
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977+517.925

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ И ВОЗМУЩЕНИЕМ

© 2024 г. В. В. Евстафьева

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: v.evstafieva@spbu.ru

Поступила в редакцию 13.02.2024 г., после доработки 08.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Рассмотрена многомерная управляемая система с постоянной матрицей, существенной нелинейностью типа двухпозиционного реле с гистерезисом в качестве управления и непрерывной периодической функцией возмущения. Матрица системы имеет простые вещественные ненулевые собственные значения, среди которых одно значение может быть положительным. Установлены условия на параметры системы, в том числе на нелинейности, при выполнении которых существует единственное двухточечно-колебательное периодическое решение с периодом, соизмеримым с периодом функции возмущения, в случае специального вида вектора обратной связи. Доказана асимптотическая устойчивость решения с помощью метода фазовой плоскости. Полученные для трёхмерных систем результаты проиллюстрированы на примерах.

Ключевые слова: многомерная управляемая система, двухпозиционное реле с гистерезисом, непрерывная периодическая функция возмущения, двухточечно-колебательное периодическое решение, синтез управления, асимптотическая устойчивость

DOI: 10.31857/S0374064124100064, EDN: JTIOXZ

ВВЕДЕНИЕ

В задачах теории автоматического управления и регулирования модели управляемых нелинейных систем описываются дифференциально-разностными уравнениями, уравнениями с частными производными или обыкновенными дифференциальными уравнениями (см., например, [1, 2]). Для описания внешнего постоянного воздействия на систему в моделях часто используют непрерывные ограниченные, в том числе периодические, функции возмущения (см. [3]).

Релейные автоматические системы охватывают широкий класс систем регулирования (см., например, [4–6]). Известно [7, с. 11], что эти системы могут обладать большим быстродействием вследствие интенсивного управляющего воздействия, которое может стать причиной возникновения автоколебаний. В некоторых системах (например, в вибрационных регуляторах) такие незатухающие колебания являются основным рабочим режимом, но во многих случаях появление автоколебаний нежелательно. Устранить их можно, если систему подвергнуть внешнему периодическому воздействию. В этом случае при условии захватывания частоты в системе возникают гармонические и субгармонические вынужденные колебания. Согласно [7, с. 12] для разработки и эффективного использования релейных автоматических систем необходимо уметь определять зависимость их режима работы от параметров отдельных элементов, а также от вида и параметров внешнего воздействия.

Автором ранее были изучены системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейностью типа неидеального [8, с. 181] двухпозиционного реле и ограниченной, в том числе периодической, функцией возмущения в правой части (см. работы [9–12]). Настоящая статья развивает аналитическое исследование, начатое в [9] и продолженное в [10–12], по проблеме существования в таких системах двухточечно-колебательных решений, т.е. непрерывных решений с двумя точками переключения на поверхностях разрыва в пространстве состояний системы и возвратом в каждую из этих точек за одно и то же время — *период возврата*.

В статье [9] впервые даны определения двухточечно-колебательного решения, момента первой встречи с гиперплоскостью переключения и получены достаточные условия существования решения с периодом возврата, равным периоду функции возмущения, в случае неустойчивой линейной части системы, когда матрица системы имеет простые вещественные ненулевые собственные значения, среди которых есть положительное. В [10] рассмотрена вещественная симметричная матрица системы с кратными собственными числами, установлено необходимое условие существования решения системы с заданным видом периодической функции возмущения, доказаны теоремы существования и несуществования такого решения. В статье [11] разработан алгоритм выбора параметров нелинейности как управления, при которых система имеет единственное асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение с двумя точками переключения за период, кратный периоду функции возмущения. В [12] для случая функции возмущения общего вида доказан критерий существования и единственности решения с произвольным периодом возврата и для случая периодической функции возмущения установлено необходимое и достаточное условие существования единственного периодического решения с заданным периодом, кратным периоду функции возмущения.

В настоящей статье решается задача синтеза управления при ограничениях на параметры системы с целью обеспечить существование единственного асимптотически устойчивого двухточечно-колебательного решения с заданным периодом возврата, соизмеримым с периодом функции возмущения. В отличие от [11] ниже исследуются периодические решения системы с четырьмя переключениями реле за период.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель релейной неавтономной управляемой системы в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Y} = AY + Bu(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y). \quad (1)$$

Здесь $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ — вектор состояний системы, символ t означает операцию транспонирования; матрица системы A , векторы $B = (b_1, \dots, b_n)^T$, $K = (k_1, \dots, k_n)^T$ и $C = (c_1, \dots, c_n)^T$ являются ненулевыми, вещественными и постоянными; (C, Y) — скалярное произведение векторов C и Y , где C определяет обратную связь в системе.

Оператором $u(\sigma)$ задана характеристика неидеального двухпозиционного релейного элемента с пороговыми значениями $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, значениями выхода $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ и положительным направлением обхода петли гистерезиса на плоскости $(\sigma, u(\sigma))$. Полагаем, что $\ell_1 < \ell_2$ и $m_1 < m_2$. Описание реле далее приведём в соответствии с работой [13]. Непрерывная входная функция $\sigma(t)$, $t \geq t_0$, преобразуется в выходную кусочно-непрерывную функцию

$$u(t) = \begin{cases} m_1, & (\sigma(t) \leq \ell_1) \vee (\sigma(t) \in (\ell_1, \ell_2) \wedge \sigma(\xi(t)) = \ell_1), \\ m_2, & (\sigma(t) \geq \ell_2) \vee (\sigma(t) \in (\ell_1, \ell_2) \wedge \sigma(\xi(t)) = \ell_2), \\ u_0, & \sigma(\tau) \in (\ell_1, \ell_2) \text{ для любых } \tau \in [t_0, t), \end{cases}$$

где $\xi(t) = \sup\{\tau : \tau \leq t, \sigma(\tau) = \ell_1 \vee \sigma(\tau) = \ell_2\}$ и $u_0 = u(t_0) \in \{m_1, m_2\}$.

Допустимыми состояниями реле называют все пары $(\sigma, u) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условию $(u = m_1 \wedge \sigma < \ell_2) \vee (u = m_2 \wedge \sigma > \ell_1)$. В релейных автоматических системах $\sigma(t)$ задаёт управляющий сигнал, $u(t)$ — управляющее воздействие. Характеристика релейного элемента имеет гистерезис (зону неоднозначности), поэтому всякий раз при прохождении управляющим сигналом пороговых значений управляющее воздействие изменяется скачком, а между скачками оно постоянно и определяется не только значением управляющего сигнала, но и направлением его изменения [7, с. 45–46].

Внешнее воздействие на релейную систему задано непрерывной периодической функцией возмущения $f(t)$, $t \geq 0$, в следующем виде:

$$f(t) = f_0 + \sum_{\alpha=1}^{\rho} f_{\alpha} \sin(\alpha\omega t + \varphi_{\alpha}), \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где f_0 , f_{α} , ω и φ_{α} ($\alpha = \overline{1, \rho}$) — вещественные постоянные, причём $f_1 \neq 0$, $\omega > 0$. Период функции $f(t)$ равен $T = 2\pi/\omega$. Вид (2) функции возмущения часто используют в модели для описания периодического воздействия на систему. Для определённости положим ρ чётным.

Приведём определения из работы [12], которые используются в данной статье.

Определение 1. Точкой переключения называется состояние системы (1), при котором входная функция $\sigma(t)$ достигает одного из пороговых значений ℓ_{μ} , $\mu = 1, 2$, а выходная функция $u(t)$ при этом меняет значение выхода m_1 на m_2 или наоборот.

Определение 2. Гиперплоскостью переключения называется гиперплоскость

$$L_{\mu} = \{Y \in \mathbb{R}^n : (C, Y) = \ell_{\mu}\}, \quad \mu = 1, 2.$$

Определение 3. Если в некоторый момент времени t' изображающая точка принадлежит гиперплоскости L_{μ} , $\mu = 1, 2$, то наименьший момент времени $t'' > t'$, в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости $L_{3-\mu}$, называется моментом первой встречи изображающей точки с $L_{3-\mu}$.

Определение 4. Решение $Y(\cdot)$ системы (1) называется T_r -двухточечно-колебательным простейшего поведения, если существуют вещественные положительные числа τ_1 и τ_2 такие, что $\tau_1 + \tau_2 = T_r$, и точки $Y^1 \in L_1$ и $Y^2 \in L_2$, для которых выполняются следующие условия:

1) $Y(t_0 + \kappa T_r) = Y^1$ и $Y(t_0 + \tau_1 + \kappa T_r) = Y^2$, где $t_0 \geq 0$ — начальный момент времени, $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

2) для всех $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на полуинтервале $\Delta_{\kappa}^1 = [t_0 + \kappa T_r, t_0 + \tau_1 + \kappa T_r)$ имеет место равенство $u = m_1$, а на полуинтервале $\Delta_{\kappa}^2 = [t_0 + \tau_1 + \kappa T_r, t_0 + (\kappa + 1)T_r)$ — равенство $u = m_2$.

