ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1350–1367

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.958

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. Х. Г. Умаров

Академия наук Чеченской Республики, г. Грозный
Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный
e-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 11.03.2024 г., после доработки 04.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными, обобщающего уравнение Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией и уравнение поперечных колебаний вязкоупругой балки Фойхта–Кельвина, находящейся под действием внешнего и внутреннего трений, деформация которой рассматривается с учётом поправки от инерции поворота сечений, найдены достаточные условия существования и экспоненциального убывания глобального решения задачи Коши.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение колебаний балки, уравнение Буссинеска шестого порядка, асимптотическое поведение решения

DOI: 10.31857/S0374064124100059, EDN: JTOWLX

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения в частных производных

$$(I-\partial_x^2)\partial_t^2 u+(q_1\partial_x^4-q_2\partial_x^2+q_3 I)\partial_t u-(q_4\partial_x^6-q_5\partial_x^4+q_6\partial_x^2-q_7 I)u=\lambda\partial_x u_x^{1-p}, \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x), \tag{2}$$

где $\partial_x=\partial/\partial x$, $\partial_t=\partial/\partial t$; I — тождественный оператор; $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$, $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$; коэффициенты q_i, $i=\overline{1,7}$, — заданные неотрицательные числа; параметр $\lambda\in\mathbb{R}$; показатель степени $p=2m/(2n+1)$, $m,n\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$. Полагаем, что в уравнении (1) частная производная u_{xx} ограничена ассимптотически снизу и сверху функцией u_x в проколотой окрестности точки x_0: $u_{xx}(t,x)=O(u_x(t,x))$ при $x\to x_0$, где x_0 — точки, в которых $u_x(t,x_0)=0$, т.е. [1, гл. 1, § 8] существует постоянная $c>0$ такая, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|u_{xx}(t,x)|\leqslant c|u_x(t,x)|$.

Если в уравнении (1) коэффициенты $q_2=q_4=q_6=q_7=\lambda=0$, то приходим [2, гл. 6] к уравнению поперечных колебаний вязкоупругой балки, находящейся под действием внешнего и внутреннего трений (материал Фойхта–Кельвина), деформация которой рассматривается с учётом поправки от инерции поворота сечений. Предполагаем, что балка является “бесконечной”. Такая идеализация допустима [3, § 6.3], если на границах балки находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающая на него изгибная волна не отражается.

Если в уравнении (1) коэффициенты $q_1=q_3=q_7=0$, то получается [4, 5] уравнение Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией.

Задача Коши (1), (2) рассматривается в пространстве $C[\mathbb{R}]$ [6, гл. 8, § 1] непрерывных функций $g(x)$, для которых существуют оба предела при $x\to\pm\infty$, полагая, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и искомое классическое решение $u=u(t,x)$, $(t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty)$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (1), для всех значений временно́й переменной t по переменной x принадлежат $C[\mathbb{R}]$. (Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.) Через $C^{(k)}[\mathbb{R}]=$ $=\{g(x)\in C[\mathbb{R}]\colon g'(x),\ldots,g^{(k)}(x)\in C[\mathbb{R}]\}$, $k\in\mathbb{N}$, обозначим подмножества дифференцируемых функций в пространстве $C[\mathbb{R}]$, наделённом нормой $\|g\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$.

Исследование задачи Коши (1), (2) проведём по следующей схеме: прежде всего убедимся, что постановка задачи Коши (1), (2) корректна и локальное по времени её классическое решение существует. С этой целью для соответствующего (1) линейного однородного уравнения ($\lambda=0$) найдём решение задачи Коши. Далее для вспомогательной задачи Коши

$$(I-\partial_x^2)\partial_t^2 v+(q_1\partial_x^4-q_2\partial_x^2+q_3I)\partial_t v-(q_4\partial_x^6-q_5\partial_x^4+q_6\partial_x^2-q_7I)v=\lambda\partial_x^2 v^{1-p}, \tag{3}$$

$$v|_{t=0}=\varphi'(x),\quad v_t|_{t=0}=\psi'(x), \tag{4}$$

где $v_x(t,x)=O(v(t,x))$ и $v_{xx}(t,x)=O(v(t,x))$ при $x\to x_0$, x_0 — точки, в которых $v(t,x_0)=0$, определим временно́й отрезок $[0,t_1]$ существования и единственности классического решения. Затем установим связь между решениями уравнений (1) и (3), полагая, что на временно́м отрезке $[0,t_1]$ классическое решение $u=u(t,x)$ по переменной x принадлежит пересечению подмножества $C^{(6)}[\mathbb{R}]\subset C[\mathbb{R}]$ с пространством Соболева $W_2^6(\mathbb{R})$, причём временны́е частные производные $u_t=u_t(t,x)\in C^{(4)}[\mathbb{R}]\cap W_2^4(\mathbb{R})$ и $u_{tt}=u_{tt}(t,x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}]\cap W_2^2(\mathbb{R})$. Наконец, получим достаточные условия существования единственного глобального (при $t\geqslant 0$) решения задачи Коши (1), (2) и его экспоненциального убывания.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

В этом пункте понадобятся некоторые сведения из теории полугрупп. Напомним, что в пространстве $C[\mathbb{R}]$ [6, гл. 8, § 1; 7, § 1.3] дифференциальные операторы ∂_x (с областью определения $\mathcal{D}(\partial_x)=C^{(1)}[\mathbb{R}]$) и ∂_x^2 ($\mathcal{D}(\partial_x^2)=C^{(2)}[\mathbb{R}]$) являются соответственно производящими операторами сильно непрерывных сжимающих группы

$$U(\tau;\partial_x)g(x)=g(x+\tau),\quad \tau\in\mathbb{R},$$

и полугруппы

$$U(t;\partial_x^2)g(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)\,d\xi,\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+.$$

Полуось $\lambda>0$ принадлежит резольвентным множествам операторов ∂_x и ∂_x^2, и для соответствующих резольвент справедливы оценки норм $\|(\lambda I-\partial_x)^{-1}\|\leqslant 1/\lambda$, $\|(\lambda I-\partial_x^2)^{-1}\|\leqslant 1/\lambda$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (1):

$$(I-\partial_x^2)u_{tt}+(q_1\partial_x^4-q_2\partial_x^2+q_3I)u_t-(q_4\partial_x^6-q_5\partial_x^4+q_6\partial_x^2-q_7I)u=0, \tag{5}$$

и пусть $u=u(t,x)$ — решение задачи Коши (5), (2), для которого частные производные u_{xx} и u_{txx} непрерывны при $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$.

Введём в уравнении (5) новую неизвестную функцию

$$v(t,x)=u(t,x)-u_{xx}(t,x). \tag{6}$$

Если начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат пространству $C^{(2)}[\mathbb{R}]$, то из замены (6) можно единственным образом определить начальные значения новой неизвестной функции:

$$v|_{t=0} = v_0(x) = \varphi(x) - \varphi''(x), \quad v_t|_{t=0} = v_1(x) = \psi(x) - \psi''(x),$$

и выразить решение $u(t,x)$ уравнения (5) через эту функцию:

$$u(t,x) = (I - \partial_x^2)^{-1} v(t,x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s} U(s;\partial_x^2) v(t,x)\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|} v(t, x+\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

В результате замены (6) получим эквивалентное (5) интегро-дифференциальное уравнение

$$v_{tt} + Av_t - Bv = 0, \tag{8}$$

в котором $A = -q_1\partial_x^2 + c_1(I-\partial_x^2)^{-1} - c_2 I,\ \mathcal{D}(A) = C^{(2)}[\mathbb{R}],\ c_1 = q_1 - q_2 + q_3,\ c_2 = q_1 - q_2,\ B = -q_4\partial_x^4 - c_3\partial_x^2 - c_4(I-\partial_x^2)^{-1} + c_4 I,\ \mathcal{D}(B) = C^{(4)}[\mathbb{R}],\ c_3 = q_4 - q_5,\ c_4 = q_6 - q_7 + c_3$.

