

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51

## ИТЕРАЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ

© 2024 г. А. П. Крищенко

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*

*e-mail: apkri@bmstu.ru, yapkri@yandex.ru*

*Поступила в редакцию 29.05.2024 г., после доработки 26.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.*

Доказаны условия положительной инвариантности и компактности локализирующих множеств и расширенных локализирующих множеств. Получено необходимое условие существования аттрактора в системе. Введено понятие итерационной последовательности расширенных локализирующих множеств и получено условие, при выполнении которого её элементы являются положительно инвариантными компактными множествами и дают оценку множества притяжения. С помощью полученных результатов исследовано поведение траекторий трёхмерной системы для допустимых значений её параметров. Найдены условия устойчивости в целом одного её положения равновесия и указано множество притяжения другого положения равновесия.

*Ключевые слова:* положительно инвариантное множество, локализирующая функция, локализирующее множество, компактное инвариантное множество, аттрактор, предельная граница

DOI: 10.31857/S0374064124110037, EDN: JELHZZ

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении некоторых задач качественного анализа системы дифференциальных уравнений можно использовать метод локализации инвариантных компактов (МЛИК) [1], связанный с изучением поведения функций вдоль траекторий системы и генерирующий построение положительно инвариантных областей в фазовом пространстве.

В работах последних лет данный метод используется при анализе поведения траекторий систем, описывающих динамику популяций. Среди исследуемых вопросов можно отметить определение условий вымирания популяций [2, 3], существование периодических траекторий [4], аттрактора [4, 5], предельных границ траекторий [2–6], установление связей между положениями равновесия и численными методами решения нелинейных уравнений [5, 7].

Отметим, что в большинстве работ авторы используют МЛИК в основном для поиска предельных границ траекторий и их уточнения [7, 8], для нахождения локализирующих множеств и получения условий вымирания популяций [8, 9].

Постановка основных задач, решаемых МЛИК, возникла в связи с анализом метода Пуанкаре нахождения периодических траекторий. В [10] в частном случае инвариантных компактов приведены основные определения и результаты МЛИК, включая итерационную процедуру. Результаты работы [10] для периодических траекторий были распространены в статье [1] на инвариантные компакты.

Начальной операцией МЛИК является сопоставление заданному подмножеству фазового пространства и непрерывно дифференцируемой функции (*локализирующей функции*) на этом подмножестве такого множества специального вида (*локализирующего множества*) [1],

которое включает все инвариантные компакты системы, содержащиеся в заданном подмножестве. Эту операцию можно выполнять неоднократно, используя только что найденное локализирующее множество и выбирая другую или уже использовавшуюся локализирующую функцию. Так возникает последовательность локализирующих множеств, вложенных друг в друга (*итерационная последовательность*) [1, 10]. В результате происходит уменьшение локализирующих множеств, однако оказываются полезными и их расширения.

В данной работе МЛИК применяется при исследовании вопросов существования аттрактора, предельной ограниченности траекторий, устойчивости в целом положений равновесия, продолжения решений на неограниченный вправо интервал времени, построения оценок областей притяжения. Основное внимание при этом отводится построению итерационных последовательностей и расширению локализирующих множеств, доказательству их свойств. Среди элементов итерационной последовательности может оказаться положительно инвариантное компактное множество, что имеет большое значение для дальнейшего исследования. Действительно, у таких итерационных последовательностей все последующие элементы также являются положительно инвариантными компактными множествами. Кроме того, возникает возможность модификации предыдущих элементов итерационной последовательности с помощью их параметрических расширений и получения положительно инвариантного компактного расширенного локализирующего множества, зависящего от дополнительных параметров. С помощью выбора значений этих параметров в такое множество можно включить любую точку фазового пространства, что имеет важные следствия для свойств решений.

## 2. ЛОКАЛИЗИРУЮЩИЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(D). \quad (1)$$

Множеству  $Q \subseteq D$  и функции  $\varphi \in C^1(D)$  соответствуют множество  $S(\varphi) = \{x \in D: \dot{\varphi}(x) = 0\}$ , называемое *универсальным сечением*, и экстремальные значения

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{S(\varphi, Q)} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{S(\varphi, Q)} \varphi(x),$$

где  $S(\varphi, Q) = S(\varphi) \cap Q$  — часть универсального сечения  $S(\varphi)$ , содержащаяся в  $Q$ .

**Теорема 1** [1]. *Все инвариантные компакты автономной системы (1), содержащиеся во множестве  $Q$ , содержатся во множествах*

$$\{\varphi_{\inf}(Q) \leq \varphi(x)\} \cap Q, \quad \{\varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)\} \cap Q, \quad \{\varphi_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)\} \cap Q. \quad (2)$$

Множества (2) называют *локализирующими* и обозначают  $\Omega(\varphi, Q)$ . Если  $S(\varphi) \cap Q = \emptyset$ , то это означает, что во множестве  $Q$  нет инвариантных компактов. В этом случае будем полагать, что  $\Omega(\varphi, Q) = \emptyset$ .

Известно [11, с. 127], что  $\omega$ -предельное множество ограниченной положительной полутраектории является инвариантным компактом. Следовательно, если множество  $D$  положительно инвариантно и замкнуто, то  $\omega$ -предельные множества всех ограниченных положительных полутраекторий системы (1) содержатся в  $D$  и, согласно теореме 1, в локализирующем множестве  $\Omega(\varphi, D)$ .

При любых  $\tau, \nu \geq 0$  множество

$$\Omega(\varphi, Q, \tau, \nu) = \{\varphi_{\inf}(Q) - \tau \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q) + \nu\} \cap Q$$

называют *расширенным локализирующим множеством*. Оно содержит все инвариантные компакты системы (1), содержащиеся в  $Q$ , поскольку  $\Omega(\varphi, Q, \tau, \nu) \supseteq \Omega(\varphi, Q, 0, 0) = \Omega(\varphi, Q)$ .