В данной статье решение системы (1) ищется в соответствии с определением 4 в классе определённых на полуоси $t \geq t_0$ непрерывных вектор-функций $Y(t)$ с начальным условием $Y(t_0) = Y^1$ таким, что $\sigma(t_0) = (C, Y^1) = \ell_1$. Кроме того, решение будем называть Ψ -периодическим, $\Psi > 0$, если $Y(t + \Psi) = Y(t)$ для всех $t \geq t_0$. На полуинтервале Δ_{κ}^1 , $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, выход релейного элемента принимает значение m_1 , поэтому активной является система

$$\dot{Y} = AY + Bm_1 + Kf(t), \quad (C, Y) < \ell_2. \quad (3)$$

На полуинтервале Δ_{κ}^2 выход релейного элемента принимает значение m_2 и активной является система

$$\dot{Y} = AY + Bm_2 + Kf(t), \quad (C, Y) > \ell_1. \quad (4)$$

Нелинейность $u(\sigma)$ можно представить в виде

$$u(\sigma) = \begin{cases} m_1, & \sigma = (C, Y) < \ell_2, \\ m_2, & \sigma = (C, Y) > \ell_1. \end{cases} \quad (5)$$

В точке Y^μ , $\mu=1, 2$, происходит переключение реле и “сшивание” траекторий, заданных системами уравнений (3) и (4). Число τ_μ далее называется *временем перехода* изображающей точки решения из точки Y^μ в точку $Y^{3-\mu}$, а времена перехода и точки переключения — *параметрами решения*. Согласно определению 3 значение $t_0 + \tau_1$ является моментом первой встречи с гиперплоскостью L_2 , а значение $t_0 + T_r$ — моментом первой встречи с L_1 . В силу условия 1) определения 4 периодом возврата является число T_r .

Пусть матрица A и вектор B удовлетворяют следующим условиям: а) матрица A имеет только простые ненулевые вещественные собственные значения λ_i , $i = \overline{1, n}$; б) векторы B , AB , A^2B , $\dots$, $A^{n-1}B$ являются линейно независимыми.

Применим к системе (1) неособое преобразование $Y = SX$ (например, из [12]), приводящее матрицу A к диагональной матрице A_0 , у которой (i, i) -й элемент равен λ_i . Условие б) является условием полной управляемости системы по отношению ко входу $u(\sigma)$. В силу неособого преобразования все элементы b_i^0 вектора $B_0 = S^{-1}B$ отличны от нуля.

Следуя методу сечений пространства параметров [14, с. 22], рассмотрим для системы (1) сечение 1-го рода и положим вектор C таким, что вектор $\Gamma = S^T C$ имеет один ненулевой элемент (например, $\gamma_s \neq 0$) и нулевые остальные элементы.

После преобразования система (1) принимает каноническую форму в векторном виде

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 u(\sigma) + K_0 f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X),$$

или в координатном виде

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + b_i^0 u(\sigma) + k_i^0 f(t), \quad \sigma = \gamma_s x_s, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где x_i — i -й элемент вектора $X = S^{-1}Y$, s — некоторый индекс.

По определению 4 решению $X(t)$ системы (6) отвечает траектория с точками переключения $X^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^T$ и $X^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^T$, которые связаны равенством $X^\mu = S^{-1}Y^\mu$, $\mu=1, 2$. Утверждение $X^\mu \in L_\mu$ равносильно выполнению равенства $\gamma_s x_s^\mu = \ell_\mu$. Гиперплоскости переключения ориентированы ортогонально оси x_s в пространстве состояний системы (6).

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) может являться моделью автоматических систем управления, используемых в судостроении. В элементах постоянной матрицы заложены характеристики управляемого объекта, например, судна. Релейная нелинейность играет роль управления в решении задачи, например, по автоматической стабилизации курса судна. Элементы вектора, стоящего при нелинейности, задают коэффициенты усиления. При этом на судно регулярно воздействует волнение на воде, которое можно описать непрерывной периодической функцией внешнего возмущения.

Полагаем, что собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A_0 , элементы $b_1^0, \dots, b_n^0$ вектора B_0 и постоянные $f_0, f_1, \dots, f_\rho, \omega$ функции $f(t)$ заданы. Ставится задача управления для системы (6), которая заключается в том, чтобы найти ограничения на числовые параметры $k_1^0, \dots, k_n^0$ системы (6), параметры $\varphi_1, \dots, \varphi_\rho$ функции возмущения (2) и на параметры $\gamma_s, \ell_1, \ell_2, m_1, m_2$ нелинейности $u(\sigma)$, при выполнении которых существует решение системы (6) с начальным моментом времени t_0 и периодом возврата T_r , соизмеримым с периодом T функции возмущения $f(t)$.

Для аналитического представления решения используем формулу Коши

$$x_i(t) = e^{\lambda_i(t-\nu)} x_i(\nu) + \int_{\nu}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} (b_i^0 m_\mu + k_i^0 f(\tau)) d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu = 1, 2,$$

где ν — начальный момент времени.

2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОГРАММНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассмотрим программное управление с параметрами m_1 , m_2 , τ_1 и τ_2

$$u_p(t) = \begin{cases} m_1, & t \in \Delta_\kappa^1 = [t_0 + \kappa T_r, t_0 + \kappa T_r + \tau_1), \\ m_2, & t \in \Delta_\kappa^2 = [t_0 + \kappa T_r + \tau_1, t_0 + \kappa T_r + \tau_1 + \tau_2) \end{cases} \quad (7)$$

и двухмерную подсистему системы (6) для $i = s$ с управлением (7)

$$\dot{x}_s(t) = \lambda_s x_s(t) + b_s^0 u_p(t) + k_s^0 f(t), \quad \sigma(t) = \gamma_s x_s(t).$$

Заметим, что $u_p(t)$, $t \geq t_0$, является кусочно-постоянной T_r -периодической функцией, т.е. $u_p(t) = u_p(t + T_r)$ для всех $t \geq t_0$.

Исследуем уравнение

$$\gamma_s \dot{x}_s(t) = \lambda_s \gamma_s x_s(t) + \gamma_s (b_s^0 u_p(t) + k_s^0 f(t))$$

с начальным условием $\gamma_s x_s(t_0) = \gamma_s x_s^1 = \ell_1$ или эквивалентное уравнение

$$\dot{\sigma}(t) = \lambda_s \sigma(t) + \gamma_s (b_s^0 u_p(t) + k_s^0 f(t)) \quad (8)$$

с начальным условием $\sigma(t_0) = \ell_1$ и найдём параметры программного управления $u_p(t)$, которые обеспечивают существование решения этого уравнения.

Согласно определению 4 справедливы равенства

$$\gamma_s x_s^1 = \ell_1 \quad \text{или} \quad \sigma(t_0 + \kappa T_r) = \sigma(t_0 + (\kappa + 1)T_r) = \ell_1,$$

$$\gamma_s x_s^2 = \ell_2 \quad \text{или} \quad \sigma(t_0 + \kappa T_r + \tau_1) = \ell_2,$$

где $t_0 + \tau_1$ — момент первой встречи с гиперплоскостью L_2 , $t_0 + T_r$ — момент первой встречи с гиперплоскостью L_1 в соответствии с определением 3.

С помощью формулы Коши выпишем решение $\sigma(t)$ уравнения (8) на полуинтервалах с соответствующим значением функции $u_p(t)$ и с учётом равенств (6). Имеем на полуинтервале Δ_κ^1 с $\nu = t_0 + \kappa T_r$ и $\sigma(\nu) = \ell_1$ решение

$$\sigma(t) = e^{\lambda_s(t-\nu)} \ell_1 + \gamma_s \int_\nu^t e^{\lambda_s(t-\tau)} (b_s^0 m_1 + k_s^0 f(\tau)) d\tau, \quad (9)$$

на полуинтервале Δ_κ^2 с $\nu = t_0 + \kappa T_r + \tau_1$ и $\sigma(\nu) = \ell_2$ — решение

$$\sigma(t) = e^{\lambda_s(t-\nu)} \ell_2 + \gamma_s \int_\nu^t e^{\lambda_s(t-\tau)} (b_s^0 m_2 + k_s^0 f(\tau)) d\tau. \quad (10)$$

Подставив $t_0 + \kappa T_r + \tau_1$ вместо t в равенство (9), с учётом $\sigma(t_0 + \kappa T_r + \tau_1) = \ell_2$ получим

$$\ell_2 = e^{\lambda_s \tau_1} \ell_1 + \gamma_s \int_{t_0 + \kappa T_r}^{t_0 + \kappa T_r + \tau_1} e^{\lambda_s(t_0 + \kappa T_r + \tau_1 - \tau)} (b_s^0 m_1 + k_s^0 f(\tau)) d\tau.$$

