

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО
ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА© 2024 г. А. А. Косов¹, Э. И. Семенов²*Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова**Сибирского отделения РАН, г. Иркутск**e-mail: ¹kosov_idstu@mail.ru, ²edwseiz@gmail.com**Поступила в редакцию 18.05.2024 г., после доработки 03.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.*

Найдены точные решения некоторых многомерных обобщённых уравнений Монжа–Ампера в виде суперпозиции квадратичной формы пространственных переменных и решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, порождаемых исходными.

Ключевые слова: многомерное уравнение Монжа–Ампера, точное решение

DOI: 10.31857/S0374064124100046, EDN: JTRSCV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В задачах газовой динамики встречается уравнение Монжа–Ампера [1–3] вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = G(x, y), \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$ — искомая, а $G(x, y)$ — заданная функции; левая часть уравнения является определителем матрицы Гессе (гессианом) [4, с. 200] от функции двух переменных. Как отмечено в [1], уравнения газовой динамики для плоских одномерных течений с переменной энтропией можно свести к уравнению Монжа–Ампера (1), используя метод (преобразование) М.Х. Мартина [5]. В справочниках [2, с. 774–786; 3, с. 98–107] приведены некоторые частные решения уравнения (1), а также указаны общие решения в параметрическом виде для случаев $G = 0$ и $G = \text{const} < 0$.

В монографии [6] изучается многомерное уравнение Монжа–Ампера относительно неизвестной функции любого числа переменных

$$\det H(u) = f(\mathbf{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad (2)$$

где $u = u(\mathbf{x})$ — искомая функция переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $H(u) = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ — матрица Гессе n -го порядка; u_{x_i} — частная производная по переменной x_i , $i = \overline{1, n}$. Отметим, что в случае $n = 2$ точные решения уравнения (2) для некоторых правых частей указаны в [2, с. 787–793; 3, с. 107–111].

Уравнение Монжа–Ампера и его различные обобщения исследовались методами группового анализа в работах [7, 8], где в ряде случаев были представлены их точные решения. Для построения точных решений нестационарных уравнений математической физики типа Монжа–Ампера в последнее время успешно применяется метод редукции [9], при этом возможно эффективное использование метода разделения переменных [9, 10].

В данной статье рассматривается обобщённое уравнение Монжа–Ампера для случая n пространственных переменных

$$\det H(u) = f(\mathbf{x}, u, \nabla u, \Delta u), \quad (3)$$

где ∇u — градиент, Δu — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Класс уравнений вида (3) имеет ряд важных приложений. Так, например, в геофизике исследуют задачу построения поля соленоидального ветра $\{v, w\}$, согласованного с характеризующим атмосферное давление заданным геопотенциалом $\Phi(x, y)$, посредством так называемого уравнения баланса ветра и давления следующего вида [11]:

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \frac{1}{2}l(x, y)\Delta u + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = \frac{1}{2}\Delta\Phi(x, y), \quad (4)$$

где $u(x, y)$ — искомая функция тока ($u_x = v$, $u_y = w$); $l(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$ — заданные функции. Отметим, что в статье [12] рассматривались точные решения дифференциального уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2,$$

являющегося частным случаем уравнений (2) и (4).

В литературе, посвященной задачам дифференциальной геометрии, часто встречается частный случай уравнения (3) следующего вида [13]:

$$\det H(u) = f(\mathbf{x}, |\nabla u|^2). \quad (5)$$

Например, к (5) относится дифференциальное уравнение гауссовой кривизны. Известно [14, с. 10], что гауссова кривизна $K(\mathbf{x})$ графика функции $u(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^n$ в точке $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ задаётся соотношением

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\det H(u)}{(1 + |\nabla u|^2)^{(n+2)/2}}, \quad (6)$$

которое можно рассматривать как уравнение Монжа–Ампера относительно неизвестной функции $u(\mathbf{x})$. В [11] рассматривается гиперболическое уравнение Монжа–Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \varphi^2(x, y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^2 = 0 \quad (7)$$

для отрицательной гауссовой кривизны $K(x, y) = -\varphi^2(x, y)$; там же отмечается, что уравнение баланса и давления (4) при заданной правой части можно свести к уравнению (7).

Основной целью данной статьи является построение точных решений многомерного уравнения (3) в предположении, что $f(\mathbf{x}, u, \nabla u, \Delta u) \equiv f(\xi, u, |\nabla u|^2, \Delta u)$, при этом аргумент $\xi = \xi(\mathbf{x})$ является квадратичной функцией вида

$$\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

где A — числовая симметричная $n \times n$ -матрица. Ранее квадратичная функция (8) успешно использовалась авторами для построения точных решений многомерных систем уравнений реакции–диффузии, эллиптических уравнений и многомерных систем эллиптических уравнений со степенными нелинейностями [15, 16].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для построения точных решений уравнения (3) нам понадобится формула, являющаяся результатом следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $F(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Тогда для любой симметричной матрицы A , задающей квадратичную форму $\xi = (A\mathbf{x}, \mathbf{x})/2$, для гессиана функции $F(\xi) = F((A\mathbf{x}, \mathbf{x})/2)$ справедлива формула

$$\det\left(\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \det A \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2}\right], \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где $\det A$ — определитель матрицы A .

Доказательство. Формулу (9), используя обозначение

$$\det\left(\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \Theta_k, \quad i, j = \overline{1, k},$$

запишем как

$$\Theta_k = \det A_k \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{k-1} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2}\right), \quad \xi = \frac{1}{2}(A_k \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \quad (10)$$

где A_k — симметрическая числовая матрица порядка k .

