ и $y \in H$ справедливо неравенство $\chi_E(F(t, \Omega, y)) \leq \mu(t)\chi_E(\Omega)$ для п.в. $t \in [0, a]$, где χ_E — МНК Хаусдорфа в E .

В свою очередь, на оператор A наложим следующее условие:

(A) оператор $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ порождает ограниченную C_0 -полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ линейных операторов в E .

Обозначим $M = \sup\{\|T(t)\|; t \geq 0\}$.

Для функции $x \in C([0, a]; E)$ рассмотрим мультифункцию $\Phi_F: [0, a] \rightarrow Kv(E)$, определяемую равенством

$$\Phi_F(t) = F(t, x(t), y_x(t)).$$

Из условий (B1)–(B3) следует, что мультифункция Φ_F является L^∞ -интегрируемой. Поэтому суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F^\infty: C([0, a]; E) \rightarrow P(L^\infty([0, a]; E))$, заданный по формуле

$$\mathcal{P}_F^\infty(x) = \{f \in L^\infty([0, a]; E): f(t) \in F(t, x(t), y_x(t)) \quad \text{для п.в. } t \in [0, a]\},$$

корректно определён.

Определение 9. Интегральным решением задачи (1), (2) на отрезке $[0, a]$ называется функция $x \in C([0, a]; E)$, определяемая как

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) f(s) ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) Bu(s) ds, \quad t \in [0, a],$$

где $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $u \in L^\infty([0, a]; U)$,

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta) T(t^\alpha \theta) d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = \alpha \int_0^\infty \theta \xi_\alpha(\theta) T(t^\alpha \theta) d\theta, \quad \xi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\alpha} \theta^{-1-1/\alpha} \Psi_\alpha(\theta^{-1/\alpha}),$$

$$\Psi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \theta^{-\alpha n-1} \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!} \sin(n\pi\alpha), \quad \theta \in \mathbb{R}^+.$$

Замечание. $\xi_\alpha(\theta) \geq 0$, $\int_0^\infty \xi_\alpha(\theta) d\theta = 1$, $\int_0^\infty \theta \xi_\alpha(\theta) d\theta = 1/\Gamma(\alpha+1)$.

Лемма 2 [13]. Оператор-функции $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$ обладают следующими свойствами:

– для каждого $t \in [0, a]$ $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются линейными ограниченными операторами, более того

$$\|\mathcal{G}(t)x\|_E \leq M\|x\|_E, \quad \|\mathcal{T}(t)x\|_E \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\|x\|_E; \quad (10)$$

– оператор-функции $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются сильно непрерывными для всех $t \in [0, a]$.

Для достижения поставленной цели стандартно предположим, что соответствующая линейная задача управляемости разрешима, т.е. будем полагать, что оператор управления $W: L^\infty([0, a]; U) \rightarrow E$, заданный как

$$Wu = \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-s) Bu(s) ds,$$

имеет ограниченный правый обратный оператор $W^{-1}: E \rightarrow L^\infty([0, a]; U)$.

Пусть оператор W^{-1} удовлетворяет условию регулярности:

(W) существует функция $\gamma \in L_+^\infty([0, a])$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Omega \subset E$

$$\chi_U(W^{-1}(\Omega)(t)) \leq \gamma(t) \chi_E(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0, a],$$

где χ_U — МНК Хаусдорфа в U .

Пусть M_1, M_2 — положительные константы такие, что

$$\|B\| \leq M_1, \quad \|W^{-1}\| \leq M_2. \quad (11)$$

Рассмотрим оператор $S: L^\infty([0, a]; E) \rightarrow C([0, a]; E)$:

$$S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) f(s) ds + \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) \left[BW^{-1} \left(x_1 - \mathcal{G}(a)x_0 - \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-\tau) f(\tau) d\tau \right) (s) \right] ds =: S'(f) + S_2''(f).$$

Лемма 3. Пусть последовательность $\{\eta_n\} \subset L^p([0, a]; E)$, где $1/\alpha < p \leq \infty$, ограничена и $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0, a]; E)$. Тогда $S'(\eta_n) \rightharpoonup S'(\eta_0)$ в $C([0, a]; E)$.

Доказательство. Для числа $d > 0$ рассмотрим оператор $S'_d: L^1([0, a]; E) \rightarrow C([0, a]; E)$:

$$S'_d(\eta_n) = \begin{cases} 0, & t \leq d, \\ \int_0^{t-d} (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) \eta_n(s) ds, & t > d. \end{cases}$$

Поскольку интеграл в последнем выражении является непрерывной функцией на $[0, t-d]$, то имеем сходимость

$$S'_d(\eta_n) \rightharpoonup S'_d(\eta_0) \quad (12)$$

в пространстве $C([0, a]; E)$. Пусть ψ — непрерывный линейный функционал на $C([0, a]; E)$, т.е. $\psi \in C^*([0, a]; E)$. Тогда получаем

$$(\psi, S'(\eta_n)) = (\psi, S'_d(\eta_n)) + (\psi, S'(\eta_n) - S'_d(\eta_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Из определения оператора S'_d следует его представление

$$(S'(\eta_n) - S'_d(\eta_n))(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) \eta_n(s) ds, & t \leq d, \\ \int_{t-d}^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) \eta_n(s) ds, & t > d, \end{cases}$$

