

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ В КЛАССЕ $C^{1,0}(\overline{D})$ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

© 2024 г. Е. А. Бадерко¹, С. И. Сахаров²

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

e-mail: ¹baderko.ea@yandex.ru, ²ser341516@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.07.2024 г., после доработки 11.07.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Установлена однозначная разрешимость задачи Коши в полосе для параболической по И.Г. Петровскому системы уравнений второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в пространстве непрерывных и ограниченных вместе с производной первого порядка по пространственной переменной в замыкании полосы функций. Найдено интегральное представление решения задачи, получены соответствующие оценки этого решения.

Ключевые слова: параболическая система, задача Коши, условие Дини

DOI: 10.31857/S0374064124110049, EDN: JEKDOY

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача Коши для одномерной по пространственной переменной параболической системы второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини. Начальная функция предполагается непрерывной и ограниченной вместе со своей производной первого порядка.

Из общей теории краевых задач для параболических систем (см. [1; 2, с. 707]) следует однозначная разрешимость задачи Коши для параболической системы второго порядка с гёльдеровскими коэффициентами в пространстве $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$, где $0 < \alpha < 1$. В статье [3] эти результаты были обобщены на случай растущих при $t \rightarrow +\infty$ решений.

Из результатов работы [4], где рассматривался случай параболического уравнения высокого порядка с гёльдеровскими коэффициентами, вытекает, в частности, однозначная разрешимость в пространстве $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$, задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с начальной функцией из класса $H^{1+\alpha}(\mathbb{R})$.

Задача Коши для одного параболического уравнения в пространстве Дини–Гёльдера $H^{1+\omega, 1/2+\hat{\omega}}(\overline{D})$, где $\omega, \hat{\omega}$ — некоторые модули непрерывности, при тройном условии Дини на коэффициенты уравнения рассматривалась в [5], при двойном условии Дини на эти коэффициенты — в [6]. В [7, 8] задача Коши для параболического уравнения исследована в пространствах Зигмунда.

В статьях [9, 10] установлена разрешимость задачи Коши для параболической системы с одной пространственной переменной, с гёльдеровскими коэффициентами, с начальной функцией из класса $H^{1+\alpha}(\mathbb{R})$ в пространстве $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$. Вопрос о единственности решения этой задачи не рассматривался.

В статье [11] доказана теорема об однозначной разрешимости задачи Коши для параболических систем в весовом пространстве Гёльдера $C_{\lambda,\alpha}^{2,\alpha}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ функций, которые могут расти определённым образом при $t \rightarrow +\infty$ вместе со своими пространственными производными первого порядка, а их временная производная первого порядка и пространственные производные второго порядка могут расти как при $t \rightarrow +0$, так и при $t \rightarrow +\infty$. При этом предполагается, что коэффициенты системы локально гёльдеровы, младшие коэффициенты могут расти определённым образом при $t \rightarrow +0$, а правая часть системы может расти определённым образом как при $t \rightarrow +0$, так и при $t \rightarrow +\infty$.

Теорема о единственности решения задачи Коши для параболических систем второго порядка из пространства функций, принадлежащих классу Тихонова, пространственные производные первого и второго порядков которых принадлежат классу Тихонова в каждом слое $\mathbb{R}^n \times (t_1, T]$, $t_1 \in (0, T)$, доказана в [12–14]. При этом предполагается, что коэффициенты систем при младших членах ограничены и непрерывны, а при старших ограничены, равномерно непрерывны и Дини-непрерывны по пространственной переменной.

В [15] установлена однозначная разрешимость в пространстве $\hat{C}^{2,1}(\bar{D})$ задачи Коши для однородной параболической системы, коэффициенты которой удовлетворяют двойному условию Дини, с начальной функцией, непрерывной и ограниченной вместе со своими производными первого и второго порядков. Пространство $\hat{C}^{2,1}(\bar{D})$ совпадает с пространством $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{D})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$, причём нормы в этих пространствах эквивалентны.

Естественно возникает вопрос: справедливы ли описанные выше результаты из работ [4, 9, 10] при подстановке $\alpha = 0$ в определения пространств $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{D})$ и $H^{1+\alpha}(\mathbb{R})$? В настоящей статье на него дан положительный ответ. А именно при сформулированных выше условиях на коэффициенты параболической системы и на начальную функцию доказано, что сумма объёмного потенциала и потенциала Пуассона является решением задачи Коши из пространства $\hat{C}^{1,0}(\bar{D})$ (см. п. 1), которое совпадает с пространством $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{D})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$, и нормы в этих пространствах эквивалентны. Также доказана единственность классического решения задачи Коши в пространстве функций, ограниченных и непрерывных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании полосы.

