ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1407–1421

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63+517.972

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ ДЛЯ ОПЕРАТОРА p-ЛАПЛАСА

© 2024 г. Д. Е. Апушкинская[1], А. А. Новикова[2], С. И. Репин[3]

[1,2,3]*Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва*
[3]*Санкт-Петербургское отделение*
Математического института имени В.А. Стеклова РАН
e-mail: [1]apushkinskaya@gmail.com, [2]aanovikova01@gmail.com, [3]rpnspb@gmail.com

Поступила в редакцию 02.07.2024 г., после доработки 02.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Получены функциональное тождество и оценки, выполняющиеся для мер отклонений от точных решений задачи с препятствием для оператора p-Лапласа для любых функций из соответствующего (энергетического) функционального класса, который содержит обобщённое решение задачи. При этом не были использованы какие-либо специальные свойства аппроксимаций или численных процедур, а также информация о точной конфигурации коинцидентного множества. Правые части тождества и оценок содержат только известные функции и могут быть явно вычислены, а левые части представляют собой определённую меру отклонения приближённого решения от точного. Найденные функциональные соотношения позволяют оценивать погрешность любых аппроксимаций задачи независимо от способа их получения. Кроме того, они позволяют сравнивать точные решения задач с различными данными, что даёт возможность оценивать ошибки математических моделей, например тех, что возникают при упрощении коэффициентов дифференциального уравнения.

Ключевые слова: задача со свободными границами, оператор p-Лапласа, апостериорные оценки

DOI: 10.31857/S0374064124100099, EDN: JTAWRK

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим эллиптическую задачу с препятствием для оператора p-Лапласа ($1<p<+\infty$), сформулированную в виде задачи минимизации функционала

$$J[v]=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p-fv\right)dx \tag{1}$$

на замкнутом выпуклом множестве

$$\mathbb{K}=\left\{v\in W_p^1(\Omega)\colon v|_{\partial\Omega}=0,\ \ v\geqslant\phi \ \text{ в } \Omega\right\}.$$

Здесь и далее $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная связная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, $L^p(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$ — пространства Лебега и Соболева соответственно. Функция $\phi\in C^{\max\{2,p\}}$, удовлетворяющая условию $\phi\leqslant 0$ на $\partial\Omega$, задаёт гладкое препятствие; предполагается, что $f\in L^q(\Omega)$, а показатели p и q удовлетворяют соотношению $1/p+1/q=1$. Обозначения $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ и $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ используются для норм как скалярных, так и векторных функций в пространствах $L^p(\Omega)$ и $L^q(\Omega)$ соответственно (их смысл будет понятен из контекста).

Задача (1) принадлежит к классу задач с неизвестными свободными границами, которые изучаются в теории вариационных неравенств (см. работы [1–4] и цитированную в них литературу), и имеет множество приложений. Например, в сингулярном случае ($1<p<2$) такая задача возникает при построении модели Гренландского ледяного щита, когда неизвестной функцией является толщина ледяного покрова, а в качестве препятствия выступает рельеф подстилающей породы (см. [5]). Вероятностная интерпретация задачи (1) изложена в работе [6], где решение задачи с препятствием для оператора p-Лапласа при $2<p<+\infty$ интерпретируется как предельное значение дискретной игры "в перетягивание каната" при наличии шума.

Известно (см., например, [1; 2, гл. 1]), что задача (1) имеет единственное решение u, которое удовлетворяет п.в. в Ω соотношениям

$$\Delta_p u+f\leqslant 0, \quad u\geqslant\phi, \quad (\Delta_p u+f)(u-\phi)=0,$$

где $\Delta_p u:=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ — оператор p-Лапласа и $1<p<+\infty$. В общем случае область Ω разделяется на два подмножества: контактное (или коинцидентное) $\Omega^u_\phi=\{x\in\Omega\colon u(x)=\phi(x)\}$ и бесконтактное Ω^u_0, в котором u является решением уравнения $\Delta_p u+f=0$. Граница между этими подмножествами заранее не известна, что порождает существенные трудности как для качественного, так и для количественного анализа, связанные не только с наличием свободной границы, но и с самим оператором Δ_p, который при $p\neq 2$ не является равномерно эллиптическим. В тех точках, где градиент u обращается в нуль, оператор становится сингулярным при $1<p<2$ и вырожденным при $2<p<+\infty$.

Существование и качественные свойства решения задачи (1) изучались многими авторами. В подавляющем большинстве работ были исследованы оптимальные регулярности минимайзеров и описаны свойства свободных границ. Наиболее полно изучен случай $p=2$, т.е. классическая задача с препятствием. При $p\in(1,2)\cup(2,+\infty)$ регулярность решений исследована в работах [3, 4]. Различные свойства свободных границ при $p>2$ были изучены в [7, 8], при $1<p<2$ — в статье [9].

С точки зрения количественного анализа краевых задач наиболее важными являются вопросы построения последовательностей приближённых решений, сходящихся к точному, и контроля точности этих решений. Проблемы сходимости аппроксимаций для задач с препятствиями изучаются достаточно давно, начиная с работ Р. Фалка, например [10], и других авторов. В последнее время большое внимание уделяется апостериорным методам контроля точности приближённых решений дифференциальных уравнений. В отличие от априорных оценок асимптотического типа они позволяют оценить точность конкретного приближённого решения и генерируют индикаторы погрешности, использующиеся в современных адаптивных методах. Существует несколько различных подходов к формулировке целей апостериорного контроля и получению соответствующих оценок (см., например, статью [11] и приведённую в ней библиографию).

В данной работе получены апостериорные тождества и оценки так называемого функционального типа, при выводе которых использованы только методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений и не использованы специальные свойства аппроксимаций или точных решений. Основой для получения таких оценок являются специальные тождества, левая часть которых представляет собой меру отклонения приближенного решения от точного, а правая содержит данные задачи и известное приближенное решение. Такое тождество может быть использовано для оценки результатов численного эксперимента сразу после его завершения. Поэтому тождество естественно назвать апостериорным.

Для широкого круга задач математической физики апостериорные тождества и оценки функционального типа исследованы в работах [12–15]. В контексте стационарных и нестационарных задач с препятствием оценки такого рода ранее рассматривались в [16–18].

Важно подчеркнуть, что аналогичные оценки получены в настоящей статье без привлечения специальных свойств аппроксимаций или численных процедур, более того, точное решение и коинцидентное множество точного решения задачи не входят в явном виде в основное апостериорное тождество. Основное апостериорное тождество представлено в теореме 1. Оно верно для любой функции $v\in\mathbb{K}$, но содержит некоторые ограничения на другую переменную $\mathbf{y}^*$ (которую можно рассматривать как аппроксимацию потока). Это ограничение снимается далее в теоремах 2 и 3, которые относятся к случаям $p\geqslant 2$ и $p\in(1,2]$ соответственно. Они устанавливают полностью вычисляемые мажоранты для мер отклонений от решения. Мажоранты неотрицательны, обращаются в нуль только на точном решении и непрерывны относительно сходимости в базовых энергетических пространствах.

