

УДК 517.977.1

РЕГУЛЯТОРЫ ФИНИТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

© 2024 г. В. Е. Хартовский

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Республика Беларусь

e-mail: hartows@mail.ru

Поступила в редакцию 11.06.2024 г., после доработки 11.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Для гибридных линейных автономных непрерывно-дискретных систем предложены методы проектирования регуляторов двух видов, обеспечивающих их финитную стабилизацию. Построение регулятора финитной стабилизации по состоянию (первый вид) основано на известных значениях решения системы управления в дискретные моменты времени, кратные шагу квантования. Найден наблюдатель, позволяющий в режиме реального времени с нулевой ошибкой получить необходимые значения решения по данным наблюдаемого выходного сигнала. Регулятор финитной стабилизации по выходу (второй вид) использует в качестве обратной связи наблюдаемый выходной сигнал; его конструкция представляет собой модификацию регулятора финитной стабилизации по состоянию путём включения в его контур указанного наблюдателя.

Ключевые слова: линейная гибридная непрерывно-дискретная система, наблюдаемый выходной сигнал, регулятор, наблюдатель, финитная стабилизация

DOI: 10.31857/S0374064124100088, EDN: JТЕНKQ

ВВЕДЕНИЕ

К гибридным системам относятся системы, в структуре которых имеется несколько уровней разнородного описания, а вектор-состояние содержит непрерывные и дискретные компоненты. Такие системы встречаются, например, в прикладных задачах управления механическими и электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях (см. [1–5]). Исследованию различных классов гибридных систем посвящены работы [6–17].

В настоящей статье изучаются линейные автономные гибридные непрерывно-дискретные системы с импульсным управляющим воздействием, которые можно интерпретировать как непрерывные системы при воздействии регуляторов дискретного действия. Различные свойства управляемости и наблюдаемости линейных непрерывно-дискретных систем изучены в работах [13, 14], в них же предложены методы построения необходимого программного управления и вычисления решения по измерениям наблюдаемого выхода. Однако хорошо известно, что более универсальным управлением, в сравнении с программным, является управление по типу обратной связи. В представленном исследовании предлагаются подходы к проектированию регуляторов с обратной связью, обеспечивающих финитную стабилизацию замкнутой системы [18], т.е. равенство нулю решения системы через конечное время. Строятся регуляторы двух видов. Первый вид — регулятор финитной стабилизации по состоянию. Получен критерий существования и предложен метод построения такого регулятора. Для реализации

обратной связи в этом регуляторе необходимо иметь возможность определять состояния системы в дискретные моменты времени, кратные шагу квантования. Для этого предложен так называемый “поточечный наблюдатель”, позволяющий по наблюдаемому выходному сигналу в режиме реального времени и с нулевой ошибкой восстанавливать необходимые данные, а также доказан критерий его существования. Второй вид разработанного регулятора — регулятор финитной стабилизации по выходу, основанный на использовании обратной связи в виде наблюдаемого выходного сигнала. Идея его построения заключается в модификации регулятора финитной стабилизации по состоянию путём встраивания в него дополнительного контура, выполняющего функцию поточечного наблюдателя. Показано, что регулятор финитной стабилизации по выходу существует тогда и только тогда, когда существуют регулятор финитной стабилизации по состоянию и поточечный наблюдатель.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть объект управления описывается линейной непрерывно-дискретной системой с импульсным управляющим воздействием и известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{1j}u(t_{k-j}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (1)$$

$$x_2(t_{k+1}) = A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{2j}u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^m (C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})), \quad k = m, m+1, \dots, \quad (3)$$

где $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$; $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{0, m}$, u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал, $t_k = kh$, $k \in \mathbb{Z}$, $h > 0$ — шаг квантования.

Считаем, что начальное условие для системы (1), (2) имеет вид

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = a_2, \quad a_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, 2, \quad u(t_j) = 0, \quad j < 0. \quad (4)$$

Под решением системы (1), (2) с начальным условием (4) понимается пара функций $\{x_1(t), t \geq 0, x_2(t_k), k = 0, 1, \dots\}$, удовлетворяющих начальному условию (4) и уравнениям (1), (2), где $x_1(t)$, $t \geq 0$, — непрерывная и дифференцируемая при $t \neq t_j$, $j = 0, 1, \dots$, функция, $x_2(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$, — дискретная функция. В уравнении (1) при $t = t_k$ понимается правосторонняя производная.