Заметим, что достаточно слабые условия на коэффициенты системы и на начальную функцию не позволяют воспользоваться известными методами исследования характера гладкости решения задачи Коши в классах Гёльдера и Дини–Гёльдера. Используемый в настоящей работе метод опирается на подход из [15] и на свойства фундаментальных матриц решений параболических систем.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Следуя [16, с. 151], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\omega(0) = 0$. Модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\tilde{\omega}(z) \equiv \int_0^z y^{-1} \omega(y) dy < +\infty, \quad z > 0, \quad (1)$$

и *двойному условию Дини*, если

$$\tilde{\tilde{\omega}}(z) \equiv \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y x^{-1} \omega(x) dx < +\infty, \quad z > 0. \quad (2)$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество модулей непрерывности, удовлетворяющих условию Дини (1), а через $\mathcal{D}^2$ — двойному условию Дини (2).

Функция $\nu(z)$, $z > 0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leq C\nu(z_2)$, $z_1 \geq z_2 > 0$. В отдельных случаях мы будем требовать, чтобы модуль непрерывности ω удовлетворял следующему условию:

Условие А. Существует такое $\varepsilon \in (0, 1)$, что функция $\omega(z)z^{-\varepsilon}$, $z > 0$, почти убывает.

Через $C^1(\mathbb{R})$ обозначим пространство (вектор-)функций, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со своей производной первого порядка h' , с нормой

$$\|h; \mathbb{R}\|^1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(x)|.$$

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Обозначим $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)\}$, где $T > 0$ — фиксированное число, $D_0 = \{(x, t) \in \overline{D}: t = 0\}$.

Пусть $\Omega \subset D$ — произвольная область. Через $C^0(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$ (вектор-)функций с нормой $\|u; \Omega\|^0 = \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x, t)|$. Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω .

Введём пространства

$$\begin{aligned} C^{1,0}(\overline{\Omega}) &= \{u \in C^0(\overline{\Omega}): \partial_x u \in C^0(\overline{\Omega})\}, \quad \|u; \Omega\|^{1,0} = \sum_{k=0}^1 \|\partial_x^k u; \Omega\|^0, \\ \hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega}) &= \left\{ u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}): \|u; \Omega\|^1 = \|u; \Omega\|^{1,0} + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega, \\ \Delta t \neq 0}} \frac{|\Delta_t u(x, t)|}{|\Delta t|^{1/2}} < \infty \right\}, \\ C_0^{1,0}(\overline{\Omega}) &= \{u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}): \partial_x^k u(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1\}, \\ \hat{C}_0^{1,0}(\overline{\Omega}) &= \{u \in \hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega}): \partial_x^k u(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1\}. \end{aligned}$$

Заметим, что пространство $\hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ совпадает с пространством Гёльдера $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$ (см. [2, с. 16]) при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$. При этом нормы в этих пространствах эквивалентны.

Положим $C^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}): \partial_t^l \partial_x^k u \in C^0(\overline{\Omega}), \quad 1 \leq 2l + k \leq 2\}$. Обозначим через $C^{2,1}(\overline{D} \setminus D_0)$ пространство (вектор-)функций, непрерывных вместе со своими производными $\partial_t u$, $\partial_x^k u$ ($k = 1, 2$) в $\overline{D} \setminus D_0$.

Пусть $\mathcal{D}_x^{loc}(\overline{D} \setminus D_0)$ — пространство (вектор-)функций f таких, что для каждой ограниченной области Ω , для которой $\overline{\Omega} \subset \overline{D} \setminus D_0$, существует такой модуль непрерывности $\omega_\Omega \in \mathcal{D}$, что

$$|\Delta_x f(x, t)| \leq \omega_\Omega(|\Delta x|), \quad (x, t), (x + \Delta x, t) \in \overline{\Omega},$$

где $\Delta_x f(x, t) = f(x + \Delta x, t) - f(x, t)$.

Введём пространство $C_{1/2}(\overline{D} \setminus D_0)$ (вектор-)функций f , непрерывных в $\overline{D} \setminus D_0$, для которых $\|f; \overline{D} \setminus D_0\|_{1/2} = \sup_{(x,t) \in \overline{D} \setminus D_0} |f(x, t)|t^{1/2} < +\infty$.

Пусть число $m \in \mathbb{N}$ фиксировано. Рассмотрим равномерно параболический по И.Г. Петровскому (см. [17]) оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^2 A_k(x, t) \partial_x^k u, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T,$$

где $A_k = \|a_{ijk}\|$, $k = 0, 1, 2$, — $m \times m$ -матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые в $\overline{D}$, и выполнены условия:

а) собственные числа μ_r , $r = \overline{1, m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \overline{D}$;

б) $|a_{ijk}(x + \Delta x, t + \Delta t) - a_{ijk}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $(x, t), (x + \Delta x, t + \Delta t) \in \overline{D}$, где $\omega_0 \in \mathcal{D}^2$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию А.