Локализирующие множества и их расширения имеют важные свойства. Часть из них связана с тем, что локализирующее множество  $\Omega(\varphi, Q)$  всегда содержит все нули производной локализирующей функции во множестве  $Q$ , т.е.  $S(\varphi) \cap Q \subset \Omega(\varphi, Q)$ . Следовательно, множество  $Q \setminus \Omega(\varphi, Q)$  распадается на компоненты связности, в каждой из которых производная локализирующей функции  $\dot{\varphi}$  сохраняет знак. Множество  $Q \setminus \Omega(\varphi, Q)$  равно объединению двух непересекающихся множеств:  $\{\varphi(x) > \varphi_{\sup}(Q)\} \cap Q$  и  $\{\varphi(x) < \varphi_{\inf}(Q)\} \cap Q$ , для которых справедлива следующая

**Теорема 2.** *Если множество  $Q$  положительно инвариантно, функция  $\dot{\varphi}$  отрицательна во множестве  $\{\varphi(x) > \varphi_{\sup}(Q)\} \cap Q$  и положительна во множестве  $\{\varphi(x) < \varphi_{\inf}(Q)\} \cap Q$ , то при любых  $\tau, \nu \geq 0$  множество  $\Omega(\varphi, Q, \tau, \nu)$  положительно инвариантно.*

**Доказательство.** Предположим, что траектория выходит из множества  $\Omega(\varphi, Q, \tau, \nu)$  через точку  $x_0$ . Рассмотрим случай, когда  $x_0 \in \{\varphi(x) = \varphi_{\sup}(Q) + \nu\}$ . Тогда траектория попадает в компоненту связности, где  $\varphi(x) > \varphi_{\sup}(Q) + \nu \geq \varphi_{\sup}(Q)$ , а это возможно лишь в случае компоненты связности, для которой  $\dot{\varphi} > 0$ , что противоречит условию теоремы. При  $x_0 \in \{\varphi(x) = \varphi_{\inf}(Q) - \tau\}$  доказательство аналогично. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Если замкнутое множество  $Q$  положительно инвариантно, а траектории системы ограничены, то для любой функции  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$  локализирующее множество  $\Omega(\varphi, Q)$  положительно инвариантно.*

**Доказательство.** Предположим, что траектория выходит из локализирующего множества  $\Omega(\varphi, Q)$  через точку  $x_0$ . Рассмотрим случай, когда  $x_0 \in \{\varphi(x) = \varphi_{\sup}(Q)\}$ . Тогда траектория попадает в компоненту связности, где  $\varphi(x) > \varphi_{\sup}(Q)$ , и поэтому для некоторой точки  $x_*$  выполнено неравенство  $\varphi(x_*) > \varphi_{\sup}(Q)$ , что возможно лишь в случае компоненты связности, для которой  $\dot{\varphi} > 0$ . Но тогда траектория не выходит из положительно инвариантного множества  $\{x \in Q: \varphi(x) \geq \varphi(x_*) > \varphi_{\sup}(Q)\}$ , которое содержит и  $\omega$ -предельное множество этой траектории. Последнее противоречит тому, что  $\omega$ -предельное множество, как инвариантный компакт из  $Q$ , содержится в  $\Omega(\varphi, Q)$ , где  $\varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)$ . При  $x_0 \in \{\varphi(x) = \varphi_{\inf}(Q)\}$  доказательство аналогично. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Если компактное множество  $Q$  положительно инвариантно, то для любой функции  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$  локализирующее множество  $\Omega(\varphi, Q)$  компактно и положительно инвариантно.*

**Доказательство.** Все положительные полутраектории в компактном положительно инвариантном множестве ограничены. Поэтому выполнены условия теоремы 3, согласно которой для любой функции  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$  локализирующее множество  $\Omega(\varphi, Q)$  положительно инвариантно. Оно компактно, так как замкнуто и содержится в компактном множестве  $Q$ . Теорема доказана.

Как следствие, справедлива следующая

**Теорема 5** (необходимое условие существования аттрактора). *Если система (1) задана на замкнутом положительно инвариантном множестве  $D$  и имеет аттрактор, то для любой функции  $\varphi \in C^1(D)$  локализирующее множество  $\Omega(\varphi, D)$  положительно инвариантно.*

### 3. ИТЕРАЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть функции  $\varphi_m(x)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , принадлежат классу  $C^1(Q)$ ,  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K_0 = Q$ . Все инвариантные компакты автономной системы  $\dot{x} = f(x)$ , содержащиеся во множестве  $Q$ , содержатся в расширенных локализирующих множествах

$$K_1 = \Omega(\varphi_1, K_0, \tau_1, \nu_1), \quad K_2 = \Omega(\varphi_2, K_1, \tau_2, \nu_2), \quad \dots, \quad K_m = \Omega(\varphi_m, K_{m-1}, \tau_m, \nu_m), \quad \dots, \quad (3)$$

где постоянные  $\tau_m, \nu_m, m \in \mathbb{N}$ , неотрицательны. Если все  $\tau_m, \nu_m$  равны нулю, то последовательность (3) совпадает с итерационной последовательностью локализующих множеств, введённой в [10]. Если же, например,  $\tau_m = 0, \nu_m > 0$ , то это может означать, что при нахождении  $K_m$  вместо вычисления  $\varphi_{m,\sup}(K_{m-1})$  используется оценка сверху, которая в (3) обозначена  $\varphi_{m,\sup}(K_{m-1}) + \nu_m$ , и поэтому

$$\begin{aligned} \Omega(\varphi_m, K_{m-1}) &= \{\varphi_{m,\inf}(K_{m-1}) \leq \varphi_m(x) \leq \varphi_{m,\sup}(K_{m-1})\} \cap K_{m-1} \subseteq \\ &\subseteq \{\varphi_{m,\inf}(K_{m-1}) \leq \varphi_m(x) \leq \varphi_{m,\sup}(K_{m-1}) + \nu_m\} \cap K_{m-1} = \Omega(\varphi_m, K_{m-1}, 0, \nu_m) = K_m, \end{aligned}$$

что упрощает вычисления и не нарушает соотношения  $K_{m-1} \supseteq K_m$ .