Оператор $-A$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы

$$\begin{aligned} U(t;-A)g(x) &= e^{c_2 t} U(t; q_1\partial_x^2) U(-c_1 t; (I-\partial_x^2)^{-1}) g(x) = \\ &= e^{c_2 t} U(-c_1 t; (I-\partial_x^2)^{-1}) U(t; q_1\partial_x^2) g(x), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \end{aligned} \tag{9}$$

где $U(t; q_1\partial_x^2) = U(q_1 t; \partial_x^2)$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, — сжимающая полугруппа, для которой справедливо представление

$$U(q_1 t; \partial_x^2) g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi q_1 t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\eta)^2/(4q_1 t)} g(\eta)\,d\eta,$$

а $U(-c_1\tau; (I-\partial_x^2)^{-1})$, $\tau \in \mathbb{R}$, — группа, определяемая разложением в степенной ряд:

$$U(-c_1\tau; (I-\partial_x^2)^{-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-c_1)^n \tau^n}{n!} (I-\partial_x^2)^{-n},$$

равномерно сходящийся по τ на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}$.

Для полугруппы $U(t;-A)$ справедлива оценка нормы

$$\|U(t;-A)\| \leqslant e^{(c_2 + |c_1|)t}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Используя формулу [6, гл. 8, § 1, лемма 12], выражающую степени резольвенты $(\lambda I - \mathbb{A})^{-1}$ производящего оператора $\mathbb{A}$ сильно непрерывной полугруппы $U(t;\mathbb{A})$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$:

$$(\lambda I - \mathbb{A})^{-k} g(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_0^{+\infty} s^{k-1} e^{-\lambda s} U(s;\mathbb{A}) g(x)\,ds,$$

найдём представление для группы $U(-c_1\tau; (I-\partial_x^2)^{-1})$ при $\tau = t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$:

$$U(-c_1 t; (I-\partial_x^2)^{-1}) g(x) = g(x) + \sqrt{\frac{|c_1|t}{4\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{M}(2\sqrt{|c_1|t}, \xi^2) g(x+\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

где

$$\mathrm{M}(2\sqrt{|c_1|t},\xi^2)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-r-\xi^2/(4r)}\mathrm{N}(2\sqrt{|c_1|tr})\frac{dr}{r},\quad \mathrm{N}(2\sqrt{|c_1|ts})=\begin{cases}-J_1(2\sqrt{c_1tr}), & c_1>0,\\ I_1(2\sqrt{|c_1|tr}), & c_1<0,\end{cases}$$

J_1 и I_1 — функции Бесселя.

Аналогично выводим ($t\in\overline{\mathbb{R}}_+$)

$$U(c_1t;(I-\partial_x^2)^{-1})g(x)=g(x)+\sqrt{\frac{|c_1|t}{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{M}^*(2\sqrt{|c_1|t},\xi^2)g(x+\xi)\,d\xi,$$

$$\mathrm{M}^*(2\sqrt{|c_1|t},\xi^2)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-s-\xi^2/(4s)}\mathrm{N}^*(2\sqrt{|c_1|ts})\frac{ds}{s},\quad \mathrm{N}^*(2\sqrt{|c_1|ts})=\begin{cases}I_1(2\sqrt{c_1ts}), & c_1>0,\\ -J_1(2\sqrt{|c_1|ts}), & c_1<0.\end{cases}$$

Введём в уравнении (8) новую неизвестную функцию $w=w(t,x)$ по формуле

$$v(t,x)=U(t/2;-A)w(t,x),\quad (t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R},\tag{11}$$

полагая, что значения этой функции принадлежат области определения оператора A: $w(t,x)\in\mathcal{D}(A)$. Тогда при выполнении условия $\varphi(x)\in C^{(6)}[\mathbb{R}]$, $\psi(x)\in C^{(4)}[\mathbb{R}]$ можно единственным образом определить начальные значения функции $w(t,x)$:

$$w|_{t=0}=w_0(x)=v_0(x)\in\mathcal{D}(A),\quad w_t|_{t=0}=w_1(x)=Av_0(x)/2+v_1(x)\in\mathcal{D}(A).$$

Подставив в уравнение (8) значения производных v_t и v_{tt}, получим

$$e^{-c_2t}U(-c_1t;(I-\partial_x^2)^{-1})U(q_1t;\partial_x^2)\left[w_{tt}-\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)w\right]=0$$

или (учитывая, что $U(-c_1t;(I-\partial_x^2)^{-1})$ — группа)

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi q_1t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\eta)^2/(4q_1t)}\left[w_{tt}(t,\eta)-\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)w(t,\eta)\right]d\eta=0.\tag{12}$$

Уравнение (12) можно представить в виде

$$e^{-x^2/(4q_1t)}*\left[w_{tt}(t,x)-\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)w(t,x)\right]=0,$$

где символ $*$ обозначает свёртку двух непрерывных функций по переменной x. Но тогда, согласно теореме Титчмарша [8, гл. 6, § 5], функция $w=w(t,x)$ является решением уравнения

$$w_{tt}=\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)w,\tag{13}$$

где

$$A^2=q_1^2\partial_x^4+2q_1c_2\partial_x^2+(c_2^2+2q_1c_1)I-2c_1(q_1+c_2)(I-\partial_x^2)^{-1}+c_1^2(I-\partial_x^2)^{-2},$$

и значит,

$$\frac{1}{4}A^2+B=\left(\frac{q_1^2}{4}-q_4\right)\partial_x^4+c_5\partial_x^2+c_6I-c_7(I-\partial_x^2)^{-1}+c_8(I-\partial_x^2)^{-2},$$

где $c_5=q_1c_2/2-c_3$, $c_6=(c_2^2+2q_1c_1)/4+c_4$, $c_7=c_1(q_1+c_2)/2+c_4$, $c_8=c_1^2/4$.

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$q_1 = 2\sqrt{q_4}, \quad (q_1 - q_2)^2 > q_2^2 - 4q_5. \tag{14}$$

(Если $d = q_2^2 - 4q_5 \leqslant 0$, то неравенство $c_5 > 0$ выполняется для всех $q_1 \neq q_2$. Если $d > 0$, то неравенство $c_5 > 0$ выполняется при $q_1 < q_2 - \sqrt{d}$ и при $q_1 > q_2 + \sqrt{d}$.) Тогда уравнение (13) в пространстве $C[\mathbb{R}]$ можно записать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = KW, \tag{15}$$

в котором операторный коэффициент

$$K = K_1 + K_2, \quad \mathcal{D}(K) = C^{(2)}[\mathbb{R}],$$

где

$$K_1 = (\sqrt{c_5}\partial_x)^2, \quad \mathcal{D}(K_1) = C^{(2)}[\mathbb{R}], \quad K_2 = c_6 I - c_7(I - \partial_x^2)^{-1} + c_8(I - \partial_x^2)^{-2}, \quad \mathcal{D}(K_2) = C[\mathbb{R}],$$

а $W = W(t)\colon t \to w(t,x)$ — искомая вектор-функция со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}]$, определённая для $t \in \mathbb{R}_+$.

