ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

ЗАДАЧА НАЙМАРКА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЁННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Л. Х. Гадзова

Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик

e-mail: macaneeva@mail.ru

Поступила в редакцию 19.03.2024 г., после доработки 19.03.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования исследована задача Наймарка с краевыми условиями в форме линейных функционалов, охватывающими достаточно широкий класс линейных локальных и нелокальных условий. Получено необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи, доказано существование её решения. В терминах специальных функций найдено представление решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: задача Наймарка, дробная производная Герасимова–Капуто, функционал

DOI: 10.31857/S0374064124110029, EDN: JELOBG

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$Lu(x)\equiv\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}u(x)+\lambda u(x)=f(x),\quad x\in(0,1); \tag{1}$$

где $\beta_1>0,\ \lambda,\beta_j\in\mathbb{R}$ — заданные числа; $\alpha_1\in(n-1,n],\ n\in\mathbb{N},\ \alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_m$;

$$\partial_{sx}^{\alpha}u(x)=\operatorname{sign}^n(x-s)D_{sx}^{\alpha-n}u^{(n)}(x),\quad n-1<\alpha\leqslant n,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

— производная Герасимова–Капуто [1, с. 11]; оператор дробного интегро-дифференцирования порядка α в смысле Римана–Лиувилля по переменной x определяется следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{sx}^{\alpha}u(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sign}(x-s)}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_s^x\frac{u(t)dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha<0,\\ u(x), & \alpha=0,\\ \operatorname{sign}^n(x-s)\dfrac{d^n}{dx^n}D_{sx}^{\alpha-n}u(x), & n-1<\alpha\leqslant n,\quad n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

$\Gamma(\,\cdot\,)$ — гамма-функция Эйлера.

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка в последние десятилетия непрерывно развивается. Многие явления в механике жидкости, теории вязкоупругости, динамики населения и в других областях науки можно описать математическими моделями с такими уравнениями. Обширный обзор литературы по дробному исчислению и его применению можно найти в монографии [2].

Работы [3–7] посвящены дифференциальным уравнениям с операторами непрерывно и дискретно распределённого порядка. Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором непрерывно распределённого дифференцирования и неравенство Ляпунова для этого уравнения рассматривались в статьях [8, 9].

Для уравнения (1) методом функции Грина исследованы основные двухточечные краевые задачи [10, 11]. Также изучена краевая задача с локальным смещением, связывающим значения искомого решения на концах рассматриваемого интервала со значениями в его внутренних точках, и нелокальная задача с интегральным смещением [12]. В [13] решена обобщённая краевая задача для уравнения (1).

В настоящей статье для уравнения (1) сформулирована и решена задача с краевыми условиями в форме линейных функционалов.

Регулярным решением уравнения (1) назовём функцию $u=u(x)$ из класса $AC^n[0,1]$ (имеющую на отрезке $[0,1]$ абсолютно непрерывные производные до порядка $n-1$ и удовлетворяющую этому уравнению во всех точках интервала $(0,1)$).

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $(0,1)$, удовлетворяющее условию

$$\ell[u]=b, \tag{3}$$

где $b=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)^{\mathrm{т}}$ — заданный вектор-столбец, $b_k\in\mathbb{R}$; $\ell=(\ell_1,\ \ell_2,\ \ldots,\ \ell_n)^{\mathrm{т}}$ — вектор-столбец, ℓ_k, $k=\overline{1,n}$, — заданные линейные ограниченные функционалы с областью определения $D(\ell_k)\subset AC^n[0,1]$.

2. ФУНКЦИЯ $G_m^\mu(x)$

Введём в рассмотрение функцию [10]

$$G_m^\mu(x)=G_m^\mu(x;\nu_1,\ldots,\nu_m;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)\equiv\int\limits_0^\infty e^{-t}S_m^\mu(x;\nu_1 t,\ldots,\nu_m t;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)\,dt,$$

где

$$\nu_1=-\frac{\lambda}{\beta_1},\quad \nu_j=-\frac{\beta_j}{\beta_1},\quad \gamma_1=\alpha_1,\quad \gamma_j=\alpha_1-\alpha_j,\quad j=\overline{2,m},$$

$$S_m^\mu(x;z_1,\ldots,z_m;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)=(h_1*h_2*\ldots*h_m)(x),$$

$$h_j=h_j(x)\equiv x^{\mu_j-1}\phi(\gamma_j,\mu_j;z_jx^{\gamma_j}),$$

а через

$$(g*h)(x)=\int\limits_0^x g(t)h(x-t)\,dt,\quad \phi(\rho,\zeta;z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k+\zeta)}$$

обозначены соответственно свёртка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$ и функция Райта [14]. Далее считаем, что параметры функции $G_m^\mu(x)$

$$x>0,\quad \nu_j\in\mathbb{R},\quad \gamma_j>0,\quad \mu_j>0.$$

Заметим, что функция $G_m^\mu(x)$ не зависит от распределения чисел $\mu_j>0$, а зависит лишь от их суммы $\mu=\sum_{j=1}^m\mu_j$.