В работе исследуется задача финитной стабилизации системы (1), (2). Под задачей финитной стабилизации будем понимать [18] задачу проектирования регулятора с обратной связью, который обеспечивает равенство нулю решению замкнутой системы, начиная с некоторого момента времени $t_0 = k_0h$ ($k_0 \in \mathbb{N}$), независимо от начального состояния (4). Финитную стабилизацию будем осуществлять регуляторами двух типов:

а) регулятор с обратной связью по состоянию, реализация которого предполагает, что в каждый момент времени измерению доступен вектор $X(t_k)$:

$$u(t_k) = \sum_{j=0}^{m_1} (V_{11}^j X(t_{k-j}) + V_{12}^j x_3(t_{k-j})), \quad x_3(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_1} (V_{21}^j X(t_{k-j}) + V_{22}^j x_3(t_{k-j})),$$

$$k = k_1, k_1 + 1, \dots, \quad k_1 = m + m_1; \quad (5)$$

б) регулятор с обратной связью по неполным измерениям, в котором обратная связь строится по наблюдаемому выходному сигналу (3):

$$u(t_k) = \sum_{j=0}^{m_2} (U_{11}^j y(t_{k-j}) + U_{12}^j x_4(t_{k-j})), \quad x_4(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_2} (U_{21}^j y(t_{k-j}) + U_{22}^j x_4(t_{k-j})),$$

$$k = k_2, k_2 + 1, \dots, \quad k_2 = 2m + m_2. \quad (6)$$

Здесь $X(t_k) = \text{col}[x_1(t_k), x_2(t_k)]$, $k = 0, 1, \dots$; $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 3, 4$, — вспомогательные переменные, удовлетворяющие начальному условию

$$x_{i+2}(t_k) = a_{i+2k}, \quad k = \overline{0, m + m_i}, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где $a_{i+2k} \in \mathbb{R}^{n_{i+2}}$ — любые заданные векторы, V_{ij} , U_{ij} — постоянные матрицы подходящих размеров. Для определённости считаем, что при использовании регуляторов (5) и (6) $u(t_k) = 0$, $k = \overline{0, k_i - 1}$, $i = 1, 2$.

Определение 1. Регулятор вида (5) (вида (6)), для которого существует число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что, какими бы ни были начальные условия (4), (7) для решения замкнутой системы (1), (2), (5) (замкнутой системы (1)–(3), (6)), выполняются равенства

$$x_1(t) = 0, \quad t \geq t_{k_0}, \quad x_2(t_k) = 0, \quad x_3(t_k) = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \quad (8)$$

$$\left(x_1(t) = 0, \quad t \geq t_{k_0}, \quad x_2(t_k) = 0, \quad x_4(t_k) = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \right), \quad (9)$$

назовём регулятором *финитной стабилизации по состоянию* (регулятором *финитной стабилизации по выходу*).

Для реализации регулятора (5) необходимо иметь возможность определения в режиме реального времени векторов $X(t_k)$. Поэтому, а также для дальнейшего проектирования внутреннего контура регулятора (6), предварительно решим задачу построения наблюдателя, который позволит при любом управлении $u(t_k)$ в режиме реального времени на основании наблюдений (3) получать точные значения решения в точках t_k , т.е. величины $X(t_k)$.

Введём систему с дискретным временем

$$Z(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_3} (\hat{A}_j Z(t_{k-j}) + \hat{F}_j W(t_{k-j})) + \sum_{j=0}^m \hat{B}_j u(t_{k-j}),$$

$$V(t_k) = \sum_{j=0}^{m_3} \hat{Q}_j Z(t_{k-j}), \quad k = k_3, k_3 + 1, \dots, \quad k_3 \geq m_3 + m, \quad (10)$$

$$Z(t_j) = d_j, \quad j = \overline{k_3 - m_3, k_3}, \quad (11)$$

с дискретным входом $W(t_k)$ и дискретным выходом $V(t_k)$, где $\hat{A}_j$, $\hat{F}_j$, $\hat{B}_j$, $\hat{Q}_j$ и d_j — некоторые постоянные матрицы и векторы подходящих размеров. Равенства (11) определяют начальные условия для системы (10).

Определение 2. Под *поточечным наблюдателем* для системы (1)–(3) с заданным управлением $u(t_k)$ будем понимать систему вида (10), для которой существует момент времени t_{k_3} такой, что при любом начальном условии (11) и входном воздействии $W(t_j)$, равным выходу (3), $W(t_k) = y(t_k)$, $k = k_3, k_3 + 1, \dots$, выход $V(t_k)$ системы (10), начиная с момента време-

ни $t_{\tilde{k}_3}$, совпадает в точках t_k , $k = \tilde{k}_3, \tilde{k}_3 + 1, \dots$, с решением системы (1)–(3), порождающим выход (3), т.е. с векторами $X(t_k): V(t_k) = X(t_k)$, $k = \tilde{k}_3, \tilde{k}_3 + 1, \dots$

Для формулировки основных результатов обозначим $n = n_1 + n_2$ и введём матрицы

$$E_1 = e^{A_{11}h}, \quad E_2 = \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau, \quad A = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} E_2 B_{1j} \\ B_{2j} \end{bmatrix}, \quad C_j = [C_{1j} \ C_{2j}],$$

$$B(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j B_j, \quad C(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j C_j.$$

Сформулируем критерии существования поточечного наблюдателя и регуляторов финитной стабилизации по состоянию и по выходу.

Теорема 1. Для существования поточечного наблюдателя (10) для системы (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \text{при любом } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (12)$$

Теорема 2. Для существования регулятора финитной стабилизации по состоянию (5) для системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank} [I_n - \lambda A, \ B(\lambda)] = n \quad \text{при любом } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (13)$$

Теорема 3. Для существования регулятора финитной стабилизации по выходу (6) (для системы (1)–(3)) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (12) и (13).