Пусть

$$Z(x, t; A_2(\xi, \tau)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \exp\{-y^2 t A_2(\xi, \tau)\} dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \quad (\xi, \tau) \in \overline{D}. \quad (3)$$

Имеют место следующие оценки (см. [18, с. 298, 306]):

$$\begin{aligned} |\partial_t^l \partial_x^k Z(x, t; A_2(\xi, \tau))| &\leq C(l, k) t^{-(2l+k+1)/2} \exp\{-cx^2/t\}, \\ |\partial_t^l \partial_x^k Z(x, t; A_2(\xi + \Delta\xi, \tau + \Delta\tau)) - \partial_t^l \partial_x^k Z(x, t; A_2(\xi, \tau))| &\leq \\ &\leq C(l, k) [\omega_0(|\Delta\xi|) + \omega_0(|\Delta\tau|^{1/2})] t^{-(2l+k+1)/2} \exp\{-cx^2/t\}, \\ (x, t) \in D, \quad (\xi + \Delta\xi, \tau + \Delta\tau), (\xi, \tau) \in \overline{D}, \quad l, k \geq 0. \end{aligned}$$

Обозначим $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \overline{D} \times \overline{D} : t > \tau\}$. Матрицу $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$, $(x, t; \xi, \tau) \in D^*$, называем *фундаментальной матрицей решений (ФМР)* системы $Lu = 0$, если её элементы Γ_{ij} , $i, j = \overline{1, m}$, являются непрерывными функциями в своей области определения и для любой финитной и непрерывной (вектор-)функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h = (h_1, \dots, h_m)^T$, и любого $\tau_0 \in [0, T]$ (вектор-)функция (потенциал Пуассона)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau_0) h(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [\tau_0, T],$$

является ограниченным решением задачи Коши

$$Lu = 0 \text{ в } \mathbb{R} \times (\tau_0, T], \quad u(x, \tau_0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющим (в случае $m \geq 2$) для любого $\sigma \in (0, T - \tau_0]$ условиям

$$|\partial_x^k u(x, t)| \leq C(\sigma), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [\tau_0 + \sigma, T], \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

для некоторой постоянной $C(\sigma)$.

Из результатов [14] о единственности решения задачи Коши для параболических систем следует единственность ФМР системы $Lu = 0$, если $m \geq 2$. В случае $m = 1$ требование (4) можно опустить и воспользоваться теоремой о единственности решения задачи Коши для одного уравнения (см. [2, с. 29]).

Известно (см. [19, 20]), что при выполнении условий а), б) у системы $Lu = 0$ существует ФМР $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$, справедливы оценки

$$|\partial_t^l \partial_x^k \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\} \quad (5)$$

и, кроме того, для разности

$$W(x, t; \xi, \tau) \equiv \Gamma(x, t; \xi, \tau) - Z(x - \xi, t - \tau; A_2(\xi, \tau))$$

выполнены неравенства

$$|\partial_t^l \partial_x^k W(x, t; \xi, \tau)| \leq C\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}, \quad (6)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$, $2l + k \leq 2$.

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m и коэффициентов оператора L .

Рассмотрим задачу Коши: найти (вектор-)функцию $u \in C^{2,1}(\overline{D} \setminus D_0)$, являющуюся решением параболической системы

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D} \setminus D_0, \quad (7)$$

и удовлетворяющую начальному условию

$$u(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Основным результатом настоящей работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия а) и б). Пусть $u \in C_0^{1,0}(\overline{D})$ — решение задачи Коши

$$Lu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \overline{D} \setminus D_0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия а) и б). Тогда для любой функции $h \in C^1(\mathbb{R})$ и любой функции $f \in C_{1/2}(\overline{D} \setminus D_0) \cap \mathcal{D}_x^{loc}(\overline{D} \setminus D_0)$, удовлетворяющей условию: для любого $B > 0$ существует модуль непрерывности ω_B такой, что выполняется неравенство

$$|f(x, t)| \leq \omega_B(t^{1/2})t^{-1/2}, \quad x \in [-B, B], \quad 0 < t \leq T, \quad (10)$$

существует единственное решение задачи (7), (8) из пространства $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ и для него справедливы представления

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi \equiv \\ &\equiv (Ph)(x, t) + (Vf)(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D}, \end{aligned} \quad (11)$$

и оценка

$$\|u; D\|^1 \leq C(\|h; \mathbb{R}\|^1 + \|f; \overline{D} \setminus D_0\|_{1/2}). \quad (12)$$

Замечание 1. Если условие $f \in \mathcal{D}_x^{loc}(\overline{D} \setminus D_0)$ не выполнено, то регулярного решения системы (7) может не существовать (см. [21]).

2. СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛА ПУАССОНА

Приведём сведения о ФМР параболических систем и потенциале Пуассона Ph (см. (11)), которые будут использованы в дальнейшем. Для оператора

$$L_1 u = \partial_t u - A_2(x, t) \partial_x^2 u - A_1(x, t) \partial_x u$$

ФМР системы $L_1 u = 0$ может быть представлена в виде

$$\Gamma_1(x, t; \xi, \tau) = Z(x - \xi, t - \tau; A_2(\xi, \tau)) + W_1(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*,$$

где для W_1 выполнены оценки (6). Справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) d\xi = E, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

где E — единичная $m \times m$ -матрица.