Для функции $G_m^\mu(x)$ справедливы равенства

$$G_m^\mu(x)=O(x^{\mu-1}) \quad \text{при} \quad x\to 0, \tag{4}$$

$$D_{0x}^\nu G_m^\mu(x)=G_m^{\mu-\nu}(x), \quad \text{если} \quad \mu>\nu, \tag{5}$$

$$G_m^\mu(x)-\sum_{j=1}^m \nu_j D_{0x}^{-\gamma_j} G_m^\mu(x)=\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{6}$$

Приведём утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $u(x)$, $v(x)$ — произвольные функции такие, что*

$$u(x)\in AC^n[0,1], \quad D_{0x}^{\alpha_1-n}v(x)\in C^n[0,1], \quad v(x)\in L[0,1].$$

Тогда справедлива формула

$$(Lu*v)(x)=(u*L^*v)(x)+\sum_{l=0}^{n-1} u^{(l)}(t)\mathcal{L}_k v(x-t)|_{t=0}^{t=x}, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{L}_k=\sum_{j=1}^m \beta_j D_{xt}^{\alpha_j-k}, \quad L^*v(x)=\sum_{j=1}^m \beta_j D_{0x}^{\alpha_j}v(x)+\lambda v(x). \tag{8}$$

Доказательство. Найдём свёртку Лапласа функций $Lu(x)$ и $v(x)$:

$$(Lu*v)(x)=\int_0^x Lu(t)v(x-t)\,dt=\int_0^x\left[\sum_{j=1}^m \beta_j\partial_{0t}^{\alpha_j}u(t)+\lambda u(t)\right]v(x-t)\,dt. \tag{9}$$

Пользуясь определением дробной производной Герасимова–Капуто (2), из равенства (9) имеем

$$\int_0^x\left[\sum_{j=1}^m \beta_j\partial_{0t}^{\alpha_j}u(t)+\lambda u(t)\right]v(x-t)\,dt=\sum_{j=1}^m \beta_j\int_0^x D_{0t}^{\alpha_j-n}u^{(n)}(t)v(x-t)\,dt+\lambda\int_0^x u(t)v(x-t)\,dt. \tag{10}$$

Далее с учётом формулы дробного интегрирования по частям [2, с. 15]

$$\int_a^b g(x)D_{ax}^\alpha h(x)\,dx=\int_a^b h(x)D_{bx}^\alpha g(x)\,dx, \quad \alpha\leqslant 0, \tag{11}$$

из соотношения (10) получим равенство

$$(Lu*v)(x)=\sum_{j=1}^m \beta_j\int_0^x u^{(n)}(t)D_{xt}^{\alpha_j-n}v(x-t)\,dt+\lambda\int_0^x u(t)v(x-t)\,dt. \tag{12}$$

Проинтегрировав первое слагаемое в правой части (12) n раз по частям, будем иметь

$$(Lu*v)(x)=\sum_{j=1}^m \beta_j\sum_{k=1}^n u^{(n-k)}(t)D_{xt}^{\alpha_j-n-1+k}v(x-t)|_{t=0}^{t=x}+\int_0^x u(t)\left(\sum_{j=1}^m \beta_j D_{xt}^{\alpha_j}v(x-t)+\lambda v(x-t)\right)dt,$$

т.е. справедлива формула (7). Лемма доказана.

Дифференциальное выражение $L^*v(x)$, определённое формулой (8), назовём *сопряжённым* к дифференциальному выражению $Lu(x)$, а соотношение (7) — формулой Лагранжа для дифференциальных операторов L и L^*.

Лемма 2. *Функция* $G_m^{\alpha_1}(x)$ *является решением уравнения*

$$\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j}(x)G_m^{\alpha_1}(x)+\lambda G_m^{\alpha_1}(x)=0 \tag{13}$$

и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-1}\right)G_m^{\alpha_1}(x)=1, \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-l-1}\right)G_m^{\alpha_1}(x)=0,\quad l=\overline{1,n-1}. \tag{15}$$

Доказательство. В силу равенств (4)–(6) имеем

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-1}G_m^{\alpha_1}(x)=\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(x)=1.$$

В частности, из них также следует формула [10]

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j G_m^{\mu-\alpha_j}(x)+\lambda G_m^{\mu}(x)=\frac{\beta_1 x^{\mu-\alpha_1-1}}{\Gamma(\mu-\alpha_1)},\quad \mu>\alpha_1, \tag{16}$$

с учётом которой получаем

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j G_m^{\alpha_1-\alpha_j+l+1}(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+l+1}(x)+\frac{x^l}{\Gamma(l+1)}\right)=0,\quad l=\overline{1,n-1}.$$

Из формулы (16) также следует справедливость равенства (13). Лемма доказана.