откуда с учётом леммы 2 вытекают оценки

$$\|S'(\eta_n) - S'_d(\eta_n)\|_{C([0, a]; E)} \leq \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\mathcal{T}(t-s)\| \|\eta_n(s)\| ds, & t \leq d, \\ \int_{t-d}^t (t-s)^{\alpha-1} \|\mathcal{T}(t-s)\| \|\eta_n(s)\| ds, & t > d. \end{cases}$$

Следовательно, для $p \in (1/\alpha, \infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \|S'(\eta_n) - S'_d(\eta_n)\|_{C([0, a]; E)} &\leq \begin{cases} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^t \|\mathcal{T}(t-s)\|^p \|\eta_n(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}, & t \leq d, \\ \left(\int_{t-d}^t (t-s)^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t-d}^t \|\mathcal{T}(t-s)\|^p \|\eta_n(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}, & t > d \end{cases} \leq \\ &\leq \frac{Md^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{p-1}{\alpha p-1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \|\eta_n\|_{L^p}. \end{aligned}$$

В свою очередь, для $p = \infty$ получаем

$$\|S'(\eta_n) - S'_d(\eta_n)\|_{C([0, a]; E)} \leq \frac{Md^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \|\eta_n\|_{L^\infty}.$$

Тогда для произвольного $\epsilon > 0$ можно подобрать $d > 0$ такое, что справедлива следующая оценка:

$$\|S'(\eta_n) - S'_d(\eta_n)\|_{C([0, a]; E)} \leq \frac{\epsilon}{4\|\psi\|_{C^*([0, a]; E)}}. \quad (14)$$

С учётом (12) $(\psi, S'_d(\eta_n)) \rightarrow (\psi, S'_d(\eta_0))$, но тогда для данного ϵ можно подобрать n_0 такое, что

$$(\psi, S_d(\eta_{n_0}) - S_d(\eta_0)) < \epsilon/2. \quad (15)$$

Теперь, используя (13)–(15), получаем неравенство

$$\begin{aligned} (\psi, S'(\eta_n) - S'(\eta_0)) &= (\psi, S'_d(\eta_n) - S'_d(\eta_0)) + (\psi, S'(\eta_n) - S'_d(\eta_n)) + (\psi, S'_d(\eta_0) - S'(\eta_0)) < \\ &< \frac{\epsilon}{2} + 2\|\psi\|_{C^*([0,a];E)} \frac{\epsilon}{4\|\psi\|_{C^*([0,a];E)}} = \epsilon, \end{aligned}$$

доказывающее утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть Δ — ограниченное подмножество $L^\infty([0,a];E)$ такое, что $\chi_E(\Delta(t)) \leq \kappa(t)$ для п.в. $t \in [0,a]$, где $\kappa \in L_+^\infty[0,a]$. Тогда

$$\chi_E(S'(\Delta)(t)) \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \kappa(s) ds.$$

Доказательство. Пусть $\|\Delta\| \leq K$. Тогда, используя оценку (10), можно утверждать, что $S'_d(\Delta)$ является $Md^\alpha K/\Gamma(\alpha)$ -сетью в пространстве $C([0,a];E)$ для множества $S'(\Delta)$ и

$$\chi_E(S'_d(\Delta)(t)) \leq 2 \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-d} (t-s)^{\alpha-1} \kappa(s) ds.$$

Теперь остаётся лишь сослаться на малость d . Лемма доказана.

Используя лемму 3, по аналогии с доказательством леммы 4.2.1 из [14] устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 5. Оператор S' удовлетворяет следующим свойствам:

– если $1/\alpha < p < \infty$, то существует константа $q \geq 0$ такая, что

$$\|S'(\xi)(t) - S'(\eta)(t)\|_E \leq q \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E ds, \quad \xi, \eta \in L^1([0,a];E);$$

– для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^1([0,a];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0,a]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0,a];E)$ влечёт сходимость $S'(\eta_n) \rightarrow S'(\eta_0)$ в $C([0,T];E)$.

Лемма 6. Пусть $\Omega \subset C([0,a];E)$ — непустое ограниченное множество и $\Omega(t)$ относительно компактно в E при каждом $t \in [0,a]$. Тогда множество

$$\left\{ S' \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) f(s) ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega) \right\}$$

является равномерно непрерывным в $C([0,a];E)$.

Доказательство. Зафиксируем $\epsilon > 0$ и возьмём $t_1, t_2 \in [0,a]$ такие, что $0 < t_1 < t_2 \leq a$. Тогда для произвольного $f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \|S'(f)(t_2) - S'(f)(t_1)\|_E &\leq \left\| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) f(s) ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s) f(s) ds \right\|_E \leq \\ &\leq \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) f(s) ds \right\|_E + \\ &+ \left\| \int_0^{t_1} ((t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s)) f(s) ds \right\|_E =: Z_1 + Z_2. \end{aligned}$$

