КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С ДАННЫМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

© 2024 г.
Т. Е. Моисеев[1], А. А. Холомеева[2]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: [1]tsmoissev@mail.ru, [2]kholomeeva@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 28.12.2023 г., после доработки 20.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследован вопрос разрешимости задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с граничными условиями, заданными на параллельных характеристиках в области гиперболичности уравнения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, краевая задача, задача Геллерстедта

DOI: 10.31857/S0374064124100119, EDN: JSPCVF

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в области $D=D^+\cup D_1\cup D_2$ уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Область эллиптичности D^+ уравнения (1) представляет собой единичный полукруг в верхней полуплоскости: $D^+=\{(r,\theta)\colon 0<r<1,\ 0<\theta<\pi\}$; $D_1\cup D_2$ — область гиперболичности, где D_1 — треугольник в нижней полуплоскости, ограниченный осью Ox и отрезками $\gamma_1=\{(x,y)\colon y=-x-1,\ -1<x<-1/2\}$, $\gamma_2=\{(x,y)\colon y=x,\ -1/2<x<0\}$, D_2 — треугольник в нижней полуплоскости, ограниченный осью Ox и отрезками $\gamma_3=\{(x,y)\colon y=-x,\ 0<x<1/2\}$, $\gamma_4=\{(x,y)\colon y=x-1,\ 1/2<x<1\}$.

Исследуем задачу типа Геллерстедта о нахождении функции

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D^+)\cap C^2(D_1)\cap C^2(D_2),$$

удовлетворяющей уравнению (1) в области D, неоднородному граничному условию на полуокружности

$$u(\cos\theta,\sin\theta)=f(\theta),\quad \theta\in[0,\pi], \tag{2}$$

где $f(\theta)$ — функция из класса Гёльдера на отрезке $[0,\pi]$, $f(\pi)=0$, и условиям на параллельных характеристиках γ_1 и γ_3:

$$u(x,y)|_{\gamma_1}=0, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{\gamma_3}=0. \tag{4}$$

Классическую постановку задачи Геллерстедта см. в книгах [1, с. 328; 2, с. 6].

На линии изменения типа уравнения (1) зададим условие непрерывности производных искомого решения по x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,-0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,+0), \quad x\in(-1,0)\cup(0,1). \tag{5}$$

На градиент искомого решения накладывается следующее условие гладкости на всём замыкании области эллиптичности, кроме концевых точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$ линии изменения типа уравнения и начала координат $O(0,0)$: $\nabla u\in C^1(\overline{D^+})$. В точках A, B, O допускается наличие степенных особенностей порядка меньше единицы у первых частных производных решения.

Кроме того, на линии изменения типа уравнения зададим условия сопряжения

$$\frac{\partial u(x,+0)}{\partial y}=-\frac{\partial u(x,-0)}{\partial y}, \quad x\in(-1,\,0); \quad \frac{\partial u(x,+0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,-0)}{\partial y}, \quad x\in(0,\,1). \tag{6}$$

Условия (5) и (6) представляют собой аналог классического условия Франкля склеивания решения на линии изменения типа [3]. Задачи Геллерстедта с условиями сопряжения Франкля на линии изменения типа и с данными на внутренних или внешних характеристиках были изучены в работах [4–6]. Настоящая статья является продолжением исследований, начатых в [6].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Справедлива следующая

Лемма. *Решение задачи (1)–(6) удовлетворяет условию*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,-0)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0)=0, \quad x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

Доказательство повторяет доказательство соответствующей леммы в работе [6].

Из леммы следует, что решение $u(x,y)$ задачи (1)–(6) также является решением следующей краевой задачи для уравнения Лапласа в полукруге:

$$\begin{gathered}\triangle u(x,y)=0, \quad (x,y)\in D^+; \quad u(\cos\theta,\sin\theta)=f(\theta), \quad \theta\in[0,\pi];\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}=0, \quad x\in(-1,0); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}=0, \quad x\in(0,1).\end{gathered} \tag{7}$$