**Определение.** Последовательность (3) назовём *итерационной последовательностью расширенных локализующих множеств*.

Отметим, что предел последовательности (3) всегда существует, равен  $K_\infty = \bigcap_{m=0}^{+\infty} K_m$  и включает все инвариантные компакты системы, содержащиеся во множестве  $Q$ .

**Теорема 6.** Если в итерационной последовательности (3) существует компактное положительно инвариантное множество  $K_p$ , то все последующие множества  $K_i, i > p$ , компактны и положительно инвариантны. Если дополнительно  $K_\infty = x^*$ , где  $x^*$  — положение равновесия, которое является внутренней точкой множеств (3), то  $x^*$  — асимптотически устойчивое положение равновесия с областью притяжения, содержащей множество  $K_p$ .

**Доказательство.** Первое утверждение теоремы о том, что множества  $K_i, i > p$ , компактны и положительно инвариантны, следует из теоремы 4. Несложно заметить, что для любой окрестности  $O$  точки  $x^*$  существует положительно инвариантное множество  $K_s, s > p$ , которое содержится в  $O$ . Точка  $x^*$  является внутренней точкой множества  $K_s$ , и поэтому существует окрестность  $O_1$  точки  $x^*$ , содержащаяся в  $K_s$ . Тогда любая траектория, начинающаяся в  $O_1 \subset K_s$ , не выходит из  $K_s \subset O$  и стремится к точке  $x^*$ . Это означает асимптотическую устойчивость положения равновесия  $x^*$ . Кроме того, траектории, начинающиеся в положительно инвариантном компакте  $K_p$ , ограничены и стремятся к своим  $\omega$ -предельным множествам, которые совпадают с положением равновесия  $x^*$ . Теорема доказана.

При построении последовательности (3) удобно использовать периодические последовательности локализующих функций, в которых первые  $q$  функций попарно различны и равны  $h_1, \dots, h_q$ , а потом они повторяются в том же порядке. В этом случае все множества  $K_{qj+i}, j \in \mathbb{N}, i = \overline{0, q-1}$ , задаются с помощью  $q$  двойных неравенств

$$K_{qj+i} = \{\alpha_{s,j+1} \leq h_s \leq \beta_{s,j+1} \ (s = \overline{1, i}), \ \alpha_{s,j} \leq h_s \leq \beta_{s,j} \ (s = \overline{i+1, q})\} \cap Q$$

относительно функций  $h_s, s = \overline{1, q}$ . Нижние (верхние) границы значений функций  $h_s$  в этих неравенствах образуют  $q$  неубывающих (невозрастающих) ограниченных числовых последовательностей  $\alpha_{s,j}, j \in \mathbb{N}, (\beta_{s,j}, j \in \mathbb{N}) \ s = \overline{1, q}$ , которые имеют пределы  $\alpha_{s,*} (\beta_{s,*})$ , задающие множество  $K_\infty = \{\alpha_{s,*} \leq h_s(x) \leq \beta_{s,*}, \ s = \overline{1, q}\} \cap Q$ .

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛИЗИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ И ИТЕРАЦИОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Локализирующие множества и их итерационные последовательности оказываются полезными при исследовании нелинейных систем. Для примера рассмотрим трёхмерную систему динамики популяций [12]

$$\dot{x}_1 = f_1(x) = r x_2 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \alpha x_1 - \frac{\beta x_1 x_3}{x_1 + n}, \quad \dot{x}_2 = f_2(x) = \alpha x_1 - \delta_1 x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3 f_3(x) = \left(\frac{\varphi \beta x_1}{x_1 + n} - \delta_2\right) x_3 \quad (4)$$

с неотрицательными переменными  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_{+,0}^3 = \{x \geq 0\}$  и положительными параметрами, где  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  — плотности популяций подрастающих жертв, взрослых жертв и хищников соответственно.

Для этой системы покажем, что все её решения продолжаются на неограниченный вправо интервал времени и ограничены и у неё есть аттрактор. Кроме того, найдём условия асимптотической устойчивости и устойчивости в целом одного положения равновесия системы и область притяжения другого положения равновесия.

Сформулируем следующую теорему об инвариантных компактах системы (4) и её аттракторе.

**Теорема 7.** *Все инвариантные компакты системы (4) содержатся в положительно инвариантных множествах*

$$K_1 = \{x_1 \leq k\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3, \quad K_2 = \{x_1 \leq k, x_2 \leq \alpha k / \delta_1\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3, \\ K_3 = \{x_1 \leq k, x_2 \leq \alpha k / \delta_1, x_1 + x_3 / \varphi \leq k + r \alpha k / (\delta_1 \delta_2)\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3.$$

Множество  $K_3$  компактно и содержит аттрактор системы.