Начальные условия для уравнения (15) в $C[\mathbb{R}]$ запишутся в виде

$$W|_{t=0} = W_0, \quad W_t|_{t=0} = W_1, \tag{16}$$

где $W_0 = w_0(x)$, $W_1 = w_1(x)$ — элементы пространства $C[\mathbb{R}]$.

Оператор K_1 является [7, § 1.5] производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; K_1)$, $\tau \in \mathbb{R}$, для которой справедливо представление

$$C(\tau; K_1)g(x) = \frac{1}{2}\big[U(\tau; \sqrt{c_5}\partial_x) + U(-\tau; \sqrt{c_5}\partial_x)\big]g(x) = \frac{1}{2}\big[g(x + \sqrt{c_5}\tau) + g(x - \sqrt{c_5}\tau)\big]$$

и оценка нормы $\|C(t; K_1)\| \leqslant 1$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Ограниченный оператор K_2 порождает [7, § 4.2] косинус оператор-функцию $C(\tau; K_2)$, $\tau \in \mathbb{R}$, для которой справедливы разложение в сходящийся равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ на каждом конечном отрезке степенной ряд

$$C(\tau; K_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} K_2^n$$

и оценка нормы $\|C(t; K_2)\| \leqslant \operatorname{ch}(c_9 t)$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, где $c_9 = (|c_6| + |c_7| + |c_8|)^{1/2}$.

Оператор K, полученный возмущением ограниченным оператором K_2 производящего оператора K_1, порождает [7, § 8.2] косинус оператор-функцию, для которой на элементах $g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}]$ и для всех $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы представление

$$C(\tau; K)g(x) = C(\tau; K_1)g(x) + \frac{\tau^2}{2}\int\limits_0^1 j_1(\tau\sqrt{1 - s^2}, K_1)C(\tau s; K_2)g(x)\,ds, \tag{17}$$

где

$$j_1(\tau, K_1)g(x) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2}\,C(\tau r; K_1)g(x)\,dr, \quad \|j_1(\tau, K_1)\| \leqslant 1,$$

и оценка

$$\|C(t; K)\| \leqslant 1 + \frac{t}{2c_9}\operatorname{sh}(c_9 t) = h_1(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{18}$$

С косинус оператор-функцией (17) ассоциирована [7, § 1.4] синус оператор-функция

$$S(\tau;K)g(x)=\int\limits_0^\tau C(\xi;K)g(x)\,d\xi,\quad g(x)\in C[\mathbb{R}],\tag{19}$$

и линейное многообразие $C_1[\mathbb{R}]=\{g(x)\in C[\mathbb{R}]\colon C(\tau;K)g(x)\in C^{(1)}(\mathbb{R};C[\mathbb{R}])\}$, т.е. подмножество $C_1[\mathbb{R}]\subset C[\mathbb{R}]$ состоит из тех функций из $C[\mathbb{R}]$, для которых функция $C(\tau;K)g(x)\colon\mathbb{R}\to C[\mathbb{R}]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной τ. Очевидно, что $\mathcal{D}(K)=$ $=C^{(2)}[\mathbb{R}]\subset C_1[\mathbb{R}]$.

Из соотношений (18) и (19) для $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ выводим оценку нормы синус оператор-функции:

$$\|S(t;K)\|\leqslant t+\frac{t}{2c_9^2}\operatorname{ch}(c_9t)=h_2(t).\tag{20}$$

Задача Коши (15), (16) равномерно корректна [7, § 1.4] только тогда, когда оператор K является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции, при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (15), (16) даётся формулой

$$W(t)=C(t;K)W_0+S(t;K)W_1,\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

для любых $W_0\in\mathcal{D}(K)$ и $W_1\in C_1[\mathbb{R}]$.

Теперь, производя обратные замены (7) и (11) и используя перестановочность резольвенты $(I-\partial_x^2)^{-1}$ с полугруппой $U(t/2;-A)$ и косинус оператор-функцией $C(t;K)$:

$$u(t,x)=(I-\partial_x^2)^{-1}v(t,x)=(I-\partial_x^2)^{-1}U(t/2;-A)w(t,x),\tag{21}$$

находим решение задачи Коши для уравнения (5):

$$u(t,x)=U\left(\frac{t}{2};-A\right)\left[C(t;K)\varphi(x)+S(t;K)\left(\psi(x)+\frac{1}{2}A\varphi(x)\right)\right].\tag{22}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (14) и начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат подмножеству $C^{(6)}[\mathbb{R}]$ пространства $C[\mathbb{R}]$, тогда задача Коши для линейного однородного уравнения (5) равномерно корректна, классическое решение определяется формулой (22) и для него справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leqslant e^{(c_2+|c_1|)t/2}\biggl\{h_1(t)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|+$$
$$+h_2(t)\left[\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi(x)|+\frac{1}{2}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi''(x)|+(|c_1|+|c_2|)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\right)\right]\biggr\},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+.$$

Замечание 1. Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (15), (16) принадлежит $C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}_+,C[\mathbb{R}])$ и для него $KW(t)\in C(\overline{\mathbb{R}}_+,C[\mathbb{R}])$, при этом значения $w(t,x)\in$ $\in\mathcal{D}(A^2)\cap\mathcal{D}(B)$ при $(t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}$, следовательно, $w(t,x)\in C^{2,4}(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R})$. В силу формулы (21) найденное решение $u(t,x)\in C^{2,6}(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R})$.

3. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ (3), (4)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3), получающегося из (1) дифференцированием обеих частей по переменной x и последующей подстановкой $u_x=v$ (отметим, что при этом соответствующие линейные однородные уравнения для уравнений (1) и (3) совпадают).

Применив к обеим частям уравнения (3) линейный ограниченный оператор $(I-\partial_x^2)^{-1}$, получим эквивалентное (3) уравнение

$$v_{tt}+Av_t-Bv=\lambda[(I-\partial_x^2)^{-1}-I]f(v), \tag{23}$$

в котором операторы A и B такие же, как и в уравнении (8), а $f(g)\colon g(x)\to(g(x))^{1-p}$, $g(x)\in C[\mathbb{R}]$, — оператор суперпозиции.

После замены в (23) по формуле

$$v(t,x)=U\left(\frac{t}{2};-A\right)\mathrm{v}(t,x)$$

придём к уравнению

$$U\left(\frac{t}{2};-A\right)\left[\mathrm{v}_{tt}-\left(\frac{1}{4}A^2+B\right)\mathrm{v}\right]=f_1(t,x), \tag{24}$$

где $f_1(t,x)=\lambda[(I-\partial_x^2)^{-1}-I]f(U(t/2;-A)\mathrm{v}(t,x))$.

Используя в левой части (24) представление (9) полугруппы, порождаемой оператором $-A$, и обратимость группы, порождаемой оператором $(I-\partial_x^2)^{-1}$:

$$U^{-1}(-c_1t/2;(I-\partial_x^2)^{-1})=U(c_1t/2;(I-\partial_x^2)^{-1}),$$

выводим

$$U\left(\frac{q_1t}{2};\partial_x^2\right)[\mathrm{v}_{tt}-K\mathrm{v}]=f_2(t,x),\quad (t,x)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}, \tag{25}$$

где $f_2(t,x)=e^{-c_2t/2}U(c_1t/2;(I-\partial_x^2)^{-1})f_1(t,x)$, а оператор $K=A^2/4+B$ такой же, как и в уравнении (15).