Функция $G_m^{\alpha_1}(x)$, удовлетворяющая свойствам (13)–(15), является фундаментальным решением уравнения (1).

Известно [15], что решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями $u^{(n-k)}(0)=u_k$ $(k=\overline{1,n})$ имеет вид

$$u(x)=\int_0^x f(t)\mathcal{W}^{\alpha}(x-t)\,dt+\mathcal{W}(x)\overline{u}, \tag{17}$$

где $\mathcal{W}^{\alpha}(x)=(1/\beta_1)G_m^{\alpha_1}(x)$, $\mathcal{W}(x)=(\mathcal{W}_0(x),\mathcal{W}_1(x),\ldots,\mathcal{W}_{n-1}(x))$, $\mathcal{W}_l(x)=\mathcal{L}_{l+1}\mathcal{W}^{\alpha}(x)$, $l=\overline{0,n-1}$, $\overline{u}=(u(0),\ u'(0),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(0))^{\text{т}}$.

Воспользовавшись формулой (16), получаем, что

$$\mathcal{W}_l(x)=\frac{x^l}{\Gamma(l+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l+1}(x).$$

Лемма 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{W}_l(x)=\begin{cases}1, & l=k,\\ 0, & l\neq k,\end{cases}\quad l,k=\overline{0,n-1}.$$

Доказательство. Если $l=k$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{W}_l(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{l-k}}{\Gamma(l-k+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l-k+1}(x)\right]=1,\quad n-1<\alpha_1\leqslant n,\quad k=\overline{0,n-1}.$$

При $l\neq k$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{W}_l(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{l-k}}{\Gamma(l-k+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l-k+1}(x)\right]=0,\quad \alpha_1+l-k+1>1.$$

Лемма доказана.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\partial^i K(x,t)/\partial x^i\in C([0,1]\times[0,1])$, $i=\overline{0,p}$; ℓ *— линейный ограниченный функционал в пространстве* $C^p[0,1]$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\ell\left[\int_0^1 K(x,t)\,dt\right]=\int_0^1 \ell[K(x,t)]\,dt. \tag{18}$$

Заметим, что в формуле (18) функционал ℓ применяется к $K(x,t)$ как к функции переменной x.

Доказательство. В силу наложенных на $K(x,t)$ условий можем записать

$$\int_0^1 K(x,t)\,dt=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^m K\left(x,\frac{i}{m}\right).$$

Так как $K(x,i/m)\in C^p[0,1]$ для любого i и $\ell[K(x,t)]$ и как функция переменной t является непрерывной на отрезке $[0,1]$, то

$$\ell\left[\int_0^1 K(x,t)\,dt\right]=\ell\left[\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^m K\left(x,\frac{i}{m}\right)\frac{1}{m}\right]=\lim_{m\to\infty}\ell\left[\sum_{i=0}^m K\left(x,\frac{i}{m}\right)\frac{1}{m}\right]=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^m \ell\left[K\left(x,\frac{i}{m}\right)\right]\frac{1}{m}=\int_0^1 \ell[K(x,t)]\,dt.$$

Лемма доказана.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. *Пусть* $n\geqslant 2$, $D(\ell_k)=C^{n-2}[0,1]$, $k=\overline{1,n}$, *функция* $f(x)$ *представима в виде*

$$f(x)=D_{0x}^{\alpha_1-n}g(x),\quad g(x)\in L[0,1],\quad x^{1-\mu}f(x)\in C[0,1],$$

и выполняется условие

$$\det A\neq 0, \tag{19}$$

где $A=\|\ell_i[\mathcal{W}_j(x)]\|$ *— квадратная матрица,* $i,j=\overline{1,n}$.

Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1), (3)

$$u(x)=\int_0^1 f(t)G(x,t)\,dt+\mathcal{W}(x)A^{-1}b, \tag{20}$$

где

$$G(x,t)=\mathcal{W}^\alpha(x-t)-\mathcal{W}(x)A^{-1}\ell[\mathcal{W}^\alpha(x-t)].$$

Доказательство. Подставив представление (17) в условие (3), с учётом леммы 4 получим систему алгебраических линейных уравнений для определения $\overline{u}$ следующего вида:

$$A\overline{u}=b-\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}=\int\limits_0^1 f(t)\ell[\mathcal{W}^\alpha(x-t)]\,dt.$$

Если $\det A\neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1} и тогда

$$\overline{u}=A^{-1}b-A^{-1}\mathcal{F}.$$

Подставляя теперь найденные значения $\overline{u}$ в (17), после несложных преобразований получаем (20).

Докажем, что функция $u(x)$, определяемая равенством (20), действительно является регулярным решением уравнения (1). Учитывая соотношения (4) и

$$\sum_{j=2}^m \nu_j G_m^{\alpha_j+\mu}(x)=G_m^\mu(x)-\nu_1 G_m^{\alpha_1+\mu}(x)-\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$$

(см. (6) и (16)) и используя свойства свертки Лапласа, закон композиции операторов дробного интегро-дифференцирования и формулу дробного интегрирования по частям (11), будем иметь

$$\sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\beta_1}\partial_{0x}^{\alpha_j}\int\limits_0^x G_m^{\alpha_1}(x-t)f(t)\,dt=\sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\beta_1}D_{0x}^{\alpha_j-n}\frac{d^n}{dx^n}(f*G_m^{\alpha_1})(x)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(g*\sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\beta_1}D_{0x}^{\alpha_j-n-1}G_m^{\alpha_1-\alpha_1+n-n}\right)(x)=\frac{d}{dx}\left[D_{0x}^{\alpha_j-n}g*\left(-\frac{\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+1}+1\right)\right](x)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left[f*\left(-\frac{\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+1}+1\right)\right](x)=-\lambda\int\limits_0^x f(t)\mathcal{W}^\alpha(x-t)\,dt+f(x),$$

откуда следует справедливость равенства

$$\sum_{j=1}^m \beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}\big(f*\big[\mathcal{W}^\alpha(x)-\mathcal{W}(x)A^{-1}\ell[\mathcal{W}^\alpha(x)]\big]+\mathcal{W}(x)A^{-1}b\big)+$$
$$+\lambda\big(f*\big[\mathcal{W}^\alpha(x)-\mathcal{W}(x)A^{-1}\ell[\mathcal{W}^\alpha(x)]\big]+\mathcal{W}(x)A^{-1}b\big)=f(x).$$

С учётом формулы (18) нетрудно проверить, что функция (20) удовлетворяет краевым условиям (3):

$$\ell[f*\mathcal{W}^\alpha(x)]-AA^{-1}\ell[f*\mathcal{W}^\alpha(x)]+AA^{-1}b=b,$$

так как $A=\ell[\mathcal{W}(x)]$, $AA^{-1}=E$ — единичная матрица.

Покажем, что если условие разрешимости (19) нарушается, то решение задачи (1), (3), вообще говоря, неединственно. Более точно, однородная задача в этом случае имеет нетривиальное решение.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{u}(x)=\mathcal{W}(x)C,$$

где $\mathcal{W}(x)=(\mathcal{W}_n(x),\mathcal{W}_{n-1}(x),\ldots,\mathcal{W}_1(x))$, $C=(C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)^{\text{т}}$, C_i, $i=\overline{1,n}$, — произвольные постоянные.

Из (17) следует, что функция $\widetilde{u}(x)$ является решением уравнения

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} \widetilde{u}(x) + \lambda \widetilde{u}(x) = 0. \tag{21}$$

Так как $\det A = 0$, то по предположению найдётся такой ненулевой вектор $\widetilde{C}$, что

$$\ell[\widetilde{u}(x)] = \ell[\mathcal{W}(x)]\widetilde{C} = A\widetilde{C} = 0.$$

