ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1386–1393

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

РЕШЕНИЕ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

© 2024 г. В. Н. Лаптинский

Белорусско-Российский университет, г. Могилёв, Республика Беларусь

e-mail: lavani@tut.by

Поступила в редакцию 14.07.2023 г., после доработки 15.05.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Предложен алгоритм решения линейной многоточечной задачи управления с ограничениями изопериметрического типа на функцию состояний.

Ключевые слова: управление, многоточечная задача, интегральное условие

DOI: 10.31857/S0374064124100075, EDN: JTGJGA

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучается задача построения возможных управлений $u\in C(I,\mathbb{R}^r)$ и соответствующих функций состояний $x\in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ на основе системы соотношений

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+Q(t)u, \tag{1}$$

$$x(t_s)=x_s, \quad s=\overline{0,m}, \tag{2}$$

$$\int\limits_{a_i}^{b_i}\Psi_i(\tau)x(\tau)\,d\tau=\mu_i, \quad i=\overline{1,k}, \tag{3}$$

где $A\in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $Q\in C(I,\mathbb{R}^{n\times r})$, $\Psi_i\in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $u\in\mathbb{R}^r$, $\mu_i\in\mathbb{R}^n$, $a_i,b_i\in I=[0,\omega]$, $i=\overline{1,k}$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_m\leqslant\omega$, $\omega>0$.

Соотношения (3) представляют собой обобщения интегральных условий, рассматриваемых при $i\in\mathbb{N}$ в работах [1, с. 264; 2, гл. 9, § 5] и являющихся в теории управления изопериметрическими ограничениями [3, с. 19].

При описании структуры решения задачи и соответствующего алгоритма его построения понадобятся дополнительные данные. С этой целью введём матрицы $\Phi_i\in C(I,\mathbb{R}^{r\times n})$, $P_l\in C(I,\mathbb{R}^{r\times n})$, $l=\overline{1,m}$, возможно, базисного типа [4, гл. 4] — структурные функции управления, в принципе аналогичные классическим функциям [5, § 30; 6, гл. 4]. Развёрнутое описание основных алгоритмов на основе таких функций дано в книге [7], где уделено особое внимание выбору базисных функций. Основными приёмами такого выбора можно руководствоваться при анализе задачи (1)–(3).

Соотношения (1), (2) представляют собой классическую задачу управления с начальным состоянием системы, описываемым условием Коши $x(t_0)=x_0$. Очевидно, возможны и другие начальные состояния этой системы. Соотношения $x(t_\nu)=x_\nu$ $(\nu=\overline{1,m-1})$ — заданные промежуточные состояния системы. Условие (3) формально обобщает условие из [3, с. 19] в линейном случае. Цель работы — получить достаточные условия разрешимости задачи (1)–(3), а также замкнутые соотношения для функций $u(t)$, $x(t)$.

Задача состоит из двух частей, определяемых условиями (2) и (3) соответственно, которые с точки зрения теории уравнений первого рода не имеют принципиальных различий. В рамках эквивалентности задаче (1)–(3) рассматриваем совокупность $m+k+1$ соотношений, состоящую из уравнения (1), m уравнений типа (3), порождаемых условиями (2), и k уравнений (3). На основании (1) $m+1$ точечных условий (2) порождают m интегральных соотношений типа (3). Поэтому для изучения разрешимости и построения этих функций используем единый метод, который опишем применительно к системе (3), представленной в операторном виде

$$T_i x = \mu_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

где T_i — интегральные операторы, определяемые левыми частями в (3). Суть метода состоит в использовании представлений типа [5, § 30; 6, гл. 4] для точного представления функции $x(t)$ (см. [4, гл. 4]).

Для построения решения системы (4) введём функции $S_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ типа [4, гл. 4], при этом воспользуемся поэтапным по $i=\overline{1,k}$ введением и частичным исключением промежуточных вспомогательных функций.

На первом этапе функцию $x(t)$ ищем из первого уравнения в следующем виде:

$$x(t) = S_1(t)c_1 + y_1(t), \tag{5}$$

где c_1 — постоянный вектор, $y_1(t)$ — произвольная функция.