Решение задачи (7) будем искать в виде $u(x,y)=U(x,y)+V(x,y)$, где

$$U(x,y)=\frac{u(x,y)+u(-x,y)}{2}, \quad V(x,y)=\frac{u(x,y)-u(-x,y)}{2},$$

т.е. функция $U(x,y)$ будет чётной по переменной x, а $V(x,y)$ — нечётной по переменной x. Тогда введённые функции будут решениями следующих краевых задач в четверти круга $D_1^+=\{(r,\theta)\colon 0<r<1,\ 0<\theta<\pi/2\}$:

$$\begin{gathered}\triangle U(x,y)=0 \text{ в } D_1^+, \quad U(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{f(\theta)+f(\pi-\theta)}{2}, \quad \theta\in[0,\pi/2],\\ \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0, \quad y\in(0,1), \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}=0, \quad x\in(0,1);\end{gathered} \tag{8}$$

$$\triangle V(x,y)=0 \text{ в } D_1^+, \quad V(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{f(\theta)-f(\pi-\theta)}{2}, \quad \theta\in[0,\pi/2],$$
$$V(0,y)=0, \quad y\in(0,1), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}=0, \quad x\in(0,1). \tag{9}$$

В полярной системе координат задачи (8) и (9) соответственно будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=0 \text{ в } D_1^+, \quad U(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{f(\theta)+f(\pi-\theta)}{2}, \quad \theta\in[0,\pi/2],$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\pi/2}=0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\Big|_{\theta=0}=0, \quad r\in(0,\,1),$$

и

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0 \text{ в } D_1^+, \quad V(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{f(\theta)-f(\pi-\theta)}{2}, \quad \theta\in[0,\pi/2],$$
$$V|_{\theta=\pi/2}=0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\Big|_{\theta=0}=0, \quad r\in(0,1).$$

Используя метод разделения переменных, найдём решения полученных задач:

$$U(r\cos\theta,r\sin\theta)=C+\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{\alpha}\cos(\alpha(\theta-\theta_0)),$$
$$V(r\cos\theta,r\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{\beta}\sin(\beta(\theta-\theta_1)).$$

С помощью спектрального метода [7] преобразуем решение задачи (8):

$$U(r\cos\theta,r\sin\theta)=C+\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{2n+1/2}\cos\big((2n+1/2)(\pi/2-\theta)\big), \tag{10}$$

где C – произвольная постоянная, а коэффициенты A_n однозначно определяются из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\big((2n+1/2)(\pi/2-\theta)\big)=\frac{f(\theta)+f(\pi-\theta)}{2}-C, \quad \theta\in[0,\pi/2].$$

Отметим, что система косинусов в формуле (10) образует базис, в отличие от решения аналогичной задачи в работе [6], где система косинусов образует базис только вместе с константой [7].

Для нахождения коэффициентов A_n используется биортогональная система в явном виде, полученная в статье [8]. Сделаем замену переменной $\theta=(\pi-\varphi)/2$ и получим равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos((n+1/4)\varphi)=\frac{f((\pi-\varphi)/2)+f((\pi+\varphi)/2)}{2}-C=\Phi(\varphi), \quad \varphi\in[0,\pi].$$

Применяя формулы [8], вычислим коэффициенты

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\varphi)h_n(\varphi)\,d\varphi,$$

где

$$h_n(\varphi)=\frac{2\sqrt{2\cos\varphi/2}}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}C_{-1/2}^{k}\cos((n-k)\varphi)-C_{-1/2}^{n}/2\right].$$

Вернёмся к переменной θ:

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{f(\theta)+f((\pi-\theta)/2)}{2}-C\right)h_n(\theta)\,d\theta,$$

здесь

$$h_n(\theta)=\frac{2\sqrt{2\sin\theta}}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}C_{-1/2}^{k}\cos(n-k)(\pi-2\theta)-C_{-1/2}^{n}/2\right].$$

Ряд (10) даёт решение задачи (8). Пространство решений соответствующей однородной задачи одномерно. Так как в силу принципа максимума и принципа Зарембы–Жиро [1, с. 26] ненулевой экстремум решения достигается только в нуле, то разность двух таких решений с одинаковыми значениями в точке $(0,0)$ тождественно равна нулю в области D^+.

