ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1325–1333

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956.4

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

 А. Ю. Егорова[1], А. Н. Коненков[2]

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

e-mail: [1]an_batseva@mail.ru, [2]a.konenkov@365.rsu.edu.ru

Поступила в редакцию 08.05.2024 г., после доработки 15.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Рассматривается задача Коши для параболической системы второго порядка с коэффициентами и правой частью, принадлежащими анизотропному пространству Зигмунда. Построена шкала гладкости решений задачи в анизотропных пространствах Зигмунда. Получена априорная оценка решений равномерно-эллиптических систем в изотропных пространствах Зигмунда.

Ключевые слова: задача Коши, параболическая система, эллиптическая система, пространство Зигмунда, априорные оценки

DOI: 10.31857/S0374064124100039, EDN: JTSXEW

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, гл. 4], что если правая часть параболического уравнения второго порядка принадлежит анизотропному пространству Гёльдера $C^{l,\alpha}(\bar{D})$, $l \geqslant 2$, $\alpha \in (0,1)$, в слое $D = \mathbb{R}^n \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, а начальное условие — классу $C^{l+2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, то ограниченное классическое решение задачи Коши будет принадлежать пространству $C^{l+2,\alpha}(\bar{D})$. Однако для целого показателя гладкости (в частности, при $\alpha = 1$), когда правая часть такого уравнения принадлежит пространствам Липшица $C^{l,1}(\bar{D})$, данное утверждение перестаёт быть верным, что вытекает из примера для уравнения Лапласа [2, гл. 4]. В этом случае для уравнения теплопроводности установлено [3], что решение задачи Коши принадлежит более широкому, чем $C^{l+2,1}(\bar{D})$, параболическому пространству Зигмунда $H_{l+3}(\bar{D})$. В статье [4] аналогичный результат получен для решений параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами из весовых анизотропных пространств Зигмунда.

Теория разрешимости задачи Коши для параболических систем в пространствах Гёльдера построена достаточно полно. В работе [5] доказана однозначная разрешимость задачи Коши и получены точные оценки её решения для параболических систем порядка $2p$ в слое D в классе гёльдеровских функций $C^{l,\alpha}(\bar{D})$. Для неограниченной по t области в [6] получена шкала гладкости решений задачи Коши в весовом пространстве Гёльдера $C^{k,\alpha}_{\lambda}\big(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}\big)$, $k \geqslant 2p$, допускающем не более чем показательный рост при $t \to +\infty$ решения и его производных.

Для параболических систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условиям Дини, в работах [7, 8] установлена единственность классического решения задачи Коши в классе Тихонова с пространственными производными первого и второго порядков из класса Тихонова в каждом слое $\mathbb{R}^n \times (t_1, T]$, $t_1 \in (0,T)$. В [9] исследован характер гладкости решений задачи Коши для одномерной по пространственной переменной x однородной параболической системы второго порядка, коэффициенты которой удовлетворяют двойному условию

Дини, а начальное условие непрерывно и ограничено вместе со своими первой и второй производными, и показано, что в этом случае классическое решение задачи имеет ограниченные и непрерывные производные по x до второго порядка включительно и первые — по аргументу t.

В работах [10, 11] методом параболических потенциалов получена шкала гладкости классического решения задачи Коши в анизотропных пространствах Зигмунда для параболической по Петровскому системы второго порядка с постоянными коэффициентами.

В настоящей статье построена шкала гладкости решения задачи Коши для равномерно параболической в смысле Петровского системы второго порядка с переменными коэффициентами из анизотропного пространства Зигмунда $H_l(\bar{D})$, $l \in \mathbb{N}$. Получена априорная оценка решения в этом пространстве. Разрешимость задачи Коши для рассматриваемой системы в пространстве Зигмунда выводится из разрешимости задачи Коши для системы с постоянными коэффициентами в том же пространстве методом продолжения по параметру. Установлена принадлежность решения задачи Коши анизотропному пространству Зигмунда $H_{l+2}(\bar{D})$ при условии, что правая часть системы и начальное условие принадлежат соответствующим пространствам Зигмунда. Вместе со шкалой Гёльдера $C^{l+2,\alpha}(\bar{D})$, $0<\alpha<1$, для решений задачи Коши получается шкала, в которой показатель гладкости принимает как целые, так и нецелые значения.