Используя лемму 2 и условие (В3), можно подобрать $\delta_1 > 0$, для которого из неравенства $|t_2 - t_1| < \delta_1$ для $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $x \in \Omega$, следует оценка

$$Z_1 \leq \frac{M \|\omega_{r_\Omega}\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t_2 - t_1)^\alpha}{\alpha} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Для оценки Z_2 возьмём

$$d < \delta_2 := \left[\frac{\epsilon \Gamma(1 + \alpha)/6}{M \|\omega_{r_\Omega}\|_\infty (2^\alpha + 1)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тогда для $t_1 < d$ и $t_2 - t_1 < d$ получим

$$\begin{aligned} Z_2 &\leq \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} \|\mathcal{T}(t_2 - s)\| \|f(s)\| ds + \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} \|\mathcal{T}(t_1 - s)\| \|f(s)\| ds \leq \\ &\leq \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \|\mathcal{T}(t_2 - s)\| \|f(s)\| ds + \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} \|\mathcal{T}(t_1 - s)\| \|f(s)\| ds \leq \\ &\leq \frac{M \|\omega_{r_\Omega}\|_\infty}{\Gamma(1 + \alpha)} (2^\alpha + 1) d^\alpha < \frac{\epsilon}{6}. \end{aligned}$$

Для $t_1 > d$ имеем

$$\begin{aligned} Z_2 &\leq \left\| \int_0^{t_1-d} ((t_2 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2 - s) - (t_1 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1 - s)) f(s) ds \right\|_E + \\ &+ \left\| \int_{t_1-d}^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2 - s) - (t_1 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1 - s)) f(s) ds \right\|_E =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Возьмём d настолько малым, чтобы

$$I_2 \leq \frac{M \|\omega_{r_\Omega}\|_\infty d^\alpha (2 + 2^\alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Поскольку $\chi_E(\Omega(t)) \equiv 0$, то по лемме 1 для любого $\delta_3 > 0$ существуют компактное множество $K_{\delta_3} \subset E$, множество $m_{\delta_3} \subseteq [0, a]$ с лебеговой мерой $\text{mes}(m_{\delta_3}) < \delta_3$ и множество функций $\Delta \subset L^1([0, a]; E)$ со значениями в K_{δ_3} такие, что существует функция $b \in \Delta$, для которой

$$\|f(t) - b(t)\|_E \leq \delta_3, \quad t \in [0, a] \setminus m_{\delta_3}. \quad (16)$$

Более того, функция $b \in \Delta$ может быть выбрана так, что $b(t) \equiv 0$ на m_{δ_3} и множество Δ слабо компактно в $L^1([0, a]; E)$. Тогда для I_1 имеет место оценка

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \int_0^{t_1-d} ((t_2 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2 - s) - (t_1 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1 - s)) (f(s) - b(s) + b(s)) ds \right\|_E \leq \\ &\leq \left\| \int_0^{t_1-d} ((t_2 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2 - s) - (t_1 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1 - s)) (f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \\ &+ \left\| \int_0^{t_1-d} ((t_2 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2 - s) - (t_1 - s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1 - s)) b(s) ds \right\|_E \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \int_{[0, t_1-d] \setminus m_{\delta_3}} ((t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s))(f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \\
&+ \left\| \int_{[0, t_1-d] \cap m_{\delta_3}} ((t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s))(f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \\
&+ \left\| \int_{[0, t_1-d] \setminus m_{\delta_3}} ((t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s))b(s) ds \right\|_E + \\
&+ \left\| \int_{[0, t_1-d] \cap m_{\delta_3}} ((t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s))b(s) ds \right\|_E = \\
&= \left\| \int_{[0, t_1-d] \setminus m_{\delta_3}} ((t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s))(f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \\
&+ \left\| \int_{[0, t_1-d] \cap m_{\delta_3}} ((t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s))(f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \\
&+ \left\| \int_{[0, t_1-d] \setminus m_{\delta_3}} ((t_2-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t_1-s))b(s) ds \right\|_E =: N_1 + N_2 + N_3.
\end{aligned}$$

Используя (16), можно подобрать $\delta_3 > 0$ настолько малым, что при $\text{mes}(m_{\delta_3}) < 2\epsilon d^{1-\alpha}/6$ выполняются оценки $N_1 < \epsilon/6$ и $N_2 < \epsilon/6$. Заметим, что функции из Δ принимают свои значения в K_{δ_3} , поэтому $\Delta \subset L^\infty([0, a]; E)$. Тогда, используя лемму 5, можно подобрать $\delta_4 > 0$ таким, что при $|t_2 - t_1| < \delta_4$ выполняется неравенство $N_3 < \epsilon/6$. Таким образом, для произвольного $\epsilon > 0$ можно подобрать $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ таким, что

$$\|S'(f)(t_2) - S'(f)(t_1)\|_E \leq Z_1 + Z_2 \leq Z_1 + I_1 + I_2 \leq Z_1 + I_2 + N_1 + N_2 + N_3 < \epsilon$$

для всех $f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ и $|t_2 - t_1| < \delta$, поэтому множество $S' \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ равностепенно непрерывно. Лемма доказана.

Оператор S'' может быть представлен следующим образом:

$$S''(f) = S'(BW^{-1}(x_1 - \mathcal{G}(a)x_0 - \Pi S'(f))),$$

где $\Pi: C([0, a]; E) \rightarrow E$, $\Pi x = x(a)$ — ограниченный линейный оператор. Учитывая, что операторы W^{-1} , B и S' также линейны и ограничены, можем сделать вывод, что и оператор S'' подчиняется условиям лемм 4–6. Но тогда и оператор $S = S' + S''$ удовлетворяет условиям этих лемм.