Вид функции (5) соответствует специфике решений уравнений первого рода. Величину c_1 выберем так, чтобы первое уравнение выполнялось при любой функции $y_1(t)$. После подстановки (5) в первое уравнение системы (4) и необходимых упрощений придём к выражению

$$T_1 S_1 c_1 = \mu_1 - T_1 y_1. \tag{6}$$

Предполагая, что $\det(T_1 S_1) \neq 0$, из (5), (6) получаем

$$x(t) = M_1(y_1) + q_1(t), \tag{7}$$

где $M_1 : \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$ — линейный однородный оператор:

$$M_1(y_1) = y_1 - S_1(T_1 S_1)^{-1} T_1 y_1, \quad q_1(t) = S_1(T_1 S_1)^{-1}\mu_1. \tag{8}$$

Произвольную функцию $y_1(t)$ доопределим таким образом, чтобы выполнялось второе уравнение системы (4) (2-й этап, $i=2$), т.е.

$$T_2 M_1(y_1) = \mu_2 - T_2 q_1. \tag{9}$$

С этой целью функцию $y_1(t)$ строим в виде

$$y_1(t) = S_2(t)c_2 + y_2(t), \tag{10}$$

где c_2 и y_2 — величины, аналогичные c_1 и y_1 соответственно.

Подставив (10) в (9), получим

$$T_2 M_1 S_2 c_2 = \mu_2 - T_2 q_1 - T_2 M_1 y_2. \tag{11}$$

Из (11) при $\det(T_2 M_1 S_2) \neq 0$ находим

$$c_2 = (T_2 M_1 S_2)^{-1}(\mu_2 - T_2 q_1 - T_2 M_1 y_2),$$

а затем, в силу (10),

$$y_1=y_2-S_2(T_2M_1S_2)^{-1}T_2M_1y_2+S_2(T_2M_1S_2)^{-1}(\mu_2-T_2q_1). \tag{12}$$

Здесь и ниже аргумент t будем опускать.

На основании (12) соотношение (7) примет вид

$$x(t)=M_2(y_2)+q_2, \tag{13}$$

где M_2 — оператор, аналогичный M_1:

$$M_2(y_2)=M_1(y_2)-M_1S_2(T_2M_1S_2)^{-1}T_2M_1y_2, \tag{14}$$

$$q_2=q_1+M_1S_2(T_2M_1S_2)^{-1}(\mu_2-T_2q_1). \tag{15}$$

В силу (7), (8) и (13)–(15) на r-м этапе $(i=r)$ приходим к равенству (алгоритму)

$$x(t)=M_r(y_r)+q_r, \tag{16}$$

где при выполнении условия

$$\det(T_rM_{r-1}S_r)\neq 0 \tag{17}$$

имеют место рекуррентные соотношения

$$M_r(y_r)=M_{r-1}(y_r)-M_{r-1}S_r(T_rM_{r-1}S_r)^{-1}T_rM_{r-1}(y_r), \tag{18}$$

$$q_r=q_{r-1}+M_{r-1}S_r(T_rM_{r-1}S_r)^{-1}(\mu_r-T_rq_{r-1}), \tag{19}$$

$M_0=\mathfrak{J}$ — тождественный оператор.

Иными словами, при выполнении условия (17) решение системы (4) определяется формулой

$$x(t)=M(t,y)+q(t), \tag{20}$$

где y — произвольная вспомогательная функция, $M(t,y)$, $q(t)$ — соответственно линейный однородный интегральный оператор, действующий из $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$, и функция, построенные по алгоритму (16)–(19), при этом $y_k=y$, $q_k=q$, $M_k(y_k)=M(t,y)$. Аргумент t в $M(t,y)$ означает явную зависимость M_k от t.