Пусть в уравнении (25) временна́я переменная t удовлетворяет неравенству $1-q_1t/2>0$, тогда, действуя на обе части (25) полугруппой $U(1-q_1t/2;\partial_x^2)$ и используя полугрупповое свойство

$$U(1-q_1t/2;\partial_x^2)U(q_1t/2;\partial_x^2)=U(1;\partial_x^2),\quad t\in[0,2/q_1),$$

придём к уравнению

$$U(1;\partial_x^2)[\mathrm{v}_{tt}-K\mathrm{v}]=f_3(t,x),\quad (t,x)\in[0,2/q_1)\times\mathbb{R}, \tag{26}$$

где $f_3(t,x)=U(1-q_1t/2;\partial_x^2)f_2(t,x)\in C[\mathbb{R}]$.

В подробной записи левая часть (26) представляет собой преобразование Вейерштрасса [9, гл. 8, § 2]

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\eta)^2/4}\big[\mathrm{v}_{tt}(t,\eta)-K\mathrm{v}(t,\eta)\big]\,d\eta=f_3(t,x), \tag{27}$$

причём так как искомое решение $\mathrm{v}=\mathrm{v}(t,x)$ классическое, то выражение в квадратных скобках — ограниченная и непрерывная функция при $\eta\in\mathbb{R}$, и поэтому [9, гл. 8, § 4] из соотношения (27) следует уравнение

$$\mathrm{v}_{tt}(t,x)-K\mathrm{v}(t,x)=e^{-D^2}f_3(t,x),\quad (t,x)\in[0,2/q_1)\times\mathbb{R}, \tag{28}$$

для функций $f_3(t,x)$, к которым применим [9, гл. 8, § 3] символический оператор

$$e^{-D^2}g(x)=\lim_{\tau\to1-0}e^{-\tau D^2}g(x)=\lim_{\tau\to1-0}\frac{1}{2i\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}e^{(s-x)^2/(4\tau)}g(s)\,ds.$$

Напомним [9], что функция $g(x)$ принадлежит в интервале $-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty$ классу $\mathcal{A}$ функций, к которым применим оператор e^{-D^2}, тогда и только тогда, когда она может быть так аналитически продолжена в комплексную плоскость, что функция $g(x+iy)$ аналитична в полосе $a<x<b$ и $g(x+iy)=o(|y|e^{y^2/4})$, $|y|\to\infty$, равномерно в каждом замкнутом подинтервале интервала (a,b). Например, $e^{-x^2/4}\in\mathcal{A}$ при $x\in\mathbb{R}$. Если $g(x)\in\mathcal{A}$ при $x\in\mathbb{R}$, то

$$e^{-tD^2}g(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2/(4t)}g(x+iy)\,dy,$$

причём интеграл сходится абсолютно при $0<t<1$, $x\in\mathbb{R}$, и представляет собой вещественную функцию, если таковой является функция $g(x)$.

Потребуем, чтобы искомое классическое решение $\mathrm{v}=\mathrm{v}(t,x)$ уравнения (28) принадлежало классу $\mathcal{A}$ и выполнялось неравенство

$$|\mathrm{v}(t,x+iy)|\leqslant|\mathrm{v}(t,x)|\alpha(|y|)|y|e^{y^2/4}, \tag{29}$$

где $\alpha(|y|)$ — непрерывная функция, бесконечно малая при $|y|\to+\infty$, тогда, использовав (29), получим оценку

$$\|f_3(t,x+iy)\|_C\leqslant|\lambda|e^{-c_2t/2}e^{|c_1|t/2}2\|\mathrm{v}(t,x+iy)\|_C^{1-p}\leqslant$$
$$\leqslant 2|\lambda|e^{(|c_1|-c_2)t/2}\|\mathrm{v}(t,x)\|_C^{1-p}\alpha^{1-p}(|y|)|y|e^{y^2/4},\quad |y|\geqslant 1,$$

а значит, к правой части $f_3(t,x)$ уравнения (27) применим символический оператор e^{-D^2}.

Уравнение (28) в пространстве $C[\mathbb{R}]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$\mathbb{V}_{tt}=K\mathbb{V}+F(t,U(t/2;-A)\mathbb{V}),\quad (t,x)\in[0,2/q_1)\times\mathbb{R}, \tag{30}$$

где $\mathbb{V}=\mathbb{V}(t)\colon t\to\mathrm{v}(t,x)$ — искомая вектор-функция, а

$$F(t,g)=\lambda e^{-c_2t/2}U(1-q_1t/2;\partial_x^2)U(c_1t/2;(I-\partial_x^2)^{-1})[(I-\partial_x^2)^{-1}-I]e^{-D^2}f(g) \tag{31}$$

— заданный нелинейный оператор; здесь $g(x)$ — функции из пространства $C[\mathbb{R}]$, степень $g^{1-p}(x)$ которых принадлежит классу $\mathcal{A}$ при $x\in\mathbb{R}$. (В формуле (31) поменяли порядок интегрирования, так как все интегралы, формирующие представление (31) оператора $F(t,g)$, абсолютно и равномерно сходятся.)

Для нелинейного оператора (31) справедлива оценка нормы

$$\|F(t,g)\|_C\leqslant 2|\lambda|e^{(|c_1|-c_2)t/2}\lim_{\tau\to1-0}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2/(4\tau)}\|f(g(x+iy))\|_C\,dy=$$
$$=c_{10}|\lambda|e^{(|c_1|-c_2)t/2}\|g(x)\|_C^{1-p}, \tag{32}$$

где

$$c_{10}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2p/4}\alpha^{1-p}(|y|)|y|^{1-p}\,dy.$$

Начальные условия для уравнения (30) в $C[\mathbb{R}]$ запишутся в виде

$$\mathbb{V}|_{t=0}=\mathbb{V}_0,\quad \mathbb{V}_t|_{t=0}=\mathbb{V}_1, \tag{33}$$

где

$$\mathbb{V}|_{t=0} = \mathbb{V}_0 = \mathrm{v}|_{t=0} = v|_{t=0} = \varphi'(x),$$

$$\mathbb{V}_t|_{t=0} = \mathbb{V}_1 = \psi'(x) - \frac{q_1}{2}\varphi'''(x) + \frac{c_1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|}\varphi'(x+\xi)\,d\xi - \frac{c_2}{2}\varphi'(x)$$

— элементы пространства $C[\mathbb{R}]$.

Из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $f(g)$ в пространстве непрерывных функций следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(t,g)$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$, и поэтому существует промежуток $[0,t_0) \subset [0, 2/q_1)$, в котором абстрактная задача Коши (30), (33) для любых $\mathbb{V}_0 \in D(K)$ и $\mathbb{V}_1 \in C_1[\mathbb{R}]$ имеет [10, § 3] единственное классическое решение $\mathbb{V} = \mathbb{V}(t)$, удовлетворяющее абстрактному интегральному уравнению

$$\mathbb{V}(t) = C(t;K)\mathbb{V}_0 + S(t;K)\mathbb{V}_1 + \int\limits_0^t S(t-\tau;K)F(\tau, U(\tau/2;-A)\mathbb{V}(\tau))\,d\tau. \tag{34}$$

Из уравнения (34), используя оценки (18), (20) и (32), выводим интегральное неравенство

$$\|\mathbb{V}(t)\|_C \leqslant h_3(t) + c_{10}|\lambda| \int\limits_0^t h_2(\tau) e^{(|c_1|-c_2)\tau/2} \|U(\tau/2;-A)\mathbb{V}(\tau)\|_C^{1-p}\,d\tau,$$

где

$$h_3(t) = h_1(t)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)| + h_2(t)\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\psi'(x) - \frac{q_1}{2}\varphi'''(x) + \frac{c_1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|}\varphi'(x+\xi)\,d\xi - \frac{c_2}{2}\varphi'(x)\right|,$$

или, увеличивая правую часть,

$$\|\mathbb{V}(t)\|_C \leqslant c_{11} + \int\limits_0^t h_4(\tau)\|\mathbb{V}(\tau)\|_C^{1-p}\,d\tau, \quad t \in [0, t_0), \tag{35}$$

здесь $c_{11} = \max_{t\in[0,2/q_1]} h_3(t)$ и $h_4(t) = c_{10}|\lambda| e^{[|c_1|-(|c_1|+c_2)p/2]t} h_2(t)$.