Для ФМР $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ в дальнейшем будут полезны представление

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) + W_2(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*,$$

где

$$W_2(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy,$$

и оценки [15]

$$|\partial_x^k W_2(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{(1-k)/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad k = 0, 1, 2.$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия а), б). Тогда для интеграла W_2 справедливо неравенство

$$|\Delta_t W_2(x, t; \xi, \tau)| \leq C(\Delta t) |\ln(\Delta t/T)| (t - \tau)^{-1/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}, \quad (13)$$

$x, \xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < t < t + \Delta t \leq T$, $\Delta t \leq t - \tau$.

Доказательство. Положим

$$\nu(y, \eta; \xi, \tau) = A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau)$$

и заметим, что выполнена оценка

$$|\nu(y, \eta; \xi, \tau)| \leq C(\eta - \tau)^{-1/2} \exp\{-c(y - \xi)^2/(\eta - \tau)\}, \quad (y, \eta; \xi, \tau) \in D^*. \quad (14)$$

Имеет место представление

$$\begin{aligned} \Delta_t W_2(x, t; \xi, \tau) &= \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t + \Delta t; y, \eta) \nu(y, \eta; \xi, \tau) d\xi - \\ &- \int_{t-\Delta t}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; y, \eta) \nu(y, \eta; \xi, \tau) d\xi + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \Gamma(x, t; y, \eta) \nu(y, \eta; \xi, \tau) d\xi \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^3 I_i(x, t, \Delta t; \xi, \tau), \quad x, \xi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t < t + \Delta t \leq T, \quad \Delta t \leq t - \tau. \end{aligned}$$

Оценки для интегралов I_1 и I_2 сразу следуют из (5):

$$|I_j(x, t, \Delta t; \xi, \tau)| \leq C(\Delta t)^{1/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}, \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Оценим I_3 :

$$\begin{aligned} |I_3(x, t, \Delta t; \xi, \tau)| &\leq C\Delta t (t - \tau)^{-1/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\} \int_{\tau}^{t-\Delta t} (t - \eta)^{-1} d\eta \leq \\ &\leq C\Delta t |\ln(\Delta t/T)| (t - \tau)^{-1/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15), (16) следует неравенство (13). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия а) и б). Тогда для любой (вектор-)функции $h \in C^1(\mathbb{R})$ для потенциала Пуассона Ph справедливы включения $Ph \in \hat{C}^{1,0}(\bar{D})$ и оценка $\|Ph; D\|^1 \leq C\|h; \mathbb{R}\|^1$. При этом имеют место предельные соотношения

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, +0)} \partial_x^k (Ph)(x, t) = \frac{d^k h}{dx^k}(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1,$$

в которых стремление к пределу равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}$, если $k = 0$, и равномерно по $x_0 \in [-B, B]$ для любого $B > 0$, если $k = 1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|\partial_x^k(Ph)(x, t)| \leq C_h, \quad k=0, 1, \quad (17)$$

$$|\Delta_t(Ph)(x, t)| \leq C_h |\Delta t|^{1/2}, \quad (x, t), (x, t + \Delta t) \in D, \quad (18)$$

и, в силу гладкости h , предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +0} \partial_x^k(Ph)(x, t) = \frac{d^k h}{dx^k}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k=0, 1, \quad (19)$$

в которых стремление к пределу равномерно по $x \in \mathbb{R}$, если $k=0$, и равномерно по $x \in [-B, B]$ для любого $B > 0$, если $k=1$. Здесь и далее обозначаем $C_h = C \|h; \mathbb{R}\|^1$.

Для доказательства (17) и (19) при $k=0$ используем представление

$$\begin{aligned} (Ph)(x, t) &= h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; \xi, 0) [h(\xi) - h(x)] d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi \equiv \\ &\equiv h(x) + I_1(x, t) + I_2(x, t), \quad (x, t) \in D. \end{aligned} \quad (20)$$

Справедливы неравенства

$$|I_1(x, t)| \leq C_h \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \xi| t^{-1/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h t^{1/2}, \quad (21)$$

$$|I_2(x, t)| \leq C_h \int_{-\infty}^{+\infty} t^{1/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h t, \quad (22)$$

из которых вытекают оценка (17) и предельное соотношение (19) при $k=0$.

Докажем (17) при $k=1$. Имеет место представление

$$\begin{aligned} \partial_x(Ph)(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \Gamma_1(x, t; \xi, 0) [h(\xi) - h(x)] d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x W_2(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi \equiv \\ &\equiv J_1(x, t) + J_2(x, t), \quad (x, t) \in D. \end{aligned}$$

Из оценок

$$|J_1(x, t)| \leq C_h \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \xi| t^{-1} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h,$$

$$|J_2(x, t)| \leq C_h \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h t^{1/2}$$

следует (17) при $k=1$.