Таким образом, показано, что функция $\widetilde{u}(x) = \mathcal{W}(x)\widetilde{C}$ является решением однородного уравнения (21) и удовлетворяет нулевым условиям $\ell[\widetilde{u}(x)] = 0$. Теорема доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 432 с.
2. Псху, А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.
3. Pskhu, A. Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives / A. Pskhu // Bol. Soc. Mat. Mex. — 2023. — V. 29, № 93.
4. Pskhu, A.V. Transmutations for multi-term fractional operators / A.V. Pskhu // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics ; eds. V. Kravchenko, S. Sitnik. — Cham : Birkhäuser, 2020. — P. 603–614.
5. Fedorov, V.E. On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations / V.E. Fedorov, N.V. Filin // Fractal Fract. — 2021. — V. 5, № 1. — Art. 20.
6. Analytic resolving families for equations with distributed Riemann–Liouville derivatives / V.E. Fedorov, W.Sh. Du, M. Kostic, A.A. Abdrakhmanova // Mathematics. — 2022. — V. 10, № 5. — Art. 681.
7. On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral / S.M. Sitnik, V.E. Fedorov, N.V. Filin, V.A. Polunin // Mathematics. — 2022. — V. 10, № 16. — Art. 2979.
8. Эфендиев, Б.И. Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования / Б.И. Эфендиев // Мат. заметки СВФУ. — 2022. — Т. 29, № 2. — С. 58–71.
9. Эфендиев, Б.И. Неравенство Ляпунова для уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования / Б.И. Эфендиев // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 950–953.
10. Гадзова, Л.Х. Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами / Л.Х. Гадзова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1580–1586.
11. Гадзова, Л.Х. Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / Л.Х. Гадзова // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 180–186.
12. Гадзова, Л.Х. Нелокальная краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / Л.Х. Гадзова // Мат. заметки. — 2019. — Т. 106, № 6. — С. 860–865.
13. Gadzova, L.Kh. Generalized boundary value problem for a linear ordinary differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator / L.Kh. Gadzova // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — V. 106, № 2. — P. 108–116.

14. Wright, E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities / E.M. Wright // J. London Math. Soc. — 1933. — V. 8, № 29. — P. 71–79.
15. Гадзова, Л.Х. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / Л.Х. Гадзова // Вест. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 3 (23). — С. 48–56.

NAYMARK PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH A FRACTIONAL DISCRETE DISTRIBUTED DIFFERENTIATION OPERATOR

L. Kh. Gadzova

Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, Nalchik, Russia
e-mail: macaneeva@mail.ru

For an ordinary differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator, the Naimark problem is studied, where the boundary conditions are specified in the form of linear functionals. This allows us to cover a fairly wide class of linear local and nonlocal conditions. A necessary and sufficient condition for the unique solvability of the problem is obtained. A representation of the solution to the problem under study is found in terms of special functions. The theorem of existence and uniqueness of the solution is proven.

Keywords: Naimark problem, Gerasimov–Caputo fractional derivative, functional

REFERENCES

1. Nakhushev, A.M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* (Fractional Calculus and its Applications), Moscow: Fizmatlit, 2003.
2. Pskhu, A.V., *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* (Fractional Partial Differential Equations), Moscow: Nauka, 2005.
3. Pskhu, A., Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 2023, vol. 29, no. 93.
4. Pskhu, A.V., Transmutations for multi-term fractional operators, in: *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics*, Kravchenko V., Sitnik S. (eds), Cham: Birkhäuser, 2020, pp. 603–614.
5. Fedorov, V.E. and Filin, N.V., On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations, *Fractal Fract.*, 2021, vol. 5, no. 1, art. 20.
6. Fedorov, V.E., Du, W.Sh., Kostic, M., and Abdrakhmanova, A.A., Analytic resolving families for equations with distributed Riemann–Liouville derivatives, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 5, art. 681.
7. Sitnik, S.M., Fedorov, V.E., Filin, N.V., and Polunin, V.A. On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 16, art. 2979.
8. Efendiev, B.I., Initial-value problem for a second-order ordinary differential equation with distributed-order differentiation operator, *Math. Notes of NEFU*, 2022, vol. 29, no. 2, pp. 59–71.
9. Efendiev, B.I., Lyapunov inequality for second-order equation with operator of distributed differentiation, *Math. Notes*, 2023, vol. 113, no. 5-6, pp. 879–882.
10. Gadzova, L.Kh., Dirichlet and Neumann problems for a fractional ordinary differential equation with constant coefficients, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 12, pp. 1556–1562.
11. Gadzova, L.Kh., Boundary value problem for a linear ordinary differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 178–184.
12. Gadzova, L.Kh., Nonlocal boundary-value problem for a linear ordinary differential equation with fractional discretely distributed differentiation operator, *Math. Notes*, 2019, vol. 106, no. 5–6, pp. 904–908.
13. Gadzova, L.Kh., Generalized boundary value problem for a linear ordinary differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator, *Bull. Karaganda univ. Math. ser.*, 2022, vol. 106, no. 2, pp. 108–116.
14. Wright, E.M., On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. London Math. Soc.*, 1933, vol. 8, no. 29, pp. 71–79.
15. Gadzova, L.Kh., Zadacha Koshi dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s operatorom drobnogo diskretno raspredelennogo differentsirovaniya, *Vest. KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2018, vol. 3, no. 23, pp. 48–56.