Из неравенства (35) находим [11, гл. 1, § 1, с. 8] оценку нормы решения $\mathbb{V}(t)$ на отрезке $[0,t_1] \subset [0,t_0)$:

$$\|\mathbb{V}(t)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\mathrm{v}(t,x)| \leqslant \left(c_{11}^p + p\int\limits_0^t h_4(\tau)\,d\tau\right)^{1/p}, \quad t_1 = \sup\left\{t\in[0,t_0):\, c_{11}^p + p\int\limits_0^t h_4(\tau)\,d\tau > 0\right\}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (14), (29) и начальные функции* $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(7)}[\mathbb{R}]$, *тогда на отрезке* $[0,t_1] \subset [0,2/q_1)$ *существует единственное классическое решение задачи Коши (3), (4):* $v(t,x) = U(t/2;-A)\mathrm{v}(t,x)$, *для которого справедлива оценка*

$$\|v(t,x)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}}|u_x(t,x)| \leqslant e^{(c_2+|c_1|)t}\left(c_{11}^p + p\int\limits_0^t h_4(\tau)\,d\tau\right)^{1/p} = h_5(t).$$

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ (1) И (3)

Далее будем предполагать, что классическое решение уравнения (1) принадлежит пересечению пространства $C[\mathbb{R}]$ с пространством $L_2(\mathbb{R})$.

Напомним, что скалярное произведение и норма в $L_2(\mathbb{R})$ определяются соответственно формулами $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)\,dx$ и $\|\varphi\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,dx)^{1/2}$ и что для функций $g(x)$, принадлежащих пересечению пространства непрерывных ограниченных функций $C(\mathbb{R})$ с пространством Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$, справедлива оценка

$$\|g\|_C \leqslant \|g\|_{W_2^1} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [(g(x))^2 + (g'(x))^2]\,dx\right)^{1/2}, \tag{36}$$

причём если $g(x)\in C^{(2)}(\mathbb{R})$, то [12] предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x\to\pm\infty$ равен нулю.

Лемма. *Из существования локального классического решения* $v=v(t,x)$, $t\in[0,t_1]$, *уравнения (3) следует существование соответствующего решения*

$$u=u(t,x)=\lim_{x_0\to-\infty}\int\limits_{x_0}^{x} v(t,s)\,ds=\int\limits_{-\infty}^{x} v(t,s)ds \tag{37}$$

уравнения (1) на том же временно́м отрезке $[0,t_1]$ *при выполнении условий*

$$u_{xx}(t,x)=O(u_x(t,x)),\quad u_{xxx}(t,x)=O(u_x(t,x))\quad \textit{при}\quad x\to\pm\infty \tag{38}$$

и

$$u(t,x)\in C^{(6)}[\mathbb{R}]\cap W_2^6(\mathbb{R}),\quad u_t(t,x)\in C^{(4)}[\mathbb{R}]\cap W_2^4(\mathbb{R}),\quad u_{tt}(t,x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}]\cap W_2^2(\mathbb{R}). \tag{39}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий (39) при $t\in[0,t_1]$ следуют предельные равенства

$$\lim_{x\to\pm\infty}\partial_x^n u(t,x)=0,\quad n=\overline{0,6};\quad \lim_{x\to\pm\infty}\partial_t\partial_x^m u(t,x)=0,\quad m=\overline{0,4};$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\partial_t^2\partial_x^q u(t,x)=0,\quad q=\overline{0,2}. \tag{40}$$

Пусть $v=v(t,x)$ — классическое решение уравнения (3) на временно́м отрезке $[0,t_1]$, тогда, используя соотношения (38) и (40), выводим равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\partial_t^i\partial_s^j v(t,s)\,ds=\int\limits_{-\infty}^{x}(\partial_t^i\partial_s^j u(t,s))_s\,ds=\partial_t^i\partial_x^j u(t,x)-\lim_{s\to-\infty}\partial_t^i\partial_s^j u(t,s)=\partial_t^i\partial_x^j u(t,x),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\partial_s^2(v^{1-p}(t,s))\,ds=\partial_s(v^{1-p}(t,s))|_{-\infty}^{x}=\partial_x(v^{1-p}(t,x))-(1-p)\lim_{x_0\to-\infty}\frac{v_x(t,x_0)}{v^p(t,x_0)}=$$

$$=\partial_x u_x^{1-p}(t,x)-(1-p)\lim_{x_0\to-\infty}u_x^{1-p}(t,x_0)\frac{u_{xx}(t,x_0)}{u_x(t,x_0)}=\partial_x u_x^{1-p}(t,x).$$

Теперь, применяя полученные представления и подставляя функцию (37) в уравнение (1), получаем тождественное равенство на отрезке $[0,t_1]$.

Замечание 2. Из требований (39) к решению $u=u(t,x)$ задачи Коши (1), (2) следуют необходимые условия, которым должны удовлетворять начальные функции:

$$\varphi(x)\in C^{(6)}[\mathbb{R}]\cap W_2^6(\mathbb{R}),\quad \psi(x)\in C^{(4)}[\mathbb{R}]\cap W_2^4(\mathbb{R}).$$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

На временном отрезке $t\in[0,t_1]$ существования единственного решения $u=u(t,x)$ задачи Коши (1), (2) введём в рассмотрение функционал — так называемый интеграл энергии уравнения (1):

$$y(t)=(u,u)+(u_x,u_x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u^2+u_x^2)\,dx=\|u\|^2_{W_2^1},\quad t\in[0,t_1]. \tag{41}$$

Применяя к значению производной функционала (41)

$$y'(t)=2((u,u_t)+(u_x,u_{tx}))$$

неравенство Коши–Буняковского $|(\varphi,\psi)|\leqslant\|\varphi\|_2\|\psi\|_2$ и обозначая через

$$z(t)=(u_t,u_t)+(u_{tx},u_{tx})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u_t^2+u_{tx}^2)\,dx=\|u_t\|^2_{W_2^1},\quad t\in[0,t_1],$$

ещё один интеграл энергии, связанный с уравнением (1), выводим вспомогательную оценку

$$y'(t)\leqslant y(t)+z(t). \tag{42}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы 2 и функция* $\varphi'(x)\in C[\mathbb{R}]$ *принадлежит пространству* $L_{2-p}(\mathbb{R})$*:* $\|\varphi'\|_{2-p}^{2-p}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi'(x))^{2-p}\,dx<\infty$*. Тогда при* $\lambda>0$ *существует единственное глобальное классическое решение задачи Коши (1), (2), для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leqslant\sqrt{E_0}e^{t/2},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,\quad E_0=\text{const}.$$