Решения эллиптической системы уравнений в пространстве $\mathbb{R}^n$ могут быть получены из решений соответствующей параболической системы интегрированием по временно́й переменной от 0 до $+\infty$ (метод спуска). Однако для сходимости интеграла требуется накладывать некоторые условия на коэффициенты системы. Методом спуска также могут быть найдены оценки фундаментальной матрицы решений эллиптической системы [12, гл. 1, § 7]. В работе [13] предложен метод получения оценок фундаментальных решений для эллиптического уравнения, использующий оценки для фундаментального решения параболического уравнения только в конечном по t слое. Используя идею этой работы, мы приводим здесь простой способ получения априорных оценок для решений эллиптических систем, опирающийся на существование и единственность (в определённом классе) решения соответствующей задачи для параболической системы лишь в ограниченной по t области. Из установленных оценок для параболической задачи Коши мы выводим априорные оценки решений эллиптических систем в изотропных пространствах Зигмунда. Для одного эллиптического уравнения произвольного порядка с коэффициентами из класса C^∞ оценки решений краевых задач в пространствах Зигмунда получены в [14, § 4.3].

1. НЕОБХОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Положим $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$. Задача Коши для параболической системы второго порядка с переменными коэффициентами рассматривается в слое $D_T=\mathbb{R}^n\times(0,T)$, $0<T<+\infty$.

Для вектор-функции $g=(g_1,\ldots,g_n)$ введём следующие обозначения первой и второй разностей по аргументу x:

$$\Delta_x g(x)=g(x+\Delta x)-g(x),\quad \Delta_x^2 g(x)=g(x+2\Delta x)-2g(x+\Delta x)+g(x).$$

Разности первого и второго порядков для функции g по аргументу t определяются аналогичным образом.

Обозначим пространство $H_0(D_T)=L_\infty(D_T)$ с нормой $|g|_{0,D_T}=\operatorname{vrai\,sup}_{D_T}|g|$. Пусть

$$[g]_{1,D_T}=\sup_{D_T}\frac{|\Delta_x^2 g(x,t)|}{|\Delta x|}+\sup_{D_T}\frac{|\Delta_t g(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}}.$$

Положим для $\alpha = 1, 2$

$$\langle g\rangle_{\alpha,D_T} = \sup_{D_T} \frac{|\Delta_t^\alpha g(x,t)|}{|\Delta t|^{\alpha/2}};$$

для целых $a \geqslant 2$

$$[g]_{a,D_T} = \sum_{|k|+2s=a-1} \left[\partial_x^k \partial_t^s g\right]_{1,D_T}, \quad \langle g\rangle_{\alpha,D_T} = \sum_{|k|+2s=a-2} \left\langle \partial_x^k \partial_t^s g\right\rangle_{2,D_T};$$

для натуральных a

$$|g|_{a,D_T} = \sup_{\substack{D_T \\ |k|+2s\leqslant a-1}} |\partial_x^k \partial_t^s g(x,t)| + [g]_{a,D_T} + \langle g\rangle_{\alpha,D_T}.$$

Через $H_a(\bar D_T)$ обозначим пространства Зигмунда функций g, определённых в слое $\bar D_T$ и имеющих в нём все производные $\partial_x^k \partial_t^s g$, причём $|k| + 2s < a$, величина $|g|_{a,D_T}$ конечна.

Обозначим через $H_a(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{N}$, изотропные пространства Зигмунда для функций, зависящих только от переменной x; норму в $H_a(\mathbb{R}^n)$ можно определить через уже введённые нормы в пространстве $H_a(\bar D_T)$ как $|v|_{a,\mathbb{R}^n} = |v|_{a,D_T}$.

2. ЗАДАЧА КОШИ

В слое D_T для параболического оператора $L = (L_1, \ldots, L_m)^T$ и вектор-функции $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$, где

$$L_i u = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^m \sum_{r,s=1}^n a_{ijrs}(x,t) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^n b_{ijr}(x,t) \frac{\partial u_j}{\partial x_r} - \sum_{j=1}^m c_{ij}(x,t) u_j,$$

начальной вектор-функции $\psi = (\psi_1, \ldots \psi_m)^T$ и правой части $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$ рассмотрим задачу Коши

$$Lu = f, \quad u|_{t=0} = \psi. \tag{1}$$

Предполагаем, что система (1) равномерно параболическая в слое $\bar D_T$ в смысле Петровского [12, с. 9] и для некоторого натурального l выполняются условия

$$a_{ijrs}, b_{ijr}, c_{ij} \in H_l(\bar D_T), \quad |a_{ijrs}|_{l,D_T}, |b_{ijr}|_{l,D_T}, |c_{ij}|_{l,D_T} \leqslant A. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $l \in \mathbb{N}$, для коэффициентов равномерно параболической по Петровскому системы (1) выполнены условия (2) и $f \in H_l(\bar D_T)$, $\psi \in H_{l+2}(\mathbb{R}^n)$. Тогда классическое, ограниченное в слое $\bar D_T$ вместе со своими пространственными производными до второго порядка включительно, решение задачи Коши (1) принадлежит пространству $H_{l+2}(\bar D_T)$ и справедлива оценка*

$$|u|_{l+2,D_T} \leqslant C(|f|_{l,D_T} + |\psi|_{l+2,\mathbb{R}^n}),$$

где константа C зависит от m, n, l, T, A и константы из условия равномерной параболичности оператора L.