Докажем теперь (19) при $k=1$. Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} \partial_x(Ph)(x, t) &= h'(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} Z(x - \xi, t; A_2(x, 0)) [h'(\xi) - h'(x)] d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} [\partial_x Z(x - \xi, t; A_2(\xi, 0)) - \partial_x Z(x - \xi, t; A_2(z, 0))|_{z=x}] [h(\xi) - h(x)] d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x W_1(x, t; \xi, 0) [h(\xi) - h(x)] d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x W_2(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi \equiv h'(x) + \sum_{i=1}^4 R_i(x, t), \quad (x, t) \in D. \end{aligned}$$

Оценим слагаемое R_1 . Зафиксируем произвольно число $B > 0$ и рассмотрим модуль непрерывности (вектор-)функции h' на отрезке $[-2B, 2B]$:

$$\omega_{h'}^{(2B)}(z) = \sup_{|\Delta x| \leq z, \ x, x+\Delta x \in [-2B, 2B]} |\Delta_x h'(x)|.$$

Учитывая неравенства

$$|\xi - x| \geq |\xi| - |x| \geq \frac{|\xi|}{2}, \quad |x| \leq B, \quad |\xi| \geq 2B, \quad (23)$$

получаем

$$\begin{aligned} |R_1(x, t)| &\leq \left(\int_{|\xi| \leq 2B} + \int_{|\xi| \geq 2B} \right) |Z(x - \xi, t; A_2(x, 0))| |h'(\xi) - h'(x)| d\xi \leq \\ &\leq C\omega_{h'}^{(2B)}(t^{1/2}) + C_h \exp\{-cB^2/t\}, \quad x \in [-B, B], \quad 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

откуда следует предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +0} R_1(x, t) = 0, \quad (24)$$

в котором стремление к нулю равномерно по $x \in [-B, B]$.

Оценим интегралы R_i , $i = 2, 3, 4$:

$$|R_2(x, t)| \leq C_h \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \xi| \omega_0(|x - \xi|) t^{-1} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h \omega_0(t^{1/2}),$$

$$|R_3(x, t)| \leq C_h \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \xi| \tilde{\omega}_0(t^{1/2}) t^{-1} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h \tilde{\omega}_0(t^{1/2}),$$

$$|R_4(x, t)| \leq C_h \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h t^{1/2}.$$

Из полученных оценок и соотношения (24) вытекает справедливость (19) при $k = 1$.

Неравенство (18) докажем с помощью представления (20). В силу (21), (22) достаточно рассмотреть случай $0 < \Delta t < t$. Тогда (18) следует из оценок

$$|\Delta_t I_1(x, t)| \leq C_h \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \xi| t^{-3/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h (\Delta t)^{1/2},$$

$$|\Delta_t I_2(x, t)| \leq C_h \Delta t |\ln(\Delta t/T)| \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/t\} d\xi \leq C_h (\Delta t)^{1/2},$$

$$(x, t), (x, t + \Delta t) \in D, \quad 0 < \Delta t < t.$$

Лемма доказана.

3. СВОЙСТВА ОБЪЁМНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Лемма 3. Пусть выполнены условия а) и б). Тогда для любой функции $f \in C_{1/2}(\overline{D} \setminus D_0)$, удовлетворяющей условию: для любого $B > 0$ существует модуль непрерывности ω_B такой, что выполняется неравенство (10), для объёмного потенциала Vf (см. (11)) справедливы

включение $Vf \in \hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ и оценка $\|Vf; D\|^1 \leq C\|f; \overline{D} \setminus D_0\|_{1/2}$. При этом имеют место предельные соотношения

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, +0)} \partial_x^k(Vf)(x, t) = 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1,$$

в которых стремление к нулю равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}$, если $k = 0$, и равномерно по $x_0 \in [-B, B]$ для любого $B > 0$, если $k = 1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|\partial_x^k(Vf)(x, t)| \leq C_f t^{(1-k)/2}, \quad k = 0, 1, \quad (25)$$

$$|\Delta_t(Vf)(x, t)| \leq C_f |\Delta t|^{1/2}, \quad (26)$$

$(x, t), (x, t + \Delta t) \in \overline{D}$, и предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +0} \partial_x^k(Vf)(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \quad (27)$$

в которых стремление к нулю равномерно по $x \in \mathbb{R}$, если $k = 0$, и равномерно по $x \in [-B, B]$ для любого $B > 0$, если $k = 1$. Здесь и далее обозначаем $C_f = C\|f; \overline{D} \setminus D_0\|_{1/2}$.