Для доказательства (10) применим метод математической индукции. Так как нас интересуют только многомерные решения, то случай $k=1$ рассматривать не будем, хотя и здесь формула (10) останется справедливой. Считаем что матрица A_1 состоит из одного элемента a_{11} , который и является её определителем. В справедливости формулы (10) при $k=2$ можно убедиться непосредственным вычислением гессиана от функции $F(\xi)$, где аргумент ξ и определитель матрицы A_2 имеют вид

$$\xi = \frac{1}{2}a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \frac{1}{2}a_{22}x_2^2, \quad \det A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Предположим, что формула (10) выполнена для некоторого натурального $k \geq 2$, и докажем, что справедлива формула

$$\Theta_{k+1} = \det A_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^k \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2}\right), \quad \xi = \frac{1}{2}(A_{k+1} \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad (11)$$

для натурального числа $k+1$. Формально равенство (11) получается из (10) заменой k на число $k+1$, однако используемая в этих формулах одна и та же буква ξ разная по смыслу. В (11) Θ_{k+1} — определитель матрицы Гесса $(k+1)$ -го порядка от функции $F(\xi)$. Разложим его по элементам $(k+1)$ -й строки:

$$\Theta_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1+j} \Theta_{k,j} F_{x_{k+1}x_j}. \quad (12)$$

Здесь $\Theta_{k,j}$ — миноры элементов $F_{x_{k+1}x_j}$ матрицы Гесса $(F_{x_i x_j}(\xi))_{i,j=\overline{1,k+1}}$, являющиеся определителями соответствующих матриц k -го порядка, которые получаются из исходной матрицы

Гесса $(k+1)$ -го порядка вычеркиванием $(k+1)$ -й строки и j -го столбца. Для вычисления этих определителей будем использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Theta_{k,j} = & \det A_{k,j} \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{k-1} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) - \\ & - (-1)^{k+1+j} x_{k+1} x_j \det A_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{k-1} \frac{d^2 F}{d\xi^2}, \quad j = \overline{1, k+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $A_{k,j}$ — матрицы k -го порядка, которые получаются из симметричной матрицы A_{k+1} $(k+1)$ -го порядка вычеркиванием $(k+1)$ -й строки и j -го столбца. В справедливости формул (13) можно убедиться непосредственным вычислением определителей $\Theta_{k,j}$ для любых натуральных k и $j = \overline{1, k+1}$.

Покажем, как получаются формулы (13) для случая $k = 2$. При $k = 2$ формула (11) принимает вид

$$\Theta_3 = \det A_3 \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2 \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right), \quad \xi = \frac{1}{2}(A_3 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (14)$$

С другой стороны, из (12) имеем

$$\Theta_3 = (-1)^{3+1} \Theta_{2,1} F_{x_3 x_1} + (-1)^{3+2} \Theta_{2,2} F_{x_3 x_2} + (-1)^{3+3} \Theta_{2,3} F_{x_3 x_3}.$$

Вычислив частные производные $F_{x_i x_j}$, с учётом (14) перепишем последнее равенство как

$$\begin{aligned} & (-1)^{3+1} \Theta_{2,1} \left[a_{13} \frac{dF}{d\xi} + \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] + (-1)^{3+2} \Theta_{2,2} \left[a_{23} \frac{dF}{d\xi} + \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] + \\ & + (-1)^{3+3} \Theta_{2,3} \left[a_{33} \frac{dF}{d\xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right)^2 \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] = \det A_3 \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2 \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь в (15) заменим выражение для определителя матрицы A_3 равенством

$$\det A_3 = (-1)^{3+1} a_{13} \det A_{2,1} + (-1)^{3+2} a_{23} \det A_{2,2} + (-1)^{3+3} a_{33} \det A_{2,3},$$

при этом будем предполагать, что $a_{13} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$, иначе имеем $\det A_3 = 0$. Тогда равенство (15) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & (-1)^{3+1} a_{13} \left[\Theta_{2,1} - \det A_{2,1} \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \right] \frac{dF}{d\xi} + \\ & + (-1)^{3+2} a_{23} \left[\Theta_{2,2} - \det A_{2,2} \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \right] \frac{dF}{d\xi} + \\ & + (-1)^{3+3} a_{33} \left[\Theta_{2,3} - \det A_{2,3} \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \right] \frac{dF}{d\xi} + \\ & + \left\{ (-1)^{3+1} \Theta_{2,1} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + (-1)^{3+2} \Theta_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + (-1)^{3+3} \Theta_{2,3} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \frac{d^2 F}{d\xi^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

По определению для миноров $\Theta_{2,j}$ ($j = 1, 2, 3$) имеют место формулы

$$\Theta_{2,1} \equiv F_{x_1 x_2} F_{x_2 x_3} - F_{x_1 x_3} F_{x_2 x_2}, \quad \Theta_{2,2} \equiv F_{x_1 x_1} F_{x_2 x_3} - F_{x_1 x_3} F_{x_2 x_1},$$

$$\Theta_{2,3} \equiv F_{x_1 x_1} F_{x_2 x_2} - F_{x_1 x_2} F_{x_2 x_1}.$$

Непосредственным вычислением находим

$$\begin{aligned}\Theta_{2,1} &= \Xi_1(x_1, x_2, x_3) \frac{dF}{d\xi} \frac{d^2F}{d\xi^2} + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2, \\ \Theta_{2,2} &= \Xi_2(x_1, x_2, x_3) \frac{dF}{d\xi} \frac{d^2F}{d\xi^2} + (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2, \\ \Theta_{2,3} &= \Xi_3(x_1, x_2, x_3) \frac{dF}{d\xi} \frac{d^2F}{d\xi^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2,\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\Xi_1(x_1, x_2, x_3) &= 2\xi(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - x_1x_3 \det A_3, \\ \Xi_2(x_1, x_2, x_3) &= 2\xi(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) + x_2x_3 \det A_3, \\ \Xi_3(x_1, x_2, x_3) &= 2\xi(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - x_3^2 \det A_3.\end{aligned}$$