Определение. Решение $(u(t),x(t))$ задачи (1)–(3) называем *замкнутым*, если оно представимо с помощью конечного числа квадратур и алгебраических операций с матрицантом $X(t)$ свободной системы и остальными исходными величинами задачи (1)–(3).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Введём интегральные операторы

$$H_lu=\int\limits_{t_0}^{t_l}X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)\,d\tau,\quad l=\overline{1,m},$$

$$N_iu=\int\limits_{a_i}^{b_i}\Psi_i(\tau)X(\tau)\,d\tau\int\limits_{t_0}^{\tau}X^{-1}(s)Q(s)u(s)\,ds,\quad i=\overline{1,k},$$

а также матрицы $H_{j+1}G_jP_{j+1}$, $j=\overline{0,m-1}$, $F_{p+1}K_p\Phi_{p+1}$, $p=\overline{0,k-1}$; здесь G_j, K_p — линейные однородные операторы, аналогичные M_i, при этом $G_0=K_0\equiv\mathfrak{J}$ — тождественный оператор, $F_{p+1}(z)=N_{p+1}G_m(z)$ $(z\in\mathbb{R}^r)$.

По предложенному в п. 1 методу выведем алгоритм построения решений задачи (1)–(3).

Сначала решим первую часть задачи, т.е. найдём управление $u(t)$, подчинённое условиям (2). Поскольку

$$x(t)=X(t)x_0+X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

то, согласно (2),

$$\int\limits_{t_0}^{t_s} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)\,d\tau=X^{-1}(t_s)x_s-x_0. \tag{22}$$

Соотношение (22) представляет собой условие типа (3). Совокупность соотношений (3), (21), (22) эквивалентна задаче (1)–(3).

На первом этапе будем искать управление в виде

$$u(t)=P_1(t)c_1+z_1,$$

где c_1 — постоянный вектор, z_1 — произвольная вспомогательная функция, определяемая на следующем этапе $(s=2)$, и т.д. В результате при выполнении условия $\det(H_{j+1}G_jP_{j+1})\neq 0$ получим выражение типа (20):

$$u(t)=G(t,z)+\varphi(t), \tag{23}$$

где z — вспомогательная вектор-функция, $G(t,z)$, $\varphi(t)$ — соответственно линейный однородный интегральный оператор, действующий из $C(I,\mathbb{R}^r)$ в $C(I,\mathbb{R}^r)$, и функция, найденные по алгоритму

$$G_{j+1}(z_{j+1})=G_j(z_{j+1})-G_jP_{j+1}(H_{j+1}G_jP_{j+1})^{-1}H_{j+1}G_j(z_{j+1}), \tag{24}$$

$$\varphi_{j+1}=\varphi_j+G_jP_{j+1}(H_{j+1}G_jP_{j+1})^{-1}[X^{-1}(t_{j+1})x_{j+1}-x_0-H_{j+1}\varphi_j], \tag{25}$$

$j=\overline{0,m-1}$, при этом $\varphi_0=0$, $G_m(z_m)=G(t,z)$, $\varphi_m=\varphi(t)$, $z_m=z$.

Выполнение условия $\det(H_{j+1}G_jP_{j+1})\neq 0$ обеспечивает реализуемость процесса (24) и (25) построения $G(t,z)$ и $\varphi(t)$, начиная с

$$G_1(z_1)=z_1-P_1(H_1P_1)^{-1}H_1z_1,\quad \varphi_1=P_1(H_1P_1)^{-1}[X^{-1}(t_1)x_1-x_0].$$

Соотношение (23) является решением задачи (1), (2); оно принимается за основу при анализе условий (3), т.е. при получении решения второй части задачи, а вместе с тем задачи (1)–(3). На основании (21), (23) имеем

$$x(t)=X(t)x_0+X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)\,[G(\tau,z)+\varphi(\tau)]\,d\tau. \tag{26}$$

Далее подставим (26) в (3):

$$\int\limits_{a_i}^{b_i}\Psi_i(\tau)X(\tau)\,d\tau\int\limits_{t_0}^{\tau}X^{-1}(s)Q(s)G(s,z)\,ds=\mu_i-\int\limits_{a_i}^{b_i}\Psi_i(\tau)X(\tau)\left[x_0+\int\limits_{t_0}^{\tau}X^{-1}(s)Q(s)\varphi(s)\,ds\right]d\tau. \tag{27}$$

Запишем эту систему в следующем виде:

$$F_iz=\lambda_i,\ \ i=\overline{1,k}, \tag{28}$$

где λ_i — правые части в (27).