После замены $\xi = \tau - t_0 - \kappa T_r$ имеем

$$\ell_2 = e^{\lambda_s \tau_1} \ell_1 + \gamma_s \int_0^{\tau_1} e^{\lambda_s(\tau_1 - \xi)} (b_s^0 m_1 + k_s^0 f(t_0 + \kappa T_r + \xi)) d\xi. \quad (11)$$

Подставим $t_0 + (\kappa + 1)T_r$ вместо t в равенство (10), ввиду $\sigma(t_0 + (\kappa + 1)T_r) = \ell_1$ получим

$$\ell_1 = e^{\lambda_s \tau_2} \ell_2 + \gamma_s \int_{t_0 + \kappa T_r + \tau_1}^{t_0 + (\kappa + 1)T_r} e^{\lambda_s(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \tau)} (b_s^0 m_2 + k_s^0 f(\tau)) d\tau.$$

После замены $\xi = t_0 + (\kappa + 1)T_r - \tau$ будем иметь

$$\ell_1 = e^{\lambda_s \tau_2} \ell_2 + \gamma_s \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_s \xi} (b_s^0 m_2 + k_s^0 f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi)) d\xi. \quad (12)$$

Подставив в равенство (12) вместо ℓ_2 правую часть равенства (11), получим

$$\begin{aligned} \ell_1 = \frac{\gamma_s}{1 - e^{\lambda_s T_r}} & \left(b_s^0 m_1 \int_0^{\tau_1} e^{\lambda_s(T_r - \xi)} d\xi + k_s^0 \int_0^{\tau_1} e^{\lambda_s(T_r - \xi)} f(t_0 + \kappa T_r + \xi) d\xi + \right. \\ & \left. + b_s^0 m_2 \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_s \xi} d\xi + k_s^0 \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_s \xi} f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Равенство (13) справедливо, если и только если выполняется следующее условие: интегралы

$$k_s^0 \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_s \xi} f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi) d\xi, \quad k_s^0 \int_0^{\tau_1} e^{-\lambda_s \xi} f(t_0 + \kappa T_r + \xi) d\xi \quad (14)$$

не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть период возврата кратен периоду функции возмущения, т.е. $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi) = f(t_0 + (\kappa + 1)kT - \xi) = f(t_0 + kT - \xi) \quad \text{для любого } \xi \in [0, \tau_2],$$

$$f(t_0 + \kappa T_r + \xi) = f(t_0 + \kappa kT + \xi) = f(t_0 + \xi) \quad \text{для любого } \xi \in [0, \tau_1],$$

и значит, интегралы (14) не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть период возврата не кратен периоду функции возмущения, но соизмерим с ним, т.е. $T_r = qT$, $q \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$. Введём обозначение

$$H_s(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{f_\alpha \sin(\alpha\omega\tau + \varphi_\alpha + \delta_s^\alpha)}{\sqrt{\lambda_s^2 + (\alpha\omega)^2}}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

где $\delta_s^\alpha = \arctg(\alpha\omega/\lambda_s) + \pi q_s$, причём $q_s = 0$ при $\lambda_s > 0$ и $q_s = 1$ при $\lambda_s < 0$. Имеет место

Лемма. Пусть $k_s^0 \neq 0$, $\varphi_v = \pi h_v - \omega t_0 - \delta_s^v$, $v = 1, 3, \dots, \rho - 1$, $h_v \in \mathbb{Z}$; $T_r = (k + 1/2)T$, $\tau_1 = mT/2$, $k, m \in \mathbb{N}$ и $m < 2k + 1$. Тогда интегралы (14) с функцией $f(t)$ вида (2) не зависят от κ .

Доказательство. Вычислим интегралы (14), учитывая равенство $T_r - \tau_2 = \tau_1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_s^0 \int_0^{\tau_1} e^{-\lambda_s \xi} f(t_0 + \kappa T_r + \xi) d\xi &= -k_s^0 e^{-\lambda_s \xi} \left(\frac{f_0}{\lambda_s} + H_s(t_0 + \kappa T_r + \xi) \right) \Big|_0^{\tau_1} = \\ &= k_s^0 \left(\frac{f_0}{\lambda_s} + H_s(t_0 + \kappa T_r) \right) - k_s^0 e^{-\lambda_s \tau_1} \left(\frac{f_0}{\lambda_s} + H_s(t_0 + \kappa T_r + \tau_1) \right), \\ k_s^0 \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_s \xi} f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi) d\xi &= k_s^0 e^{\lambda_s \xi} \left(\frac{f_0}{\lambda_s} + H_s(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi) \right) \Big|_0^{\tau_2} = \\ &= k_s^0 e^{\lambda_s \tau_2} \left(\frac{f_0}{\lambda_s} + H_s(t_0 + \kappa T_r + \tau_1) \right) - k_s^0 \left(\frac{f_0}{\lambda_s} + H_s(t_0 + (\kappa + 1)T_r) \right). \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия леммы. Тогда, принимая во внимание, что $T = 2\pi/\omega$ и $H_s(\tau + \kappa T) = H_s(\tau)$, получаем равенства

$$H_s(t_0 + \kappa T_r + \tau_1) = H_s(t_0 + (\kappa + m)T/2) = H_s(t_0 + mT/2) = H_s(t_0 + \tau_1),$$

$$H_s(t_0 + \kappa T_r) = H_s(t_0 + \kappa T/2) = H_s(t_0).$$

Отсюда следует, что интегралы не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Более того,

$$H_s(t_0) = H_s(t_0 + \tau_1) = \sum_{\alpha=1}^{\rho/2} \frac{f_{2\alpha} \sin(2\alpha\omega t_0 + \varphi_{2\alpha} + \delta_s^{2\alpha})}{\sqrt{\lambda_s^2 + (2\alpha\omega)^2}}.$$

Лемма доказана.

В случае когда период возврата кратен периоду функции возмущения и в противном случае при выполнении условий леммы система равенств (11), (12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \ell_2 &= \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s b_s^0 m_1}{\lambda_s} \right) e^{\lambda_s \tau_1} - \frac{\gamma_s b_s^0 m_1}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int_0^{\tau_1} e^{\lambda_s(\tau_1 - \xi)} f(t_0 + \xi) d\xi, \\ \ell_1 &= \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s b_s^0 m_2}{\lambda_s} \right) e^{\lambda_s \tau_2} - \frac{\gamma_s b_s^0 m_2}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_s \xi} f(t_0 + T_r - \xi) d\xi, \end{aligned}$$

откуда после интегрирования с учётом (15) имеем

$$\begin{aligned} \ell_2 &= (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s \tau_1} - \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_1), \\ \ell_1 &= (\ell_2 + \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_2)) e^{\lambda_s \tau_2} - \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1 + \tau_2, m_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь используется обозначение

$$Q_s(\tau, m_\mu) = (b_s^0 m_\mu + k_s^0 f_0) / \lambda_s + k_s^0 H_s(\tau), \quad \mu = 1, 2. \quad (17)$$

Условия на параметры системы (16), в том числе на параметры управления $u_p(t)$ с τ_1 и $\tau_2 = T_r - \tau_1$, удовлетворяющими условиям леммы, установлены в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ таких, что $m < 2k + 1$, выполняются условия леммы и следующие условия:

1) для некоторых ℓ_1, ℓ_2 и такого γ_s , что $\gamma_s b_s^0 < 0$, справедливо равенство

$$m_1 = \frac{\lambda_s}{\gamma_s b_s^0} \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{e^{\lambda_s m T/2} - 1} - \ell_1 \right) - \frac{k_s^0}{b_s^0} \left(\lambda_s H_s(t_0) + f_0 \right); \quad (18)$$

2) значение $\tau_1 = mT/2$ является наименьшим (или единственным) положительным решением первого уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_1 \in (0, (k + 1/2)T)$;

3) имеют место при $\lambda_s > 0$ неравенство $\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1) > 0$ или при $\lambda_s < 0$ неравенство $e^{\lambda_s \tau_1} (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) < 0$ и равенство

$$m_2 = m_1 + \frac{\lambda_s (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) (e^{\lambda_s (k+1/2)T} - 1)}{\gamma_s b_s^0 (1 - e^{\lambda_s ((k+1/2)T - \tau_1)})}, \quad (19)$$

где значения m_1 и τ_1 определены в 1) и 2) соответственно;

4) значение $\tau_2 = (k + (1 - m)/2)T$ является наименьшим (или единственным) положительным решением второго уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_2 \in (0, (k + 1/2)T)$.