2. ТОЖДЕСТВО ДЛЯ МЕРЫ ОШИБКИ

Получим основное апостериорное тождество (см. теорему 1) для оценки отклонений приближённых решений вариационной задачи (1) от точного в соответствии с абстрактной теорией, развитой в [12, гл. 2; 13] для класса вариационных задач с функционалами вида

$$J[v]:=G[\Lambda v]+F[v],$$

где G и F — выпуклые полунепрерывные снизу функционалы, а Λ — ограниченный линейный оператор. В рассматриваемом нами случае $\Lambda:=\nabla$ и оператор действует из пространства $V:=$ $:=\{v\in W_p^1(\Omega)\colon v|_{\partial\Omega}=0\}$ в пространство $Y:=L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$, а функционалы $G\colon Y\to\mathbb{R}$ и $F\colon V\to\mathbb{R}$ определяются формулами

$$G[\mathbf{y}]:=\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega}|\mathbf{y}|^p\,dx,\quad F[v]:=-\int\limits_{\Omega}fv\,dx+\chi_{\mathbb{K}}(v),\quad \chi_{\mathbb{K}}(v):=\begin{cases}0, & v\in\mathbb{K},\\ +\infty, & v\notin\mathbb{K}.\end{cases}$$

Отметим, что функционал G коэрцитивен, неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}=0$.

Задача минимизации функционала $J(v)$ на V имеет двойственную вариационную формулировку, которая состоит в максимизации функционала

$$I^*[\mathbf{y}^*]:=-G^*[\mathbf{y}^*]-F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] \tag{2}$$

на пространстве $Y^*=L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$, где функционалы $G^*\colon Y^*\to\mathbb{R}$ и $F^*\colon V^*\to\mathbb{R}$ $(V^*:=\mathring{W}_q^{-1})$ являются преобразованиями Юнга–Фенхеля от G и F соответственно, а $\Lambda^*\colon Y^*\to V^*$ является сопряжённым к Λ оператором, т.е. $(\mathbf{y}^*,\Lambda v)=\langle\Lambda^*\mathbf{y}^*,v\rangle$, где $(\cdot,\cdot)$ обозначает спаривание пространств Y и Y^*, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — спаривание пространств V и V^*. В нашем случае $\Lambda^*=-\operatorname{div}$. Заметим, что если $v\in L^p(\Omega)\supset V$, а $v^*\in L^q(\Omega)\subset V^*$, то $\langle v^*,v\rangle$ можно представить в виде интеграла Лебега по области Ω.

В дальнейшем будем обозначать через $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{y}^*$ соответственно точное и приближённое решения двойственной задачи (2). Нетрудно показать, что

$$G^*[\mathbf{y}^*]=\frac{1}{q}\int\limits_{\Omega}|\mathbf{y}^*|^q\,dx=\frac{1}{q}\|\mathbf{y}^*\|^q_{q,\Omega}.$$

Согласно определению функционал

$$F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*]=\sup_{v\in V}\bigl\{-\langle\Lambda^*\mathbf{y}^*,v\rangle-F(v)\bigr\}.$$

Пусть $\mathbf{y}^* \in H_q(\Omega, \mathrm{div}) := \{\mathbf{y}^* \in Y^*\colon\ \mathrm{div}\,\mathbf{y}^* \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$. Тогда сопряжённый функционал можно представить в виде

$$F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] = \sup_{v\in\mathbb{K}}\left\{\int\limits_\Omega (f+\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*)v\,dx\right\}.$$

Пусть $\hat{v}\in\mathbb{K}$ — заданная функция и $w\in V^+(\Omega) := \{w\in V(\Omega)\colon\ w\geqslant 0 \text{ п.в. в } \Omega\}$. Тогда $v+w\in\mathbb{K}$ и имеет место оценка снизу

$$F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] \geqslant \int\limits_\Omega (f+\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*)\hat{v}\,dx + \sup_{w\in V^+(\Omega)}\left\{\int\limits_\Omega (f+\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*)w\,dx\right\}. \tag{3}$$

Ясно, что супремум в правой части неравенства (3) будет конечен только в том случае, когда

$$\mathbf{y}^* \in Q^*_{\leqslant 0} := \{\mathbf{y}^* \in H_q(\Omega,\mathrm{div})\colon\ f+\mathrm{div}\,\mathbf{y}^* \leqslant 0 \ \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Таким образом, имеем

$$F^*[-\Lambda^*\mathbf{y}^*] = \begin{cases} \int_\Omega (f+\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*)\phi\,dx, & \text{если } \mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0},\\ +\infty, & \text{иначе}.\end{cases}$$

Из соотношения двойственности $J[u] = I^*[\mathbf{p}^*]$ и результатов общей теории [12] следует, что для любых функций $v\in V$ и $\mathbf{y}^*\in Y^*$ выполняются равенства

$$J[v]-J[u] = J[v]-I^*[\mathbf{p}^*] = \mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{p}^*] + \mathcal{D}_F[v,\mathrm{div}\,\mathbf{p}^*], \tag{4}$$

$$I^*[\mathbf{p}^*]-I^*[\mathbf{y}^*] = J[u]-I^*[\mathbf{y}^*] = \mathcal{D}_G[\nabla u,\mathbf{y}^*] + \mathcal{D}_F[u,\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*]. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{D}_G$ и $\mathcal{D}_F$ — так называемые *составные функционалы*, определяемые формулами

$$\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{y}^*] := G[\nabla v] + G^*[\mathbf{y}^*] - (\mathbf{y}^*,\nabla v), \tag{6}$$

$$\mathcal{D}_F[v,\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*] := F[v] + F^*[\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*] - \langle \mathrm{div}\,\mathbf{y}^*, v\rangle. \tag{7}$$

Из соотношений (4), (5) следует апостериорное тождество [12, гл. 2]

$$\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{p}^*] + \mathcal{D}_G[\nabla u,\mathbf{y}^*] + \mathcal{D}_F[v,\mathrm{div}\,\mathbf{p}^*] + \mathcal{D}_F[u,\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*] = \mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{y}^*] + \mathcal{D}_F[v,\mathrm{div}\,\mathbf{y}^*], \tag{8}$$

справедливое для любых $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{y}^*\in Y^*$.