С учётом этих соотношений выражение в фигурных скобках равенства (16) примет вид $x_3(x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33}) \det A_3 (dF/d\xi)^2$, тогда равенство (16) после несложных преобразований можно записать как

$$\begin{aligned}& (-1)^{3+1}a_{13} \left[\Theta_{2,1} - \det A_{2,1} \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right) + (-1)^{3+1}x_1x_3 \det A_3 \frac{dF}{d\xi} \frac{d^2F}{d\xi^2} \right] \frac{dF}{d\xi} + \\ & + (-1)^{3+2}a_{23} \left[\Theta_{2,2} - \det A_{2,2} \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right) + (-1)^{3+2}x_2x_3 \det A_3 \frac{dF}{d\xi} \frac{d^2F}{d\xi^2} \right] \frac{dF}{d\xi} + \\ & + (-1)^{3+3}a_{33} \left[\Theta_{2,3} - \det A_{2,3} \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right) + (-1)^{3+3}x_3^2 \det A_3 \frac{dF}{d\xi} \frac{d^2F}{d\xi^2} \right] \frac{dF}{d\xi} = 0.\end{aligned}$$

Так как $dF/d\xi \neq 0$, то для того чтобы последнее равенство обратилось в тождество, мы должны потребовать равенства нулю всех трёх выражений, стоящих в квадратных скобках. Таким образом, получены формулы (13) для случая $k=2$. Аналогичные рассуждения можно провести для любого $k \geq 2$.

С учётом формул (13) равенство (12) запишем в виде

$$\Theta_{k+1} = \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{k-1} \left[\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right) \Omega_{k+1} - \det A_{k+1} \frac{d^2F}{d\xi^2} \Phi_{k+1} \right], \quad (17)$$

где

$$\Omega_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1+j} \det A_{k,j} F_{x_{k+1}x_j}, \quad \Phi_{k+1} = x_{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} x_j F_{x_{k+1}x_j}. \quad (18)$$

Вычислим

$$F_{x_{k+1}x_j} = \frac{d^2F}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + a_{k+1,j} \frac{dF}{d\xi}, \quad j = \overline{1, k+1},$$

и подставим их в формулы (18):

$$\Omega_{k+1} = \frac{dF}{d\xi} \left[\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1+j} a_{k+1,j} \det A_{k,j} \right] + \frac{d^2F}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1+j} \det A_{k,j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right\}, \quad (19)$$

$$\Phi_{k+1} = x_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi} \left[\sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1,j} x_j \right] + \frac{d^2F}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} x_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right\} \right). \quad (20)$$

Выражение в квадратных скобках равенства (19) является определителем симметричной матрицы A_{k+1} . С учётом очевидных соотношений

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,k+1}x_{k+1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} = a_{1,k+1}x_1 + a_{2,k+1}x_2 + \dots + a_{k+1,k+1}x_{k+1}$$

в выражении в фигурных скобках равенства (19) сгруппируем слагаемые относительно переменных $x_1, \dots, x_{k+1}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1+j} \det A_{k,j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} &= x_1 [(-1)^{k+1+1} a_{11} \det A_{k,1} + (-1)^{k+1+2} a_{12} \det A_{k,2} + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1+k} a_{1k} \det A_{k,k} + (-1)^{k+1+k+1} a_{1,k+1} \det A_{k,k+1}] + \dots \\ &\dots + x_{k+1} [(-1)^{k+1+1} a_{1,k+1} \det A_{k,1} + (-1)^{k+1+2} a_{2,k+1} \det A_{k,2} + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1+k} a_{k,k+1} \det A_{k,k} + (-1)^{k+1+k+1} a_{k+1,k+1} \det A_{k,k+1}]. \end{aligned}$$

Так как выражения в квадратных скобках при переменных $x_1, \dots, x_k$ равны нулю, а выражение при переменной x_{k+1} является определителем симметричной матрицы A_{k+1} , то из (19) имеем

$$\Omega_{k+1} = \det A_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi} + x_{k+1} \frac{d^2 F}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} \right). \quad (21)$$

Сумма в квадратных скобках равенства (20) — первая частная производная функции ξ по переменной x_{k+1} , а выражение в фигурных скобках в (20) равно 2ξ , следовательно,

$$\Phi_{k+1} = x_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}}. \quad (22)$$

Подставив соотношения (21) и (22) в (17), получим равенства

$$\begin{aligned} \Theta_{k+1} &= \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{k-1} \left[\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \det A_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi} + x_{k+1} \frac{d^2 F}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \det A_{k+1} \frac{d^2 F}{d\xi^2} x_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} \right] = \\ &= \det A_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{k-1} \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \left[\frac{dF}{d\xi} + x_{k+1} \frac{d^2 F}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} - x_{k+1} \frac{d^2 F}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}} \right] = \\ &= \det A_{k+1} \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^k \left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получена формула (11). Лемма доказана.

Точные решения уравнения (3) будем искать в следующем виде:

$$u(\mathbf{x}) = F(\xi), \quad (23)$$

где аргумент ξ задаётся формулой (8), а условия на функцию $F(\xi)$ определены в лемме 1.

В случае когда правая часть уравнения (3) будет явно зависеть от лапласиана (квадрата градиента искомой функции), необходимо подобрать матрицу A в классе симметричных матриц таким образом, чтобы для функции (8) выполнялось равенство

$$|\nabla \xi|^2 = \sigma \xi, \quad (24)$$

где $\sigma \neq 0$ — некоторая постоянная.