Система (28) аналогична (22), поэтому при выполнении условия $\det(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1})\neq 0$ получим выражение типа (23):

$$z(t)=K(t,y)+g(t), \tag{29}$$

где y, $K(t,y)$, $g(t)$ — величины, аналогичные принятым в (23) и получаемые по алгоритму типа (24), (25), т.е.

$$K_{p+1}(y_{p+1})=K_p(y_{p+1})-K_p\Phi_{p+1}(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1})^{-1}F_{p+1}K_p(y_{p+1}), \tag{30}$$

$$g_{p+1}=g_p+K_p\Phi_{p+1}(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1})^{-1}[\lambda_{p+1}-K_{p+1}g_p], \tag{31}$$

$p=\overline{0,k-1}$, при этом $g_0=0$, $K_m(y_m)=K(t,y)$, $g_m=g(t)$, $y_m=y$.

Выполнение условия $\det(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1})\neq 0$ обеспечивает реализуемость процесса (30), (31) построения $K(t,y)$ и $g(t)$, начиная с

$$K_1(y_1)=y_1-\Phi_1(F_1\Phi_1)^{-1}F_1y_1, \quad g_1=\Phi_1(F_1\Phi_1)^{-1}\lambda_1.$$

Подставив (29) в (23), получим

$$u(t)=G(t,K(\tau,y)+g(\tau))+\varphi(t). \tag{32}$$

Из (21) с учётом (32) имеем

$$x(t)=X(t)x_0+X(t)\int\limits_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)Q(\tau)[G(\tau,K(s,y)+g(s))+\varphi(\tau)]\,d\tau. \tag{33}$$

Таким образом, справедливо

Утверждение. *Пусть выполнены соотношения*

$$\det(H_{j+1}G_jP_{j+1})\neq 0, \quad j=\overline{0,m-1}, \quad \det(F_{p+1}K_p\Phi_{p+1})\neq 0, \quad p=\overline{0,k-1}.$$

Тогда задача (1)–(3) имеет замкнутое решение (32), (33).

Отметим, что формула (23) определяет управление, удовлетворяющее условиям (2) и зависящее от произвольной функции $z=z(t)$. Формулы (23), (29) задают управление (32), содержащее произвольную функцию $y=y(t)$.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{dx}{dt}=u, \quad x(0)=3, \quad x(2)=4, \tag{34}$$

$$\int\limits_0^2 x(\tau)\,d\tau=0. \tag{35}$$

Из (34) имеем уравнение

$$\int\limits_0^2 u(\tau)\,d\tau=1 \tag{36}$$

относительно функции $u(t)$, которую будем искать в виде

$$u(t)=c_1+z(t). \tag{37}$$

Из (36), (37) получим

$$c_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(\tau)\,d\tau. \tag{38}$$

Подставим (38) в (37):

$$u(t)=\frac{1}{2}+z(t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(\tau)\,d\tau. \tag{39}$$

Используя (39) в соотношении

$$x(t)=3+\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau, \tag{40}$$

находим

$$x(t)=\frac{3}{2}+\frac{t}{2}+\int\limits_0^t\left[z(\tau)-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(s)\,ds\right]d\tau. \tag{41}$$

Подставим теперь (41) в (35) и в результате упрощений получим уравнение

$$\int\limits_0^2(1-\tau)z(\tau)\,d\tau=-7, \tag{42}$$

где функцию $z(t)$ будем искать в виде

$$z(t)=\widetilde{c}_1t+y(t). \tag{43}$$

Из (42), (43) находим

$$\widetilde{c}_1=\frac{21}{2}+\frac{3}{2}\int\limits_0^2(1-\tau)y(\tau)\,d\tau. \tag{44}$$

Подстановка (44) в (43) даёт

$$z(t)=\frac{21}{2}t+\frac{3}{2}t\int\limits_0^2(1-\tau)y(\tau)\,d\tau+y(t). \tag{45}$$