Найдём явный вид слагаемых в (8). Нетрудно видеть, что в силу (6) справедливы равенства

$$\mathcal{D}_G[\nabla u,\mathbf{y}^*] = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q - \nabla u\cdot\mathbf{y}^*\right)dx, \tag{9}$$

$$\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{p}^*] = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p + \frac{1}{q}|\mathbf{p}^*|^q - \nabla v\cdot\mathbf{p}^*\right)dx, \tag{10}$$

$$\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{y}^*] = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p + \frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q - \nabla v\cdot\mathbf{y}^*\right)dx. \tag{11}$$

Если $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$, то согласно (7) имеем

$$\mathcal{D}_F[v,\operatorname{div}\mathbf{y}^*]=\int\limits_\Omega\bigl(-fv+(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)\phi-v(\operatorname{div}\mathbf{y}^*)\bigr)\,dx=\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-v)\,dx, \tag{12}$$

$$\mathcal{D}_F[u,\operatorname{div}\mathbf{y}^*]=\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-u)\,dx. \tag{13}$$

Далее, так как $\mathcal{D}_F[u,\operatorname{div}\mathbf{p}^*]=0$, то $\mathcal{D}_F[v,\operatorname{div}\mathbf{p}^*]$ можно записать как

$$\mathcal{D}_F[v,\operatorname{div}\mathbf{p}^*]=\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{p}^*)(\phi-v)\,dx-\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{p}^*)(\phi-u)\,dx=\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{p}^*)(u-v)\,dx. \tag{14}$$

Учитывая, что решения u прямой и $\mathbf{p}^*$ двойственной задач связаны друг с другом соотношениями $\mathbf{p}^*=\nabla u|\nabla u|^{p-2}$ и $|\nabla u|^p=|\mathbf{p}^*|^q$, будем иметь

$$\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{p}^*)(u-v)\,dx=\int\limits_\Omega(f+\Delta_p u)(u-v)\,dx.$$

Обозначим

$$\mu(v):=\lambda(v)+\int\limits_\Omega(f+\Delta_p u)(u-v)\,dx, \tag{15}$$

$$\mu^*(\mathbf{y}^*):=\lambda^*(\mathbf{y}^*)+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-u)\,dx, \tag{16}$$

где

$$\lambda(v):=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p+\frac{1}{q}|\nabla u|^p-\nabla v\cdot\nabla u|\nabla u|^{p-2}\right)dx,$$

$$\lambda^*(\mathbf{y}^*):=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\mathbf{p}^*|^q+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\nabla u\cdot\mathbf{y}^*\right)dx.$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega(f+\Delta_p u)(u-v)\,dx=\int\limits_{\Omega^u_\phi}(f+\Delta_p u)(u-v)\,dx=\int\limits_{\Omega^u_\phi}W_\phi(u-v)\,dx, \tag{17}$$

т.е. второе слагаемое в (15) можно записать в виде интеграла с весом $W_\phi=f+\Delta_p\phi$. Поскольку на множестве Ω^u_ϕ выполняются неравенства $W_\phi\leqslant 0$ и $v\geqslant u$, интеграл (17) неотрицателен.

Меру $\lambda^*(\mathbf{y}^*)$ можно записать в виде

$$\lambda^*(\mathbf{y}^*)=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\mathbf{p}^*|^q+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\gamma(x)\mathbf{p}^*\cdot\mathbf{y}^*\right)dx,$$

где

$$\gamma(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in\Omega\cap\{|\nabla u|=0\},\\ |\mathbf{p}^*|^{q-2}, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тождество (8) вместе с (9)–(16) приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Для любых функций* $v\in\mathbb{K}$ *и* $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$ *выполняется тождество*

$$\mu(v)+\mu^*(\mathbf{y}^*)=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\nabla v\cdot\mathbf{y}^*\right)dx+\int\limits_{\Omega}(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-v)\,dx. \tag{18}$$

Прежде всего отметим, что выражения в правой части равенства (18) зависят только от известных функций v и $\mathbf{y}^*$ и от данных задачи, т.е. являются полностью вычисляемыми.

Левая часть (18) содержит меры μ и μ^*, которые неотрицательны и обращаются в нуль, если $v=u$ и $\mathbf{y}^*=\mathbf{p}^*$ соответственно. Входящие в них меры λ и λ^* являются интегральными характеристиками отклонений произвольных приближённых решений $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$ от u и $\mathbf{p}^*$ соответственно. При $p=q=2$ меры λ и λ^* представимы в виде норм

$$\lambda(v)=\frac{1}{2}\|\nabla(u-v)\|^2_{2,\Omega},\qquad \lambda^*(\mathbf{y}^*)=\frac{1}{2}\|\mathbf{p}^*-\mathbf{y}^*\|^2_{2,\Omega},$$

причём это единственный случай, когда возможно такое простое представление.

Нетрудно видеть, что если $\Omega^u_\phi\subset\Omega^v_\phi:=\{x\in\Omega\colon v(x)=\phi(x)\}$, т.е. если точное контактное множество содержится внутри приближённого (определённого с помощью функции v), то интеграл (17) равен нулю. Если, напротив, $\Omega^v_\phi\subset\Omega^u_\phi$, то

$$\int\limits_{\Omega^u_\phi}W_\phi(u-v)\,dx=\int\limits_{\Omega^u_\phi\setminus\Omega^v_\phi}W_\phi(\phi-v)\,dx\geqslant 0.$$

Поэтому второе слагаемое в (15) можно рассматривать как некоторую интегральную меру того, насколько хорошо множество Ω^v_ϕ аппроксимирует множество Ω^u_ϕ. В свою очередь, второе слагаемое в (16) можно считать характеристикой, указывающей на “неверное” поведение $\mathbf{y}^*$ на множестве Ω^u_0 (на этом множестве поток должен удовлетворять уравнению $\operatorname{div}\mathbf{p}^*+f=0$). К сожалению, эти меры весьма слабы и не позволяют оценить насколько точно свободная граница $\partial\Omega^u_\phi$ воспроизводится с помощью приближённого решения. Этот факт показывает ограниченность прямых вариационных методов в отношении реконструкции свободных границ (более подробное обсуждение этого вопроса см. в работах [15, 17]).

Меры μ и μ^* являются естественными характеристиками близости приближённых решений к точным. Мера μ задаёт систему локальных окрестностей (локальную топологию) вблизи решения u. Она не является симметричной относительно замены u на v и наоборот и, вообще говоря, не порождает метрику. Мера μ^* определяет локальную топологию в окрестности $\mathbf{p}^*$ и обладает аналогичными свойствами.

В частном случае $p=q=2$ тождество (18) принимает вид

$$\frac{1}{2}\|\nabla(u-v)\|^2_{2,\Omega}+\frac{1}{2}\|\mathbf{p}^*-\mathbf{y}^*\|^2_{2,\Omega}+\int\limits_{\Omega^u_\phi}(f+\Delta_p\phi)(\phi-v)\,dx+\int\limits_{\Omega^u_0}(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-u)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\|\nabla v-\mathbf{y}^*\|^2_{2,\Omega}+\int\limits_{\Omega}(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-v)\,dx$$

и совпадает с ранее полученным в [15] тождеством для классической задачи с препятствием для оператора Лапласа.

Тождество (18) даёт простое выражение для вычисления полной меры ошибки, выполняемое для всех $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$. Однако условие $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$ содержит дифференциальное неравенство, выполнение которого может создавать трудности при использовании (18) в практических вычислениях. Далее обсудим, как можно преодолеть этот недостаток и расширить допустимое множество для приближённых решений $\mathbf{y}^*$ двойственной задачи (2).

3. АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ $p>2$

Для получения оценок нам понадобится алгебраическое неравенство [14]

$$\frac{1}{\alpha}|\mathbf{a}|^{\alpha}+\frac{1}{\alpha^*}|\mathbf{b}|^{\alpha}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\mathbf{a}|^{\alpha-2}\geqslant c(\alpha)|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^{\alpha},\quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha\geqslant 2, \tag{19}$$

где $c(\alpha)=(1+\zeta)^{2-\alpha}/\alpha$, ζ — корень уравнения $\zeta^{\alpha-1}+\zeta(1-\alpha)-2+\alpha=0$. Из (19) следует, что при $p>2$ для меры λ имеет место оценка

$$\lambda(v)\geqslant c(p)\|\nabla(v-u)\|^p_{p,\Omega}\quad \text{для любой } v\in V. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть $2<p<+\infty$. Для любых функций $v\in\mathbb{K}$ и $\mathbf{z}^*\in H_q(\Omega,\operatorname{div})$ верны оценки*

$$\left(c(p)-\epsilon^p\frac{C^p_{F_\Omega}}{p}\right)\|\nabla(u-v)\|^p_{p,\Omega}+\int\limits_{\Omega^u_\phi}W_\phi(u-v)\,dx+\lambda^*(\mathbf{z}^*)\leqslant\mathcal{D}_G(\nabla v,\mathbf{z}^*)+\frac{1}{q\epsilon^q}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^q_{q,\Omega} \tag{21}$$

и

$$\mu(v)+\epsilon^p\frac{C^p_{F_\Omega}}{p}\|\nabla(u-v)\|^p_{p,\Omega}+\lambda^*(\mathbf{z}^*)\geqslant\mathcal{D}_G(\nabla v,\mathbf{z}^*)-\frac{1}{q\epsilon^q}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^q_{q,\Omega}, \tag{22}$$

где $c(p)$ — константа из неравенства (20), C_{F_Ω} — константа из обобщённого неравенства Фридрихса (27), параметр ϵ выбирается так, чтобы $0<\epsilon\leqslant(pc_p)^{1/p}/C_{F_\Omega}$ в (21) и $\epsilon>0$ в (22), вес $W_\phi=f+\Delta_p\phi$, а $R_f(\mathbf{z}^*)$ определяется соотношением (26).

Доказательство. Тождество (18) можно записать как

$$\mu(v)+\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\mathbf{p}^*|^q+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\nabla u\cdot\mathbf{y}^*\right)dx=$$

$$=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p+\frac{1}{q}|\mathbf{y}^*|^q-\nabla v\cdot\mathbf{y}^*\right)dx+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(u-v)\,dx. \tag{23}$$

Пусть $\mathbf{z}^*\in H_q(\Omega,\operatorname{div})$. После несложных алгебраических преобразований в (23) имеем

$$\mu(v)+\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\mathbf{p}^*|^q+\frac{1}{q}|\mathbf{z}^*|^q-\nabla u\cdot\mathbf{z}^*\right)dx=$$

$$=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p+\frac{1}{q}|\mathbf{z}^*|^q-\nabla v\cdot\mathbf{z}^*\right)dx+\int\limits_\Omega(\mathbf{z}^*-\mathbf{y}^*)\cdot\nabla(v-u)\,dx+$$

$$+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx+\int\limits_\Omega\operatorname{div}(\mathbf{z}^*-\mathbf{y}^*)(v-u)\,dx.$$

Используя интегрирование по частям и тот факт, что $v=u$ на $\partial\Omega$, получаем

$$\mu(v)+\lambda^*(\mathbf{z}^*)=\mathcal{D}_G(\nabla v,\mathbf{z}^*)+\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx. \tag{24}$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx=\int\limits_{\Omega^v_0}(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx+\int\limits_{\Omega^v_\phi}(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u-v)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\|f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*\|_{q,\Omega^v_0}\|u-v\|_{p,\Omega^v_0}+\|(f+\operatorname{div}\mathbf{z}^*)_+\|_{q,\Omega^v_\phi}\|u-v\|_{p,\Omega^v_\phi}\leqslant\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}\|u-v\|_{p,\Omega}, \tag{25}$$

где функция R_f определена соотношением

$$R_f(\mathbf{z}^*) := \begin{cases} f + \operatorname{div}\mathbf{z}^* & \text{на } \Omega_0^v, \\ (f + \operatorname{div}\mathbf{z}^*)_+ & \text{на } \Omega_\phi^v. \end{cases} \tag{26}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (24) ввиду неравенства Юнга:

$$\int\limits_\Omega (f + \operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u - v)\,dx \leqslant \frac{1}{q\,\epsilon^q}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}^q + \epsilon^p \frac{1}{p}\|u - v\|_{p,\Omega}^p, \quad \epsilon > 0.$$

Для $w \in V$ имеет место обобщённое неравенство Фридрихса

$$\|w\|_{p,\,\Omega} \leqslant C_{F_\Omega}\|\nabla w\|_{p,\,\Omega}, \tag{27}$$

используя которое, приходим к оценке

$$\int\limits_\Omega (f + \operatorname{div}\mathbf{z}^*)(u - v)\,dx \leqslant \frac{1}{q\epsilon^q}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}^q + \epsilon^p \frac{C_{F_\Omega}^p}{p}\|\nabla(u - v)\|_{p,\Omega}^p. \tag{28}$$

Оценки (21) и (22) следуют из (24) и (28). Теорема доказана.

4. АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ $p \in (1, 2]$

Случай $p \in (1, 2]$ существенно отличается от $p > 2$, так как здесь нельзя использовать (20). Эту трудность можно обойти, если перейти к рассмотрению аппроксимаций двойственной переменной и получить оценку нормы $\|\mathbf{p}^* - \mathbf{z}^*\|_{q,\,\Omega}$ для $\mathbf{z}^* \in H_q(\Omega, \operatorname{div})$.

Из (19) следует, что при $p \in (1, 2]$ для меры λ^* справедлива оценка

$$\lambda^*(\mathbf{y}^*) \geqslant c(q)\|\mathbf{y}^* - \mathbf{p}^*\|_{q,\Omega}^q \quad \text{для любой } \mathbf{y}^* \in Y^*. \tag{29}$$

Далее нам потребуется алгебраическое неравенство [14]

$$\big|\,|\mathbf{b}|^{\alpha-2}\mathbf{b} - |\mathbf{a}|^{\alpha-2}\mathbf{a}\big| \leqslant \kappa_\alpha|\mathbf{b} - \mathbf{a}|(|\mathbf{b}|^{\alpha-2} + |\mathbf{a}|^{\alpha-2}) \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \geqslant 2, \tag{30}$$

где

$$\kappa_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \in [2, 3], \\ (\alpha - 1)/2, & \text{если } \alpha > 3. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть $1 < p \leqslant 2$, $f \in L^r(\Omega)$ и $\Delta_p\phi \in L^r(\Omega)$, $r > qn$. Тогда для любых функций $v \in \mathbb{K}$ и $\mathbf{z}^* \in H_q(\Omega, \operatorname{div})$ справедлива оценка*

$$\mu(v) + \left(c(q) - C_{F_\Omega}^q \frac{\kappa_q \epsilon^q}{q} S(\mathbf{z}^*, f, \phi)\right)\|\mathbf{z}^* - \mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}^q \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{D}_G[\nabla v, \mathbf{z}^*] + C_{F_\Omega}\|\nabla v - |\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*\|_{p,\,\Omega}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega} + \frac{\kappa_q}{p\epsilon^p}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}^p S(\mathbf{z}^*, f, \phi), \tag{31}$$