**Доказательство.** Множество  $\mathbb{R}_{+,0}^3$  положительно инвариантно. Для локализирующей функции  $h_1(x) = x_1$ ,  $h_1 \in C^1(\mathbb{R}_{+,0}^3)$ , и множества  $Q = \mathbb{R}_{+,0}^3$  находим, что универсальное сечение

$$S(h_1, \mathbb{R}_{+,0}^3) = \left\{ r x_2 \left( 1 - \frac{x_1}{k} \right) - \alpha x_1 - \frac{\beta x_1 x_3}{x_1 + n} = 0 \right\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3$$

содержится в множестве  $\{0 \leq h_1(x) = x_1 \leq k\}$  и содержит точку  $(0, 0, 0)$ . Следовательно,  $h_{1 \inf}(\mathbb{R}_{+,0}^3) = 0$ ,  $h_{1 \sup}(\mathbb{R}_{+,0}^3) \leq k$ , локализирующее множество

$$\Omega(h_1, \mathbb{R}_{+,0}^3) = \{h_{1 \inf}(\mathbb{R}_{+,0}^3) \leq h_1 \leq h_{1 \sup}(\mathbb{R}_{+,0}^3)\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3$$

содержится в множестве  $\{0 \leq x_1 \leq k\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3 = K_1$ . В результате все инвариантные компакты системы содержатся в  $K_1$  и во множествах

$$K_1(\epsilon) = \{x_1 \leq k + \epsilon\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3, \quad \epsilon \geq 0.$$

Множества  $K_1(\epsilon)$  положительно инвариантны, поскольку  $\dot{h}_1 = \dot{x}_1 < 0$  в множестве  $\mathbb{R}_{+,0}^3 \setminus K_1(\epsilon) = \{x_1 > k + \epsilon\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3$ .

Рассмотрим локализирующую функцию  $h_2(x) = x_2$ ,  $h_2 \in C^1(\mathbb{R}_{+,0}^3)$ , и положительно инвариантное множество  $K_1(\epsilon)$ . В точках множества

$$S(h_2, K_1(\epsilon)) = \{\alpha x_1 - \delta_1 x_2 = 0, x_1 \leq k + \epsilon\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3$$

выполнены неравенства  $0 \leq h_2(x)$ ,  $h_2(x) \leq \alpha(k + \epsilon) / \delta_1$ , которые превращаются в равенства в соответствующих точках  $(0, 0, 0)$ ,  $(k + \epsilon, \alpha(k + \epsilon) / \delta_1, 0) \in S(h_2, K_1(\epsilon))$ . В результате находим экстремальные значения  $h_{2 \inf}(K_1(\epsilon)) = 0$ ,  $h_{2 \sup}(K_1(\epsilon)) = \alpha(k + \epsilon) / \delta_1$  и локализирующее множество

$$\Omega(h_2, K_1(\epsilon)) = \{0 \leq x_2 \leq \alpha(k + \epsilon) / \delta_1\} \cap K_1(\epsilon) = K_2(\epsilon),$$

а  $K_2(0) = K_2$ .

Отметим, что  $\dot{h}_2 = \dot{x}_2 < 0$  в множестве  $K_1(\epsilon) \setminus K_2(\epsilon) = \{0 \leq x_1 \leq k + \epsilon, x_2 > \alpha(k + \epsilon) / \delta_1\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3$ , и поэтому расширения локализирующего множества  $K_2(\epsilon)$ , т.е.

$$K_2(\epsilon, \tau) = \{x_2 \leq \alpha(k + \epsilon) / \delta_1 + \tau\} \cap K_1(\epsilon) = \{x_1 \leq k + \epsilon, x_2 \leq \alpha(k + \epsilon) / \delta_1 + \tau\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3,$$

положительно инвариантны при всех  $\epsilon \geq 0$  и  $\tau \geq 0$  и содержат все инвариантные компакты системы.

Рассмотрим локализующую функцию  $h_3 = x_1 + x_3/\varphi$  и положительно инвариантное множество  $K_2(\epsilon, \tau)$ . Для  $\dot{h}_3$  в  $\mathbb{R}_{+,0}^3$  справедлива оценка

$$\dot{h}_3 = rx_2(1 - x_1/k) - \alpha x_1 - \delta_2 x_3/\varphi \leq rx_2 - \delta_2 x_3/\varphi,$$

а на множестве  $S(h_3, K_2(\epsilon, \tau))$  выполнены неравенства

$$x_3 \leq \frac{r\varphi}{\delta_2} x_2 \leq \frac{r\varphi}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right), \quad h_3 \leq k + \epsilon + \frac{r}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right).$$

Следовательно,

$$h_{3\sup}(K_2(\epsilon, \tau)) \leq k + \epsilon + \frac{r}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right)$$

и локализующее множество  $\Omega(h_3, K_2(\epsilon, \tau))$  содержится в компактном множестве

$$\left\{ x_1 + x_3/\varphi \leq k + \epsilon + \frac{r}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right) \right\} \cap K_2(\epsilon, \tau) = K_3(\epsilon, \tau),$$

которое содержит все инвариантные компакты системы и при  $\epsilon = 0$ ,  $\tau = 0$  совпадает с  $K_3$ .

Во множестве  $K_2(\epsilon, \tau) \setminus K_3(\epsilon, \tau)$  выполнено неравенство  $\dot{h}_3 < 0$ . Действительно, если

$$h_3 = x_1 + x_3/\varphi = k + \epsilon + \frac{r}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right) + d, \quad d > 0,$$

то

$$\begin{aligned} \dot{h}_3 &\leq rx_2 - \delta_2 x_3/\varphi = rx_2 - \delta_2 \left( k + \epsilon + \frac{r}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right) + d - x_1 \right) = \\ &= rx_2 - \delta_2 \left( k + \epsilon + \frac{r}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right) \right) - \delta_2 d + \delta_2 x_1 \leq \\ &\leq r \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right) - \delta_2 \left( k + \epsilon + \frac{r}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right) \right) - \delta_2 d + \delta_2 (k + \epsilon) = -\delta_2 d < 0. \end{aligned}$$

В результате получаем, что компактное множество

$$\begin{aligned} K_3(\epsilon, \tau, \nu) &= \{x_1 + x_3/\varphi \leq h_{3\sup}(K_2(\epsilon, \tau)) + \nu\} \cap K_2(\epsilon, \tau) = \\ &= \left\{ x_1 \leq k + \epsilon, \quad x_2 \leq \alpha(k + \epsilon)/\delta_1 + \tau, \quad x_1 + x_3/\varphi \leq k + \epsilon + \frac{r}{\delta_2} \left( \frac{\alpha}{\delta_1} (k + \epsilon) + \tau \right) + \nu \right\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3 \end{aligned}$$