Тогда параметрами программного управления $u_p(t)$ являются значения τ_1 , τ_2 , m_1 и m_2 , обеспечивающие для $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существование единственного решения уравнения (8):

$$\sigma(t) = \begin{cases} e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_1 + \gamma_s Q_s(\nu, m_1)) - \gamma_s Q_s(\nu + t, m_1), & \nu = t_0 + \kappa T_r, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_2 + \gamma_s Q_s(\nu, m_2)) - \gamma_s Q_s(\nu + t, m_2), & \nu = t_0 + \kappa T_r + \tau_1, \quad t \in \Delta_\kappa^2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 1 для некоторых $m, k \in \mathbb{N}$ таких, что $m < 2k + 1$. Тогда, как следует из доказательства леммы, имеют место равенства $H_s(t_0) = H_s(t_0 + \tau_1) = H_s(t_0 + T_r)$. Отсюда, принимая во внимание (17), приходим к соотношениям

$$Q_s(t_0, m_\mu) = Q_s(t_0 + \tau_1, m_\mu) = Q_s(t_0 + \tau_1 + \tau_2, m_\mu), \quad \mu = 1, 2.$$

Пусть выполняется условие 1) теоремы 1. Равенство (18) преобразуем сначала к виду

$$\frac{\ell_2 - \ell_1}{e^{\lambda_s m T/2} - 1} - \ell_1 = \gamma_s \frac{b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0}{\lambda_s} + k_s^0 H_s(t_0),$$

а затем к виду

$$\ell_2 = (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s m T/2} - \gamma_s Q_s(t_0, m_1), \quad (20)$$

где $Q_s(t_0, m_1)$ определяется по формуле (17) при $m_\mu = m_1$. Выполнение (20) равносильно утверждению, что значение $\tau_1 = mT/2$ является решением первого уравнения системы (16) относительно переменной τ_1 из интервала $(0, (k + 1/2)T)$.

Пусть выполняется условие 2) теоремы 1. Тогда на полуинтервале Δ_1^1 имеет место неравенство $\sigma(t) < \ell_2$, а значит, значение $t_0 + \tau_1$ является моментом первой встречи с гиперплоскостью L_2 и $\sigma(t_0 + mT/2) = \sigma(t_0 + \tau_1) = \ell_2$.

Пусть выполняется условие 3) теоремы 1. Тогда в равенстве (19) второе слагаемое принимает положительное значение и, следовательно, $m_2 > m_1$. Равенство (19) преобразуем сначала к виду

$$\gamma_s b_s^0 (m_1 - m_2) (e^{\lambda_s((k+1/2)T - \tau_1)} - 1) = \lambda_s (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) (e^{\lambda_s(k+1/2)T} - 1),$$

а затем к виду

$$\ell_1 = (\ell_2 + \gamma_s Q_s(t_0, m_2)) e^{\lambda_s((k+1/2)T - \tau_1)} - \gamma_s Q_s(t_0, m_2),$$

где ℓ_2 определяется в (20). Выполнение последнего равенства равносильно утверждению, что значение $\tau_2 = (k + 1/2)T - \tau_1$ при известном τ_1 является решением второго уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_2 \in (0, (k + 1/2)T)$.

Пусть выполняется условие 4) теоремы 1. Тогда для $t \in \Delta_1^2$ имеет место неравенство $\sigma(t) > \ell_1$, следовательно, значение $t_0 + \tau_1 + \tau_2$ является моментом первой встречи с гиперплоскостью L_1 и $\sigma(t_0 + \tau_1 + (k + (1 - m)/2)T) = \sigma(t_0 + \tau_1 + \tau_2) = \ell_1$.

Учитывая начальное условие $\sigma(t_0) = \ell_1$, имеем $\tau_1 + \tau_2 = T_r$. Исходя из построения системы (16), приходим к равенствам (6) для любого $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как параметры определяются однозначно, то и решение является единственным. Следовательно, имеет место утверждение теоремы 1.

Условия на параметры системы (16), при которых существуют $\tau_1 \in (0, T_r)$ и $\tau_2 = T_r - \tau_1$ в случае, когда $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$, устанавливает

Теорема 2. Пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие условия:

1) при некоторых ℓ_1 и γ_s значения параметров m_1 и m_2 удовлетворяют неравенствам

$$m_1 < -L < m_2, \quad (21)$$

$$\gamma_s (Q_s(t_0, m_1) e^{\lambda_s \tau_1} - Q_s(t_0 + \tau_1, m_1)) > \ell_1 (1 - e^{\lambda_s \tau_1}), \quad (22)$$

где

$$L = \frac{1}{b_s^0} \left(\frac{\lambda_s \ell_1}{\gamma_s} + k_s^0 f_0 + \lambda_s k_s^0 H_s(t_0) \right),$$

$$\tau_1 = kT + \lambda_s^{-1} \ln \Omega, \quad (23)$$

$$\Omega = \frac{m_2 - m_1}{(1 - e^{\lambda_s kT})L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT}};$$

2) значение параметра ℓ_2 задаётся равенством

$$\ell_2 = (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s \tau_1} - \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_1); \quad (24)$$

3) значение τ_1 , определяемое формулой (23), является наименьшим (или единственным) положительным решением первого уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_1 \in (0, kT)$, а значение $\tau_2 = kT - \tau_1$ — наименьшим (или единственным) положительным решением второго уравнения системы (16) относительно переменной $\tau_2 \in (0, kT)$.

Тогда параметрами программного управления $u_p(t)$ являются значения τ_1 , τ_2 , m_1 и m_2 , обеспечивающие для $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существование единственного решения уравнения (8):

$$\sigma(t) = \begin{cases} e^{\lambda_s(t-\nu)} (\ell_1 + \gamma_s Q_s(\nu, m_1)) - \gamma_s Q_s(\nu + t, m_1), & \nu = t_0 + \kappa kT, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ e^{\lambda_s(t-\nu)} (\ell_2 + \gamma_s Q_s(\nu, m_2)) - \gamma_s Q_s(\nu + t, m_2), & \nu = t_0 + \kappa kT + \tau_1, \quad t \in \Delta_\kappa^2. \end{cases}$$

Доказательство. Проведём предварительный анализ. Пусть $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим систему уравнений (16) относительно переменной $\tau_1 \in (0, kT)$, в которой $\tau_2 = kT - \tau_1$ и $Q_s(t_0 + \tau_1 + \tau_2, m_\mu) = Q_s(t_0, m_\mu)$, $\mu = 1, 2$.

После сложения двух уравнений этой системы и преобразований с учётом равенства (17), приходим к уравнению

$$(m_2 - m_1) e^{\lambda_s(kT - \tau_1)} = (1 - e^{\lambda_s kT}) \left(\frac{\lambda_s \ell_1}{\gamma_s b_s^0} + \frac{k_s^0 f_0}{b_s^0} + \frac{\lambda_s k_s^0 H_s(t_0)}{b_s^0} \right) + m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT}, \quad (25)$$

из которого однозначно находим значение τ_1 , определяемое равенством (23).

По условию задачи $\tau_1 \in (0, kT)$, значит, равенство (23) имеет смысл, если $0 < e^{-\lambda_s kT} < \Omega < 1$ при $\lambda_s > 0$ или $1 < \Omega < e^{-\lambda_s kT}$ при $\lambda_s < 0$. Выполнение последнего условия с учётом предположения $m_2 > m_1$ равносильно выполнению неравенств (21).

Уравнение (25) совместно с первым уравнением системы (16) равносильно системе (16). Значит, значение τ_1 является решением системы (16) тогда и только тогда, когда удовлетворяет первому уравнению системы (16), что равносильно выполнению равенства (24). По предположению должно выполняться неравенство $\ell_2 > \ell_1$. Если в этом неравенстве ℓ_2 заменить выражением (24), то после преобразований получим неравенство (22).

Теперь непосредственно докажем теорему 2. Пусть имеют место условия 1) и 2) теоремы 2 и $\tau_2 = kT - \tau_1$. Тогда значение τ_1 , определяемое равенством (23), является решением системы (16) и принадлежит интервалу $(0, kT)$. При этом, как следует из неравенств (21) и (22), выполнены предположения, что $m_2 > m_1$ и $\ell_2 > \ell_1$. Пусть выполняется условие 3) теоремы 2. Тогда имеют место неравенства $\sigma(t) < \ell_2$ для $t \in \Delta_1^1$ и $\sigma(t) > \ell_1$ для $t \in \Delta_1^2$. Значит, значение $t_0 + \tau_1$ является моментом первой встречи с L_2 , значение $t_0 + kT$ — моментом первой встречи с L_1 и справедливы равенства $\sigma(t_0 + \tau_1) = \ell_2$ и $\sigma(t_0 + \tau_1 + \tau_2) = \sigma(t_0 + kT) = \ell_1$. Исходя из построения системы (16) с начальным условием $\sigma(t_0) = \ell_1$ для $T_r = kT$, приходим к равенствам (6) для любого $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и, следовательно, к утверждению теоремы 2. Единственность решения следует из того, что параметры определяются однозначно. Теорема доказана.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим остальные (при $j = \overline{1, n}$, $j \neq s$) уравнения системы (6) с начальным условием $x_j(t_0) = x_j^1$ и найденным управлением (7). Имеем

$$\dot{x}_j(t) = \lambda_j x_j(t) + b_j^0 u_p(t) + k_j^0 f(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq s. \quad (26)$$