Доказательства теорем 1–3 приводятся в пп. 3–5 и носят конструктивный характер, т.е. содержат способы построения регуляторов и наблюдателя.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Следуя [13, 14], для описания функции $X(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$, получим систему с дискретным временем.

Применив формулу Коши к уравнению (1), имеем

$$x_1(t_{k+1}) = e^{A_{11}h} x_1(t_k) + \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau \left(A_{12} x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{1j} u(t_{k-j}) \right), \quad k = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Учитывая (14), запишем систему

$$X(t_{k+1}) = AX(t_k) + \sum_{j=0}^m B_j u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^m C_j X(t_{k-j}), \quad k = m, m+1, \dots \quad (16)$$

Начальные условия для системы (15) в силу (4) имеют вид

$$X(0) = \text{col}[a_1, a_2], \quad u(t_j) = 0, \quad j < 0. \quad (17)$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Для того чтобы регулятор (5) (регулятор (6)) был регулятором финитной стабилизации по состоянию (по выходу) для системы (1), (2) (для системы (1)–(3)) необходимо и достаточно, чтобы этот регулятор обеспечивал решению системы (15), (5) (решению системы (15), (16), (6)) при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$ равенства

$$X(t_k) = 0, \quad x_3(t_k) = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots \quad (18)$$

$$(X(t_k) = 0, \quad x_4(t_k) = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots), \quad (19)$$

какими бы ни были начальные условия (17), (7).

Если замкнуть систему (15) регулятором (5) (регулятором (6)) и в полученной системе выход $y(t_k)$ заменить выражением $\sum_{j=0}^m C_j X(t_{k-j})$, то получим однородную разностную систему. Запишем эту систему для случая уравнений (15), (5):

$$\tilde{X}(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k_1} \tilde{A}_j \tilde{X}(t_{k-j}), \quad k = k_1, k_1 + 1, \dots, \quad (20)$$

где $\tilde{X}(t_k) = \text{col}[X(t_k), x_3(t_k)]$, $\tilde{A}_j \in \mathbb{R}^{(n+n_3) \times (n+n_3)}$ — некоторые матрицы. Характеристической матрице системы (20)

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \left[\lambda^{k_1+1} I_{\tilde{n}} - \sum_{j=0}^{k_1} \lambda^{k_1-j} \tilde{A}_j \right]$$

поставим в соответствие матрицу

$$\tilde{W}(\lambda) = [I_{\tilde{n}} - \lambda \tilde{A}(\lambda)], \quad \text{где} \quad \tilde{A}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k_1} \lambda^j \tilde{A}_j, \quad (21)$$

которую будем называть матрицей, ассоциированной с характеристической матрицей системы (20).

Лемма 2. Для того чтобы существовало число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что решение системы (20) будет удовлетворять равенствам $\tilde{X}(t_k) = 0$, $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, независимо от начального условия $\tilde{X}(t_j)$, $j = \overline{0, k_1}$, этой системы, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы (21) был тождественно равен единице, т.е.

$$\det \tilde{W}(\lambda) \equiv 1. \quad (22)$$

Доказательство. Введём матрицу и вектор

$$\Theta = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & \tilde{A}_1 & \dots & \tilde{A}_{k_1-1} & \tilde{A}_{k_1} \\ I_{\tilde{n}} & 0_{\tilde{n} \times \tilde{n}} & \dots & 0_{\tilde{n} \times \tilde{n}} & 0_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{\tilde{n} \times \tilde{n}} & 0_{\tilde{n} \times \tilde{n}} & \dots & I_{\tilde{n}} & 0_{\tilde{n} \times \tilde{n}} \end{bmatrix}, \quad \theta(t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(t_k) \\ \dots \\ \tilde{X}(t_{k-k_1}) \end{bmatrix},$$

где $0_{n \times k} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ — нулевая матрица. В силу (20) вектор $\theta(t_k)$ удовлетворяет системе

$$\theta(t_{k+1}) = \Theta \theta(t_k), \quad k = k_1, k_1 + 1, \dots \quad (23)$$

Равенства $\tilde{X}(t_k) = 0$, $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, при любом начальном условии $\tilde{X}(t_j)$, $j = \overline{0, k_1}$, для системы (20) возможны в том и только в том случае, когда $\theta(t_k) = 0$, $k = k_0 + k_1, k_0 + k_1 + 1, \dots$,

независимо от начальных условий системы (23). Это равносильно тому, что матрица Θ является нильпотентной. Покажем, что необходимым и достаточным условием нильпотентности матрицы Θ является условие (22). Определим матрицу

$$\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} & \dots & 0_{n \times n} \\ \lambda I_n & I_n & \dots & 0_{n \times n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{k_1} I_n & \lambda^{k_1-1} I_n & \dots & I_n \end{bmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$(I_{n+n_3} - \lambda\Theta)\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}(\lambda) & -\sum_{i=1}^{k_1} \lambda^i \widetilde{A}_i & -\sum_{i=2}^{k_1} \lambda^{i-1} \widetilde{A}_i & \dots & -\lambda \widetilde{A}_{k_1} \\ 0_{n \times n} & I_n & 0_{n \times n} & \dots & 0_{n \times n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \dots & I_n \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Из равенства (24) следует, что $\det(I_{n+n_3} - \lambda\Theta) = \det \widetilde{W}(\lambda)$, поэтому условие $\det(I_{n+n_3} - \lambda\Theta) \equiv 1$ равносильно условию (22); это же условие является необходимым и достаточным для того, чтобы матрица Θ была нильпотентной. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathbb{R}^{m \times k}[\lambda]$ множество полиномиальных матриц.