Замечание 1. Единственность решения задачи Коши (1) в классе функций, ограниченных в D_T вместе со своими пространственными производными до второго порядка включительно, следует из [7, 8].

Замечание 2. Существование решения задачи Коши (1) из анизотропного пространства Гёльдера $C^{l+1,\alpha}(\bar D_T)$ для любого $\alpha \in (0,1)$ при наложенных условиях на данные задачи вытекает из [5].

Доказательство теоремы 1. Будем следовать известной идее о представлении оператора с переменными коэффициентами как возмущения оператора с постоянными коэффициентами, "замороженными" в некоторой точке. Для параболических уравнений второго порядка такой подход для построения шкалы гладкости решений задачи Коши в пространствах Зигмунда был использован в [4].

Пусть $l=1$ и младшие коэффициенты оператора в левой части системы (1) отсутствуют, т.е.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{r,s=1}^{n}a_{ijrs}(x,t)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_r\partial x_s}=f_i(x,t),\quad i=\overline{1,n}.$$

Достаточно доказать утверждение теоремы в слое D_τ, где $\tau>0$ — достаточно малое число. Если в слое D_τ вектор-функция $u_i(x,t)$ является решением задачи Коши (1), то $u_i^*(x,t)=u(\tau^{1/2}x,\tau t)$ является в слое D_1 решением задачи

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{m}a^*_{ijrs}(x,t)\frac{\partial^2 u_j^*}{\partial x_r\partial x_s}=f_i^*,\quad u_i^*|_{t=0}=\psi_i^*,$$

где $a^*_{ijrs}(x,t)=a_{ijrs}(\tau^{1/2}x,\tau t)$, $f_i^*(x,t)=\tau^{-1}f_i(\tau^{1/2}x,\tau t)$, $\psi_i^*(x)=\psi_i(\tau^{1/2}x)$.

Так как пространство Зигмунда $H_1(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство Гёльдера $C^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ [15, гл. 4], то справедливо неравенство

$$[a^*_{ijrs}(\cdot,t)]_{1/2,\mathbb{R}^n}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ |\Delta x|>0}\frac{|\Delta_x a^*_{ijrs}(x,t)|}{|\Delta x|^{1/2}}=\tau^{1/4}[a_{ijrs}(\cdot,\tau t)]_{1/2,\mathbb{R}^n}\leqslant$$

$$\leqslant C\tau^{1/4}|a_{ijrs}|_{1,D_\tau}\leqslant CA\tau^{1/4},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Поэтому, чтобы доказать включение $u\in H_3(\bar D_\tau)$, достаточно установить требуемое утверждение в слое D_1 при условии, что система (1) удовлетворяет условию равномерной параболичности в смысле Петровского и полунормы коэффициентов в пространстве Зигмунда достаточно малы:

$$[a_{ijrs}]_{1,D_1}\leqslant A\tau^{1/2},\quad [a_{ijrs}(\cdot,t)]_{1/2,\mathbb{R}^n}\leqslant CA\tau^{1/4},\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{3}$$

Покажем, что при достаточно малых τ из условий $a_{ijrs}\in H_1(\bar D_1)$, (2), (3) и равномерной параболичности системы для любой функции $u\in H_3(\bar D_1)$ имеет место априорная оценка

$$|u|_{3,D_1}\leqslant C\big(|Lu|_{1,D_1}+|u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n}\big). \tag{4}$$

Тогда разрешимость задачи Коши для системы (1) в пространстве $H_3(\bar D_1)$ выводится из априорной оценки (4) и существования решения задачи для системы с постоянными коэффициентами [11] методом продолжения по параметру [2, гл. 5].

Пусть функция $\varsigma\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0\leqslant\varsigma(x)\leqslant 1$, причём $\varsigma(x)=0$ при $|x|\geqslant 2$ и $\varsigma(x)=1$ при $|x|\leqslant 1$. Для $R\geqslant 1$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$ положим $\varsigma_R^\xi(x)=\varsigma(R^{-1}(x-\xi))$. Обозначим через $G_R(P)=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon |x-\xi|<R,\ 0<t<1\}$ цилиндр радиуса R в слое D_1 с осью, проходящей через точку P. Зафиксируем функцию $u\in H_3(\bar D_1)$, точку $P=(\xi,\chi)\in D_1$ и число $R\geqslant 1$. Параболический оператор с коэффициентами, "замороженными" в точке P, обозначим через $L(P)=(L_1(P),\ldots,L_m(P))$, где

$$L_i(P)=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{r,s=1}^{n}a_{ijrs}(P)\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_s}.$$