при всех неотрицательных  $\epsilon$ ,  $\tau$ ,  $\nu$  положительно инвариантно. Начальная точка любой траектории в  $\mathbb{R}_{+,0}^3$  при достаточно больших значениях  $\epsilon$ ,  $\tau$ ,  $\nu$  содержится во множестве  $K_3(\epsilon, \tau, \nu)$ . Следовательно, все решения системы (4) продолжаются на неограниченный вправо интервал времени [13, с. 107], ограничены и стремятся к их  $\omega$ -предельным множествам, которые содержатся в компактном множестве  $K_3$ . Замыкание объединения этих  $\omega$ -предельных множеств есть аттрактор системы (4), и он содержится в локализующем множестве  $K_3$ . Теорема доказана.

#### 4.1. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Система (4) имеет не более трёх положений равновесия:  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ . Условия их существования и асимптотической устойчивости, полученные в [12], уточняет следующая

**Теорема 8.** 1. Нулевое положение равновесия  $E_0(0, 0, 0)$  существует при всех значениях параметров, оно асимптотически устойчиво при  $r < \delta_1$  и неустойчиво при  $r > \delta_1$ .

2. При  $r > \delta_1$  существует положение равновесия  $E_1(x_{11}, x_{21}, 0)$ ,  $x_{11}, x_{21} > 0$ , где

$$x_{11} = k(r - \delta_1)/r, \quad x_{21} = \alpha x_{11}/\delta_1. \quad (5)$$

Оно асимптотически устойчиво, если

$$\delta_2 > \delta_{2*} = \frac{\varphi \beta x_{11}}{x_{11} + n}, \quad (6)$$

и неустойчиво при  $\delta_2 < \delta_{2*}$ .

3. Внутреннее положение равновесия  $E_2(x_{1*}, x_{2*}, x_{3*})$ ,  $x_{1*}, x_{2*}, x_{3*} > 0$ , где

$$x_{1*} = \frac{\delta_2 n}{\beta \varphi - \delta_2}, \quad x_{2*} = \frac{\alpha}{\delta_1} x_{1*}, \quad x_{3*} = \frac{\alpha \varphi x_{1*}}{\delta_1 \delta_2} \left( r - \delta_1 - \frac{r x_{1*}}{k} \right), \quad (7)$$

существует при выполнении системы неравенств

$$\beta \varphi - \delta_2 > 0, \quad r(1 - x_{1*}/k) > \delta_1. \quad (8)$$

**Доказательство.** Положения равновесия системы (4) являются неотрицательными решениями системы уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad x_3 f_3(x) = 0 \quad (9)$$

и легко находятся. Действительно, если  $x_3 = 0$  и  $x_1 = 0$ , то  $x_2 = 0$  и получаем положение равновесия  $E_0$  при всех значениях параметров. В случае  $x_3 = 0$ ,  $x_1 > 0$  из второго уравнения системы (9) следует, что  $x_2 = \alpha x_1/\delta_1 > 0$ , и после подстановки  $x_3$ ,  $x_2$  в первое уравнение получаем  $x_1 = k(r - \delta_1)/r$ . Это решение системы (9) при  $r > \delta_1$  неотрицательно и ему соответствует положение равновесия  $E_1$ . В случае  $x_3 > 0$  при  $\beta \varphi - \delta_2 > 0$  из третьего уравнения системы (9) находим  $x_1 = x_{1*} > 0$ , из второго —  $x_2 = x_{2*} > 0$ , а из первого —  $x_3 = x_{3*} > 0$ , и полученное решение (7) положительно при выполнении системы неравенств (8).

Условия асимптотической устойчивости положений равновесия  $E_0$ ,  $E_1$  следуют из анализа матриц Якоби  $J(x)$  в этих точках:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\alpha & r & 0 \\ \alpha & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 \end{pmatrix}, \quad J(E_1) = \begin{pmatrix} -\alpha r/\delta_1 & \delta_1 & * \\ \alpha & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{2*} - \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что действительные части корней характеристического многочлена матрицы  $J(E_0)$  ( $J(E_1)$ ) отрицательны лишь при  $r < \delta_1$  (соответственно  $\delta_2 > \delta_{2*}$ ), что завершает доказательство теоремы, поскольку условия асимптотической устойчивости положения  $E_2$  имеют громоздкий вид [12] и здесь не приводятся. Теорема доказана.

Условия существования и асимптотической устойчивости положений равновесия из теоремы 8 допускают удобную переформулировку, указывающую на  $r$  как на бифуркационный параметр системы (4).

**Следствие.** Система (4) всегда имеет положение равновесия  $E_0$ . При  $r < \delta_1$  оно асимптотически устойчиво; при  $r > \delta_1$  — неустойчиво и возможны два случая:

1) если  $\delta_2 - \beta \varphi > 0$ , то существует второе положение равновесия  $E_1$ , которое асимптотически устойчиво;

2) если  $\delta_2 - \beta \varphi < 0$ , то  $\delta_{1*} = \delta_1/(1 - x_{1*}/k) > \delta_1$ , существует второе положение равновесия  $E_1$ , которое асимптотически устойчиво при  $\delta_1 < r < \delta_{1*}$ , но при  $r > \delta_{1*}$  оно неустойчиво и существует третье положение равновесия  $E_2$ .