Введём теперь оператор $G: C([0, a]; E) \rightarrow C([0, a]; E)$, заданный формулой

$$\begin{aligned}
G(x)(t) &= \mathcal{G}(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s)f(s) ds + \\
&+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(t-s) \left[BW^{-1} \left(x_1 - \mathcal{G}(a)x_0 - \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-\tau)f(\tau) d\tau \right) (s) \right] ds,
\end{aligned}$$

где $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$.

Ясно, что функция $x \in C([0, a]; E)$ является неподвижной точкой мультиоператора G тогда и только тогда, когда функция $x \in C([0, a]; E)$ — интегральное решение задачи (1), (2), (5). Поэтому мы вправе свести исходную задачу к задаче о существовании неподвижных точек G .

Введём в пространстве $C([0, a]; E)$ меру некомпактности $\nu: Pb(C([0, a]; E)) \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ со значениями в конусе $\mathbb{R}_+^2$, определённую как $\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), \text{mod}_C(\Omega))$, где вторая компонента — модуль равностепенной непрерывности

$$\text{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|,$$

а $\varphi(\Omega)$ — модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0, a]} e^{-pt} \chi_E(\Omega(t)),$$

здесь константа $p > 0$ выбрана так, что

$$\varrho := \frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right) \sup_{t \in [0, a]} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-p(t-s)} ds \right) < 1.$$

Последнее неравенство реализуется следующим образом. Возьмем $d > 0$ таким, что

$$\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right) \frac{d^\alpha}{\alpha} < \frac{1}{2},$$

и по нему найдём $p > 0$ таким, что

$$\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right) \frac{1}{pd^{1-\alpha}} < \frac{1}{2}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right) \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-p(t-s)} ds \right) \leq \\ & \leq \frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right) \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^{t-d} (t-s)^{\alpha-1} e^{-p(t-s)} ds + \int_{t-d}^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-p(t-s)} ds \right) \leq \\ & \leq \frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right) \left(\frac{1}{d^{1-\alpha}} \frac{e^{-pd}}{p} + \frac{d^\alpha}{\alpha} \right) \leq \\ & \leq \frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right) \left(\frac{1}{pd^{1-\alpha}} + \frac{d^\alpha}{\alpha} \right) < 1. \end{aligned}$$

Известно (см. [14]), что МНК ν — монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и правильная.

Сформулируем условия, при которых мультиоператор G является уплотняющим.

Теорема 4. При выполнении условий (A) , $(A1)$, $(A2')$, $(A3)$, $(B1)$ – $(B4)$, (W) мультиоператор G является ν -уплотняющим.

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0, a]; E)$ — непустое ограниченное множество и $y_x \in C([0, a]; H)$ — решение задачи (3), (4), соответствующее функции $x \in C([0, a]; E)$. Предположим, что $\nu(G(\Omega)) \geq \nu(\Omega)$. Покажем, что Ω относительно компактно. Заметим, что теорему достаточно доказать для оператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$. Поскольку МНК ν несингулярна, имеем

$$\nu(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\varphi(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) \geq \varphi(\Omega). \quad (18)$$

С учётом условия (B4) для $0 \leq s \leq a$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \chi_E(\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(s)) &= \chi_E(\{f(s) : f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)\}) \leq \mu(s) \chi_E(\{x(s) : x \in \Omega\}) = \\ &= \mu(s) e^{ps} e^{-ps} \chi_E(\{x(s) : x \in \Omega\}) \leq \mu(s) e^{ps} \sup_{t \in [0, a]} e^{-ps} \chi_E(\{x(s) : x \in \Omega\}) = \mu(s) e^{ps} \varphi(\Omega), \end{aligned}$$

используя которую и лемму 4, выводим

$$\chi_E(S' \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(t)) \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \varphi(\Omega) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) e^{ps} ds \leq \frac{2M \|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \varphi(\Omega) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{ps} ds.$$

Далее, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \chi_E \left(\left\{ BW^{-1} \left(x_1 - \mathcal{G}(a)x_0 - \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-\tau) f(\tau) d\tau \right) (s) : f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega) \right\} \right) &\leq \\ &\leq M_1 \gamma(s) \chi_E \left(\left\{ \left(\int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-\tau) f(\tau) d\tau \right) (s) : f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega) \right\} \right) \leq \\ &\leq M_1 \gamma(s) \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \varphi(\Omega) \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} \mu(s) e^{ps} ds \leq \frac{2MM_1}{\Gamma(\alpha)} \|\mu\|_\infty \|\gamma\|_\infty \varphi(\Omega) \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} e^{ps} ds. \end{aligned}$$

Снова используя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} &\chi_E(S'' \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega(t))) \leq \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \chi_E \left(\left\{ BW^{-1} \left(x_1 - \mathcal{G}(a)x_0 - \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-\tau) f(\tau) d\tau \right) (s) : f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega) \right\} \right) ds \leq \\ &\leq \frac{4M^2 M_1}{\Gamma^2(\alpha)} \|\mu\|_\infty \|\gamma\|_\infty \varphi(\Omega) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{ps} ds \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} e^{p\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, a]} e^{-pt} \chi_E(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega(t))) &\leq \frac{2M \|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \varphi(\Omega) \sup_{t \in [0, a]} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-p(t-s)} ds \right) + \\ &+ \frac{8M^2 M_1}{\Gamma^2(\alpha)} \|\mu\|_\infty \|\gamma\|_\infty \varphi(\Omega) \sup_{t \in [0, a]} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-p(t-s)} ds \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right) \varphi(\Omega) \sup_{t \in [0, a]} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-p(t-s)} ds \right) = \rho \varphi(\Omega),$$

поэтому для $\rho < 1$

$$\varphi(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) \leq \rho \varphi(\Omega). \quad (19)$$

Сравнивая неравенства (18) и (19), приходим к равенству $\varphi(\Omega) = 0$.