Проинтегрируем уравнения (26) на полуинтервалах с соответствующими значениями функции $u_p(t)$. На полуинтервале Δ_κ^1 с $\nu = t_0 + \kappa T_r$ и $x_j(\nu) = x_j^1$ имеем

$$x_j(t) = e^{\lambda_j(t-\nu)} x_j^1 + \int_\nu^t e^{\lambda_j(t-\tau)} (b_j^0 m_1 + k_j^0 f(\tau)) d\tau, \quad (27)$$

на полуинтервале Δ_κ^2 с $\nu = t_0 + \kappa T_r + \tau_1$ и $x_j(\nu) = x_j^2$ —

$$x_j(t) = e^{\lambda_j(t-\nu)} x_j^2 + \int_\nu^t e^{\lambda_j(t-\tau)} (b_j^0 m_2 + k_j^0 f(\tau)) d\tau. \quad (28)$$

Согласно условию 1) определения 4 должны выполняться равенства

$$x_j(t_0 + \kappa T_r) = x_j(t_0 + (\kappa + 1)T_r) = x_j^1, \quad x_j(t_0 + \kappa T_r + \tau_1) = x_j^2. \quad (29)$$

После соответствующих подстановок и замен приходим к равенствам

$$\begin{aligned} x_j^2 &= e^{\lambda_j \tau_1} x_j^1 + \int_0^{\tau_1} e^{\lambda_j(\tau_1-\xi)} (b_j^0 m_1 + k_j^0 f(t_0 + \kappa T_r + \xi)) d\xi, \\ x_j^1 &= e^{\lambda_j \tau_2} x_j^2 + \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_j \xi} (b_j^0 m_2 + k_j^0 f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi)) d\xi, \end{aligned} \quad (30)$$

которые справедливы, если и только если интегралы

$$k_j^0 \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_j \xi} f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi) d\xi, \quad k_j^0 \int_0^{\tau_1} e^{-\lambda_j \xi} f(t_0 + \kappa T_r + \xi) d\xi, \quad i = \overline{1, n}, \quad (31)$$

не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Имеет место

Теорема 3. Пусть параметры ℓ_1 , ℓ_2 , m_1 , m_2 и γ_s нелинейности $u(\sigma)$ подобраны так, что выполняются условия теоремы 1 и, дополнительно, $k_j^0 = 0$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq s$. Тогда для $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует единственное решение системы (6):

$$x_s(t) = \begin{cases} e^{\lambda_s(t-\nu)} (\ell_1/\gamma_s + Q_s(\nu, m_1)) - Q_s(\nu + t, m_1), & \nu = t_0 + \kappa T_r, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ e^{\lambda_s(t-\nu)} (\ell_2/\gamma_s + Q_s(\nu, m_2)) - Q_s(\nu + t, m_2), & \nu = t_0 + \kappa T_r + \tau_1, \quad t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases}$$

$$x_j(t) = \begin{cases} e^{\lambda_j(t-\nu)} (x_j^1 + Q_j(m_1)) - Q_j(m_1), & \nu = t_0 + \kappa T_r, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ e^{\lambda_j(t-\nu)} (x_j^2 + Q_j(m_2)) - Q_j(m_2), & \nu = t_0 + \kappa T_r + \tau_1, \quad t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases}$$

где

$$x_j^1 = \frac{e^{\lambda_j T_r}}{1 - e^{\lambda_j T_r}} \left(\frac{Q_j(m_2) - Q_j(m_1)}{e^{\lambda_j \tau_1}} + Q_j(m_1) - \frac{Q_j(m_2)}{e^{\lambda_j T_r}} \right), \quad x_j^2 = e^{\lambda_j \tau_1} (x_j^1 + Q_j(m_1)) - Q_j(m_1), \quad (32)$$

$$Q_j(m_\mu) = \frac{b_j^0 m_\mu}{\lambda_j}, \quad \mu = 1, 2. \quad (33)$$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда существует единственное решение $\sigma(t)$ уравнения (8), которое выписано в утверждении теоремы 1. Учитывая, что имеет место соотношение $\sigma(t) = \gamma_s x_s(t)$, приходим к выражению для решения $x_s(t)$ системы (6), которое приведено в утверждении теоремы 3.

Пусть имеет место дополнительное условие теоремы 3, а именно, $k_j^0 = 0$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq s$. Тогда интегралы (31) равны нулю и, следовательно, не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Равенства (30) после интегрирования принимают вид

$$x_j^2 = (x_j^1 + Q_j(m_1))e^{\lambda_j \tau_1} - Q_j(m_1), \quad x_j^1 = (x_j^2 + Q_j(m_2))e^{\lambda_j \tau_2} - Q_j(m_2), \quad (34)$$

где $Q_j(m_\mu)$, $\mu = 1, 2$, определяются по формуле (33). Если равенства рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно неизвестных x_j^1 и x_j^2 , то в силу того, что $\lambda_j \neq 0$, якобиан этой системы отличен от нуля, а значит, неизвестные определяются однозначно. Выражение для x_j^2 подставим во второе равенство и после преобразования получим формулы (32), определяющие j -е координаты точек переключения при найденных значениях параметров τ_1, τ_2 (таких, что $T_r = \tau_1 + \tau_2$) и m_1, m_2 управления $u_p(t)$.

Далее сужение функции $x_j(t)$, заданное равенством (27) на полуинтервал Δ_κ^1 с $\nu = t_0 + \kappa T_r$, принимает вид

$$x_j(t) = e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^1 + Q_j(m_1)) - Q_j(m_1),$$

а заданное равенством (28) на полуинтервал Δ_κ^2 с $\nu = t_0 + \kappa T_r + \tau_1$ —

$$x_j(t) = e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^2 + Q_j(m_2)) - Q_j(m_2).$$

Принимая во внимание равенства (29), приходим к выражению, приведённому в утверждении теоремы 3 для определения решения $x_j(t)$ системы (6). Теорема доказана.

В случае когда период возврата T_r решения кратен периоду T функции возмущения справедлива

Теорема 4. Пусть параметры ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 и γ_s нелинейности $u(\sigma)$ подобраны так, что выполняются условия теоремы 2. Тогда для $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует единственное решение системы (6):

$$x_s(t) = \begin{cases} e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_1/\gamma_s + Q_s(\nu, m_1)) - Q_s(\nu + t, m_1), & \nu = t_0 + \kappa k T, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ e^{\lambda_s(t-\nu)}(\ell_2/\gamma_s + Q_s(\nu, m_2)) - Q_s(\nu + t, m_2), & \nu = t_0 + \kappa k T + \tau_1, \quad t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases}$$

$$x_j(t) = \begin{cases} e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^1 + Q_j(\nu, m_1)) - Q_j(\nu + t, m_1), & \nu = t_0 + \kappa k T, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^2 + Q_j(\nu, m_2)) - Q_j(\nu + t, m_2), & \nu = t_0 + \kappa k T + \tau_1, \quad t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases}$$

где

$$x_j^1 = \frac{e^{\lambda_j k T}}{1 - e^{\lambda_j k T}} \left(\frac{Q_j(t_0 + \tau_1, m_2) - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1)}{e^{\lambda_j \tau_1}} + Q_j(t_0, m_1) - \frac{Q_j(t_0, m_2)}{e^{\lambda_j k T}} \right),$$

$$x_j^2 = e^{\lambda_j \tau_1}(x_j^1 + Q_j(t_0, m_1)) - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1), \quad (35)$$

$Q_j(\tau, m_\mu)$, $\mu = 1, 2$, определяются по формуле (17), в которой $s = j$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3. При выполнении условий теоремы 2 для уравнения (8) существует единственное решение $\sigma(t)$, которое приведено в утверждении теоремы 2. Поскольку $x_s(t) = \sigma(t)/\gamma_s$, то из выражения для $\sigma(t)$ получаем выражение, однозначно определяющее решение $x_s(t)$ системы (6). Это выражение приведено в утверждении теоремы 4.

Имеем $T_r = kT$, поэтому интегралы (31) не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и значит равенства (30) после интегрирования принимают следующий вид:

$$x_j^2 = (x_j^1 + Q_j(t_0, m_1))e^{\lambda_j \tau_1} - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1), \quad x_j^1 = (x_j^2 + Q_j(t_0 + \tau_1, m_2))e^{\lambda_j \tau_2} - Q_j(t_0, m_2), \quad (36)$$

где $Q_j(\tau, m_\mu)$, $\mu = 1, 2$, определяются по формуле (17), в которой $s = j$, что отражено в утверждении теоремы 4. Поскольку при ненулевых λ_j координаты x_j^1 и x_j^2 определяются однозначно, то после подстановки выражения для x_j^2 во второе равенство и преобразований получим для них формулы (35) с найденными значениями параметров программного управления $u_p(t)$.