Оценки (25) сразу следуют из (5). Докажем оценку (26). В силу (25) достаточно рассмотреть случай $0 < 2\Delta t < t$. Тогда (26) следует из представления

$$\begin{aligned} \Delta_t(Vf)(x, t) &= \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t + \Delta t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi \equiv \\ &\equiv J_1(x, t, \Delta t) + J_2(x, t, \Delta t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < 2\Delta t < t < t + \Delta t \leq T, \end{aligned}$$

и справедливых при $x \in \mathbb{R}$, $0 < 2\Delta t < t < t + \Delta t \leq T$ неравенств

$$\begin{aligned} |J_1(x, t, \Delta t)| &\leq C_f \int_t^{t+\Delta t} \tau^{-1/2} d\tau \leq C_f (\Delta t)^{1/2}, \\ |J_2(x, t, \Delta t)| &\leq C_f (\Delta t)^{1/2} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \tau^{-1/2} d\tau \leq C_f (\Delta t)^{1/2}. \end{aligned}$$

Наконец, докажем, что выполнены предельные соотношения (27). Из оценки (25) сразу следует, что (27) имеет место при $k = 0$. Пусть $k = 1$. Зафиксируем произвольно $B > 0$ и в силу неравенств (23) имеем

$$|\partial_x(Vf)(x, t)| = \left| \int_0^t d\tau \left(\int_{|\xi| \leq 2B} + \int_{|\xi| \geq 2B} \right) \partial_x \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi \right| \leq C_f (\omega_{2B}(t^{1/2}) + \exp\{-cB^2/t\}),$$

$x \in [-B, B]$, $0 < t \leq T$, откуда следует соотношение (27) при $k = 1$. Лемма доказана.

Замечание 2. В случае одного параболического уравнения утверждение леммы 3 следует из [6] при дополнительном условии: существует такой модуль непрерывности ω , что выполняется неравенство $|f(x, t)| \leq \omega(t^{1/2})t^{-1/2}$ для любых $(x, t) \in \overline{D} \setminus D_0$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. Пусть $u \in \hat{C}_0^{1,0}(\overline{D})$ — решение задачи (9). Для любых числа $s > 0$, ограниченной вектор-функции $v: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ и множества $\hat{D} \subset \overline{D}$ положим

$$\omega(s; v; \hat{D}) = \sup_{|z_1 - z_2| \leq s, z_1, z_2 \in \hat{D}} |v(z_1) - v(z_2)|. \quad (28)$$

Для произвольного числа $R > 0$ обозначим

$$\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}. \quad (29)$$

Зафиксируем произвольно точку $(x_0, t_0) \in D$ и докажем, что $u(x_0, t_0) = 0$. Достаточно показать, что для любого $\sigma > 0$ справедливо неравенство

$$|u(x_0, t_0)| < \sigma. \quad (30)$$

Зафиксируем произвольно $\sigma > 0$ и рассмотрим полосу $D_{t_1} = \{(x, t) \in \bar{D} : t_1 < t \leq T\}$, где $t_1 \in (0, T/2)$ — такое число, что $(x_0, t_0) \in D_{t_1}$. Для произвольного $R > R_0 = \max\{1, |x_0|\}$ рассмотрим функцию $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R})$, обладающую свойствами [22, с. 18]

$$0 \leq \zeta_R(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \zeta_R(x) = 1, \quad |x| \leq R; \quad \zeta_R(x) = 0, \quad |x| \geq 2R;$$

$$\left| \frac{d^k \zeta_R}{dx^k}(x) \right| \leq CR^{-k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2.$$

Положим $u_R(x, t) = u(x, t)\zeta_R(x)$, $(x, t) \in \bar{D}$. Вектор-функция u_R является решением задачи

$$Lv(x, t) = f_R(x, t), \quad (x, t) \in D_{t_1}, \quad v(x, t_1) = h_{R, t_1}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$f_R(x, t) \equiv Lu_R(x, t) = -A_2(x, t) \left[2\partial_x u(x, t) \frac{d\zeta_R}{dx}(x) + u(x, t) \frac{d^2 \zeta_R}{dx^2}(x) \right] - A_1(x, t) u(x, t) \frac{d\zeta_R}{dx}(x) \quad (31)$$

и $h_{R, t_1}(x) \equiv u_R(x, t_1)$. Так как $u_R \in C^{2,1}(\bar{D}_{t_1})$, то в силу теоремы о единственности решения задачи Коши [14] имеет место представление

$$\begin{aligned} u_R(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, t_1) h_{R, t_1}(\xi) d\xi + \int_{t_1}^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f_R(\xi, \tau) d\xi \equiv \\ &\equiv P_{R, t_1}(x, t) + V_{R, t_1}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_{t_1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Оценим потенциалы в (32). Рассмотрим сначала потенциал

$$P_{R, t_1}(x, t) = \int_{|\xi| \leq 2R} \Gamma(x, t; \xi, t_1) h_{R, t_1}(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in \bar{D}_{t_1}.$$

Из соотношений (см. обозначения (28), (29))

$$|h_{R, t_1}(\xi)| = |[u(\xi, t_1) - u(\xi, 0)]\zeta_R(\xi)| \leq C\omega(t_1; u; \mathcal{B}_{2R} \times [0, T]), \quad \xi \in \mathcal{B}_{2R},$$

вытекает неравенство

$$|P_{R, t_1}(x, t)| \leq C\hat{\omega}(R, t_1), \quad (x, t) \in \bar{D}_{t_1}, \quad (33)$$

где $\hat{\omega}(R, t_1) = \omega(t_1; u; \mathcal{B}_{2R} \times [0, T])$.