Лемма 2. Пусть E_n — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n-m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица. Тогда для функции (8) с симметричной матрицей A вида

$$A = \frac{\sigma}{2} S E_n S^T \quad (25)$$

справедливо равенство (24).

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется справедливость равенств

$$\begin{aligned} |\nabla \xi|^2 &= (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \left(A^2 \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) = \left(\frac{\sigma^2}{4} (S E_n S^T)^2 \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) = \frac{\sigma^2}{4} (S E_n^2 S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \\ &= \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\sigma}{2} S E_n S^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) = \frac{\sigma}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sigma \xi. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

При $m < n$ определитель матрицы (25) равен нулю. Поэтому прежде всего рассмотрим случай $E_n = E$, где E — единичная матрица. При этом имеем

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4} \|\mathbf{x}\|^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (26)$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. Если при некотором $\sigma \neq 0$ функция $F(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$\left(\frac{\sigma}{2} \right)^n \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] = \bar{f} \left(\xi, F, \frac{dF}{d\xi}, \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right), \quad (27)$$

где

$$\bar{f} \left(\xi, F, \frac{dF}{d\xi}, \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \equiv f \left(\xi, F, \sigma \xi \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2, \frac{\sigma}{2} \left(n \frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right) \right),$$

то обобщённое уравнение Монжа–Ампера (3) обладает точным решением (23), (26).

Доказательство. Пусть функция $\xi(\mathbf{x})$ определяется соотношением (26), тогда из формулы (23) прямыми вычислениями находим

$$|\nabla u|^2 = \sigma \xi \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2, \quad \Delta u = \frac{\sigma}{2} \left(n \frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right), \quad \det A = \left(\frac{\sigma}{2} \right)^n.$$

С учётом этих соотношений и формулы (9) после подстановки решения (23) в уравнение (3) придём к ОДУ (27). Теорема доказана.

Заметим, что если правая часть уравнения (3) не зависит от частных производных искомой функции, то для построения точных решений обобщённого уравнения Монжа–Ампера [17]

$$\det H(u) = f(\xi, u) \quad (28)$$

необходимости в виде (23) в условии (24) нет. В этом случае имеет место

Теорема 2. Уравнение (28) имеет точное решение (23), где аргумент задаётся формулой (8), а функция $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ

$$\det A \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] = f(\xi, F).$$

Справедливость этой теоремы вытекает непосредственно из формулы (9).

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим уравнение гауссовой кривизны (6) в двумерном координатном пространстве:

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = K(x, y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^2, \quad u = u(x, y). \quad (29)$$

Точные решения уравнения (29) будем искать в виде (23). Так как $n=2$, то (23) с учётом формулы (26) примет вид

$$u(x, y) = F(\xi), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(x^2 + y^2). \quad (30)$$

Хорошо известно [14, с. 138], что гауссова кривизна $K(x, y)$ поверхности равна нулю в параболических точках и точках уплощения, положительна в эллиптических и отрицательна в гиперболических точках. Поэтому рассмотрим все три случая.

1. Пусть $K=0$. Тогда из формулы (9) с учётом равенства $\det A = \sigma^2/4$ получим

$$\frac{\sigma^2}{4} \frac{dF}{d\xi} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right] = 0.$$

Легко убедиться, что решением этого ОДУ является функция $F(\xi) = C_1\sqrt{\xi} + C_2$, где $C_1 \neq 0$ и C_2 — константы интегрирования. По теореме 1 частным точным решением уравнения $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$ будет функция

$$u(x, y) = \frac{C_1\sqrt{\sigma}}{2} \sqrt{x^2 + y^2} + C_2.$$

2. Пусть $K > 0$. Обозначим $K(x, y) = K(\xi)$. По теореме 1 точным решением уравнения (29) является функция (30), где $F(\xi)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка

$$\frac{\sigma^2}{4} \frac{dF}{d\xi} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right] = K(\xi) \left(1 + \sigma\xi \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2 \right)^2. \quad (31)$$

С помощью замены $dF/d\xi = \sqrt{Z(\xi)}$ ОДУ (31) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$Z + \xi \frac{dZ}{d\xi} = \frac{4}{\sigma^2} K(\xi) (1 + \sigma\xi Z)^2,$$

общее решение которого задаётся формулой

$$Z(\xi) = -\frac{4 \int K(\xi) d\xi + \sigma(1 - C_1)}{\sigma\xi(4 \int K(\xi) d\xi - \sigma C_1)}.$$

Следовательно, общее решение ОДУ (31) имеет вид

$$F(\xi) = \pm \int \left(-\frac{4 \int K(\xi) d\xi + \sigma(1 - C_1)}{\sigma\xi(4 \int K(\xi) d\xi - \sigma C_1)} \right)^{1/2} d\xi + C_2, \quad (32)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Заметим, что при выводе формулы (32) мы не делали никаких предположений относительно функции $K(\xi)$, т.е. она может быть и постоянной. Если $K(\xi) \equiv k^2 > 0$, где k — постоянная, то интеграл (32) вычисляется непосредственно и принимает громоздкий вид. Однако можно подобрать постоянные так, чтобы найденные решения были вещественными и достаточно компактными.

Так, например, при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $\sigma = -1$ точным решением уравнения (29) будет функция

$$u(x, y) = \pm \frac{1}{|k|} \sqrt{1 - k^2(x^2 + y^2)}, \quad (33)$$

а при $C_1 = 3/2$, $C_2 = 0$, $\sigma = 1$ —

$$u(x, y) = \pm \frac{1}{|k|} E\left(\frac{1}{3} \sqrt{9 - 6k^2(x^2 + y^2)}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

где $E(z, \nu)$ — эллиптический интеграл 2-го рода.

3. Если $K < 0$, то точное решение (29) определяется также по формулам (30), (32).