Далее рассмотрим равенства (27) и (28). После интегрирования сужение функции $x_j(t)$ на полуинтервал Δ_κ^1 с $\nu = t_0 + \kappa kT$ имеет вид

$$x_j(t) = e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^1 + Q_j(\nu, m_1)) - Q_j(\nu + t, m_1),$$

а на полуинтервал Δ_κ^2 с $\nu = t_0 + \kappa kT + \tau_1$ —

$$x_j(t) = e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j^2 + Q_j(\nu, m_2)) - Q_j(\nu + t, m_2).$$

С учётом равенств (29) получаем выражение для определения решения $x_j(t)$ системы (6), которое приведено в утверждении теоремы 4. Теорема доказана.

Непосредственно из теорем 3 и 4 вытекает

Следствие. Пусть для системы (6) существует T_r -двухточечно-колебательное решение $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ с параметрами τ_1, τ_2 , $X^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^T$ и $X^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^T$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) решение является T_r -периодическим, где $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$, если выполняются условия теоремы 4;

2) решение является $2T_r$ -периодическим, где $T_r = (k + 1/2)T$, если имеют место условия теоремы 3.

Отметим, что $2T_r$ -периодическому решению соответствует фазовая траектория, проходящая через точки переключения дважды за период, т.е. условия теоремы 3 обеспечивают существование двухточечно-колебательного периодического решения системы с четырьмя переключениями реле за период.

4. ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения системы (6) при малых отклонениях в начальных данных. Справедлива

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 3 или теоремы 4 и, дополнительно, $\lambda_j < 0$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq s$. Тогда решение $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ системы (6) является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 3. Исследуем решение $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ системы (6) на устойчивость с помощью фазовой плоскости. Для этого рассмотрим проекции решения $X(t)$ и гиперплоскостей переключения на фазовую плоскость (x_s, x_j) , где $j \neq s$. Проекции гиперплоскостей L_1 и L_2 обозначим через H_1 и H_2 соответственно и далее их будем называть *прямыми переключения*.

В результате выбора вектора обратной связи Γ на плоскости (x_s, x_j) прямые H_1 и H_2 ортогональны оси x_s . По построению системы (16) времена перехода τ_1 и τ_2 зависят от $x_s(t_0)$ и не зависят от $x_j(t_0)$, вследствие чего время перехода с одной прямой переключения на другую одно и то же, независимо от выбора начальной точки на прямой H_1 при одинаковом начальном значении t_0 .

Выпишем равенства

$$x_j^1 = e^{\lambda_j(\tau_1+\tau_2)}x_j^1 + \Theta_j^1, \quad x_s^1 = \ell_1/\gamma_s, \quad (37)$$

где $\Theta_j^1 = Q_j(m_1)e^{\lambda_j(\tau_1+\tau_2)} + (Q_j(m_2) - Q_j(m_1))e^{\lambda_j\tau_2} - Q_j(m_2)$. Первое равенство получено из (34) после подстановки выражения вместо x_j^2 . Второе равенство добавлено из (6).

Напомним, что $x_j^1 = x_j(t_0 + \kappa T_r) \in H_1$ для любого $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Равенства (37) с константой Θ_j^1 при найденных значениях τ_1 и τ_2 определяют точечное отображение прямой H_1 в себя в силу решения системы (6) за время T_r такое, что $T_r = \tau_1 + \tau_2$, поскольку на плоскости (x_s, x_j) изображающая точка движется из точки $(\ell_1/\gamma_s, x_j(t_0))^T = (\ell_1/\gamma_s, x_j^1)^T \in H_1$ в точку $(\ell_2/\gamma_s, x_j(t_0 + \tau_1))^T = (\ell_2/\gamma_s, x_j^2)^T \in H_2$ за время τ_1 и возвращается в точку $(\ell_1/\gamma_s, x_j(t_0 + T_r))^T = (\ell_1/\gamma_s, x_j^1)^T \in H_1$ за время τ_2 , далее движение повторяется κ раз. Следовательно, имеем по координате x_j равенства

$$\begin{aligned} x_j(t_0 + T_r) &= e^{\lambda_j T_r} x_j(t_0) + \Theta_j^1, \quad x_j(t_0 + 2T_r) = e^{\lambda_j T_r} x_j(t_0 + T_r) + \Theta_j^1, \quad \dots \\ \dots, \quad x_j(t_0 + (\kappa + 1)T_r) &= e^{\lambda_j T_r} x_j(t_0 + \kappa T_r) + \Theta_j^1. \end{aligned}$$

Неподвижная точка $(\ell_1/\gamma_s, x_j^1)^T$ отображения (37) совпадает с проекцией точки переключения X^1 на плоскость (x_s, x_j) .

Пусть $\lambda_j < 0$. Тогда неподвижная точка асимптотически устойчива. Действительно, рассмотрим точку $(\ell_1/\gamma_s, x_j(t_0))^T \in H_1$ и для любого $\delta > 0$ точку $(\ell_1/\gamma_s, \tilde{x}_j(t_0))^T \in H_1$ такую, что $0 < |x_j(t_0) - \tilde{x}_j(t_0)| < \delta$. Тогда при $\kappa \rightarrow \infty$ имеет место сжатие

$$|x_j(t_0 + \kappa T_r) - \tilde{x}_j(t_0 + \kappa T_r)| = e^{\lambda_j \kappa T_r} |x_j(t_0) - \tilde{x}_j(t_0)| < e^{\lambda_j \kappa T_r} \delta \rightarrow 0.$$

Пусть выполняются условия теоремы 4. В этом случае рассмотрим равенства (36) с $T_r = kT = \tau_1 + \tau_2$ и точечное отображение прямой H_1 в себя в следующем виде:

$$x_j^1 = e^{\lambda_j(\tau_1+\tau_2)}x_j^1 + \Theta_j^2, \quad x_s^1 = \ell_1/\gamma_s, \quad (38)$$

где $\Theta_j^2 = Q_j(t_0, m_1)e^{\lambda_j kT} + (Q_j(t_0 + \tau_1, m_2) - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1))e^{\lambda_j\tau_2} - Q_j(t_0, m_2)$. Далее доказательство совпадает с приведённым выше, так как Θ_j^2 также является константой, если известны значения τ_1 и τ_2 .

Таким образом, неподвижная точка отображения (37) или отображения (38) асимптотически устойчива. Поскольку имеет место сжатие по каждой j -й координате, то асимптотически устойчивым является решение $X(t)$ системы (6). Теорема доказана.

5. ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем полученные теоретические результаты.

Пример 1. Рассмотрим систему (6) с $n = 3$, $s = 1$ и числовыми параметрами, значения которых удовлетворяют условиям задачи, а именно,

$$\dot{x}_1 = 0.5x_1 + 1.5u(\sigma) + k_1^0 f(t), \quad \dot{x}_2 = -5x_2 + u(\sigma) + k_2^0 f(t), \quad \dot{x}_3 = -2x_3 + u(\sigma) + k_3^0 f(t), \quad \sigma = \gamma_1 x_1, \quad (39)$$

вещественные собственные значения $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = -5$ и $\lambda_3 = -2$ являются простыми и ненулевыми, элементы $b_1^0 = 1.5$ и $b_2^0 = b_3^0 = 1$ отличны от нуля. Здесь $f(t) = 0.5 + \sin(2t + \varphi_1) + 3\sin(4t + 1.62)$ с $f_1 = 1 \neq 0$, параметром φ_1 и периодом $T = \pi$.

Найдём значения параметров k_1^0, k_2^0, k_3^0 системы (39), параметра φ_1 функции возмущения $f(t)$ и параметров $\gamma_1, \ell_1, \ell_2, m_1, m_2$ нелинейности $u(\sigma)$, при которых существует решение системы (39) с $t_0 = 0.1\pi$ и периодом возврата T_r , соизмеримым с периодом T , но не кратным ему, т.е. $T_r = 1.5\pi$.

Обратимся к условиям леммы и положим $k_1^0 = -1 \neq 0$, $\varphi_1 \approx 1.187$ ($h = 1$, $\delta_1^1 \approx 1.326$) и $\tau_1 = \pi$ ($k = 1$, $m = 2$). Здесь и далее расчёты выполнены с точностью до 10^{-9} , результаты представлены с округлением до тысячных.

Обратимся к условиям теоремы 1. Пусть $\ell_1 = -6$, $\ell_2 = 14$ и $\gamma_1 = -1.5$ ($\gamma_1 b_1^0 = -2.25 < 0$). Вычислив значение m_1 по формуле (18), где $H_1(t_0) \approx -0.689$, имеем $m_1 \approx -2.398$. Первое уравнение системы (16) относительно переменной τ_1 на интервале $(0, T_r) = (0, 1.5\pi)$ имеет единственное решение $\tau_1 = \pi$, значит, условия 1) и 2) выполняются. Поскольку $\lambda_1 = 0.5 > 0$ и $\ell_1 + \gamma_1 Q_1(t_0, m_1) \approx 5.249 > 0$, то по формуле (19) $m_2 \approx 6.939$. Второе уравнение системы (16) относительно переменной τ_2 на интервале $(0, 1.5\pi)$ имеет единственное решение $\tau_2 = 0.5\pi$. Условия 3) и 4) также выполняются.