Перейдём теперь к оценке модуля равностепенной непрерывности. Из (17) следует, что $\text{mod}_C(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) \geq \text{mod}_C(\Omega)$. По лемме 6 можно утверждать, что множество $S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ равностепенно непрерывно, поэтому $\text{mod}_C(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) = 0$. Значит, $\text{mod}_C(\Omega) = 0$.

Таким образом, $\nu(\Omega) = (0, 0)$, и заключаем, что Ω — относительно компактное множество, а G — уплотняющий мультиоператор относительно МНК ν . Теорема доказана.

Следующее утверждение устанавливается аналогично следствию 5.1.2 из [14].

Теорема 5. Мультиоператор G — п.н.св.

Теперь докажем главное утверждение настоящей статьи.

Теорема 6. При выполнении условий (A), (A1), (A2'), (A3), (B1)–(B4), (W) и условия подлинейного роста:

(B'3) существует функция $\varsigma \in L_+^\infty([0, a])$ такая, что

$$\|F(t, x, y)\|_E \leq \varsigma(t)(1 + \|x\|_E + \|y\|_H) \quad \text{для п.в. } t \in [0, a],$$

задача управляемости (1)–(5) имеет решение.

Доказательство. Заметим, что из условия (A3) следует существование константы $K > 0$ такой, что $\|y_x\|_{C([0, a]; H)} \leq K$.

Введём в пространстве $C([0, a]; E)$ норму $\|x\|_* = \max_{t \in [0, a]} e^{-pt} \|x(t)\|_E$, где константа $p > 0$ выбрана таким образом, что для числа $d > 0$ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \left(\frac{1}{pd^{1-\alpha}} + \frac{d^\alpha}{\alpha}\right) \leq N < 1.$$

В пространстве $C([0, a]; E)$ с нормой $\|\cdot\|_*$ рассмотрим замкнутый шар

$$\overline{B}_r(0) = \{x \in C([0, a]; E) : \|x\|_* \leq r\},$$

где $r > 0$ таково, что

$$M\|x_0\|_E + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E) + \frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + Nr \leq r.$$

Покажем, что мультиоператор G преобразует шар $\overline{B}_r(0)$ в себя. Возьмём произвольную функцию $x \in \overline{B}_r(0)$. Пусть $y_x \in C([0, a]; H)$ — соответствующее решение задачи (3), (4). Для $z \in G(x)$ и произвольного $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, используя лемму 2, условия (B3) и (11), получаем оценку