где $c(q)$ и κ_q — константы из неравенств (29) и (30) соответственно, C_{F_Ω} — константа из обобщённого неравенства Фридрихса (27), параметр ϵ выбирается так, чтобы

$$0 < \epsilon \leqslant \bar{\epsilon} := C_{F_\Omega}\left(\frac{c(q)q}{\kappa_q S(\mathbf{z}^*, f, \phi)}\right),$$

а $S(\mathbf{z}^*, f, \phi)$ вычисляется по формуле

$$S(\mathbf{z}^*, f, \phi) := \|\mathbf{z}^*\|_{q,\,\Omega}^{q-2} + C_{F_\Omega}^{q-2}(2\|f\|_{q,\,\Omega} + \|\Delta_p\phi\|_{q,\,\Omega})^{q-2}.$$

Доказательство. Тождество (24) и оценка (25) приводят к соотношению

$$\mu(v)+\lambda^*(\mathbf{z}^*)\leqslant\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{z}^*]+C_{F\Omega}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}\|\nabla(u-v)\|_{p,\Omega}. \tag{32}$$

Оценим последнюю норму в правой части (32) следующим образом:

$$\|\nabla(u-v)\|_{p,\Omega}\leqslant\|\nabla v-|\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*\|_{p,\,\Omega}+\||\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*-|\mathbf{p}^*|^{q-2}\mathbf{p}^*\|_{p,\,\Omega}. \tag{33}$$

Напомним, что если $1<p\leqslant 2$, то $q\geqslant 2$. Положив в (30) $\alpha=q$, $\mathbf{a}=\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{b}=\mathbf{z}^*$, получим оценку

$$||\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*-|\mathbf{p}^*|^{q-2}\mathbf{p}^*|\leqslant\kappa_q|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*|(|\mathbf{z}^*|^{q-2}+|\mathbf{p}^*|^{q-2}).$$

Отсюда, с учётом интегральных неравенств Минковского и Гёльдера, приходим к соотношению

$$\||\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*-|\mathbf{p}^*|^{q-2}\mathbf{p}^*\|_{p,\,\Omega}\leqslant\kappa_q\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}(\|\mathbf{z}^*\|^{q-2}_{q,\,\Omega}+\|\mathbf{p}^*\|^{q-2}_{q,\,\Omega}). \tag{34}$$

Известно [9], что если f и $\Delta_p\phi$ принадлежат пространству $L^r(\Omega)$ при $r>qn$, то решение задачи удовлетворяет уравнению

$$\Delta_p u=f+(\Delta_p\phi-f)\hat\chi\quad\text{п.в. в }\Omega, \tag{35}$$

где

$$\hat\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } u(x)=\phi(x),\\ 0, & \text{если } u(x)>\phi(x).\end{cases}$$

Переписав (35) в слабой форме

$$\int\limits_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla w\,dx=\int\limits_\Omega[f+(\Delta_p\phi-f)\hat\chi]w\,dx,\quad w\in V,$$

приходим к оценке

$$\|\nabla u\|^{p-1}_{p,\,\Omega}\leqslant C_{F\Omega}(2\|f\|_{q,\,\Omega}+\|\Delta_p\phi\|_{q,\,\Omega})$$

и, следовательно, к неравенству

$$\|\nabla u\|^{p}_{p,\,\Omega}\leqslant C^q_{F\Omega}(2\|f\|_{q,\,\Omega}+\|\Delta_p\phi\|_{q,\,\Omega})^q.$$

Таким образом, учитывая соотношение $|\nabla u|^p=|\mathbf{p}^*|^q$, получаем априорную оценку

$$\|\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}\leqslant C_{F\Omega}(2\|f\|_{q,\,\Omega}+\|\Delta_p\phi\|_{q,\,\Omega}). \tag{36}$$

Из (34) и (36) следует, что

$$\||\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*-|\mathbf{p}^*|^{q-2}\mathbf{p}^*\|_{p,\,\Omega}\leqslant\kappa_q\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}S(\mathbf{z}^*,f,\phi). \tag{37}$$

Оценив снизу второе слагаемое в левой части (32) с помощью (29), из (32), (33) и (37) будем иметь

$$\mu(v)+c(q)\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|^q_{q,\,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{z}^*]+C_{F\Omega}\big(\|\nabla v-|\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*\|_{p,\,\Omega}+\kappa_q\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}S(\mathbf{z}^*,f,\phi)\big)\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}. \tag{38}$$

Теперь используем неравенство Юнга

$$C_{F\Omega}\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|_{q,\,\Omega}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{q,\Omega}\leqslant\frac{\epsilon^qC^q_{F\Omega}}{q}\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|^q_{q,\,\Omega}+\frac{1}{p\epsilon^p}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^p_{q,\Omega}$$

и преобразуем (38) к виду

$$\mu(v)+c(q)\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|^q_{q,\,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant\mathcal{D}_G[\nabla v,\mathbf{z}^*]+C_{F\Omega}\|\nabla v-|\mathbf{z}^*|^{q-2}\mathbf{z}^*\|_{p,\,\Omega}+\kappa_q S(\mathbf{z}^*,f,\phi)\left(\frac{\epsilon^q C^q_{F\Omega}}{q}\|\mathbf{z}^*-\mathbf{p}^*\|^q_{q,\,\Omega}+\frac{1}{p\epsilon^p}\|R_f(\mathbf{z}^*)\|^p_{q,\Omega}\right).$$

Нетрудно видеть, что (31) следует из этой оценки. Теорема доказана.

5. ПРИМЕРЫ

Приведём примеры, иллюстрирующие работу тождества (18) и оценки (21). Отметим, что в этих примерах приближённые решения имеют коинцидентные множества, существенно отличные от известного точного решения. Тем не менее оценки ошибок аппроксимации оказываются довольно точными.

Пусть $\Omega=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon |\mathbf{x}|<2\}$, $f\equiv 0$, а препятствие $\phi(x)=1-|\mathbf{x}|^2$. Из соображений симметрии минимайзер задачи с препятствием для оператора p-Лапласа должен быть радиально-симметричным. Следуя [19], нетрудно убедиться, что при $p=3$ точное радиально-симметричное решение задачи (1) имеет вид

$$u(\mathbf{x})=u(|\mathbf{x}|)=\begin{cases}1-|\mathbf{x}|^2, & \text{если } 0<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1:=0.416459,\\ 1.52031-1.07502\sqrt{|\mathbf{x}|}, & \text{если } \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2.\end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет нулевому условию Дирихле на границе $\partial\Omega$, совпадает с препятствием ϕ на множестве $\Omega^u_\phi=\{\mathbf{x}\in\Omega\colon 0\leqslant|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1\}$ и удовлетворяет уравнению $\Delta_3 u=0$ на множестве $\Omega^u_0=\{\mathbf{x}\in\Omega\colon \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2\}$. Минимайзер, препятствие и соответствующее коинцидентное множество (радиальное сечение и объёмное изображение) показаны на рисунке.