Если $K(\xi) \equiv -k^2 < 0$, то при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $\sigma = -1$ точным решением уравнения (29) будет функция (33), при $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $\sigma = -1$ — функция

$$u(x, y) = \pm \frac{1}{|k|} \sqrt{1 - k^2(x^2 + y^2)} \pm \frac{1}{2|k|} \ln\left(\frac{\sqrt{1 - k^2(x^2 + y^2)} - 1}{\sqrt{1 - k^2(x^2 + y^2)} + 1}\right),$$

а при $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, $\sigma = 1$ —

$$u(x, y) = \pm \frac{1}{|k|} E\left(\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}(x^2 + y^2)}, \sqrt{2}\right) \mp \frac{1}{|k|} F\left(\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}(x^2 + y^2)}, \sqrt{2}\right),$$

где $F(z, \nu)$ и $E(z, \nu)$ — эллиптические интегралы 1-го и 2-го родов соответственно.

Теперь перейдём к рассмотрению случая, когда $K(\xi)$ — некоторая заданная функция такая, что $K(0) \neq 0$ и $-\infty < K(0) < +\infty$. Если, например, $K(\xi) = \lambda(1 + \xi)^{-2}$, где $\lambda \neq 0$ — произвольная постоянная, то формула (32) запишется как

$$F(\xi) = \pm \int \left(\frac{(1 - C_1)\sigma(1 + \xi) - 4\lambda}{\sigma\xi(4\lambda + \sigma C_1(1 + \xi))} \right)^{1/2} d\xi. \quad (34)$$

Интеграл в (34) вычисляется точно и имеет громоздкий вид [18, с. 58]. Однако при определённом выборе констант интеграл (34) вычисляется в элементарных функциях.

Так, при $C_1 = 0$, $\sigma = 1$, $K(x, y) = 16\lambda(4 + x^2 + y^2)^{-2} > 0$, $\lambda > 0$, точное решение уравнения (29) определяется по формуле

$$u(x, y) = \pm \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \left[\Theta(x, y) + (4\lambda - 1) \ln 2 - (4\lambda - 1) \ln \left(1 - 4\lambda + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \Theta(x, y) \right) \right],$$

$$\Theta(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 4 - 16\lambda}.$$

Легко видеть, что при $\lambda = 1/4$ оно примет вид $u(x, y) = (x^2 + y^2)/4$.

При $C_1 = 1$, $\sigma = 4$, $K_2(x, y) = -(1 + x^2 + y^2)^{-2} < 0$ точное решение уравнения (29) следующее:

$$u(x, y) = \pm \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Пример 2. Теперь рассмотрим уравнение гауссовой кривизны (6) в трёхмерном координатном пространстве:

$$\det H(u) = K(x, y, z)(1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{5/2}, \quad u = u(x, y, z), \quad (35)$$

где

$$\det H(u) \equiv u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2.$$

Точные решения уравнения (35) будем искать в виде

$$u(x, y, z) = F(\xi), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(x^2 + y^2 + z^2),$$

при этом по теореме 1 функция $F(\xi)$ должна удовлетворять следующему ОДУ:

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2}\right] = K(\xi) \left(1 + \sigma\xi \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\right)^{5/2}. \quad (36)$$

Заменой $dF(\xi)/d\xi = Z(\xi)$ ОДУ (36) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 Z^2 \left(Z + 2\xi \frac{dZ}{d\xi}\right) = K(\xi) \left(1 + \sigma\xi Z^2\right)^{5/2},$$

умножив которое на $(3/2)\sqrt{\xi}$, будем иметь

$$\frac{3}{2}\sqrt{\xi} \frac{Z^2(Z + 2\xi dZ/d\xi)}{(1 + \sigma\xi Z^2)^{5/2}} = \frac{12}{\sigma^3}\sqrt{\xi}K(\xi).$$

Заметим, что функция $(3/2)\sqrt{\xi}$ является интегрирующим множителем, тогда последнее равенство можно записать как

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^{3/2} Z^3}{(1 + \sigma\xi Z^2)^{3/2}} \right) = \frac{12}{\sigma^3} \sqrt{\xi} K(\xi).$$

Отсюда находим

$$\frac{\xi^{3/2} Z^3}{(1 + \sigma\xi Z^2)^{3/2}} = \Phi(\xi), \quad \Phi(\xi) = \frac{12}{\sigma^3} \int \sqrt{\xi} K(\xi) d\xi + C_1, \quad C_1 = \text{const},$$

и, следовательно,

$$F(\xi) = \pm \int \frac{\Phi(\xi)^{1/3} d\xi}{\sqrt{\xi(1 - \sigma\Phi(\xi)^{2/3})}} + C_2, \quad C_2 = \text{const}.$$

Очевидно, что не для каждой функции $K(\xi)$ вычисляется интеграл $\Phi(\xi)$, а значит, и $F(\xi)$. Но, например, при $K_1 = \lambda^3$, где $\lambda \neq 0$ — произвольная постоянная, точное решение уравнения (35) имеет вид

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

а при $K_2(x, y, z) = 27(x^2 + y^2 + z^2)^3(9 + (x^2 + y^2 + z^2)^3)^{-5/2}$ —

$$u(x, y, z) = \frac{1}{12}(x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Пример 3. Найдём частные точные решения следующего уравнения:

$$\det H(u) = \frac{\beta}{\|\mathbf{x}\|^{2k}} \Delta u, \quad u = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (37)$$

где $k, \beta \neq 0$ — произвольные параметры.