Выпишем программное управление с найденными значениями параметров согласно (7). Итак, для $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$u_p(t) \approx \begin{cases} -2.398, & t \in \Delta_\kappa^1 = [0.1\pi + 1.5\pi\kappa, 1.1\pi + 1.5\pi\kappa), \\ 6.939, & t \in \Delta_\kappa^2 = [1.1\pi + 1.5\pi\kappa, 1.6\pi + 1.5\pi\kappa). \end{cases}$$

Отсюда согласно (5) нелинейность $u(\sigma)$ принимает вид

$$u(\sigma) \approx \begin{cases} -2.398, & \sigma < 14, \\ 6.939, & \sigma > -6. \end{cases}$$

Обратимся к условиям теоремы 3. Пусть $k_2^0 = k_3^0 = 0$. Тогда решение системы (39) будет следующим:

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx \begin{cases} -3.499 e^{0.5(t-\nu)} - Q_1(\nu+t, -2.396), & \nu = 0.1\pi + 1.5\pi\kappa, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ 11.174 e^{0.5(t-\nu)} - Q_1(\nu+t, 6.939), & \nu = 1.1\pi + 1.5\pi\kappa, \quad t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases} \\ x_2(t) &\approx \begin{cases} 1.866 e^{-5(t-\nu)} - 0.479, & \nu = 0.1\pi + 1.5\pi\kappa, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ -1.867 e^{-5(t-\nu)} + 1.388, & \nu = 1.1\pi + 1.5\pi\kappa, \quad t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases} \\ x_3(t) &\approx \begin{cases} 4.466 e^{-2(t-\nu)} - 1.198, & \nu = 0.1\pi + 1.5\pi\kappa, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ -4.659 e^{-2(t-\nu)} + 3.470, & \nu = 1.1\pi + 1.5\pi\kappa, \quad t \in \Delta_\kappa^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда имеем координаты $x_1^1 = x_1(0.1\pi) = 4$, $x_2^1 = x_2(0.1\pi) \approx 1.387$, $x_3^1 = x_3(0.1\pi) \approx 3.268$ точки переключения X^1 и координаты $x_1^2 = x_1(1.1\pi) \approx -9.333$, $x_2^2 = x_2(1.1\pi) \approx -0.479$, $x_3^2 = x_3(1.1\pi) \approx -1.190$ точки переключения X^2 .

Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ и траектория 1.5π -двухточечно-колебательного решения в пространстве состояний системы (39) с точками переключения X^1 и X^2 показаны на рис. 1. Гиперплоскости переключения L_1, L_2 ориентированы ортогонально оси x_1 и задаются уравнениями $-1.5x_1 = -6$, $-1.5x_1 = 14$ соответственно. Изображающая точка решения начинает своё движение в $X^1 \in L_1$ при $t_0 = 0.1\pi$, за время $\tau_1 = \pi$ попадает в $X^2 \in L_2$, затем

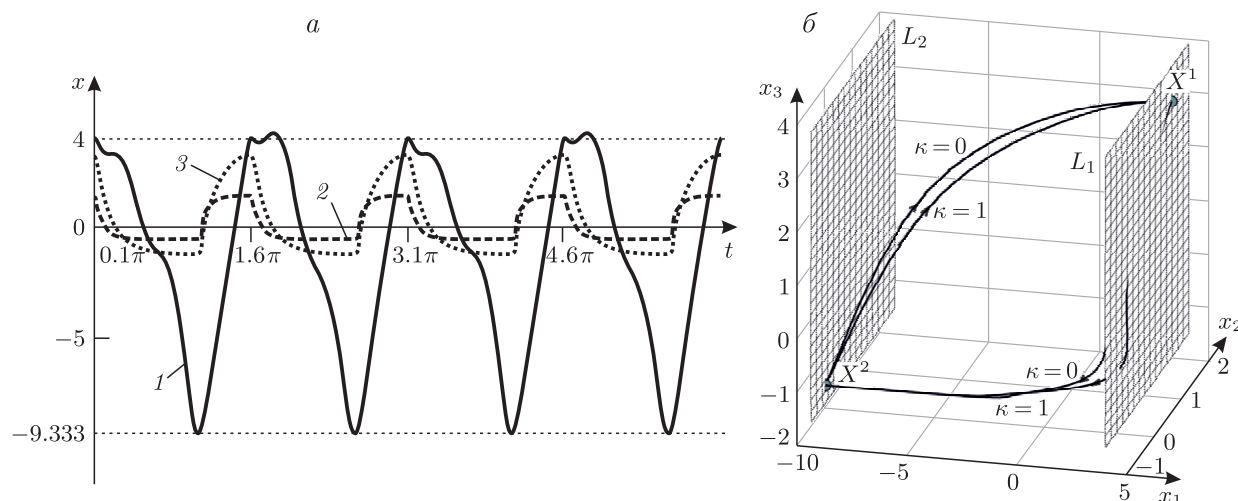


Рис. 1. Решение системы (39): *a* — графики решения $x_1(t)$ (кривая 1), $x_2(t)$ (кривая 2) и $x_3(t)$ (кривая 3) при $t_0 = 0.1\pi$; *б* — 1.5π -двухточечно-колебательное решение с точками переключения X^1 и X^2 в пространстве состояний (x_1, x_2, x_3)

за время $\tau_2 = \pi/2$ возвращается в начальную точку X^1 . При втором обходе петли гистерезиса ($\kappa = 1$) изображающая точка после пересечения L_1 достигает L_2 и возвращается на L_1 , а значит проходит через точки переключения по другой траектории, не совпадающей с траекторией при первом обходе ($\kappa = 0$). Далее движение от L_1 до L_2 и обратно повторяется только по этим двум траекториям. Согласно следствию и теореме 5 найденное решение является асимптотически устойчивым 3π -периодическим решением системы (39).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 0.5x_1 + 1.5u(\sigma) - f(t), \quad \dot{x}_2 = -5x_2 + u(\sigma) + f(t), \quad \dot{x}_3 = -2x_3 + u(\sigma) + 0.5f(t), \quad \sigma = \gamma_1 x_1, \quad (40)$$

где $f(t) = 0.5 + \sin(2t + 1.187) + 3\sin(4t + 1.62)$, и найдём значения параметров γ_1 , ℓ_1 , ℓ_2 , m_1 , m_2 нелинейности $u(\sigma)$, при которых существует её решение с $t_0 = 0.1\pi$ и периодом возврата, равным периоду функции $f(t)$, т.е. $T_r = \pi$.

Обратимся к условиям теоремы 2. Пусть $\ell_1 = -6$ и $\gamma_1 = -1.5$. Тогда $H_1(t_0) \approx -0.688$ и, значит, $L \approx 1.229$. Положим $m_1 = -2$ и $m_2 = 6$ согласно неравенству (21). Получим $\tau_1 \approx 2.516$ по формуле (23) с $\Omega \approx 0.732$. Имеет место неравенство (22) с $Q_1(t_0, m_1) \approx -6.312$ и $Q_1(t_0 + \tau_1, m_1) \approx -8.181$. По формуле (24) находим $\ell_2 \approx -0.070$. Условия 1) и 2) выполнены.

Значение $\tau_1 \approx 2.516$ является единственным решением первого уравнения системы (16), а значение $\tau_2 \approx 0.625$ — единственным решением второго уравнения системы (16) на интервале $(0, T_r) = (0, \pi)$, следовательно, условие 3) выполняется.

Имеем программное управление с найденными значениями параметров для $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$u_p(t) = \begin{cases} -2, & t \in \Delta_\kappa^1 \approx [0.1\pi + \pi\kappa, 0.1\pi + 2.516 + \pi\kappa), \\ 6, & t \in \Delta_\kappa^2 \approx [0.1\pi + 2.516 + \pi\kappa, 1.1\pi + \pi\kappa) \end{cases}$$

и нелинейность

$$u(\sigma) = \begin{cases} -2, & \sigma < -0.070, \\ 6, & \sigma > -6. \end{cases}$$

Согласно теореме 4 существует следующее решение системы (40):

$$x_1(t) \approx \begin{cases} -2.312 e^{0.5(t-\nu)} - Q_1(\nu+t, -2), & \nu = 0.1\pi + \pi\kappa, t \in \Delta_\kappa^1, \\ 15.865 e^{0.5(t-\nu)} - Q_1(\nu+t, 6), & \nu \approx 0.1\pi + 2.516 + \pi\kappa, t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases}$$

$$x_2(t) \approx \begin{cases} 1.530 e^{-5(t-\nu)} - Q_2(\nu+t, -2), & \nu = 0.1\pi + \pi\kappa, t \in \Delta_\kappa^1, \\ -1.600 e^{-5(t-\nu)} - Q_2(\nu+t, 6), & \nu \approx 0.1\pi + 2.516 + \pi\kappa, t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases}$$

$$x_3(t) \approx \begin{cases} 2.860 e^{-2(t-\nu)} - Q_3(\nu+t, -2), & \nu = 0.1\pi + \pi\kappa, t \in \Delta_\kappa^1, \\ -3.981 e^{-2(t-\nu)} - Q_3(\nu+t, 6), & \nu \approx 0.1\pi + 2.516 + \pi\kappa, t \in \Delta_\kappa^2. \end{cases}$$

Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ и траектория π -двухточечно-колебательного решения системы (40) с точками переключения $X^1 \approx (4, 1.792, 3.002)^T$, $X^2 \approx (0.047, -0.404, -0.864)^T$ показаны на рис. 2. Гиперплоскости переключения L_1 и L_2 задаются уравнениями $-1.5x_1 = -6$ и $-1.5x_1 \approx -0.070$ соответственно (ориентированы ортогонально оси x_1). Изображающая точка решения начинает своё движение в $X^1 \in L_1$ при $t_0 = 0.1\pi$, за время $\tau_1 \approx 2.516$ попадает в $X^2 \in L_2$, затем за время $\tau_2 \approx 0.625$ возвращается в начальную точку X^1 . Далее движение от L_1 до L_2 и обратно повторяется по этой траектории. Таким образом, согласно следствию и теореме 5 найденное решение является асимптотически устойчивым π -периодическим решением системы (40).