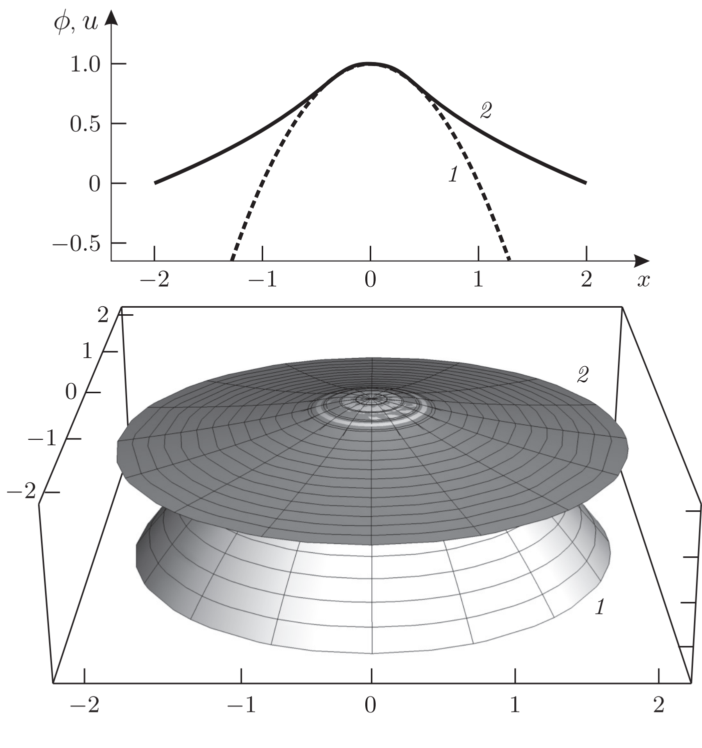

Рисунок. Препятствие ϕ (*1*) и минимайзер u (*2*)

Для проверки тождества (18) возьмём в качестве приближённого решения функцию

$$v(\mathbf{x})=\begin{cases}1-|\mathbf{x}|^2, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_2:=0.166459,\\ 1-|\mathbf{x}|^2+10(\varkappa_1-|\mathbf{x}|)^2(|\mathbf{x}|-\varkappa_2)^2, & \varkappa_2<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\ 1.52031-1.07502\sqrt{|\mathbf{x}|}, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2,\end{cases}$$

которая отличается от минимайзера u лишь на малую поправку в кольце

$$\{\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon\ \varkappa_2<|\mathbf{x}|<\varkappa_1\}.$$

Аппроксимацию двойственной переменной $\mathbf{y}^*$ положим равной $\mathbf{y}^*=-4|\mathbf{x}|\mathbf{x}$ во всей области Ω. Таким образом, этот приближённый поток существенно отличается от точного

$$\mathbf{p}^*=|\nabla u|\nabla u=\begin{cases}-4|\mathbf{x}|\mathbf{x}, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\ -\dfrac{(0.53751)^2}{|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x}, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2.\end{cases}$$

Прямое вычисление показывает, что $\operatorname{div}\mathbf{y}^*=-12|\mathbf{x}|\leqslant 0$, так что $\mathbf{y}^*\in Q^*_{\leqslant 0}$ и можно использовать тождество (18).

Для слагаемых, входящих в состав мер $\mu(v)$ и $\mu^*(\mathbf{y}^*)$ из левой части тождества (18), имеем следующие значения: $\lambda(v)=1.32603\text{e}{-04}$, $\int_{\Omega^u_\phi}W_\phi(u-v)\,dx=1.13858\text{e}{-03}$, $\mu(v)=1.27118\text{e}{-03}$, $\lambda^*(\mathbf{y}^*)=171.394$, $\int_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-u)\,dx=325.101$, $\mu^*(\mathbf{y}^*)=496.495$. Соответствующие компоненты из правой части (18): $\int_\Omega|\nabla v|^3/3\,dx=5.44408\text{e}{-01}$, $\int_\Omega(2|\mathbf{y}^*|^{3/2}/2-\nabla v\cdot\mathbf{y}^*)\,dx=170.85$, $\int_\Omega(f+\operatorname{div}\mathbf{y}^*)(\phi-v)\,dx=325.102$, значение правой части (18) равно 496.496. Видно, что основной вклад в ошибки и слева, и справа даёт плохое приближение двойственной переменной. Нетрудно убедиться, что $\mu(v)+\mu^*(\mathbf{y}^*)=0.00127118+496.495=496.496$, что совпадает с соответствующим значением для правой части (18).

Рассмотрим далее серию радиально-симметричных приближённых решений

$$v_\varepsilon(|\mathbf{x}|)=\begin{cases}1-|\mathbf{x}|^2, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant h_\varepsilon,\\ 1-|\mathbf{x}|^2+20\varepsilon(\varkappa_1-|\mathbf{x}|)^2(|\mathbf{x}|-h_\varepsilon)^2, & h_\varepsilon<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\ 1.52031-1.07502\sqrt{|\mathbf{x}|}+20\varepsilon(2-|\mathbf{x}|)(|\mathbf{x}|-\varkappa_1)^2, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant 2,\end{cases}$$

где ε — параметр, удовлетворяющий условию $0<\varepsilon<1/2$, $h_\varepsilon:=\varkappa_1-\varepsilon^2$. Для этих аппроксимаций $\Omega^{v_\varepsilon}_\phi\subset\Omega^u_\phi$ и при $\varepsilon\to 0$ аппроксимация коинцидентного множества Ω^u_ϕ улучшается.

В качестве аппроксимаций двойственной переменной возьмём $\mathbf{z}^*_\varepsilon=|\nabla v_\varepsilon|\nabla v_\varepsilon$. Нетрудно убедиться, что при $\varepsilon=0.4$, 0.2 и 0.1 выражения для z^*_ε и $\operatorname{div}\mathbf{z}^*_\varepsilon$ имеют вид

$$\mathbf{z}^*_\varepsilon=\begin{cases}-4|\mathbf{x}|\mathbf{x}, & 0<|\mathbf{x}|\leqslant h_\varepsilon,\\ -\dfrac{4\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}[\mathcal{N}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon,h_\varepsilon)]^2, & h_\varepsilon<|\mathbf{x}|\leqslant\varkappa_1,\\ -\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}[\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon)]^2, & \varkappa_1<|\mathbf{x}|\leqslant h^{[1]}(\varepsilon),\\ \dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}[\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon)]^2, & h^{[1]}(\varepsilon)<|\mathbf{x}|\leqslant h^{[2]}(\varepsilon),\\ -\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}[\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|,\varepsilon)]^2, & h^{[1]}(\varepsilon)<|\mathbf{x}|\leqslant 2,\end{cases}$$

$$
\operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon^* = \begin{cases} -12|\mathbf{x}|, & 0 < |\mathbf{x}| \leqslant h_\varepsilon, \\ -8\mathcal{N}_1(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) \cdot \mathcal{N}_2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon), & h_\varepsilon < |\mathbf{x}| \leqslant \varkappa_1, \\ 2\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) \cdot \mathcal{A}_2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) - \dfrac{\mathcal{A}_1^2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon)}{|\mathbf{x}|}, & \varkappa_1 < |\mathbf{x}| \leqslant h^{[1]}(\varepsilon), \\ -2\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) \cdot \mathcal{A}_2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) + \dfrac{\mathcal{A}_1^2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon)}{|\mathbf{x}|}, & h^{[1]}(\varepsilon) < |\mathbf{x}| \leqslant h^{[2]}(\varepsilon), \\ 2\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) \cdot \mathcal{A}_2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) - \dfrac{\mathcal{A}_1^2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon)}{|\mathbf{x}|}, & h^{[2]}(\varepsilon) < |\mathbf{x}| \leqslant 2, \end{cases}
$$