Уравнение (37) при $n=2$ является частным случаем уравнения баланса ветра и давления (4). По теореме 1 точным решением уравнения (37) является функция (23), при этом $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ

$$\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2}\right] = \frac{B}{\xi^k} \left[\frac{n}{2} \frac{dF}{d\xi} + \xi \frac{d^2F}{d\xi^2}\right], \quad B = \frac{2^n \beta \sigma^{k+1-n}}{4^k}. \quad (38)$$

С помощью замены

$$\frac{dF}{d\xi} = \xi^{-\frac{k}{n-1}} Z(\eta), \quad \eta = \ln \xi, \quad (39)$$

ОДУ (38) сводится к квадратуре

$$\int \frac{2Z^{n-1} - B}{bZ^n + aBZ} dZ = \eta + C_1, \quad a = \frac{n}{2} - \frac{k}{n-1}, \quad b = \frac{2k}{n-1} - 1. \quad (40)$$

Интеграл в (40) легко вычисляется, при этом мы должны рассмотреть три случая.

1. Пусть $a=0$, $b \neq 0$. Тогда $k=n(n-1)/2$, $b=n-1$ и из формулы (40) получим

$$\frac{2}{n-1} \ln Z + \frac{B}{(n-1)^2} Z^{1-n} = \eta + C_1.$$

2. Если $a \neq 0$, $b=0$, то $k=(n-1)/2$, $a=(n-1)/2$ и из формулы (40) находим

$$\frac{4}{B(n-1)^2} Z^{n-1} - \frac{2}{n-1} \ln Z = \eta + C_1.$$

3. При $a \neq 0$, $b \neq 0$ получим

$$\frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{a}\right) \ln(Z^n + aBZ) - \frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{b} + \frac{n}{a}\right) \ln Z = \eta + C_1.$$

Как видно, во всех трёх случаях функция $Z(\eta)$ задаётся неявно трансцендентными равенствами, первые два из которых разрешимы в явном виде с использованием специальной функции Ламберта [19, с. 7]. Однако найти в явном виде функцию $F(\xi)$ из соотношения (39) возможно только при некоторых значениях параметров n , k . Например, при $n=2$, $k=1$ в (37) уравнение

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \frac{\beta}{x^2 + y^2} (u_{xx} + u_{yy})$$

имеет частное точное решение

$$u(x, y) = -\frac{\beta}{\mathcal{W}(Z(x, y))} + \beta \ln \mathcal{W}(Z(x, y)), \quad Z(x, y) = \frac{\beta}{\sqrt{\sigma(x^2 + y^2)}},$$

где $\sigma > 0$ — произвольная постоянная, $\mathcal{W}(Z)$ — специальная функция Ламберта, которая определяется как решение функционального уравнения $\mathcal{W}(Z) \exp\{\mathcal{W}(Z)\} = Z$ относительно $\mathcal{W}(Z)$.

В случае $n=3$, $k=2$ уравнение

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \frac{\beta}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

имеет частное точное решение

$$u(x, y, z) = \pm \left(\frac{1}{2} \sqrt{\sigma(x^2 + y^2 + z^2) - 4\beta} - \sqrt{\beta} \arctg \frac{\sqrt{\sigma(x^2 + y^2 + z^2) - 4\beta}}{2\sqrt{\beta}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(x^2 + y^2 + z^2)},$$

где $\sigma > 0$ — произвольный параметр.

Пример 4. Рассмотрим обобщённое уравнение Монжа–Ампера следующего вида:

$$\det H(u) = \beta \xi^\mu u^\lambda, \quad (41)$$

которое является частным случаем уравнения (28), следовательно, к нему применима теорема 2, а значит, точным решением (41) является функция (23), причём $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ

$$\det A \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] = \beta \xi^\mu F^\lambda. \quad (42)$$

В уравнениях (41), (42) $\beta \neq 0$, μ , λ — произвольные параметры. Преобразованием $F(\xi) = G(\eta)$, $\eta = \sqrt{\xi}$, ОДУ (42) приводится к виду

$$\frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} = \frac{2^n \beta}{\det A} \eta^{2\mu+n-1} G^\lambda(\eta) \left(\frac{dG(\eta)}{d\eta} \right)^{1-n}. \quad (43)$$

ОДУ (43) является обобщённым уравнением Эмдена–Фаулера [20, с. 261]. В справочнике [20, с. 277–279] приведены формулы, с помощью которых ОДУ (43) можно свести к уравнению Абеля второго рода, а также некоторые дискретные преобразования обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера. Для некоторых значений параметров n , λ , μ общее решение уравнения (43) можно найти в параметрическом виде [20, с. 265–266]. Структура ОДУ (43) такова, что для него легко можно найти явные точные решения, которые выражаются степенной функцией и экспонентой. Так имеем

$$G_1(\eta) = B \eta^{\frac{2(\mu+n)}{n-\lambda}}, \quad B = \left(\frac{\beta(n-\lambda)^{n+1}}{\det A (2\mu+n+\lambda)(\mu+n)^n} \right)^{\frac{1}{n-\lambda}}, \quad \lambda \neq n, \quad \lambda \neq -n;$$

$$G_2(\eta) = C_1 \exp \left\{ \left(\frac{2^n \beta}{\det A} \right)^{\frac{1}{n+1}} \eta \right\}, \quad \lambda = n, \quad \mu = -(n-1)/2,$$

где $C_1 \neq 0$ — произвольная постоянная.