Лемма 3 [19]. *Условие*

$$\text{rank} [I - \lambda D_1, D_2(\lambda)] = n \quad \text{при любом } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (25)$$

где $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times r}[\lambda]$, является необходимым и достаточным для того, чтобы нашлись матрицы $\Phi_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times n}[\lambda]$, $\Phi_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\lambda]$ такие, что $\det D_\Phi(\lambda) \equiv 1$, где

$$D_\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n - \lambda D_1 & -D_2(\lambda) \\ -\lambda \Phi_1(\lambda) & I_r - \lambda \Phi_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Следствие. *Условие (25) необходимо и достаточно для того, чтобы нашлись матрицы $\Phi_{11}(\lambda), \Phi_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times n}[\lambda]$, $\Phi_{12}(\lambda), \Phi_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\lambda]$ такие, что $\det \tilde{D}_\Phi(\lambda) \equiv 1$, где*

$$\tilde{D}_\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n - \lambda D_1 - \lambda D_2(\lambda) \Phi_{11}(\lambda) & -\lambda D_2(\lambda) \Phi_{12}(\lambda) \\ -\lambda \Phi_{21}(\lambda) & I_r - \lambda \Phi_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Достаточность. В силу условия (12) и следствия существуют матрицы $M_{11}(\lambda), M_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times l}[\lambda]$ и $M_{21}(\lambda), M_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times l}[\lambda]$ такие, что

$$\begin{vmatrix} I_n - \lambda A - \lambda M_{11}(\lambda) C(\lambda) & -\lambda M_{12}(\lambda) \\ -\lambda M_{21}(\lambda) C(\lambda) & I_l - \lambda M_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1. \quad (26)$$

Пусть $M_{ik}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_3} \lambda^j M_{ik}^j$, где M_{ik}^j — постоянные матрицы подходящих размеров. Наблюдатель вида (10) определим системой

$$\begin{aligned} Z_1(t_{k+1}) &= AZ_1(t_k) + \sum_{j=0}^{m_3} M_{11}^j \sum_{i=0}^m C_i Z_1(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_3} M_{12}^j Z_2(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{m_3} M_{11}^j W(t_{k-j}) + \sum_{j=0}^m B_j u(t_{k-j}), \\ Z_2(t_{k+1}) &= \sum_{j=0}^{m_3} M_{21}^j \sum_{i=0}^m C_i Z_1(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_3} M_{22}^j Z_2(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{m_3} M_{21}^j W(t_{k-j}), \\ k &= k_3, k_3 + 1, \dots, \quad k_3 \geq m_3 + m, \end{aligned} \quad (27)$$

с выходом

$$V(t_k) = [I_n, \quad 0_{n \times l}] Z(t_k), \quad k = k_3, k_3 + 1, \dots, \quad (28)$$

где $Z = \text{col}[Z_1, Z_2]$.

Начальные условия для системы (27) возьмём в виде $Z_1(t_k) = b_k^1$, $k = \overline{k_3 - (m + m_3), k_3}$, $Z_2(t_k) = b_k^2$, $k = \overline{k_3 - m_3, k_3}$, где $b_k^1 \in \mathbb{R}^n$, $b_k^2 \in \mathbb{R}^l$ — любые векторы.

Пусть $X(t_k)$ — любое решение системы (15), а $y(t_k)$ — отвечающий этому решению выход (16). Положим $W(t_k) = y(t_k)$, $k = k_3, k_3 + 1, \dots$, и обозначим через $\varepsilon(t_k) = V(t_k) - X(t_k) = Z_1(t_k) - X(t_k)$, $k = k_3, k_3 + 1, \dots$, ошибку оценивания решения $X(t_k)$ системы (15), (16) наблюдателем (27), (28). Легко видеть, что в этом случае ошибка оценивания $\varepsilon(t_k)$ является векторной компонентой решения следующей линейной автономной однородной разностной системы:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_{k+1}) &= A\varepsilon(t_k) + \sum_{j=0}^{m_3} M_{11}^j \sum_{i=0}^m C_i \varepsilon(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_3} M_{12}^j Z_2(t_{k-j}), \\ Z_2(t_{k+1}) &= \sum_{j=0}^{m_3} M_{21}^j \sum_{i=0}^m C_i \varepsilon(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_3} M_{22}^j Z_2(t_{k-j}), \quad k = k_3, k_3 + 1, \dots \end{aligned} \quad (29)$$