**Доказательство.** Запишем условие (6) в эквивалентном виде  $x_{11}(\delta_2 - \beta\varphi) + \delta_2 n > 0$ . Если  $\delta_2 - \beta\varphi > 0$ , то (6) выполнено и положение равновесия  $E_1$  асимптотически устойчиво, а положения равновесия  $E_2$  нет. В случае  $\delta_2 - \beta\varphi < 0$  условие (6) эквивалентно неравенству  $x_{11} < \delta_2 n / (\beta\varphi - \delta_2) = x_{1*}$ , т.е.  $r(1 - x_{1*}/k) < \delta_1$ . Если это неравенство выполнено, то  $E_1$  асимптотически устойчиво, а положения равновесия  $E_2$  нет, а если оно не выполнено, т.е.  $r(1 - x_{1*}/k) > \delta_1$ , то положение равновесия  $E_1$  неустойчиво и существует  $E_2$ . Следствие доказано.

#### 4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ $E_0$ В ЦЕЛОМ

Для положения равновесия  $E_0(0, 0, 0)$  справедлива следующая

**Теорема 9.** Если  $r \leq \delta_1$ , то положение равновесия  $E_0(0, 0, 0)$  устойчиво в целом в  $\mathbb{R}_{+,0}^3$ .

**Доказательство.** Построим итерационную последовательность локализующих множеств (3), соответствующую начальному множеству  $Q = \mathbb{R}_{+,0}^3$  и последовательности локализующих функций

$$x_1, \quad x_2, \quad x_1 + x_3/\varphi, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_1 + x_3/\varphi, \quad \dots, \quad (10)$$

и докажем, что для неё выполнены условия теоремы 6.

Последовательность (10) состоит из рассмотренных в доказательстве теоремы 7 функций  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ , которые повторяются в одном и том же порядке и в положении равновесия  $E_0$  имеют наименьшее значение в  $\mathbb{R}_{+,0}^3$ , равное нулю. Поэтому в итерационной последовательности локализующих множеств первые три множества совпадают с  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  из теоремы 7. Множество  $K_3$  положительно инвариантно, компактно и содержит аттрактор системы. Согласно теореме 6 следующие множества  $K_i$ ,  $i > 3$ , итерационной последовательности (3), в том числе и её предел  $K_\infty$ , тоже будут положительно инвариантными, компактными, содержащими аттрактор системы. Найдём множество  $K_\infty$ .

Множество  $K_3$  и следующие множества с номерами  $3j + i$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , запишем в виде

$$\begin{aligned} K_{3j} &= \{x_1 \leq a_j, \quad x_2 \leq b_j, \quad x_1 + x_3/\varphi \leq c_j\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3, \\ K_{3j+1} &= \{x_1 \leq a_{j+1}, \quad x_2 \leq b_j, \quad x_1 + x_3/\varphi \leq c_j\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3, \\ K_{3j+2} &= \{x_1 \leq a_{j+1}, \quad x_2 \leq b_{j+1}, \quad x_1 + x_3/\varphi \leq c_j\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3, \\ K_{3j+3} &= \{x_1 \leq a_{j+1}, \quad x_2 \leq b_{j+1}, \quad x_1 + x_3/\varphi \leq c_{j+1}\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3. \end{aligned}$$

Найдём числовые последовательности  $\{a_j\}$ ,  $\{b_j\}$  и  $\{c_j\}$ . Несложно заметить, что это невозрастающие последовательности с неотрицательными членами, их пределы  $a$ ,  $b$ , и  $c$  существуют, единственны и определяют множество  $K_\infty = \{x_1 \leq a, \quad x_2 \leq b, \quad x_1 + x_3/\varphi \leq c\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3$ .

Поскольку множество  $K_3$  уже известно, то

$$a_1 = k, \quad b_1 = \alpha k / \delta_1, \quad c_1 = k + r\alpha k / (\delta_1 \delta_2).$$

Найдём  $a_{j+1}$  при  $j \geq 1$ . Поскольку

$$\dot{h}_1 = rx_2 - x_1 \left( \frac{rx_2}{k} + \alpha \right) - \frac{\beta x_1 x_3}{x_1 + n},$$

то на  $S(h_1, K_{3j})$  выполнено неравенство

$$x_1 = \frac{k}{rx_2 + \alpha k} \left( rx_2 - \frac{\beta x_1 x_3}{x_1 + n} \right) \leq \frac{rb_j k}{rb_j + \alpha k} = h_{1 \sup}(K_{3j}).$$

Следовательно, найдено локализирующее множество  $\Omega(h_1, K_{3j}) = \{0 \leq x_1 \leq rb_j k / (rb_j + \alpha k)\} \cap K_{3j}$  и, полагая  $K_{3j+1} = \Omega(h_1, K_{3j})$ , получаем  $a_{j+1} = rb_j k / (rb_j + \alpha k)$ .

Аналогично найдём  $b_{j+1}$  при  $j \geq 1$ . Поскольку  $\dot{h}_2 = \alpha x_1 - \delta_1 x_2$ , то на  $S(h_2, K_{3j+1})$  получаем оценку  $x_2 = \alpha x_1 / \delta_1 \leq \alpha a_{j+1} / \delta_1 = h_{2\sup}(K_{3j+1})$ . Таким образом, найдено локализирующее множество

$$\Omega(h_2, K_{3j+1}) = \{0 \leq x_2 \leq \alpha a_{j+1} / \delta_1\} \cap K_{3j+1}$$

и, полагая  $K_{3j+2} = \Omega(h_2, K_{3j+1})$ , получаем  $b_{j+1} = \alpha a_{j+1} / \delta_1$ .

Наконец, найдём  $c_{j+1}$  при  $j \geq 1$ . Поскольку  $\dot{h}_3 = rx_2(1 - x_1/k) - \alpha x_1 - \delta_2 x_3 / \varphi$ , то на  $S(h_3, K_{3j+2})$  справедлива оценка

$$h_3 = x_1 + x_3 / \varphi = x_1 + (rx_2(1 - x_1/k) - \alpha x_1) / \delta_2 \leq a_{j+1} + rb_{j+1} / \delta_2.$$

Следовательно,  $h_{3\sup}(K_{3j+1}) \leq a_{j+1} + rb_{j+1} / \delta_2$  и  $\Omega(h_3, K_{3j+2}) \subseteq K_{3j+3}$  при  $c_{j+1} = a_{j+1} + rb_{j+1} / \delta_2$ .