Теперь, используя найденные функции $G_1(\eta)$, $G_2(\eta)$, выпишем соответствующие им частные точные решения уравнения (41). Пусть $\mu = 0$, тогда уравнение

$$\det H(u) = \beta u^\lambda$$

имеет частное решение вида

$$u(\mathbf{x}) = \left[\frac{\beta}{\det A} \left(\frac{n-\lambda}{n} \right)^n \frac{n-\lambda}{n+\lambda} \right]^{\frac{1}{n-\lambda}} \left[\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right]^{\frac{n}{n-\lambda}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть уравнение (41) имеет вид

$$\det H(u) = \beta \left[\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right]^{-\frac{n-1}{2}} u^n,$$

тогда оно обладает частным точным решением

$$u(\mathbf{x}) = \exp \left\{ \left(\frac{2^n \beta}{\det A} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left[\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right]^{1/2} \right\},$$

где A — произвольная невырожденная симметричная матрица порядка n . В общем случае решения $u(\mathbf{x})$ являются анизотропными по пространственным переменным. Пусть $n = 3$ и матрицы имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det A_1 = -8, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \det A_2 = 16.$$

Для матриц A_1, A_2 квадратичные функции ξ_1, ξ_2 по формуле (8) задаются соотношениями

$$\xi_1 = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy - 5xz, \quad \xi_2 = x^2 - y^2 - 2z^2.$$

Для этих функций получим, что обобщённые уравнения Монжа–Ампера

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \beta u^\lambda, \quad \lambda \neq 3, \quad \lambda \neq -3,$$

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \frac{\beta u^3}{x^2 - y^2 - 2z^2}$$

обладают, соответственно, частными точными решениями

$$u(x, y, z) = \left[-\frac{\beta(3-\lambda)^4}{216(3+\lambda)} \right]^{\frac{1}{3-\lambda}} (2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy - 5xz)^{\frac{3}{3-\lambda}},$$

$$u(x, y, z) = \exp \left\{ \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/4} \sqrt{x^2 - y^2 - 2z^2} \right\}.$$

Пусть теперь $\mu = 0, \lambda = 0$, тогда уравнение (41) запишем как

$$\det H(u) = \beta, \tag{44}$$

а точные решения будем также отыскивать в виде $u(\mathbf{x}) = F(\xi)$. При этом функция $F(\xi)$ находится из следующего интеграла:

$$F(\xi) = \left(\frac{1}{\det A} \right)^{1/n} \int \xi^{-1/2} (\beta \xi^{n/2} + C_1)^{1/n} d\xi + C_2, \tag{45}$$

где C_1, C_2 — константы интегрирования. При $C_1 = 0$ из (45) получим частное точное решение уравнения (44) вида

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\det A} \right)^{1/n} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где A — произвольная невырожденная симметричная матрица.

В случае $C_1 \neq 0$ интеграл в формуле (45) вычисляется, по видимому, только при $n = 2$, тогда уравнение (44) запишется как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = \beta. \tag{46}$$

Как уже было отмечено, в справочниках [2, 3] приведены некоторые частные решения уравнения (46), а также указаны общие решения в параметрическом виде для частных

случаев $\beta = 0$ и $\beta < 0$. Здесь мы построим ещё одно частное решение вида (8) уравнения (46). Итак, в случае $n = 2$ из (45) находим

$$F(\xi) = \pm \sqrt{B\xi^2 + C_1\xi} \pm \frac{C_1}{2\sqrt{B}} \ln \left(\frac{2B\xi + C_1}{2\sqrt{B}} + \sqrt{B\xi^2 + C_1\xi} \right) + C_2,$$

где $B = \beta / \det A > 0$. Общий вид симметричной 2×2 -матрицы A , зависящей от трёх произвольных параметров, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{pmatrix}, \quad \det A = 4ab - c^2.$$

Пусть $4ab - c^2 \neq 0$, тогда частное точное решение уравнения (46) задаётся формулой

$$u(x, y) = \pm \sqrt{B(ax^2 + by^2 + cxy)^2 + C_1(ax^2 + by^2 + cxy)} \pm \frac{C_1}{2\sqrt{B}} \ln \left(\frac{2B(ax^2 + by^2 + cxy) + C_1}{2\sqrt{B}} + \sqrt{B(ax^2 + by^2 + cxy)^2 + C_1(ax^2 + by^2 + cxy)} \right),$$

здесь $B = \beta / (4ab - c^2) > 0$ и опущена несущественная аддитивная постоянная C_2 .

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проекты 121041300058-1, 117032210078-4).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. — М. : Наука, 1978. — 688 с.
2. Polyanin, A.D. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — 2nd ed. — New York : Chapman & Hall / CRC Press, 2012. — 1840 p.
3. Полянин, А.Д. Нелинейные уравнения математической физики : учеб. пособие для вузов / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. — 2-е изд., испр. и доп. — Ч. 2. — М. : Юрайт, 2023. — 368 с.
4. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон ; пер. с англ. Х.Д. Икрамова [и др.] ; под ред. Х.Д. Икрамова. — М. : Мир, 1989. — 655 с.
5. Martin, M.H. The Monge–Ampere partial differential equation $rt - s^2 + \lambda^2 = 0$ / M.H. Martin // Pasif. J. Math. — 1953. — V. 3. — P. 37–39.
6. Погорелов, А.В. Многомерное уравнение Монжа–Ампера / А.В. Погорелов. — М. : Наука, 1988. — 96 с.
7. Фушич, В.И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера / В.И. Фушич, Н.И. Серов // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 3. — С. 543–546.
8. Leibov, O.S. Reduction and exact solutions of the Monge–Ampere equation / O.S. Leibov // Nonlin. Math. Phys. — 1989. — V. 4, № 1-2. — P. 146–148.
9. Полянин, А.Д. Точные решения и редукции нестационарных уравнений математической физики типа Монжа–Ампера / А.Д. Полянин // Вестн. НИЯУ МИФИ. — 2023. — Т. 12, № 5. — С. 276–288.
10. Рахмелевич, И.В. Многомерное уравнение Монжа–Ампера со степенными нелинейностями по первым производным / И.В. Рахмелевич // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2020. — № 2. — С. 86–98.