Далее из (39) с учётом (45) имеем управление

$$u(t)=-10+\frac{21}{2}t+\frac{1}{2}\int\limits_0^2[3(t-1)(1-\tau)-1]y(\tau)\,d\tau+y(t). \tag{46}$$

Из (40), (46) находим функцию состояний

$$x(t)=3-10t+\frac{21}{4}t^2+\frac{t}{2}\int\limits_0^2\left[\frac{3}{2}(t-2)(1-\tau)-1\right]y(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

Замечание 1. Задача (34), (35) является задачей вида (1)–(3) с безусловно разрешимой системой (3) и очевидным решением

$$\hat{x}=h(t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 h(\tau)\,d\tau,$$

где $h(t)$ — произвольная непрерывная функция.

Задача (1)–(3) с безусловно разрешимой системой (3) представляет собой самостоятельный объект исследования по предложенному в п. 1 методу. Система (3) — совокупность уравнений 1-го рода относительно $x(t)$, при этом соотношения (24), (30) играют роль поэтапных (частичных) регуляризаторов для неё. Предложенный метод позволяет построить решение системы (3) (его целесообразно назвать методом регуляризации этой системы) и служит дополнением к регуляризаторам, используемым в книге [4] для изучения краевых задач дифференциальных уравнений, поскольку такие задачи эквивалентны соответствующим уравнениям 1-го рода. Очевидно, что этот метод может быть применён для изучения систем, приведённых в [1; 2; 8, гл. 3, § 1, п. 53].

Замечание 2. Применение метода Гаусса к системе (3) на основе формулы

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i(t) c_i + y(t) \tag{47}$$

приводит к её решению типа (20) с более сложным алгоритмом построения векторов c_i. По этой причине также неконструктивным является сведение системы (3) к системе с фиксированными пределами интегрирования.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 741 с.
2. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах / Л.В. Канторович, Б.З. Вулих, А.Г. Пинскер. — М.-Л. : Гостехиздат, 1950. — 548 с.
3. Моисеев, Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. — М. : Наука, 1971. — 424 с.
4. Лаптинский, В.Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем/ В.Н. Лаптинский. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 1998. — 300 с.
5. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 496 с.
6. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [и др.]. — М. : Наука, 1969. — 452 с.
7. Марчук, Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.
8. Рисс, Ф.Б. Лекции по функциональному анализу/ Ф.Б. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь ; пер. с фр. Д.А. Василькова ; под ред. С.В. Фомина. — М. : Мир, 1979. — 580 с.

SOLUTION OF A MULTIPOINT CONTROL PROBLEM WITH INTEGRAL CONSTRAINTS OF EQUALITIES TYPE

© 2024 / V. N. Laptinskii

Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus
e-mail: lavani@tut.by

An algorithm for solving a linear multipoint control problem with isoperimetric type constraints on the state function is proposed.

Keywords: control, multipoint problem, integral conditions

REFERENCES

1. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P., *Funktsional'nyy analiz* (Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1977.
2. Kantorovich, L.V., Vulikh, B.Z., and Pinsker, A.G., *Funktsional'nyy analiz v poluuporyadochennykh prostranstvakh* (Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950.

3. Moiseev, N.N., *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* (Numerical Methods in the Theory of Optimal Systems), Moscow: Nauka, 1971.
4. Laptinskii, V.N., *Konstruktivnyi analiz upravlyayemykh kolebatel'nykh sistem* (Constructive Analysis of Controlled Oscillatory Systems). Minsk: Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Belarusi, 1998.
5. Trenogin, V.A., *Funktsional'nyy analiz* (Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1980.
6. Krasnosel'sky, M.A., Vainikko, G.M., Zabreiko, P.P., et al., *Priblizhonnoye resheniye operatornykh uravnenii* (Approximate Solution of Operator Equations), Moscow: Nauka, 1969.
7. Marchuk, G.I. and Agoshkov, V.I, *Vvedeniye v proyektsionno-setochnyye metody* (Introduction to Projection Mesh Methods), Moscow: Nauka, 1981.
8. Riess, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Leçons D'Analyse Fonctionnelle, Budapest: Akadémiai Kiadó, 1979.