В результате члены последовательностей связаны рекуррентными соотношениями

$$a_{j+1} = rb_j k / (rb_j + \alpha k), \quad b_{j+1} = \alpha a_{j+1} / \delta_1, \quad c_{j+1} = a_{j+1} + rb_{j+1} / \delta_2.$$

Переходя в них к пределу, получаем систему уравнений

$$a = rbk / (rb + \alpha k), \quad b = \alpha a / \delta_1, \quad c = a + rb / \delta_2. \quad (11)$$

Из первых двух уравнений системы (11) следует уравнение  $a(ra + k\delta_1) = rak$ , откуда  $a = 0$  или  $a = k(1 - \delta_1/r)$ . Значит, при  $r \leq \delta_1$  система (11) имеет единственное неотрицательное решение  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  и  $K_\infty$  совпадает с положением равновесия  $E_0(0, 0, 0)$ ;  $E_0$  — внутренняя точка (в индуцированной на  $\mathbb{R}_{+,0}^3$  топологии) всех множеств построенной итерационной последовательности. Согласно теореме 6 положение равновесия  $E_0$  асимптотически устойчиво и является аттрактором системы. Следовательно,  $E_0$  устойчиво в целом. Теорема доказана.

**Замечание.** При  $r > \delta_1$  система (11) имеет два неотрицательных решения:

$$a = a_* = k(1 - \delta_1/r), \quad b = b_* = \alpha k(r - \delta_1) / (r\delta_1), \quad c = c_* = a + rb / \delta_2$$

задаёт множество  $K_\infty = K_* = \{x_1 \leq a_*, x_2 \leq b_*, x_3 \leq c_*\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3$ , а второе нулевое — оно постороннее в случае  $r > \delta_1$ , поскольку последовательности  $\{a_j\}$ ,  $\{b_j\}$  и  $\{c_j\}$  имеют единственный предел.

#### 4.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ $E_1$ В $\mathbb{R}_{+,0}^3 \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$

Множество  $\mathbb{R}_{+,0}^3 \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$  состоит из фазовой траектории системы (4) и положения равновесия  $E_0$ , к которому она стремится. Оказывается, что остальные точки множества  $\mathbb{R}_{+,0}^3$  образуют область притяжения положения равновесия  $E_1$  в случае его асимптотической устойчивости.

**Теорема 10.** Если  $r > \delta_1$ ,  $\delta_2 > \varphi\beta x_{11} / (x_{11} + n)$ , то аттрактор системы (4) состоит из двух положений равновесия  $E_0$ ,  $E_1$  и все траектории в  $\mathbb{R}_{+,0}^3 \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$  стремятся к асимптотически устойчивому положению равновесия  $E_1$ .

**Доказательство.** При выполнении условий теоремы положение равновесия  $E_1$  существует и асимптотически устойчиво. Для доказательства достаточно рассмотреть положительно инвариантное компактное множество  $K_*$ , содержащее аттрактор системы (4). Отметим, что  $a_* = x_{11}$ ,  $b_* = x_{21}$ , где  $x_{11}$ ,  $x_{21}$  (см. (5)) — первые две координаты положения равновесия  $E_1$ , и найдём локализирующее множество  $\Omega(h(x), K_*)$ , где  $h(x) = x_3$ . В  $K_*$  для производной функции  $h(x)$  справедлива оценка

$$\dot{h} = \left( \frac{\varphi\beta x_1}{x_1 + n} - \delta_2 \right) x_3 \leq \left( \frac{\varphi\beta a_*}{a_* + n} - \delta_2 \right) x_3 = \left( \frac{\varphi\beta x_{11}}{x_{11} + n} - \delta_2 \right) x_3 \leq 0$$

и  $\dot{h} = 0$  лишь при  $x_3 = 0$ . Поэтому  $h_{\inf}(K_*) = 0$ ,  $h_{\sup}(K_*) = 0$  и положительно инвариантное локализирующее множество

$$\Omega(h, K_*) = \{x_3 = 0\} \cap K_* = \{0 \leq x_1 \leq a_* = x_{11}, 0 \leq x_2 \leq b_* = x_{21}, x_3 = 0\} = U$$

содержит аттрактор системы (4). Следовательно, предельное поведение траекторий системы (4) определяется динамикой ограничения системы (4) на инвариантную плоскость  $\{x_3 = 0\}$

$$\dot{x}_1 = rx_2 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \alpha x_1, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_1 - \delta_1 x_2, \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad (12)$$