где $h^{[1]}(0.4) = 0.449126$, $h^{[2]}(0.4) = 1.45426$, $h^{[1]}(0.2) = 0.481619$, $h^{[2]}(0.2) = 1.43546$, $h^{[1]}(0.1) = 0.547394$, $h^{[2]}(0.1) = 1.3946$, а

$$
\mathcal{N}_1(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) := |\mathbf{x}| - 20\varepsilon(\varkappa_1 - |\mathbf{x}|)(|\mathbf{x}| - h_\varepsilon)(\varkappa_1 + h_\varepsilon - 2|\mathbf{x}|),
$$

$$
\mathcal{N}_2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) := [1 - 20\varepsilon(\varkappa_1 + h_\varepsilon - 2|\mathbf{x}|)^2 + 40\varepsilon(\varkappa_1 - |\mathbf{x}|)(|\mathbf{x}| - h_\varepsilon)],
$$

$$
\mathcal{A}_1(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) := \left[\frac{0.53751}{\sqrt{|\mathbf{x}|}} - 20\varepsilon(|\mathbf{x}| - \varkappa_1)(4.416459 - 3|\mathbf{x}|)\right],
$$

$$
\mathcal{A}_2(|\mathbf{x}|, \varepsilon, h_\varepsilon) := \left[\frac{0.268755}{|\mathbf{x}|\sqrt{|\mathbf{x}|}} + 20\varepsilon(4.416459 - 3|\mathbf{x}|) - 60\varepsilon(|\mathbf{x}| - \varkappa_1)\right].
$$

Очевидно, что $c(3) = 1/6$ и при данном выборе $\mathbf{z}_\varepsilon^*$ верно $\mathcal{D}_G(\nabla v_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon^*) = 0$. В табл. 1 приведены результаты расчётов для оставшихся компонент, входящих в оценку (21). Нам потребуется также оценка сверху для константы C_{F_Ω} из неравенства (27), для получения которой последовательно применим теорему 1.1 и замечание 1.2 из [20] и интегральное неравенство Гёльдера к квадрату $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$. В результате имеем неравенства

$$
C_{F_\Omega} \leqslant 4^{2/3} \cdot 0.257125 \cdot |\Omega|^{1/6} \leqslant 0.987914.
$$

Таблица 1. Компоненты оценки (21), вычисленные для $v = v_\varepsilon$ и $\mathbf{z}^* = \nabla v_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon|$

ε	h_ε	$\|\nabla(u - v_\varepsilon)\|_{3,\Omega}^3$	$\int_{\Omega_\phi^u} W_\phi(u - v)\,dx$	$\lambda^*(\mathbf{z}^*)$	$\|R_f(\mathbf{z}^*)\|_{3/2,\Omega}^{3/2}$
0.4	0.256459	11346.6	2.40596e-04	7760	194494
0.2	0.376459	1418.34	1.61865e-07	221.971	32554.1
0.1	0.406459	177.293	8.51006e-11	20.5771	3420.63
0	0.416459	0	0	0	0

Таблица 2. Оценка (21) при $v = v_\varepsilon$ и $\mathbf{z}^* = \nabla v_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon|$

ε	Левая часть (21)	Правая часть (21)	I_{eff}
0.4	8705.58	254643	3.08114
0.2	340.17	42621.8	5.00394
0.1	35.352	4478.49	5.02234

В табл. 2 показаны результаты вычислений полной меры ошибки (левая часть (21)) и соответствующей мажоранты (правая часть (21)) при $\epsilon = 0.63766$, а также приведены значения индексов эффективности

$$1 \leqslant I_{\mathrm{eff}} := \sqrt[3]{\frac{\text{правая часть (21)}}{\text{левая часть (21)}}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Апостериорное тождество (18) позволяет контролировать близость приближённых решений к решению задачи с препятствием для оператора p-Лапласа независимо от того, каким образом эти решения были получены. Этот результат обобщает некоторые ранее полученные результаты по апостериорному анализу задач с препятствиями.

Теоремы 2 и 3 снимают дифференциальное условие на двойственную переменную, которое используется в теореме 1. При этом вместо тождества получаются неравенства (для $p > 2$ и $p \in (1, 2]$), правые части которых зависят только от приближённых решений и известных данных и могут быть явно вычислены, а левые части представляют собой естественные меры отклонения приближённых решений от точных.

Оценки состоятельны в том смысле, что они обращаются в нуль на точном решении и непрерывны относительно сходимости в базовых энергетических пространствах для прямой и двойственной переменных.

Первый автор выражает признательность участникам Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (28 июня—04 июля 2024 г., г. Суздаль, Россия) за полезные обсуждения результатов статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00293).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions, J.-L. Variational inequalities / J.-L. Lions, G. Stampacchia // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — V. 20. — P. 493–519.
2. Petrosyan, A. Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems / A. Petrosyan, H. Shagholian, N.N. Uraltseva. — Providence : American Mathematical Society, 2012. — 221 p.
3. Choe, H.J. On the obstacle problem for quasilinear elliptic equations of p-Laplacian type / H.J. Choe, J.L. Lewis // SIAM J. Math. Anal. — 1991. — V. 22, № 3. — P. 623–638.
4. Andersson J. Optimal regularity for the obstacle problem for the p-Laplacian / J. Andersson, E. Lindgren, H. Shahgholian // J. Differ. Equat. — 2015. — V. 259, № 6. — P. 2167–2179.
5. Jouvet, G. Steady, shallow ice sheets as obstacle problems: well-posedness and finite element approximation / G. Jouvet, E. Bueler // SIAM J. Appl. Math. — 2012. — V. 72, № 4. — P. 1292–1314.
6. Lewicka, M. The obstacle problem for the p-Laplacian via optimal stopping of tug-of-war games / M. Lewicka, J.J. Manfredi // Probab. Theory Related Fields. — 2017. — V. 167, № 1-2. — P. 349–378.
7. On the porosity of free boundaries in degenerate variational inequalities / L. Karp, T. Kipeläinen, A. Petrosyan, H. Shagholian // J. Differ. Equat. — 2000. — V. 164, № 1. — P. 110–117.