В силу тождества (26) определитель матрицы, ассоциированной с характеристической матрицей системы (29), тождественно равен единице. Поэтому найдётся момент времени $t_{\tilde{k}_3}$ такой, что решение системы (29), независимо от её начального условия, удовлетворяет соотношениям $\varepsilon(t_k) = 0$, $Z_2(t_k) = 0$, $k = \tilde{k}_3, \tilde{k}_3 + 1, \dots$. Отсюда следует, что выполняется равенство

$$V(t_k) = X(t_k), \quad k = \tilde{k}_3, \tilde{k}_3 + 1, \dots \quad (30)$$

Необходимость. Если для системы (1)–(3) существует поточечный наблюдатель (10), то при любой фиксированной функции $u(t_k)$ найдутся $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ такие, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством выходов $\{y(t_k), k = t_\alpha, t_\alpha + 1, \dots\}$ и множеством решений $\{X(t_k)\}$, где $k = \alpha + \beta, \alpha + \beta + 1, \dots$. Покажем, что для существования такого взаимно однозначного соответствия необходимо условие (12). При этом, не нарушая общности рассуждений, примем, что $u(t_k) = 0$, $k = 0, 1, \dots$.

Обозначим $C_A = \sum_{j=0}^m C_j A^{m-j}$. Очевидно, что имеют место равенства

$$y(t_{\alpha+j}) = C_A A^j X(t_{\alpha-m}), \quad j = \overline{0, \beta}, \quad X_{\alpha+\beta+1} = A^{\beta+m+1} X(t_{\alpha-m}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что существование указанного взаимно однозначного соответствия возможно в том и только в том случае, когда найдётся число $\beta_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $\beta \geq \beta_0$ выполняется равенство

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C_A \\ \dots \\ C_A A^\beta \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C_A \\ \dots \\ C_A A^\beta \\ A^{\beta+m+1} \end{bmatrix},$$

которое, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C_A \\ \dots \\ C_A A^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C_A \\ \dots \\ C_A A^{n-1} \\ A^n \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Последнее условие равносильно соотношению [20]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C_A \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0. \quad (33)$$

Условие (33) равносильно условию (12). Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Необходимость. Предположим, что существует регулятор (5) такой, что при любых начальных условиях (4), (7) выполняются равенства (8). Тогда имеют место соотношения (18). Поэтому для матрицы (21) согласно лемме 2 выполняется тождество (22), которое запишем более подробно, учитывая обозначения (5):

$$\begin{vmatrix} I_n - \lambda A - \lambda B(\lambda) V_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda) V_{12}(\lambda) \\ -\lambda V_{21}(\lambda) & I_{n_3} - \lambda V_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1, \quad (34)$$

где $V_{ik}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_1} \lambda^j V_{ik}^j$. Легко видеть, что если условие (13) нарушается, то тождество (34) выполняться не может. Необходимость условия (34) доказана.

Достаточность. Поскольку выполняется условие (13), то в силу следствия 8 найдутся матрицы $L_{11}(\lambda), L_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times n}[\lambda]$, $L_{12}(\lambda), L_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\lambda]$ такие, что

$$\begin{vmatrix} I_n - \lambda A - \lambda B(\lambda) L_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda) L_{12}(\lambda) \\ -\lambda L_{21}(\lambda) & I_r - \lambda L_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1. \quad (35)$$

Пусть $L_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m_1} \lambda^k L_{ij}^k$, где L_{ij}^k — постоянные матрицы подходящих размеров. Построим регулятор

$$u(t_k) = \sum_{j=0}^{m_1} (L_{11}^j X(t_{k-j}) + L_{12}^j x_3(t_{k-j})), \quad x_3(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_1} (L_{21}^j X(t_{k-j}) + L_{22}^j x_3(t_{k-j})),$$

$$k = k_1, k_1 + 1, \dots, \quad k_1 = m + m_1, \quad (36)$$

где $x_3 \in \mathbb{R}^r$ — вспомогательная переменная. При замыкании системы (1), (2) регулятором (36) следует доопределить начальные условия, задав значения (7) (при $i = 3$). В силу тождества (35) и лемм 1, 2 найдётся число $k_0 > 0$ такое, что какими бы ни были начальные условия (4), (7) (при $i = 3$) замкнутой системы (15), (36), будут выполняться равенства (8). Теорема доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Необходимость. Предположим, что существует регулятор (6) такой, что при любых начальных условиях (4), (7) выполняются равенства (9). В этом случае имеют место соотношения (19), поэтому определитель матрицы, ассоциированной с характеристической матрицей системы (15), (16), (6), согласно лемме 2 тождественно равен единице. Запишем это тождество более подробно, учитывая обозначения (6):

$$\begin{vmatrix} I_n - \lambda A - \lambda B(\lambda)U_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda B(\lambda)U_{12}(\lambda) \\ -\lambda U_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_{n_4} - \lambda U_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1, \quad (37)$$

где $U_{ik}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_2} \lambda^j U_{ik}^j$. Легко видеть, что если условия (12) или (13) нарушаются, то тождество (37) выполняться не может. Необходимость условий (12), (13) доказана.