$$\begin{aligned} e^{-pt} \|z(t)\|_E &\leq e^{-pt} \|\mathcal{G}(t)x_0\|_E + e^{-pt} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\mathcal{T}(t-s)\|_{L(E)} \|f(s)\|_E ds + \\ &+ e^{-pt} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\mathcal{T}(t-s)\|_{L(E)} \left\| BW^{-1} \left(x_1 - \mathcal{G}(a)x_0 - \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-\tau) f(\tau) d\tau \right) (s) \right\|_E ds \leq \\ &\leq M\|x_0\|_E + e^{-pt} \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varsigma(s) (1 + \|x(s)\|_E + \|y_x(s)\|_H) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-pt} \frac{MM_1M_2}{\Gamma(\alpha)} \left(\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E + \left\| \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_E \right) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \leq \\
& \leq M\|x_0\|_E + e^{-pt} \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \zeta(s) (1 + \|x(s)\|_E + \|y_x(s)\|_H) ds + \\
& + e^{-pt} \frac{MM_1M_2}{\Gamma(\alpha)} \left(\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E + \left\| \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{T}(a-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_E \right) \frac{a^\alpha}{\alpha} \leq \\
& \leq M\|x_0\|_E + e^{-pt} \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \zeta(s) (1 + \|x(s)\|_E + \|y_x(s)\|_H) ds + \\
& + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E) + e^{-pt} \frac{M^2M_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \zeta(\tau) (1 + \|x(\tau)\|_E + \|y_x(\tau)\|_H) d\tau \leq \\
& \leq M\|x_0\|_E + e^{-pt} \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \zeta(s) (1 + \|x(s)\|_E + K) ds + \\
& + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E) + e^{-pt} \frac{M^2M_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} \zeta(\tau) (1 + \|x(\tau)\|_E + K) d\tau \leq \\
& \leq M\|x_0\|_E + e^{-pt} \frac{M\|\zeta\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{ps} e^{-ps} \|x(s)\|_E ds \right) + \\
& + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E) + \\
& + e^{-pt} \frac{M^2M_1M_2a^\alpha\|\zeta\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} ds + \int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1} e^{p\tau} e^{-p\tau} \|x(\tau)\|_E d\tau \right) \leq \\
& \leq M\|x_0\|_E + \frac{M\|\zeta\|_\infty(1+K)a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \|x\|_* \frac{M\|\zeta\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)} e^{-pt} \left(\int_0^{t-d} (t-s)^{\alpha-1} e^{ps} ds + \int_{t-d}^t (t-s)^{\alpha-1} e^{ps} ds \right) + \\
& + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E) + \frac{M^2M_1M_2a^{2\alpha}\|\zeta\|_\infty(1+K)}{\Gamma^2(\alpha+1)} + \\
& + \|x\|_* \frac{M^2M_1M_2a^\alpha\|\zeta\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} e^{-pt} \left(\int_0^{a-d} (a-\tau)^{\alpha-1} e^{p\tau} ds + \int_{a-d}^a (a-\tau)^{\alpha-1} e^{p\tau} d\tau \right) \leq \\
& \leq M\|x_0\|_E + \frac{M\|\zeta\|_\infty(1+K)a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \|x\|_* \frac{M\|\zeta\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)} \left(e^{-pt} \frac{1}{d^{1-\alpha}} \frac{e^{p(t-d)} - 1}{p} + \frac{d^\alpha}{\alpha} \right) + \\
& + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E) + \frac{M^2M_1M_2a^{2\alpha}\|\zeta\|_\infty(1+K)}{\Gamma^2(\alpha+1)} + \\
& + \|x\|_* \frac{M^2M_1M_2a^\alpha\|\zeta\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \left(e^{-pt} \frac{1}{d^{1-\alpha}} \frac{e^{p(a-d)} - 1}{p} + \frac{d^\alpha}{\alpha} \right) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M\|x_0\|_E + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E + M\|x_0\|_E) + \frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \\ &\quad + \|x\|_* \frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(\frac{1}{pd^{1-\alpha}} + \frac{d^\alpha}{\alpha}\right) \leq r. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|z\|_* \leq r$. Из теорем 4 и 5 известно, что мультиоператор G является п.н.св. и ν -уплотняющим. Тогда, ссылаясь на теорему 1, получаем доказательство существования решения задачи управляемости (1)–(5). Теорема доказана.

4. ПРИМЕР

Исследования многих авторов (см. монографию [9] и библиографию в ней) посвящены уравнению вида

$$D_t^\alpha x(s, t) = \frac{d^2 x(s, t)}{ds^2}. \quad (20)$$

Поскольку порядок α производной по времени в уравнении (20) может быть любого вещественного порядка, включая $\alpha = 1$, его называют *дробным диффузионно-волновым уравнением* [16]. При $\alpha = 1$ уравнение (20) становится классическим уравнением диффузии, при $0 < \alpha < 1$ имеет место так называемая сверхмедленная диффузия. Важно, что уравнение дробной диффузии связано с динамическими процессами во фрактальных средах: порядок полученного уравнения зависит от фрактала, который служит моделью пористого материала [17].

Пусть $\mathbb{R}^2$ — двумерная плоскость точек $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Через $\mathbb{R}_{++}^2 = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \geq 0\}$ обозначим первый квадрант, а через $L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$ и $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ — гильбертовы пространства функций, суммируемых с квадратом на соответствующих множествах.

Рассмотрим следующую дробную управляемую систему диффузионного типа:

$${}^C D_t^\alpha (v(t, \xi)) = (\Delta - c)v(t, \xi) + \sum_{i=1}^k \nu_i(t) \phi_i(\xi, v(t, \xi), y(t, \xi)) + Bu(t), \quad (t, \xi) \in [0, a] \times \mathbb{R}_{++}^2; \quad (21)$$

$$v(0, \xi) = v_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}_{++}^2; \quad v(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in [0, a] \times \partial\mathbb{R}_{++}^2; \quad (22)$$

$$-y_t'(t, \xi) \in N_M(y(t, \xi)) + m_\chi(\xi)v(t, \xi) + ly(t, \xi), \quad (t, \xi) \in [0, a] \times [0, 1] \times [0, 1]; \quad (23)$$

$$y(0, \xi) = y_0(\xi) \in M, \quad \xi \in [0, 1] \times [0, 1]; \quad (24)$$

$$v(a, \xi) = v_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}_{++}^2, \quad (25)$$

где $0 < \alpha < 1$, $\Delta = \partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2$ — оператор Лапласа; $c > 0$; m_χ — характеристическая функция для множества $[0, 1] \times [0, 1]$, т.е.

$$m_\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & (\xi_1, \xi_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ 0, & (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 \setminus [0, 1] \times [0, 1]; \end{cases}$$

v_0, y_0, v_1 — заданные функции; M — замкнутый единичный шар в $L^2([0, 1] \times [0, 1])$; N_M — нормальный конус ко множеству M в точке $y(t, \xi)$, определяемый по формуле (6); $y(t, \xi)$ — решение sweeping процесса (23), соответствующего функции $v(t, \xi)$.

Состояние управляемой системы описывается функцией $v: [0, a] \times \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$, $t \in [0, a]$.