Доказательство. Введём в рассмотрение функционал энергии для уравнения (1):

$$E(t)=\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_7\|u\|_2^2+$$
$$+\frac{2\lambda}{2-p}\|u_x\|_{2-p}^{2-p}+2q_1\int\limits_0^t\|u_{\tau xx}\|_2^2\,d\tau+2q_2\int\limits_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+2q_3\int\limits_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau. \tag{43}$$

Умножим уравнение (1) на $u_t(t,x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда, интегрируя по частям, будем иметь

$$(u_{tt},u_t)+(u_{ttx},u_{tx})+q_1(u_{txx},u_{txx})+q_2(u_{tx},u_{tx})+q_3(u_t,u_t)+q_4(u_{xxx},u_{txxx})+$$
$$+q_5(u_{xx},u_{txx})+q_6(u_x,u_{tx})+q_7(u,u_t)+\lambda(u_x^{1-p},u_{tx})=0$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_7\|u\|_2^2+\frac{2\lambda}{2-p}\|u_x\|_{2-p}^{2-p}\right)+$$
$$+q_1\|u_{txx}\|_2^2+q_2\|u_{tx}\|_2^2+q_3\|u_t\|_2^2=0. \tag{44}$$

Из равенства (44) следует, что производная функционала энергии $E'(t)=0$, т.е. функционал энергии (43) не зависит от времени и, следовательно, имеет место закон сохранения

$$E(t)=E(0)\equiv E_0, \tag{45}$$

в котором

$$E_0=\|\psi\|_2^2+\|\psi'\|_2^2+q_4\|\varphi'''\|_2^2+q_5\|\varphi''\|_2^2+q_6\|\varphi'\|_2^2+q_7\|\varphi\|_2^2+\frac{2\lambda}{2-p}\|\varphi'\|_{2-p}^{2-p}$$

— начальная энергия.

Потребуем, чтобы для функции $\varphi'(x)\in L_{2-p}(\mathbb{R})$ и параметра $\lambda\in\mathbb{R}$ выполнялось условие положительности начальной энергии $E_0>0$, т.е.

$$\|\psi\|^2_{W_2^1}+q_4\|\varphi'''\|_2^2+q_5\|\varphi''\|_2^2+q_6\|\varphi'\|_2^2+q_7\|\varphi\|_2^2>-\frac{2\lambda}{2-p}\|\varphi'\|_{2-p}^{2-p}. \tag{46}$$

Отметим, что условие (46) существенно только для отрицательных значений параметра λ и при $\lambda>0$ выполняется всегда.

Полагая, что параметр $\lambda>0$, из закона сохранения (45), уменьшая его левую часть, выводим оценку второго интеграла энергии

$$z(t)=\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2\leqslant E_0. \tag{47}$$

Совместно рассматривая неравенства (42) и (47), получаем интегральное неравенство

$$y(t)\leqslant E_0t+\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,t_1]. \tag{48}$$

Применив к (48) лемму Гронуолла [13, гл. 1, § 1], выводим оценку интеграла энергии

$$y(t)\leqslant E_0e^t, \tag{49}$$

справедливую на всей положительной полуоси $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, значит, классическое решение $u=u(t,x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ при $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$.

Теперь, используя неравенства (36) и (49), получаем оценку решения $u=u(t,x)$ задачи Коши (1), (2) в пространстве $C[\mathbb{R}]$:

$$\|u\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\ \leqslant\|u\|_{W_2^1}\leqslant\sqrt{E_0}e^{t/2},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

обеспечивающую существование глобального решения.

6. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ УБЫВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Введём в рассмотрение еще один функционал энергии для уравнения (1)

$$E_1(t)=\|u_t\|_{W_2^1}^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_7\|u\|_2^2+\frac{2\lambda}{2-p}\|u_x\|_{2-p}^{2-p} \tag{50}$$

и перепишем соотношение (44) в виде дифференциального равенства:

$$\frac{d}{d\tau}E_1(\tau)=-2(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2+q_2\|u_{\tau x}\|_2^2+q_3\|u_\tau\|_2^2),\quad \tau\in\overline{\mathbb{R}}_+. \tag{51}$$

Из (51) следует, что функционал $E_1(t)$ монотонно убывает на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$, причём, интегрируя обе части (51) по отрезку $[0,t]$, имеем

$$E_1(t)=E_0-2\int\limits_0^t(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2+q_2\|u_{\tau x}\|_2^2+q_3\|u_\tau\|_2^2)\,d\tau.$$

Следовательно, $E_1(t)\leqslant E_0$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, т.е. функционал $E_1(t)$ ограничен сверху на всей полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$ начальной энергией E_0 функционала энергии $E(t)$.

Выясним достаточные условия экспоненциального убывания нормы глобального классического решения $\|u\|_C$ при $t\to+\infty$.

Умножим обе части равенства (51) на экспоненту $e^{\varepsilon\tau}$, где ε — пока не определённый положительный числовой параметр:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\varepsilon\tau}E_1(\tau))+2e^{\varepsilon\tau}(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2+q_2\|u_{\tau x}\|_2^2+q_3\|u_\tau\|_2^2)=\varepsilon e^{\varepsilon\tau}E_1(\tau). \tag{52}$$

Проинтегрировав обе части (52) по отрезку $[0,t]$, получим

$$e^{\varepsilon t}E_1(t)+2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\bigl(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2+q_2\|u_{\tau x}\|_2^2+q_3\|u_\tau\|_2^2\bigr)\,d\tau=E_0+\varepsilon\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}E_1(\tau)\,d\tau. \tag{53}$$

Интегрируя по частям и используя предельные соотношения (40), преобразуем степень нормы $\|u_x\|_{2-p}^{2-p}$ из определения (50):

$$\|u_x\|_{2-p}^{2-p}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_x^{1-p}\,du=\lim_{x\to+\infty}(uu_x^{1-p})-\lim_{x\to-\infty}(uu_x^{1-p})-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\,du_x^{1-p}=-(\partial_x(u_x^{1-p}),u). \tag{54}$$

С учётом представления (54) рассмотрим интеграл в правой части равенства (53):

$$\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}E_1(\tau)\,d\tau=-\frac{2\lambda}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(\partial_x(u_x^{1-p}),u)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(\|u_\tau\|_{W_2^1}^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_7\|u\|_2^2)\,d\tau. \tag{55}$$

Первое слагаемое $J(t)$ в правой части (55), используя уравнение (1), представим в виде

$$\frac{2-p}{2}J(t)=-\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(\lambda\partial_x(u_x^{1-p}),u)\,d\tau=-\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau},u)\,d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau xx},u)\,d\tau-$$

$$-q_1\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xxxx},u)\,d\tau+q_2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xx},u)\,d\tau-q_3\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_\tau,u)\,d\tau+$$

$$+q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxxxxx},u)\,d\tau-q_5\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxxx},u)\,d\tau+q_6\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xx},u)\,d\tau-q_7\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u,u)d\tau. \tag{56}$$