Достаточность. Предполагаем, что построены регулятор финитной стабилизации по состоянию (36) и поточечный наблюдатель (27), (28). Регулятор финитной стабилизации по выходу (6) определим следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} u(t_k) &= \sum_{j=0}^{m_1} (L_{11}^j x_{42}(t_{k-j}) + L_{12}^j x_{41}(t_{k-j})), \quad x_{41}(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_1} (L_{21}^j x_{42}(t_{k-j}) + L_{22}^j x_{41}(t_{k-j})), \\ x_{42}(t_{k+1}) &= Ax_{42}(t_k) + \sum_{j=0}^{m_3} M_{11}^j \sum_{i=0}^m C_i x_{42}(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_3} M_{12}^j x_{43}(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{m_3} M_{11}^j y(t_{k-j}) + \\ &\quad + \sum_{j=0}^m B_j \sum_{i=0}^{m_1} (L_{11}^i x_{42}(t_{k-j-i}) + L_{12}^i x_{41}(t_{k-j-i})), \\ x_{43}(t_{k+1}) &= \sum_{j=0}^{m_3} M_{21}^j \sum_{i=0}^m C_i x_{42}(t_{k-j-i}) + \sum_{j=1}^{m_3} M_{22}^j x_{43}(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{m_3} M_{21}^j y(t_{k-j}), \\ k &= k_2, k_2 + 1, \dots, \quad k_2 = m + \max\{m_1, m_3\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь x_{4k} , $k = \overline{1, 3}$, — вспомогательные переменные.

Замечание. Соотношения (38) получены на основании (27), (30), (36) и соответствующих замен обозначений.

Для того чтобы показать, что построенный регулятор (38) является регулятором финитной стабилизации по выходу, докажем, что для системы (15), (16), замкнутой регулятором (38), выполняются условия леммы 2.

Выпишем матрицу, ассоциированную с характеристической матрицей системы (15), (38):

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n - \lambda A & -\lambda B(\lambda)L_{12}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & 0_{n \times l} \\ 0_{r \times n} & I_r - \lambda L_{22}(\lambda) & -\lambda L_{21}(\lambda) & 0_{r \times l} \\ \lambda M_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{12}(\lambda) & I_n - \lambda A - \lambda M_{11}(\lambda)C(\lambda) - \lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & -\lambda M_{12}(\lambda) \\ \lambda M_{21}(\lambda)C(\lambda) & 0_{l \times r} & -\lambda M_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_l - \lambda M_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Определив матрицу

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times r} & 0_{n \times n} & 0_{n \times l} \\ 0_{r \times n} & I_r & 0_{r \times n} & 0_{r \times l} \\ -I_n & 0_{n \times r} & I_n & 0_{n \times l} \\ 0_{l \times n} & 0_{l \times r} & 0_{l \times n} & I_l \end{bmatrix},$$

ВЫЧИСЛИМ

$$\Gamma W(\lambda)\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} I_n - \lambda A - \lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{12}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)L_{11}(\lambda) & 0_{n \times l} \\ -\lambda L_{21}(\lambda) & I_r - \lambda L_{22}(\lambda) & -\lambda L_{21}(\lambda) & 0_{r \times l} \\ 0_{n \times n} & -0_{n \times r} & I_n - \lambda A - \lambda M_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda M_{12}(\lambda) \\ 0_{l \times n} & 0_{l \times r} & -\lambda M_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_l - \lambda M_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Учитывая тождества (26) и (35), заключаем, что $\det W(\lambda) = \det \Gamma W(\lambda)\Gamma^{-1} \equiv 1$. Поэтому в силу леммы 2 найдётся число $k_0 > 0$ такое, что имеют место равенства (9). Теорема доказана.

6. ПРИМЕР

Пусть система (1)–(3) определяется матрицами

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [0 \ 1], \quad A_{22} = 1, \\ B_{11} &= \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = 0, \quad C_{11} = [-1 \ -1], \quad C_{12} = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$e^{A_{11}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 e^{A_{11}(1-\tau)} d\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \ -1 \ 0].$$

Нетрудно убедиться, что условия теоремы 3 для данной системы выполнены. Построим для неё регулятор финитной стабилизации по выходу (6). Согласно доказательству теоремы 3 на первом этапе необходимо иметь матрицы регулятора финитной стабилизации по состоянию (5) и поточечного наблюдателя (10). Эти матрицы определяются на основании следствия 8 так, чтобы выполнялись тождества (26), (35). Можно проверить, что эти тождества обеспечат матрицы

$$M_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \\ -3 \\ 2\lambda \end{bmatrix}, \quad M_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda \\ 3 \\ -2\lambda \end{bmatrix}, \quad M_{21}(\lambda) = -1, \quad M_{22}(\lambda) = 1,$$

$$L_{11}(\lambda) = [\lambda \ -3 \ -3], \quad L_{12}(\lambda) = -1, \quad L_{21}(\lambda) = [-\lambda \ 3 \ 3], \quad L_{22}(\lambda) = 1. \quad (39)$$