Далее рассмотрим потенциал V_{R, t_1} . Используя равенство (31), получаем

$$|f_R(x, t)| \leq C\|u; D\|^{1,0} R^{-1}, \quad (x, t) \in \bar{D}_{t_1}, \quad (34)$$

и, следовательно,

$$|V_{R,t_1}(x, t)| \leq C \|u; D\|^{1,0} R^{-1}, \quad (x, t) \in \overline{D}_{t_1}. \quad (35)$$

Из (33), (35), в силу представления (32), имеем неравенство

$$|u_R(x, t)| \leq C [\|u; D\|^{1,0} R^{-1} + \hat{\omega}(R, t_1)], \quad (x, t) \in \overline{D}_{t_1}.$$

Отсюда следует оценка

$$|u(x_0, t_0)| \leq C [\|u; D\|^{1,0} R^{-1} + \hat{\omega}(R, t_1)],$$

из которой, выбирая последовательно достаточно большое $R > R_0$, а затем достаточно малое $t_1 = t_1(R) \in (0, T/2)$, получаем (30). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Единственность решения из пространства $C^{1,0}(\overline{D})$ задачи (7), (8) вытекает из теоремы 1. Докажем, что существует решение этой задачи из пространства $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ и оно имеет вид (11). В силу условий на функцию f объёмный потенциал Vf (см. (11)) является регулярным решением параболической системы $Lu = f$ в $\overline{D} \setminus D_0$ (см. [23, с. 104]). Кроме того, потенциал Пуассона Ph (см. (11)) является регулярным решением параболической системы $Lu = 0$ в $\overline{D} \setminus D_0$. Отсюда и из лемм 2, 3 следует, что существует решение задачи (7), (8) из пространства $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$, которое имеет вид (11) и удовлетворяет оценке (12). Теорема 2 доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солонников, В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1965. — Т. 83. — С. 3–163.
2. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
3. Черепова, М.Ф. О гладкости решения задачи Коши для параболической системы / М.Ф. Черепова // Вестник МЭИ. — 2009. — № 6. — С. 38–44.
4. Arnese, G. Su alcune proprietà dell'integrale di Poisson relativo ad una equazione parabolica di ordine $2m$ a coefficienti non costanti / G. Arnese // Ann. di Mat. Pura ed Appl. — 1971. — V. 91, № 1. — P. 1–16.
5. Камынин, Л.И. О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения 2-го порядка / Л.И. Камынин // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15, № 4. — С. 806–834.
6. Cherepova, M.F. The Cauchy problem for a multi-dimensional parabolic equation with Dini-continuous coefficients / M.F. Cherepova, I.V. Zhenyakova // J. Math. Sci. — 2022. — V. 264, № 5. — P. 581–602.
7. Коненков, А.Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 6. — С. 820–831.
8. Коненков, А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 6. — С. 814–819.
9. Тверитинов, В.А. О второй краевой задаче для параболической системы с одной пространственной переменной / В.А. Тверитинов // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 12. — С. 2178–2179.
10. Тверитинов, В.А. Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений / В.А. Тверитинов. — Москва, 1989. — Деп. ВИНТИ РАН № 6906-B89.
11. Cherepova, M.F. The Cauchy problem for a parabolic system with nonuniform Hölder coefficients / M.F. Cherepova // J. Math. Sci. — 2013. — V. 191, № 2. — P. 296–313.

12. Baderko, E.A. Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // Appl. Anal. — 2016. — V. 95, № 7. — P. 1570–1580.
13. Бадерко, Е.А. Единственность решения задачи Коши для параболических систем / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Докл. РАН. — 2016. — Т. 468, № 6. — С. 607–608.
14. Бадерко, Е.А. О единственности решения задачи Коши для параболических систем / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 6. — С. 822–830.
15. Бадерко, Е.А. О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости / Е.А. Бадерко, К.Д. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1606–1618.
16. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 512 с.
17. Петровский, И.Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций / И.Г. Петровский // Бюлл. МГУ. Секц. А. — 1938. — Т. 1, № 7. — С. 1–72.
18. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 428 с.
19. Зейнеддин, М. О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: дис. ... канд. физ.-мат. наук / М. Зейнеддин. — М., 1992. — 89 с.
20. Зейнеддин, М. Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини / М. Зейнеддин. — 1992. — Деп. ВИНТИ РАН № 1294-B92.
21. Кружков, С.Н. Об оценках старших производных для решений эллиптических и параболических уравнений с непрерывными коэффициентами / С.Н. Кружков // Мат. заметки. — 1967. — Т. 2, № 5. — С. 549–560.
22. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. — М. : Наука, 1979. — 320 с.
23. Эйдельман, С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 444 с.