Используя очевидные равенства, неравенство Коши–Буняковского и интегрируя по частям, преобразуем интегралы в (56) следующим образом:

$$j_1(t)=-\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau},u)\,d\tau=-e^{\varepsilon t}(u_t,u)+(\psi,\varphi)+\varepsilon\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_\tau,u)d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_2^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{\varepsilon t}}{2}(\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2)+(\psi,\varphi)+\frac{\varepsilon e^{\varepsilon t}}{2}\|u\|_2^2-\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi\|_2^2-\frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_2^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{\varepsilon t}}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{(1+\varepsilon)e^{\varepsilon t}}{2}\|u\|_2^2+(\psi,\varphi)-\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi\|_2^2+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_2(t)=\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau xx},u)d\tau=-\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau\tau x},u_x)\,d\tau=$$

$$=-e^{\varepsilon t}(u_{tx},u_x)+(\psi'(x),\varphi'(x))+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\frac{d}{d\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\|u_{tx}\|_2^2+\frac{(1+\varepsilon)e^{\varepsilon t}}{2}\|u_x\|_2^2+(\psi',\varphi')-\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi'\|_2^2-\frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2 d\tau+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\|u_{tx}\|_2^2+\frac{(1+\varepsilon)e^{\varepsilon t}}{2}\|u_x\|_2^2+(\psi',\varphi')-\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi'\|_2^2+\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_3(t)=-q_1\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xxxx},u)d\tau=-q_1\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xx},u_{xx})d\tau=-\frac{q_1}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\frac{d}{d\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau=$$

$$=-\frac{q_1e^{\varepsilon t}}{2}\|u_{xx}\|_2^2+\frac{q_1}{2}\|\varphi''\|_2^2+\frac{q_1\varepsilon}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_4(t)=q_2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau xx},u)\,d\tau=-q_2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{\tau x},u_x)d\tau=-\frac{q_2}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\frac{d}{d\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau=$$

$$=-\frac{q_2e^{\varepsilon t}}{2}\|u_x\|_2^2+\frac{q_2}{2}\|\varphi'\|_2^2+\frac{q_2\varepsilon}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_5(t)=-q_3\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_\tau,u)d\tau=-\frac{q_3}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\frac{d}{d\tau}\|u\|_2^2\,d\tau=-\frac{q_3e^{\varepsilon t}}{2}\|u\|_2^2+\frac{q_3}{2}\|\varphi\|_2^2+\frac{q_3\varepsilon}{2}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_6(t)=q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxxxxx},u)d\tau=-q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxx},u_{xxx})d\tau=-q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xxx}\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_7(t)=-q_5\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xxxx},u)d\tau=-q_5\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xx},u_{xx})\,d\tau=-q_5\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_8(t)=q_6\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_{xx},u)\,d\tau=-q_6\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u_x,u_x)\,d\tau=-q_6\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau;$$

$$j_9(t)=-q_7\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}(u,u)\,d\tau=-q_7\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau.$$

Подставив полученные оценки и представления интегралов $j_i(t)$, $i=\overline{1,9}$, в правую часть (56), имеем

$$(2-p)J(t)\leqslant c_{12}+e^{\varepsilon t}(\|u_t\|^2_{W_2^1}+(1+\varepsilon-q_3)\|u\|_2^2+(1+\varepsilon-q_2)\|u_x\|_2^2-q_1\|u_{xx}\|_2^2)+$$

$$+2\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|^2_{W_2^1}\,d\tau+(\varepsilon q_3-2q_7)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau+$$

$$+(\varepsilon q_2-2q_6)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau+(\varepsilon q_1-2q_5)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau-2q_4\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xxx}\|_2^2\,d\tau, \qquad (57)$$

где $c_{12}=2[(\psi,\varphi)+(\psi',\varphi')]+(q_3-\varepsilon)\|\varphi\|_2^2+(q_2-\varepsilon)\|\varphi'\|_2^2+q_1\|\varphi''\|_2^2$.

Использовав неравенство (57), получим оценку интеграла (55):

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}E_1(\tau)\,d\tau\leqslant\frac{c_{12}}{2-p}+\frac{e^{\varepsilon t}}{2-p}(\|u_t\|^2_{W_2^1}+(1+\varepsilon-q_3)\|u\|_2^2+(1+\varepsilon-q_2)\|u_x\|_2^2-q_1e^{\varepsilon t}\|u_{xx}\|_2^2)+\\
+\frac{4-p}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|^2_{W_2^1}\,d\tau+\frac{\varepsilon q_3-pq_7}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau+\\
+\frac{\varepsilon q_2-pq_6}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau+\frac{\varepsilon q_1-pq_5}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau-\frac{pq_4}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xxx}\|_2^2\,d\tau.\end{gathered}\tag{58}$$

Применив оценку (58), увеличим правую часть равенства (53):

$$\begin{gathered}e^{\varepsilon t}E_1(t)+2\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\big(q_1\|u_{\tau xx}\|_2^2+q_2\|u_{\tau x}\|_2^2+q_3\|u_\tau\|_2^2\big)\,d\tau\leqslant\\
\leqslant E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}+\frac{\varepsilon e^{\varepsilon t}}{2-p}\big(\|u_t\|^2_{W_2^1}+(1+\varepsilon-q_3)\|u\|_2^2+(1+\varepsilon-q_2)\|u_x\|_2^2-q_1e^{\varepsilon t}\|u_{xx}\|_2^2\big)+\\
+\varepsilon\frac{4-p}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|^2_{W_2^1}\,d\tau+\varepsilon\frac{\varepsilon q_3-pq_7}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u\|_2^2\,d\tau+\\
+\varepsilon\frac{\varepsilon q_2-pq_6}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_x\|_2^2\,d\tau+\varepsilon\frac{\varepsilon q_1-pq_5}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau-\varepsilon\frac{pq_4}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{xxx}\|_2^2\,d\tau.\end{gathered}$$

Подставив в левую часть последнего неравенства значение функционала $E_1(t)$, после преобразований получим

$$\begin{gathered}e^{\varepsilon t}\bigg[\bigg(1-\frac{\varepsilon}{2-p}\bigg)\|u_t\|^2_{W_2^1}+\bigg(q_7-\frac{\varepsilon^2+(1-q_3)\varepsilon}{2-p}\bigg)\|u\|_2^2+\bigg(q_6-\frac{\varepsilon^2+(1-q_2)\varepsilon}{2-p}\bigg)\|u_x\|_2^2+\bigg(q_5+\frac{\varepsilon q_1}{2-p}\bigg)\|u_{xx}\|_2^2+\\
+q_4\|u_{xxx}\|_2^2\bigg]+\frac{2\lambda e^{\varepsilon t}}{2-p}\|u_x\|^{2-p}_{2-p}+2q_1\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\|u_{\tau xx}\|_2^2\,d\tau+\bigg(2q_2-\varepsilon\frac{4-p}{2-p}\bigg)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+\\
+\bigg(2q_3-\varepsilon\frac{4-p}{2-p}\bigg)\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\|u_\tau\|_2^2\,d\tau+\frac{\varepsilon p}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2+q_4\|u_{xxx}\|_2^2\big)\,d\tau\leqslant\\
\leqslant E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}+\frac{\varepsilon^2}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_3\|u\|_2^2+q_2\|u_x\|_2^2+q_1\|u_{xx}\|_2^2\big)\,d\tau.\end{gathered}$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $1-\varepsilon/(2-p)>0$, тогда $\varepsilon<2-p$;

2) $2q_k-\varepsilon(4-p)/(2-p)>0$, $k=2,3$, тогда $\varepsilon<2q_k(2-p)/(4-p)$;

3) $q_7-(\varepsilon^2+(1-q_3)\varepsilon)/(2-p)>q_7/2$ или $2\varepsilon^2+2(1-q_3)\varepsilon-(2-p)q_7<0$, тогда $\varepsilon_1<0<\varepsilon<\varepsilon_2=$ $=(q_3-1+\sqrt{(q_3-1)^2+2(2-p)q_7})/2$, где $\varepsilon_{1,2}$ — корни квадратного трехчлена;

4) $q_6-(\varepsilon^2+(1-q_2)\varepsilon)/(2-p)>q_6/2$ при $\widetilde{\varepsilon}_1<0<\varepsilon<\widetilde{\varepsilon}_2=(q_2-1+\sqrt{(q_2-1)^2+2(2-p)q_6})/2$.