Предполагается, что управляющие воздействия на систему делятся на два типа: с обратной связью и абсолютное. Управление с обратной связью характеризуется k источниками внешних воздействий, свойства которых зависят от решения $y(t, \xi)$ sweeping процесса (23). Плотности источников описываются функциями $\phi_i: \mathbb{R}_{++}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, причём при всех $t \in [0, a]$, для которых

$$\|y(t)\|_{L^2([0,1] \times [0,1])} = \int_0^1 \int_0^1 y^2(t, (\xi_1, \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2 = 1,$$

имеет место равенство $\phi_i(\xi, v, y) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}_{++}^2$, $i = \overline{1, k}$.

Интенсивности внешних воздействий регулируются управлениями $\nu_i: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, — измеримыми функциями, удовлетворяющими условиям обратной связи

$$\nu(t) = (\nu_1(t), \dots, \nu_k(t)) \in W(v(t, \cdot)), \quad t \in [0, a], \quad (26)$$

где W — п.н.св. мультиотображение из $L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$ в $\mathbb{R}^m$ с выпуклыми замкнутыми значениями, которое глобально ограничено, т.е. $\|W(x)\| \leq \mathcal{W}$ для всех $x \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$, где $\mathcal{W} > 0$.

Ограниченный линейный оператор $B: U \rightarrow L^\infty[0, a]$ из банахова пространства управлений U определяет абсолютное управление. Функция управления $u \in L^2([0, a]; U)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $A = \Delta - cI$ с областью определения $H_0^2(\mathbb{R}_{++}^2)$. Граничная задача

$$(\lambda I - A)z = f, \quad \lambda \geq 0; \quad z|_\Gamma = 0$$

для $f \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\Gamma = \partial\mathbb{R}_{++}^2$ разрешима, и операторы, сопоставляющие функции f решение z , ограничены. Применяя формулу Грина к выражению $\int_\Omega z \Delta z dx$, где $\Omega = \mathbb{R}_{++}^2$, получаем для $\lambda > 0$ следующую оценку:

$$(\lambda + c)\|z\|^2 \leq (\lambda + c)\langle z, z \rangle - \int_\Omega z \Delta z dx = \langle (\lambda I - A)z, z \rangle \leq \|f\| \|z\|.$$

Тогда для резольвенты $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ имеем

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda + c} \quad \text{для } \lambda > 0.$$

Это означает, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу e^{At} , удовлетворяющую оценке $\|e^{At}\| \leq e^{-ct}$, $t \geq 0$.

Предполагается, что функции ϕ_i , $i = \overline{1, k}$, удовлетворяют следующим условиям:

(C1) $\phi_i(\cdot, v, y): \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ измерим для всех $(v, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(C2) $|\phi_i(\xi, v, y)| \leq \omega_i(\xi)$ для п.в. $(\xi, v, y) \in \mathbb{R}_{++}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, где $\omega_i \in L_+^2(\mathbb{R}_{++}^2)$;

(C3) $|\phi_i(\xi, v_1, y) - \phi_i(\xi, v_2, y)| \leq \mu_i |v_1 - v_2|$ для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ и $(\xi, y) \in \mathbb{R}_{++}^2 \times \mathbb{R}$.

Тогда отображение $h: L^2(\mathbb{R}_{++}^2) \times L^2([0, 1] \times [0, 1]) \times \mathcal{B}_W(\mathbb{R}^k) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$, где $\mathcal{B}_W(\mathbb{R}^k) = \{\nu \in \mathbb{R}^k: \|\nu\| \leq \mathcal{W}\}$, определённое как

$$h(v, y, \nu)(\xi) = \sum_{i=1}^k \nu_i \phi_i(\xi, v(\xi), \bar{y}(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}_{++}^2,$$

μ -липшицево по v , где

$$\mu = \mathcal{W} \left[\sum_{i=1}^k \mu_i^2 \right]^{1/2}, \quad \bar{y}(\xi) = \begin{cases} y(\xi), & (\xi_1, \xi_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ 0, & (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 \setminus [0, 1] \times [0, 1], \end{cases}$$

и компактно по ν , т.е. множество $h(v, y, \mathcal{B}_{\mathcal{W}}(\mathbb{R}^k))$ относительно компактно в $L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$ для всех $(v, y) \in L^2(\mathbb{R}_{++}^2) \times L^2([0, 1] \times [0, 1])$.

В таком случае мультиотображение $F: L^2(\mathbb{R}_{++}^2) \times L^2([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow Kv(L^2(\mathbb{R}_{++}^2))$

$$F(x, y) = h(x, y, W(x))$$

удовлетворяет условиям (B1), (B2), (B'3), (B4) с $\varsigma(t) \equiv \omega := \mathcal{W}[\sum_{i=1}^k \|\omega_i\|_{L^2}^2]^{1/2}$ в условии (B'3) и $\mu(t) \equiv \mu$ в условии (B4).