Используя матрицы (39), выпишем регулятор (38):

$$\begin{aligned} u(t_k) &= [0 \ -3 \ -3]x_{42}(t_k) + [1 \ 0 \ 0]x_{42}(t_{k-1}) - x_{41}(t_k), \\ x_{41}(t_{k+1}) &= [0 \ 3 \ 3]x_{42}(t_k) + [-1 \ 0 \ 0]x_{42}(t_{k-1}) + x_{41}(t_k), \\ x_{42}(t_{k+1}) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_{42}(t_k) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} x_{42}(t_{k-1}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} x_{43}(t_k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} x_{43}(t_{k-1}) - \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} y(t_k) - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} y(t_{k-1}) - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{41}(t_k), \\ x_{43}(t_{k+1}) &= [-1 \ -1 \ 0]x_{42}(t_k) + x_{43}(t_k) - y(t_k), \quad k = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Для доказательства того, что полученный регулятор (40) является регулятором финитной стабилизации по выходу, можно воспользоваться леммой 2. Действительно, определитель матрицы

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -\lambda & 0 & \lambda & -\lambda^2 & 3\lambda & 3\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2\lambda & \lambda & -\lambda^2 & 3\lambda & 3\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda^2 & -3\lambda & -3\lambda & 0 \\ \lambda^2 & \lambda^2 & 0 & \lambda & 1-\lambda-2\lambda^2 & -\lambda^2+2\lambda & 3\lambda & \lambda^2 \\ -3\lambda & -3\lambda & 0 & \lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 1+5\lambda & \lambda & -3\lambda \\ 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 0 & 0 & -2\lambda^2 & -\lambda-2\lambda^2 & 1 & 2\lambda^2 \\ -\lambda & -\lambda & 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

тождественно равен единице.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены критерии существования поточечного наблюдателя, регулятора финитной стабилизации по состоянию и регулятора финитной стабилизации по выходу. Доказательства этих критериев являются конструктивными в том смысле, что содержат методы построения соответствующих объектов.

Проверку выполнения условия (12) можно заменить проверкой условия (32), которое представляет собой сравнение рангов двух постоянных матриц. Рассуждая аналогично, можно показать, что проверку условия (13) можно заменить проверкой выполнения равенства рангов двух постоянных матриц:

$$\text{rank} [B_A, \dots, A^{n-1}B_A] = \text{rank} [B_A, \dots, A^{n-1}B_A, A^n], \quad B_A = \sum_{j=0}^m A^{m-j} B_j.$$

Можно показать, что критерии существования поточечного наблюдателя (теорема 1) и финитного регулятора по состоянию (теорема 2) при $m=0$ являются критериями (следуя терминологии [13, 14]) слабой финальной наблюдаемости и полной управляемости, записанными в иной форме. Распространение идей работ [13, 14] на случай $m \in \mathbb{N}$ позволяет переформулировать теорему 3 так: для того чтобы существовал финитный регулятор по выходу (6), необходимо и достаточно, чтобы система (1)–(3) была слабо финально наблюдаемой и полностью управляемой.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Гродненского государственного университета имени Янки Купалы в рамках реализации государственной программы научных исследований “Конвергенция–2025”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, С.Н. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем / С.Н. Васильев, А.И. Маликов // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. — Т. 1. — Казань : Фолиант, 2011. — С. 23–81.
2. Гурман, В.И. Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем / В.И. Гурман // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 4. — С. 70–75.

3. Cassandras, C.G. Optimal control of a class of hybrid systems / C.G. Cassandras, D.L. Pepyne, Y. Wardi // IEEE Trans. Automat. Control. — 2001. — V. 46, № 3. — P. 398–415.
4. Savkin, A.V. Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems / A.V. Savkin, R.J. Evans. — Boston : Birkhäuser, 2002. — 153 p.
5. Бортаковский, А.С. Оптимизация траекторий переключаемых систем / А.С. Бортаковский, И.В. Урюпина // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2021. — № 5. — С. 33–51.
6. Бортаковский, А.С. Оптимизация переключающих систем / А.С. Бортаковский. — М. : Изд-во МАИ, 2016. — 119 с.
7. Максимов, В.П. Непрерывно-дискретные динамические модели / В.П. Максимов // Уфимск. мат. журн. — 2021. — Т. 13, № 3. — С. 97–106.
8. Батурин, В.А. Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами / В.А. Батурин, Е.В. Гончарова, Н.С. Малтугуева // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 5. — С. 53–61.
9. Габасов, Р. Оптимальное управление гибридными системами / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 6. — С. 2–52.
10. Agranovich, G. Observer for discrete-continuous LTI systems with continuous-time measurements / G. Agranovich // Funct. Differ. Equat. — 2011. — № 18 (1). — P. 3–12.
11. Branicky, M. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory / M. Branicky, V. Borkar, S. Mitter // IEEE Trans. Automat. Control. — 1998. — V. 43, № 1. — P. 31–45.
12. De la Sen, M. On the controller synthesis for linear hybrid systems / M. De la Sen // IMA J. Math. Control and Information. — 2001. — № 18 (4). — P. 503–529.
13. Марченко, В.М. Гибридные дискретно-непрерывные системы. Управляемость и достижимость / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 1. — С. 111–122.
14. Марченко, В.М. Наблюдаемость гибридных дискретно-непрерывных систем / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1421–1435.
15. Метельский, А.В. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 547–558.
16. Хартовский, В.Е. Управление спектром линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В.Е. Хартовский // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 1. — С. 23–43.
17. Хартовский, В.Е. Проектирование асимптотических наблюдателей для линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В.Е. Хартовский // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртск. гос. ун-та. — 2023. — Т. 60. — С. 114–136.
18. Фомичев, В.В. Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем / В.В. Фомичев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1516–1521.
19. Хартовский, В.Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 375–390.
20. Метельский, А.В. Выделение идентифицируемой и управляемой компонент состояния динамической системы с запаздыванием / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 6. — С. 972–984.