Таким образом, если $\varepsilon < \min\{2-p; \varepsilon_2; \widetilde{\varepsilon}_2; q_2; 2q_2(2-p)/(4-p); q_3; 2q_3(2-p)/(4-p)\}$, то постоянная $c_{12} \geqslant 0$ и

$$e^{\varepsilon t}\big(q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2\big) \leqslant 2E_0+\frac{2\varepsilon c_{12}}{2-p}+\frac{2\varepsilon^2}{2-p}\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_3\|u\|_2^2+q_2\|u_x\|_2^2+q_1\|u_{xx}\|_2^2\big)\,d\tau. \quad (59)$$

Пусть $\delta = 2\max\{q_3/q_7; q_2/q_6; q_1/q_5\}/(2-p)$. Тогда, увеличив правую часть неравенства (59), придём к интегральному неравенству

$$e^{\varepsilon t}\big(q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2\big) \leqslant 2\left(E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}\right)+\varepsilon^2\delta\int\limits_0^t e^{\varepsilon\tau}\big(q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2\big)\,d\tau,$$

откуда, применив лемму Гронуолла, имеем

$$q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2+q_5\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant 2\left(E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}\right)e^{-\varepsilon(1-\varepsilon\delta)t}. \quad (60)$$

Полагая $0<\varepsilon<\min\{2-p; \varepsilon_2; \widetilde{\varepsilon}_2; q_2; 2q_2(2-p)/(4-p); q_3; 2q_3(2-p)/(4-p); 1/\delta\}$, получаем экспоненциальное убывание при $t\to+\infty$ правой части (60).

Уменьшив левую часть неравенства (60), получим

$$k_0(\|u\|_2^2+\|u_x\|_2^2) \leqslant q_7\|u\|_2^2+q_6\|u_x\|_2^2 \leqslant 2\left(E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}\right)e^{-\varepsilon(1-\varepsilon\delta)t}, \quad k_0=\min\{q_6; q_7\},$$

откуда следует экспоненциальное убывание нормы глобального решения задачи Коши (1), (2) в пространстве Соболева:

$$\|u\|_{W_2^1} \leqslant c_{13}e^{-c_{14}t}, \quad c_{13}=\sqrt{2\left(E_0+\frac{\varepsilon c_{12}}{2-p}\right)}, \quad c_{14}=\frac{\varepsilon(1-\varepsilon\delta)}{2}, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

а значит, в силу оценки (36), и в пространстве $C(\mathbb{R})$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для глобального классического решения* $u=u(t,x)$ *задачи Коши (1), (2) существуют такие постоянные* c_{13} *и* c_{14}, *что имеет место оценка*

$$\|u\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)| \leqslant c_{13}e^{-c_{14}t}, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

т.е. глобальное решение задачи Коши (1), (2) экспоненциально убывает на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1 / Л.Д. Кудрявцев. — М. : Юрайт, 2009. — 702 с.
2. Филиппов, А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. — М. : Машиностроение, 1970. — 736 с.
3. Ерофеев, В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаев, Н.П. Семерикова. — М. : Физматлит, 2002. — 208 с.

4. Фараджев, А.С. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода / А.С. Фараджев // Прикл. математика & Физика. — 2022. — Т. 54, № 3. — С. 141–153.
5. Zhou, J. Well-posedness of solutions for the sixth-order Boussinesq equation with linear strong damping and nonlinear source / J. Zhou, H. Zhang // J. Nonlin. Sci. — 2021. — V. 31, № 76. — P. 1–61.
6. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц ; пер. с англ. Л.И. Головиной и Б.С. Митягина ; под ред. А.Г. Костюченко. — М. : ИЛ, 1962. — 896 с.
7. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.
8. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида ; пер. с англ. В.М. Волосова. — М. : Мир, 1967. — 624 с.
9. Хиршман, И.И. Преобразования типа свертки / И.И. Хиршман, Д.В. Уиддер ; пер. с англ. В.П. Потапова ; под ред. А.О. Гельфонда. — М. : ИЛ, 1958. — 313 с.
10. Travis, C.C. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations / C.C. Travis, G.F. Webb // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. — 1978. — V. 32. — P. 75–96.
11. Yuming Qin. Integral and Discrete Inequalities and their Applications. V. II: Nonlinear Inequalities / Yuming Qin. — Switzerland : Springer, 2016. — 1083 p.
12. Benjamin, T.B. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems / T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Philos. Trans. Roy. Soc. London. — 1972. — V. 272. — P. 47–78.
13. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. — М. : Наука, 1976. — 152 с.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR EQUATION

© 2024 / **Kh. G. Umarov**

Chechen Academy of Sciences, Grozny, Russia
Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russia
e-mail: umarov50@mail.ru

For a nonlinear partial differential equation generalizing a damped sixth-order Boussinesq equation with double dispersion and the equation of transverse oscillations of a viscoelastic Voigt–Kelvin beam under the action of external and internal friction and whose deformation is considered taking into account the correction for the inertia of section rotation, sufficient conditions for the existence and exponential decay of a global solution of the Cauchy problem are found.

Keywords: Cauchy problem, beam oscillation equation, sixth-order Boussinesq equation, asymptotic behavior of the solution

REFERENCES

1. Kudryavtsev, L.D., *Kurs matematicheskogo analiza* (Course of Mathematical Analysis), vol. 1, Moscow: Yurait, 2009.
2. Filippov, A.P., *Kolebaniya deformiruyemykh sistem* (Oscillations of Deformable Systems), Moscow: Machinostroenie, 1970.
3. Erofeev, V.I., Kazhaev, V.V., and Semerikova, N.P., *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost'* (Waves in Rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity), Moscow: Fizmatlit, 2002.
4. Faradzhev, A.S., On a nonlocal inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with nonlocal time-integral conditions of the second kind, *Applied Math. & Phys.*, 2022, vol. 54, no. 3, pp. 141–153.
5. Zhou, J. and Zhang, H., Well-posedness of solutions for the sixth-order Boussinesq equation with linear strong damping and nonlinear source, *J. Nonlin. Sci.*, 2021, vol. 31, no. 76, pp. 1–61.
6. Dunford, N. and Schwartz, J.T., *Linear Operators. Part I: General Theory*, New York: Interscience, 1958.

7. Vasilyev, V.V., Crane, S.G., and Piskarev, S.I., Operator semigroups, cosine operator functions and linear differential equations, *VINITI: Results of Science and Technology. Series Math. Analysis*, 1990, vol. 28, pp. 87–202.
8. Yosida, K., *Functional Analysis*, Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1965.
9. Hirshman, I.I. and Widder, D.V., *The Convolution Transform*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.
10. Travis, C.C. and Webb, G.F., Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 1978, vol. 32, pp. 75–96.
11. Yuming Qin, *Integral and Discrete Inequalities and their Applications. Vol. II: Nonlinear Inequalities*, Springer, 2016.
12. Benjamin, T.B., Bona, J.L., and Mahony, J.L., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1972, vol. 272, pp. 47–78.
13. Filatov, A.N. and Sharova, L.V., *Integral'nyye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* (Integral Inequalities and the Theory of Nonlinear Oscillations), Moscow: Nauka, 1976.