Тогда система для пространств $E = L^2(\mathbb{R}_{++}^2)$, $H = L^2([0, 1] \times [0, 1])$ может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha x(t) &\in Ax(t) + F(x(t), y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, a], \\ -y'(t) &\in N_M(y(t)) + m_\chi(\xi)x(t) + ly(t), \quad t \in [0, a]. \end{aligned}$$

Поэтому имеет место следующая

Теорема 7. При выполнении условий (A), (A1), (A2'), (A3), (C1)–(C3) и (W) система (21)–(25) является управляемой.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-71-10008).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balachandran, K. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey / K. Balachandran, J.P. Dauer // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — V. 115. — P. 7–28.
2. Benedetti, I. Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator / I. Benedetti, V. Obukhovskii, P. Zecca // Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. — 2011. — V. 31. — P. 39–69.
3. Górniewicz, L. Controllability of semilinear differential equations and inclusions via semigroup theory in Banach spaces / L. Górniewicz, S.K. Ntouyas, D. O'Regan // Rep. Math. Phys. — 2005. — V. 56. — P. 437–470.
4. Monteiro Marques, M.D.P. Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems. Shocks and dry friction / M.D.P. Monteiro Marques // Progress Nonlin. Differ. Equat. Appl. — 1993. — V. 9.
5. Valadier, M. Raffe et viabilite / M. Valadier // Sem. Anal. Convexe Exp. — 1992. — V. 22, № 17.
6. Edmond, J.F. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process / J.F. Edmond, L. Thibault // Math. Program. Ser. B. — 2005. — V. 104. — P. 347–373.
7. Толстоногов, А.А. Локальные условия существования решений процессов выметания / А.А. Толстоногов // Мат. сб. — 2019. — Т. 210, № 9. — С. 107–128.
8. Kilbas, A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam : Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, 2006.
9. Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego : Academic Press, 1999.
10. Gomoyunov, M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems / M.I. Gomoyunov // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2018. — V. 21. — P. 1238–1261.
11. On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, C.F. Wen, V. Bocharov // J. Nonlin. Var. Anal. — 2022. — V. 6, № 3. — P. 185–197.

12. Петросян, Г.Г. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. — 2022. — Т. 32, № 3. — С. 415–432.
13. Zhou, Y. Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations / Y. Zhou, F. Jiao // Comput. Math. Appl. — 2010. — V. 59. — P. 1063–1077.
14. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin ; New-York : Walter de Gruyter, 2001.
15. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М. : Книжный дом “Либроком”, 2011. — 224 с.
16. Mainardi, F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation / F. Mainardi, S. Rionero, T. Ruggeri // Waves and Stability in Continuous Media. — 1994. — P. 246–251.
17. Nigmatullin, R.R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry / R.R. Nigmatullin // Phys. Status Solidi B. — 1986. — V. 133. — P. 425–430.

ON FEEDBACK CONTROL SYSTEMS GOVERNED BY FRACTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© 2024 / G. G. Petrosyan

Voronezh State Pedagogical University, Russia
e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

For feedback systems governed by fractional semilinear differential inclusions and a sweeping process in a Hilbert space, controllability conditions are found. For the proof, topological methods of nonlinear analysis for multivalued condensing maps are used.

Keywords: controllability problem, differential inclusion, sweeping process, fractional derivative, condensing mapping, measure of non-compactness

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-71-10008).

REFERENCES

1. Balachandran, K. and Dauer, J.P., Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey, *J. Optim. Theory Appl.*, 2002, vol. 115, pp. 7–28.
2. Benedetti, I., Obukhovskii, V., and Zecca, P., Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator, *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.*, 2011, vol. 31, pp. 39–69.
3. Górniewicz, L., Ntouyas, S.K., and O'Regan, D., Controllability of semilinear differential equations and inclusions via semigroup theory in Banach spaces, *Rep. Math. Phys.*, 2005, vol. 56, pp. 437–470.
4. Monteiro Marques, M.D.P., Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems. Shocks and dry friction, *Progress Nonlin. Differ. Equat. Appl.*, 1993, vol. 9.
5. Valadier, M., Raffe et viabilite, *Sem. Anal. Convexe Exp.*, 1992, vol. 22, no. 17.
6. Edmond, J.F. and Thibault, L., Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process, *Math. Program. Ser. B.*, 2005, vol. 104, pp. 347–373.
7. Tolstonogov, A.A., Local existence conditions for sweeping process solutions, *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 9, pp. 1305–1325.
8. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., and Trujillo, J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, 2006.
9. Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press, 1999.
10. Gomoyunov, M.I., Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, pp. 1238–1261.

11. Obukhovskii, V., Petrosyan, G., Wen, C.F., and Bocharov, V., On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces, *J. Nonlin. Var. Anal.*, 2022, vol. 6, no. 3, pp. 185–197.
12. Petrosyan, G., On a boundary value problem for a class of fractional Langevin type differential equations in a Banach space, *Vestn. Udmurt. Un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, no. 3, pp. 415–432.
13. Zhou, Y. and Jiao, F., Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, *Comput. Math. Appl.*, 2010, vol. 59, pp. 1063–1077.
14. Kamenskii, M., Obukhovskii, V., and Zecca, P., *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Berlin; New-York: Walter de Gruyter, 2001.
15. Borisovich, Yu.G., Gel'man, B.D., Myshkis, A.D., and Obukhovskii, V.V., *Vvedeniye v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vkluycheniy* (Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions), Moscow: Librocom, 2011.
16. Mainardi, F., Rionero, S., and Ruggeri, T., On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, *Waves and Stability in Continuous Media*, 1994, pp. 246–251.
17. Nigmatullin, R.R., The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, *Phys. Status Solidi B*, 1986, vol. 133, pp. 425–430.