11. Розендорн, Э.Р. Поверхности отрицательной кривизны / Э.Р. Розендорн // Итоги науки и техники. Сер. Современ. проблемы математики. Фунд. направления. — 1989. — Т. 48. — С. 98–195.
12. Розендорн, Э.Р. Некоторые классы частных решений уравнения $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + \mathbf{a}\nabla z = 0$ и их приложение к задачам метеорологии / Э.Р. Розендорн // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1984. — № 2. — С. 56–58.
13. Trudinger, N.S. The Monge–Ampère equation and its geometric applications / N.S. Trudinger, X.J. Wang // Handbook of Geometric Analysis. — Somerville : International Press, 2008. — V. 1. — P. 467–524.
14. Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. — М. : Наука, 1974. — 176 с.
15. Косов, А.А. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 108–122.
16. Косов, А.А. О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1619–1640.
17. Cheng, S.Y. On the regularity of the Monge–Ampère equation $\det \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, u)$ / S.Y. Cheng, S.T. Yau // Comm. Pure Appl. Math. — 1977. — V. 30. — P. 41–68.
18. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев — М. : Наука, 1981. — 800 с.
19. Дубинов, А.Е. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики / А.Е. Дубинов, И.Д. Дубинова, С.К. Сайков. — Саров : РФЯЦ ВНИИЭФ, 2006. — 160 с.
20. Зайцев, В.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Справочник для вузов / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — Ч. 1. — М. : Юрайт, 2023. — 385 с.

ON EXACT SOLUTIONS OF MULTIDIMENSIONAL GENERALIZED MONGE–AMPERE EQUATION

© 2024 / A. A. Kosov¹, E. I. Semenov²

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of RAS, Irkutsk, Russia*

e-mail: ¹kosov_idstu@mail.ru, ²edwseiz@gmail.com

Exact solutions of some multidimensional generalized Monge–Ampere equations are found. These solutions are a superposition of a quadratic form of spatial variables and solutions of nonlinear ordinary differential equations generated by the Monge–Ampere equations.

Keywords: multidimensional Monge–Ampere equation, exact solution

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (projects no. 121041300058-1 and no. 117032210078-4).

REFERENCES

1. Rozhdestvenskij, B.L. and Yanenko, N.N., *Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike* (Systems of Quasilinear Equations and their Applications to Gas Dynamics), Moscow: Nauka, 1978.
2. Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed., New York: Chapman & Hall / CRC Press, 2012.
3. Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F., *Nelinejnye uravneniya matematicheskoj fiziki* (Nonlinear Equations of Mathematical Physics), vol. 2, Moscow: Yurajt, 2023.
4. Horn, R.A. and Johnson, C.R., *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1985.

5. Martin, M.H., The Monge–Ampère partial differential equation $rt - s^2 + \lambda^2 = 0$, *Pasif. J. Math.*, 1953, vol. 3, pp. 37–39.
6. Pogorelov, A.V., *Mnogomernoe uravnenie Monzha–Ampera* (Multidimensional Monge–Ampère Equation), Moscow: Nauka, 1988.
7. Fushchich, V.I. and Serov, N.I., Symmetry and some exact solutions of the multidimensional Monge–Ampère equation. *Dokl. AN SSSR*, 1983, vol. 273, no. 3, pp. 543–546.
8. Leibov, O.S., Reduction and exact solutions of the Monge–Ampère equation, *Nonlin. Math. Phys.*, 1989, vol. 4, no. 1–2, pp. 146–148.
9. Polyanin, A.D., Exact solutions and reductions of nonstationary equations of mathematical physics of the Monge–Ampère type, *Vestnik Nacional'noy issledovatel'skoy yadernoy universiteta MIFI*, 2023, vol. 12, no. 5, pp. 276–288.
10. Rakhmelevich, I.V., Multidimensional Monge–Ampère equation with power-law nonlinearities in first derivatives, *Vestnik VGU. Seriya Fizika. Matematika*, 2020, no. 2, pp. 86–98.
11. Rozendorn, E.R. Surfaces of negative curvature, *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. prob. mat. Fundam. napravleniya*, 1989, vol. 48, pp. 98–195.
12. Rozendorn, E.R., Some classes of partial solutions to the equation $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + \mathbf{a}\nabla z = 0$ and their application to meteorological problems, *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Math., Mekh.*, 1984, no. 2, pp. 56–58.
13. Trudinger, N.S. and Wang, X.J., The Monge–Ampère equation and its geometric applications, in *Handbook of Geometric Analysis*, Somerville: International Press, 2008, vol. 1, pp. 467–524.
14. Pogorelov, A.V., *Differencial'naya geometriya* (Differential Geometry), Moscow: Nauka, 1974.
15. Kosov, A.A. and Semenov, E.I., On exact multidimensional solutions of a nonlinear system of reaction-diffusion equations, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 106–120.
16. Kosov, A.A. and Semenov, E.I., On exact solutions of a multidimensional system of elliptic equations with power-law nonlinearities *Differ. Equat.*, 2023, vol. 54, no. 1, pp. 1627–1649.
17. Cheng, S.Y. and Yau, S.T., On the regularity of the Monge–Ampère equation $\det \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, u)$, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1977, vol. 30, pp. 41–68.
18. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integrals and Series. Elementary Functions*, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
19. Dubinov, A.E., Dubinova, I.D., and Sajkov, S.K. *W-funkciya Lamberta i ee primeneniye v matematicheskikh zadachah fiziki* (Lambert's W -Function and its Application in Mathematical Problems of Physics), Sarov: RFYAC VNIIEF, 2006.
20. Zajcev, V.F. and Polyanin, A.D., *Obyknovennyye differencial'nye uravneniya* (Ordinary Differential Equations), Part 1, Moscow: Yurajt, 2023.