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM IN THE CLASS $C^{1,0}(\overline{D})$ FOR PARABOLIC SYSTEMS ON THE PLANE

© 2024 / E. A. Baderko¹, S. I. Sakharov²

*Lomonosov Moscow State University, Russia
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Russia
e-mail: ¹baderko.ea@yandex.ru, ²ser341516@yandex.ru*

The Cauchy problem for Petrovskii second-order parabolic systems in a strip on the plane is considered. The coefficients of the system satisfy the double Dini condition. The unique solvability of the problem in the space of functions that are continuous and bounded together with their spatial derivatives of the first order in the closure of the strip is established and corresponding estimates are obtained. An integral representation of the solution is given.

Keywords: parabolic system, Cauchy problem, Dini condition

REFERENCES

1. Solonnikov, V.A., *O kraevykh zadachakh dlya lineynykh parabolicheskikh sistem differentsial'nykh uravnenij obshchego vida*, *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova*, 1965, vol. 83, pp. 3–163.
2. Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., and Ural'tseva, N.N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Soc., 1968.
3. Cherepova, M.F., *O gladkosti resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskoy sistemy*, *Vestnik MEI*, 2009, no. 6, pp. 38–44.
4. Arnese, G., Su alcune proprieta dell'integrale di Poisson relativo ad una equazione parabolica di ordine $2m$ a coefficienti non costanti, *Ann. di Mat. Pura ed Appl.*, 1971, vol. 91, no. 1, pp. 1–16.

5. Kamynin, L.I., On solution of the fundamental boundary value problems for a one-dimensional parabolic equation of second order by the method of potentials, *Sib. Math. J.*, 1974, vol. 15, no. 4, pp. 573–592.
6. Cherepova, M.F. and Zhenyakova, I.V., The Cauchy problem for a multi-dimensional parabolic equation with Dini-continuous coefficients, *J. Math. Sci.*, 2022, vol. 264, no. 5, pp. 581–602.
7. Konenkov, A.N., The Cauchy problem for the heat equation in Zygmund spaces, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 860–872.
8. Konenkov, A.N., The Cauchy problem for parabolic equations in Zygmund spaces, *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 6, pp. 867–873.
9. Tveritinov, V.A., *O vtoroj kraevoy zadache dlya parabolicheskoy sistemy s odnoy prostranstvennoy peremennoy*, *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 2178–2179.
10. Tveritinov, V.A., *Reshenie vtoroi kraevoi zadachi dlya parabolicheskoi sistemy s odnoi prostranstvennoi peremennoi metodom granichnykh integral'nykh uravnenii*, Moscow, 1989, dep. VINITI no. 6906–V89.
11. Cherepova, M.F., The Cauchy problem for a parabolic system with nonuniform Hölder coefficients, *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 191, no. 2, pp. 296–313.
12. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem, *Appl. Anal.*, 2016, vol. 95, no. 7, pp. 1570–1580.
13. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness of a solution to the Cauchy problem for parabolic systems, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 3, pp. 316–317.
14. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness of the solution of the Cauchy problem for parabolic systems, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 806–814.
15. Baderko, E.A. and Fedorov, K.D., On the smoothness of the poisson potential for second-order parabolic systems on the plane, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1613–1626.
16. Dzyadyk, V.K. and Shevchuk, I.A., *Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials*, Berlin, de Gruyter, 2008.
17. Petrovskij, I.G., *O probleme Koshi dlya sistem linejnykh uravnenij s chastnymi proizvodnymi v oblasti neanaliticheskikh funkcij*, *Byull. Mos. Gos. Univ. Sek. A*, 1938, vol. 1, no. 7, pp. 1–72.
18. Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
19. Zeineddin, M., *O potencie prostogo sloya dlya parabolicheskoy sistemy v klassakh Dini* (On the simple layer potential for a parabolic system in Dini classes), Cand. Sci. (Phys.-Math.) Diss., Moscow, 1992.
20. Zeineddin, M., *Gladkost' potentsiala prostogo sloya dlya parabolicheskoi sistemy vtorogo poryadka v klassakh Dini*, 1992, dep. VINITI no. 1294–V92.
21. Kruzhkov, S.N., Estimates for the highest derivatives of solutions of elliptic and parabolic equations with continuous coefficients, *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1967, vol. 2, no. 5, pp. 824–830.
22. Vladimirov, V.S., *Generalized Functions in Mathematical Physics*, Moscow: Mir Publishers, 1979.
23. Eidel'man, S.D., *Parabolic Systems*, North-Holland, Wolters-Nordhoff, 1969.