Аналогично находим решение задачи (9):

$$V(r\cos\theta,r\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nr^{2n+1/2}\sin\big((2n+1/2)(\pi/2-\theta)\big),\tag{11}$$

где коэффициенты B_n определяются из разложения

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\big((2n-1/2)(\pi/2-\theta)\big)=\frac{f(\theta)-f(\pi-\theta)}{2},\quad \theta\in[0,\pi/2].$$

Получив решение задачи в области D^+ в виде $u(x,y)=U(x,y)+V(x,y)$ и обозначив $\tau(x)=u(x,0)$, в силу непрерывности решения во всей области получим формулу для решения в области гиперболичности $D_1\cup D_2$:

$$u(x,y)=\tau(x+y)-\tau(-1).$$

Единственность построенного решения вытекает из упомянутых принципов максимума и Зарембы–Жиро для уравнения Лапласа. Решение $u(x,y)$ можно однозначно построить в виде биортогонального ряда в D^+, а далее однозначно продолжить на D_1 и D_2. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Задача (1)–(6) имеет решение, которое в области D^+ представимо в виде $u(x,y)=U(x,y)+V(x,y)$, где функции $U(x,y)$ и $V(x,y)$ определяются формулами (10) и (11) соответственно.*

Замечание 1. Из результатов работы [9] следует, что если в задаче (1)–(6) краевое условие (4) заменить на $u(x,y)|_{\gamma_3}=0$, то решение задачи существует и единственно.

Замечание 2. При $f(\theta)=0$, $\theta\in[0,\pi]$, соответствующая однородная задача (1)–(6) имеет нетривиальное решение.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00449).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
2. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М. : Наука, 1970. — 296 с.
3. Франкль, Ф.И. Новый пример плоскопараллельного околозвукового течения с прямым скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения / Ф.И. Франкль // Изв. вузов. Математика. — 1959. — № 2. — С. 244–246.
4. Моисеев, Т.Е. Задача Геллерстедта с обобщённым условием склеивания Франкля на линии изменения типа уравнения с данными на внешних характеристиках / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 2. — С. 239–246.
5. Моисеев, Т.Е. Задача Геллерстедта с неклассическими условиями склеивания градиента решения на линии изменения типа с данными на внутренних характеристиках / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1062–1068.
6. Моисеев, Е.И. О разрешимости задач Геллерстедта с данными на параллельных характеристиках / Е.И. Моисеев, Т.Е. Моисеев, А.А. Холомеева // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 10. — С. 1379–1384.
7. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1. — С. 177–179.
8. Моисеев, Е.И. О базисности систем синусов и косинусов / Е.И. Моисеев // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 4. — С. 794–798.
9. Моисеев, Т.Е. О решении задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 10. — С. 1454–1456.

ON ONE GELLERSTEDT PROBLEM WITH DATA ON PARALLEL CHARACTERISTICS

© 2024 / **T. E. Moiseev**[1], **A. A. Kholomeeva**[2]

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: [1]*tsmoissev@mail.ru,* [2]*kholomeeva@cs.msu.ru*

In this paper we consider the Gellerstedt problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation with boundary conditions on parallel characteristics in the hyperbolic part of the equation.

Keywords: mixed type equation, boundary value problem, Gellerstedt problem

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00449).

REFERENCES

1. Bitsadze, A.V., *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* (Some Classes of Partial Differential Equations), Moscow: Nauka, 1981.
2. Smirnov, M.M., *Uravneniya smeshannogo tipa* (Equations of the Mixed Type), Moscow: Vysshaya Shkola, 1985.
3. Frankl, F.I., New example of a plane-parallel transonic flow with a direct compression shock ending inside the flow, *Izv. vuzov*, 1959, no. 2, pp. 244–246.

4. Moiseev, T.E., Gellerstedt problem with a generalized Frankl matching condition on the type change line with data on external characteristics, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 240–247.
5. Moiseev, T.E., Gellerstedt problem with nonclassical matching conditions for the solution gradient on the type change line with data on internal characteristics, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 8, pp. 1023–1029.
6. Moiseev, E.I., Moiseev, T.E., and Kholomeeva, A.A., Solvability of the Gellerstedt problem with data on parallel characteristics, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 10, pp. 1346–1351.
7. Moiseev, E.I., On the basis property of a sine system, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 177–179.
8. Moiseev, E.I., The basis property for systems of sines and cosines, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1984, vol. 275, no. 4, pp. 794–798.
9. Moiseev, T.E., On the solution of the Gellerstedt problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Equat.*, 2012, vol. 48, no. 10, pp. 1433–1435.