REGULATORS OF FINITE STABILIZATION FOR HYBRID LINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

© 2024 / V. E. Khartovskii

Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus
e-mail: hartows@mail.ru

For hybrid linear autonomous continuous-discrete systems, methods for designing two types of regulators that provide finite stabilization are proposed. The implementation of one of them, a regulators for finite stabilization by state, is based on knowledge of the values of the control system solution at discrete moments of time, multiples of the quantization step. For this purpose, an observer has been

built that makes it possible to obtain the necessary solution values based on the observed output signal in real time and with zero error. The second type of regulator — the regulator of finite stabilization by output — uses the observed output signal as feedback, and its design is a modification of the finite state stabilization regulator by state by including the above observer in its circuit.

Keywords: linear hybrid continuous-discrete system, observed output signal, controller, observer, finite stabilization

FUNDING

This work was carried out with financial support from Yanka Kupala State University of Grodno within the framework of the State Program of Scientific Research “Konvergencia-2025”

REFERENCES

1. Vasil'yev, S.N. and Malikov, A.I., On some results on the stability of switchable and hybrid systems, in *Aktual'nyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy. K 20-letiyu IMM KazNTS RAN*, Kazan: Foliant, 2011. vol. 1, pp. 23–81.
2. Gurman, V.I., Models and optimality conditions for hybrid controlled systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2004, vol. 43, no. 4, pp. 560–565.
3. Cassandras, C.G., Pepyne, D.L., and Wardi, Y., Optimal control of a class of hybrid systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2001, vol. 46, no. 3, pp. 398–415.
4. Savkin, A.V. and Evans, R.J., *Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems*, Boston: Birkhäuser, 2002.
5. Bortakovskiy, A.S. and Uryupin, I.V., Optimization of switchable systems' trajectories, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2021, vol. 60, no. 5, pp. 701–718.
6. Bortakovskiy, A.S., *Optimizatsiya pereklyuchayushchikh sistem* (Optimization of Switching Systems), Moscow: Izd-vo MAI, 2016.
7. Maksimov, V.P., Continuous-discrete dynamic models, *Ufa Math. J.*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 95–103.
8. Baturin, V.A., Goncharova E.V., and Maltugueva, N.S., Iterative methods for solution of problems of optimal control of logic-dynamic systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2010, vol. 49, no. 5, pp. 731–739.
9. Gabasov, R., Kirillova, F.M., and Paulianok, N.S., Optimal control of some hybrid systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2010, no. 49, pp. 872–882.
10. Agranovich, G., Observer for discrete-continuous LTI systems with continuous-time measurements, *Funct. Differ. Equat.*, 2011, no. 18 (1), pp. 3–12.
11. Branicky, M., Borkar, V., and Mitter S., A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 43, no. 1, pp. 31–45.
12. De la Sen, M., On the controller synthesis for linear hybrid systems, *IMA J. of Math. Control and Information*, 2001, no. 18 (4), pp. 503–529.
13. Marchenko, V.M., Hybrid discrete-continuous systems. Controllability and reachability, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 112–125.
14. Marchenko, V.M., Observability of hybrid discrete-continuous systems, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1389–1404.
15. Metel'skii, A.V. and Khartovskii, V.E., Synthesis of damping controllers for the solution of completely regular differential-algebraic delay systems, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 539–550.
16. Khartovskii, V.E., Controlling the spectrum of linear completely regular differential-algebraic systems with delay, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2020, vol. 59, no. 1, pp. 19–38.
17. Khartovskii, V.E., Designing asymptotic observers for linear completely regular differential algebraic systems with delay, *Izv. In-ta Matematiki i Informatiki Udmurtsk. Gos. Un-ta*, 2022, vol. 60, pp. 114–136.
18. Fomichev, V.V., Sufficient conditions for the stabilization of linear dynamical systems differential equations, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1512–1518.
19. Khartovskii, V.E., Spectral reduction of linear systems of the neutral type, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 366–381.
20. Metel'skii, A.V., Separation of identifiable and controllable component of the state of a dynamic system with delay, *Differ. Equat.*, 1992, vol. 28, no. 6, pp. 972–984.