в положительно инвариантном множестве  $\hat{U} = \{0 \leq x_1 \leq x_{11}, 0 \leq x_2 \leq x_{21}\}$ . Система (12) имеет два положения равновесия: седло  $\hat{E}_0(0, 0)$  и устойчивый узел  $\hat{E}_1(x_{11}, x_{21})$ . Функция  $V(x_1, x_2) = \alpha(x_1 - x_{11})^2/2 + \delta_1(x_2 - x_{21})^2/2$  неотрицательна, равна нулю только в точке  $\hat{E}_1$  и имеет производную  $\dot{V}(x_1, x_2) = -(\alpha x_1 - \delta_1 x_2)^2 - \alpha r x_2 (x_1 - x_{11})^2/k$ , которая в  $\hat{U}$  неположительная и равна нулю только в положениях равновесия  $\hat{E}_0$  и  $\hat{E}_1$ . Если  $M_0(x_{10}, x_{20}) \in \hat{U}$  и  $M_0 \neq \hat{E}_0$ ,  $M_0 \neq \hat{E}_1$ , то точка  $M_0$  принадлежит области  $(\hat{U} \setminus \hat{E}_1) \cap \{V(x_1, x_2) < V(0, 0)\}$ , где  $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ , и поэтому траектория  $\gamma((x_{10}, x_{20}), t)$  не выходит из положительно инвариантного множества  $\hat{U} \cap \{V(x_1, x_2) < V(x_{10}, x_{20})\}$  и стремится к  $\hat{E}_1$ . Теорема доказана.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крищенко, А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем / А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 12. — С. 1597–1604.
2. Starkov, K.E. Cancer cell eradication in a 6D metastatic tumor model with time delay / K.E. Starkov, A.N. Kanatnikov // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2023. — V. 120. — Art. 107164.
3. Kanatnikov, A.N. Ultimate dynamics of the two-phenotype cancer model: attracting sets and global cancer eradication conditions / A.N. Kanatnikov, K.E. Starkov // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 20. — Art. 4275.
4. Крищенко, А.П. Бифуркация Хопфа в системе хищник–жертва с инфекцией / А.П. Крищенко, О.А. Поддерегин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1566–1570.
5. Крищенко, А.П. Поведение траекторий систем с положительными переменными / А.П. Крищенко, Е.С. Тверская // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1439–1446.
6. Starkov, K.E. On the dynamics of immune-tumor conjugates in a four-dimensional tumor model / K.E. Starkov, A.P. Krishchenko // Mathematics. — 2024. — V. 12, № 6. — Art. 843.
7. Analysis of immunotherapeutic control of the TH1/TH2 imbalance in a 4D melanoma model applying the invariant compact set localization method / M.N. Gómez-Guzmán, E. Inzunza-González, E. Palomino-Vizcaino [et al.] // Alex. Eng. J. — 2024. — V. 107. — P. 838–850.
8. Gamboa, D. Ultimate bounds for a diabetes mathematical model considering glucose homeostasis / D. Gamboa, L.N. Coria, P.A. Valle // Axioms. — 2022. — V. 11, № 7. — Art. 320.
9. Starkov, K.E. Dynamic analysis of the melanoma model: from cancer persistence to its eradication / K.E. Starkov, L.J. Beristain // Int. J. Bifur. Chaos. — 2017. — V. 27. — Art. 1750151.
10. Krishchenko, A.P. Estimations of domains with cycles / A.P. Krishchenko // Comput. Math. Appl. — 1997. — V. 34, № 3–4. — P. 325–332.
11. Khalil, H.K. Nonlinear Systems / H.K. Khalil. — 3rd edn. — Upper Saddle River : Prentice Hall, 2002. — 750 p.
12. Beay, L.K. A stage-structure Rosenzweig–MacArthur model with effect of prey refuge / L.K. Beay, M. Saija // Jambura J. Biomath. — 2020. — V. 1, № 1. — P. 1–7.
13. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд — М. : МЦНМО, 2012. — 341 с.

## ITERATIVE SEQUENCES OF THE LOCALIZATION METHOD

© 2024 / A. P. Krishchenko

*Bauman Moscow State Technical University, Russia*  
*e-mail: apkri@bmstu.ru, yapkri@yandex.ru*

The conditions of positive invariance and compactness of localizing sets and extended localizing sets are proved. The necessary condition for the existence of an attractor in the system is obtained. The concept of an iterative sequence of extended localizing sets is introduced and a condition is obtained under which its elements are positively invariant compact sets and give an estimate of the attraction set. Using the obtained results the behavior of the trajectories of a three-dimensional system for acceptable values of its parameters is investigated. The conditions of global stability of one of its equilibrium point are found and the set of attraction of another equilibrium point is indicated.

*Keywords:* positively invariant set, localizing function, localization set, compact invariant set, attractor, ultimate bound

## REFERENCES

1. Krishchenko, A.P., Localization of invariant compact sets of dynamical systems, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676.
2. Starkov, K.E. and Kanatnikov, A.N., Cancer cell eradication in a 6D metastatic tumor model with time delay, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2023, vol. 120, art. 107164.
3. Kanatnikov, A.N. and Starkov, K.E., Ultimate dynamics of the two-phenotype cancer model: attracting sets and global cancer eradication conditions, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 20, art. 4275.
4. Krishchenko, A.P. and Podderegin, O.A., Hopf bifurcation in a predator–prey system with infection, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 11, pp. 1573–1578.
5. Krishchenko, A.P. and Tverskaya, E.S., Behavior of trajectories of systems with nonnegative variables, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1408–1415.
6. Starkov, K.E. and Krishchenko, A.P., On the dynamics of immune-tumor conjugates in a four-dimensional tumor model, *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 6, art. 843.
7. Gómez-Guzmán, M.N., Inzunza-González, E., Palomino-Vizcaino, E. [et al.], Analysis of immunotherapeutic control of the TH1/TH2 imbalance in a 4D melanoma model applying the invariant compact set localization method, *Alex. Eng. J.*, 2024, vol. 107, pp. 838–850.
8. Gamboa, D., Coria, L.N., and Valle, P.A., Ultimate bounds for a diabetes mathematical model considering glucose homeostasis, *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 7, art. 320.
9. Starkov, K.E. and Beristain, L.J., Dynamic analysis of the melanoma model: from cancer persistence to its eradication, *Int. J. Bifur. Chaos*, 2017, vol. 27, art. 1750151.
10. Krishchenko, A.P., Estimations of domains with cycles, *Comput. Math. Appl.*, 1997, vol. 34, no. 3–4, pp. 325–332.
11. Khalil, H.K., *Nonlinear Systems*, 3rd edn., Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
12. Beay, L.K. and Saija, M., A stage-structure Rosenzweig–MacArthur model with effect of prey refuge, *Jambura J. Biomath.*, 2020, vol. 1, no. 1, pp. 1–7.
13. Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations*, Heidelberg; Berlin: Springer, 1992.