8. Lee, K. Hausdorff measure and stability for the p-obstacle problem $(2<p<\infty)$ / K. Lee, H. Shahgholian // J. Differ. Equat. — 2003. — V. 195, № 1. — P. 14–24.
9. Rodrigues, J.F. Stability remarks to the obstacle problem for p-Laplacian type equations / J.F. Rodrigues // Calc. Var. Partial Differ. Equat. — 2005. — V. 23, № 1. — P. 51–65.
10. Falk, R.S. Error estimates for approximation of a class of a variational inequalities / R.S. Falk // Math. Comp. — 1974. — V. 28. — P. 963–971.
11. Chen, Z., Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems / Z. Chen, R. Nochetto // Numer. Math. — 2000. — V. 84. — P. 527—548.
12. Repin, S.I. Accuracy of Mathematical Models — Dimension Reduction, Homogenization, and Simplification / S.I. Repin, S.A. Sauter. — Zürich : European Mathematical Society, 2020. — 317 p.
13. Repin, S.I. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals / S.I. Repin // Math. Comp. — 2000. — V. 69, № 230. — P. 481–500.
14. Репин, С.И. Апостериорные тождества для мер отклонений от точных решений нелинейных краевых задач / С.И. Репин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 6. — С. 896–919.
15. Repin, S. Error identities for variational problems with obstacles / S. Repin, J. Valdman // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 2018. — Bd. 98, № 4. — S. 635–658.
16. Apushkinskaya D.E. Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution / D.E. Apushkinskaya, S.I. Repin // Interfaces Free Bound. — 2018. — V. 20, № 4. — P. 511–531.
17. Апушкинская, Д.Е. Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближённых решений / Д.Е. Апушкинская, С.И. Репин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 11. — С. 1881–1897.
18. Apushkinskaya, D. Functional a posteriori error estimates for the parabolic obstacle problem / D. Apushkinskaya, S. Repin // Comput. Methods Appl. Math. — 2022. — V. 22, № 2. — P. 259–276.
19. Sharp numerical inclusion of the best constant for embedding $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ on bounded convex domain / K. Tanaka, K. Sekine, M. Mizuguchi, S. Oishi // J. Comput. Appl. Math. — 2017. — V. 311 — P. 306–313.
20. Rossi, J.D. Optimal regularity at the free boundary for the infinity obstacle problem / J.D. Rossi, E.V. Teixeira, J.V. Urbano // Interfaces Free Bound. — 2015. — V. 17, № 3. — P. 381–398.

A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE OBSTACLE PROBLEM FOR THE p-LAPLACIAN

© 2024 / D. E. Apushkinskaya[1], A. A. Novikova[2], S. I. Repin[3]

[1,2,3]People's Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia
[3]Saint Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS, Russia
e-mail: [1]apushkinskaya@gmail.com, [2]aanovikova01@gmail.com, [3]rpnspb@gmail.com

The paper is concerned with a functional identity and estimates which are fulfilled for the measures of deviations from exact solutions of the obstacle problem for the p-Laplacian. They hold true for any functions from the corresponding (energy) functional class, which contains the generalised solution of the problem as well. We do not use any special properties of approximations or numerical methods nor information of the exact configuration of the coincidence set. The right-hand side of the identities and estimates contains only known functions and can be explicitly calculated, and the left side represents a certain measure of the deviation of the approximate solution from the exact solution. The right-hand side of the identity and estimates contains only known functions and can be explicitly calculated, while and the left side represents a certain measure of the deviation of the approximate solution from the exact one. The obtained functional relations allow to estimate the error of of any approximate solutions of the problem regardless of the method of their obtaining. In addition, they enable to compare the exact solutions of problems with different data. The latter provides the possibility to estimate the errors of mathematical models.

Keywords: free boundary problems, p-Laplacian, a posteriori estimates

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00293).

REFERENCES

1. Lions, J.-L. and Stampacchia, G., Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1967, vol. 20, pp. 493–519.
2. Petrosyan, A., Shagholian, H., and Uraltseva, N.N., *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*, Providence: American Mathematical Society, 2012.
3. Choe, H.J. and Lewis, J.L., On the obstacle problem for quasilinear elliptic equations of p-Laplacian type, *SIAM J. Math. Anal.*, 1991, vol. 22, no. 3, pp. 623–638.
4. Andersson, J., Lindgren, E., and Shahgholian, H., Optimal regularity for the obstacle problem for the p-Laplacian, *J. Differ. Equat.*, 2015, vol. 259, no. 6, pp. 2167–2179.
5. Jouvet, G. and Bueler, E., Steady, shallow ice sheets as obstacle problems: well-posedness and finite element approximation, *SIAM J. Appl. Math.*, 2012, vol. 72, no. 4, pp. 1292–1314.
6. Lewicka, M. and Manfredi, J.J., The obstacle problem for the p-Laplacian via optimal stopping of tug-of-war games, *Probab. Theory Related Fields*, 2017, vol. 167, no. 1-2, pp. 349–378.
7. Karp, L., Kipeläinen, T., Petrosyan, A., and Shagholian, H., On the porosity of free boundaries in degenerate variational inequalities, *J. Differ. Equat.*, 2000, vol. 164, no. 1, pp. 110–117.
8. Lee, K. and Shahgholian, H., Hausdorff measure and stability for the p-obstacle problem $(2<p<\infty)$, *J. Differ. Equat.*, 2003, vol. 195, no. 1, pp. 14–24.
9. Rodrigues, J.F., Stability remarks to the obstacle problem for p-Laplacian type equations, *Calc. Var. Partial Differ. Equat.*, 2005, vol. 23, no. 1, pp. 51–65.
10. Falk, R.S., Error estimates for approximation of a class of a variational inequalities, *Math. Comp.*, 1974, vol. 28, pp. 963–971.
11. Chen, Z. and Nochetto, R., Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems, *Numer. Math.*, 2000, vol. 4, pp. 527–548.
12. Repin, S.I. and Sauter, S.A., *Accuracy of Mathematical Models — Dimension Reduction, Homogenization, and Simplification*, Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2020.
13. Repin, S.I., A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals, *Math. Comp.*, 2000, vol. 69, no. 230, pp. 481–500.
14. Repin, S.I., A posteriori identities for measures of deviation from exact solutions of nonlinear boundary value problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 6, pp. 934–956.
15. Repin, S. and Valdman, J., Error identities for variational problems with obstacles, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 2018, Bd. 98, no. 4, S. 635–658.
16. Apushkinskaya, D.E. and Repin, S.I., Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution, *Interfaces Free Bound*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 511–531.
17. Apushkinskaya, D.E. and Repin, S.I., Biharmonic obstacle problem: guaranteed and computable error bounds for approximate solutions, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 11, pp. 1823–1838.
18. Apushkinskaya, D. and Repin, S., Functional a posteriori error estimates for the parabolic obstacle problem, *Comput. Methods Appl. Math.*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 259–276.
19. Tanaka, K., Sekine, K., Mizuguchi, M., and Oishi, S., Sharp numerical inclusion of the best constant for embedding $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ on bounded convex domain, *J. Comput. Appl. Math.*, 2017, vol. 311, pp. 306–313.
20. Rossi, J.D., Teixeira, E.V., and Urbano, J.V., Optimal regularity at the free boundary for the infinity obstacle problem, *Interfaces Free Bound.*, 2015, vol. 17, no. 3, pp. 381–398.