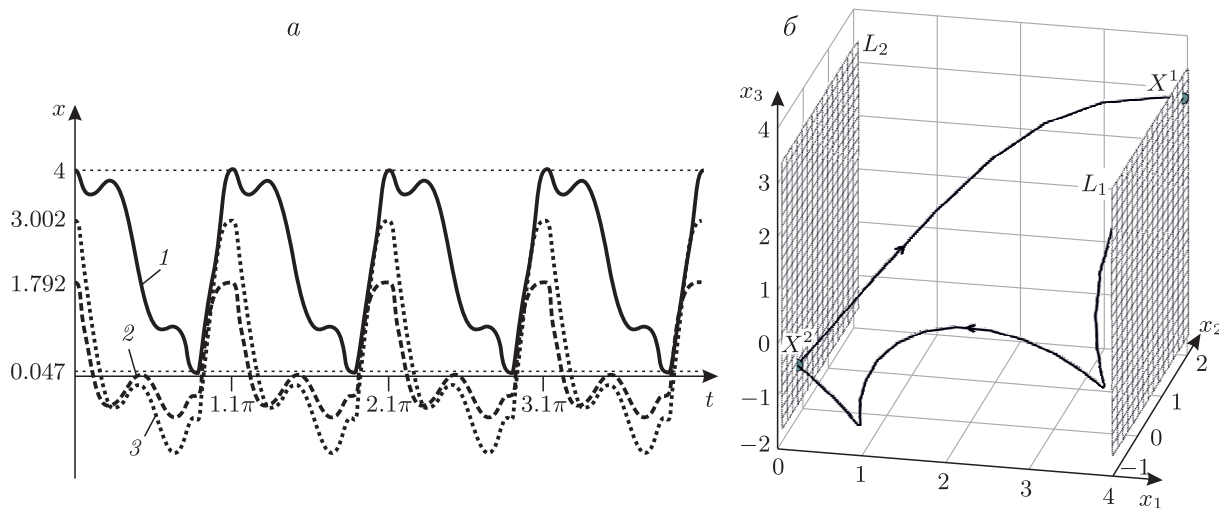


Рис. 2. Решение системы (40): *a* — графики решения $x_1(t)$ (кривая 1), $x_2(t)$ (кривая 2) и $x_3(t)$ (кривая 3) при $t_0 = 0.1\pi$; *б* — π -двухточечно-колебательное решение с точками переключения X^1 и X^2 в пространстве состояний (x_1, x_2, x_3)

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уткин, В.И. Системы управления с векторным реле / В.И. Уткин, Ю.В. Орлов // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 9. — С. 143–155.
2. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе / А.С. Фурсов, Р.П. Митрев, П.А. Крылов, Т.С. Тодоров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1104–1115.
3. Da Silva, C.E.L. Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations / C.E.L. Da Silva, A. Jacquemard, M.A. Teixeira // J. Dyn. Control Syst. — 2020. — V. 26, № 1. — P. 17–44.
4. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления / А.Л. Медведский, П.А. Мелещенко, В.А. Нестеров [и др.] // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 4. — С. 58–82.
5. Vasquez-Beltran, M.A. Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator / M.A. Vasquez-Beltran, B. Jayawardhana, R. Peletier // IEEE Control Syst. Lett. — 2021. — V. 5, № 3. — P. 1061–1066.
6. Fen, M.O. Quasilinear systems with unpredictable relay perturbations / M.O. Fen, F. Fen // Turk. J. Math. — 2022. — V. 46, № 4. — P. 1369–1383.
7. Цыпкин, Я.З. Релейные автоматические системы / Я.З. Цыпкин. — М. : Наука, 1974. — 575 с.
8. Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.
9. Евстафьева, В.В. О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом / В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 169–178.
10. Євстаф'єва, В.В. Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці / В.В. Євстаф'єва // Укр. мат. журн. — 2021. — Т. 73, № 5. — С. 640–650.
11. Евстафьева, В.В. Синтез управления возмущённой системой с неоднозначной нелинейностью / В.В. Евстафьева // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 3. — С. 44–64.
12. Евстафьева, В.В. Критерий существования двухточечно-колебательного решения возмущённой системы с реле / В.В. Евстафьева // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 260–273.
13. Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations / G.A. Leonov, M.M. Shumafov, V.A. Teshev, K.D. Aleksandrov // Differ. Equat. — 2017. — V. 53, № 13. — P. 1764–1816.
14. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления / В.М. Кунцевич, А.М. Лётов, Б.Н. Наумов [и др.]. — М. : Машиностроение, 1971. — 322 с.

CONTROL DESIGN FOR A MULTIDIMENSIONAL SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RELAY HYSTERESIS AND PERTURBATION

© 2024 / V. V. Yevstafieva

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: v.evstafieva@spbu.ru

A multidimensional controllable system with a constant matrix, a significant nonlinearity of the two-position relay type with hysteresis as a control and a continuous periodic perturbation function is considered. The system matrix has simple, real, non-zero eigenvalues, among which one can be positive. Conditions for the system parameters, including the nonlinearity ones, are established under which there is a single two-point oscillatory periodic solution with a period comparable to the period of the perturbation function in the case of a special type of the feedback vector. The asymptotic stability of the solution has been proven using the phase plane method. The results obtained are illustrated by examples for three-dimensional systems.

Keywords: multidimensional controllable system, two-position relay with hysteresis, continuous periodic perturbation function, two-point oscillatory periodic solution, control design, asymptotic stability

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00069).

REFERENCES

1. Utkin, V.I. and Orlov, Yu.V., Control systems with vector relays, *Autom. Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 9, pp. 1671–1680.
2. Fursov, A.S., Mitrev, R.P., Krylov, P.A., and Todorov, T.S., On the existence of a periodic mode in a nonlinear system, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1076–1087.
3. Da Silva, C.E.L., Jacquemard, A., and Teixeira, M.A., Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations, *J. Dyn. Control Syst.*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 17–44.
4. Medvedskii, A.L., Meleshenko, P.A., Nesterov, V.A. [et al.], Unstable oscillating systems with hysteresis: problems of stabilization and control, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 533–556.
5. Vasquez-Beltran, M.A., Jayawardhana, B., and Peletier, R., Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator, *IEEE Control Syst. Lett.*, 2021, vol. 5, no. 3, pp. 1061–1066.
6. Fen, M.O. and Fen, F. Quasilinear systems with unpredictable relay perturbations, *Turk. J. Math.*, 2022, vol. 46, no. 4, pp. 1369–1383.
7. Tsypkin, Ya.Z., *Releinye avtomaticheskie sistemy* (Relay Automatic Systems), Moscow: Nauka, 1974.
8. Krasnosel'skii, M.A. and Pokrovskii, A.V., *Sistemy s gisterezisom* (Systems with Hysteresis), Moscow: Nauka, 1983.
9. Yevstafyeva, V.V., On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 155–164.
10. Yevstafyeva, V.V., Existence of two-point oscillatory solutions of a relay nonautonomous system with multiple eigenvalue of a real symmetric matrix, *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 73, no. 5, pp. 746–757.
11. Yevstafyeva, V.V., Control design for a perturbed system with an ambiguous nonlinearity, *Autom. Remote Control*, 2023, vol. 84, no. 3, pp. 254–269.
12. Yevstafyeva, V.V., Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 2, pp. 212–222.
13. Leonov, G.A., Shumafov, M.M., Teshev, V.A., and Aleksandrov, K.D., Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 13, pp. 1764–1816.
14. Kuntsevich, V.M., Letov, A.M., Naumov, B.N. [et al.], *Tochnye metody issledovaniya nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Exact Analysis Methods for Nonlinear Automatic Control Systems), Moscow: Mashinostroenie, 1971.