Использовав оценку решений задачи Коши в пространстве Зигмунда $H_3(\bar{D}_1)$ для однородной параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами [11], получим

$$
\begin{gathered}
|\varsigma_R^P u|_{3,D_1} \leqslant C\big(|\varsigma_R^\xi u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |L(P)(\varsigma_R^P u)|_{1,D_1}\big) \leqslant \\
\leqslant C\big(|\varsigma_R^\xi u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |\varsigma_R^P Lu|_{1,D_1} + |\varsigma_R^P (L - L(P))u|_{1,D_1} + R^{-1}|u|_{3,D_1}\big) \leqslant \\
\leqslant C\Bigg(|u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |Lu|_{1,D_1} + \sum_{r,s=1}^n \bigg|\varsigma_R^P (a_{rs} - a_{rs}(P))\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\bigg|_{1,D_1} + R^{-1}|u|_{3,D_1}\Bigg). \qquad (5)
\end{gathered}
$$

Оценка первых двух слагаемых в правой части неравенства (5) получена с помощью соответствующих неравенств для функции $\varsigma_R^\xi u(\cdot,0) \in H_3(\mathbb{R}^n)$ из леммы 1 [4]. Для третьего слагаемого из неравенства (5) применим оценку [4] для нормы произведения

$$
\begin{gathered}
\bigg|\varsigma_R^P (a_{ijrs} - a_{ijrs}(P))\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\bigg|_{1,D_1} = \bigg|\varsigma_R^P (a_{ijrs} - a_{ijrs}(P))\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\bigg|_{1,G_{4R}(P)} \leqslant \\
\leqslant C|\varsigma_R^P|_{1,G_{8R}(P)} |a_{ijrs} - a_{ijrs}(P)|_{1,G_{16R}(P)} \bigg|\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\bigg|_{1,G_{16R}(P)} \leqslant \\
\leqslant C|\varsigma_R^P|_{1,D_1} |a_{ijrs} - a_{ijrs}(P)|_{1,G_{16R}(P)} |u|_{3,D_1}.
\end{gathered}
$$

Норма $|\varsigma_R^P|_{1,D_1}$ ограничена сверху константой, не зависящей от P и $R \geqslant 1$. С учётом (3) имеем

$$
\begin{gathered}
|(a_{ijrs} - a_{ijrs}(P))|_{0,G_{16R}(P)} \leqslant C[a_{ijrs}(\cdot,\chi)]_{1/2,\mathbb{R}^n} \tau^{1/4} R^{1/2} + [a_{ijrs}]_{1,D_1} \leqslant CA(\tau^{1/4}R^{1/2} + \tau^{1/2}), \\
|a_{ijrs} - a_{ijrs}(P)|_{1,G_{16R}(P)} = [a_{ijrs}]_{1,G_{16R}(P)} \leqslant [a_{ijrs}]_{1,D_1} \leqslant A\tau^{1/2}.
\end{gathered}
$$

Тогда неравенство (5) примет вид

$$
|\varsigma_R^P u|_{3,D_1} \leqslant C\big(|u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |Lu|_{1,D_1} + (\tau^{1/4}R^{1/2} + \tau^{1/2} + R^{-1})|u|_{3,D_1}\big),
$$

где C не зависит от R, P, τ. Используя неравенство $|u|_{3,D_1} \leqslant \sup_{P\in D_1} |\varsigma_R^P u|_{3,D_1}$ [4], заключаем, что

$$
|u|_{3,D_1} \leqslant C\big(|u(\cdot,0)|_{3,\mathbb{R}^n} + |Lu|_{1,D_1} + (\tau^{1/4}R^{1/2} + \tau^{1/2} + R^{-1})|u|_{3,D_1}\big).
$$

Выбирая сначала R достаточно большúм, а затем τ настолько малым, чтобы множитель при $|u|_{3,D_1}$ в правой части последнего неравенства стал равным $1/2$, получаем (4).

Теперь докажем утверждение теоремы для $l = 1$ при наличии в параболическом операторе L младших коэффициентов $b_{ijr}, c_{ij} \in H_1(\bar{D}_T)$. Зафиксируем некоторое число $\alpha \in (0,1)$. Так как при $l \in \mathbb{N}$ пространства Зигмунда $H_l(\bar{D}_T)$ вложены в параболические пространства Гёльдера $C^{l-1,\alpha}(\bar{D}_T)$ [15, гл. 4], то задача (1) является задачей Коши с коэффициентами и правой частью из пространства $C^{0,\alpha}(\bar{D}_T)$ и начальной функцией из $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение задачи Коши $u \in C^{2,\alpha}(\bar{D}_T)$ и для его нормы в этом пространстве справедлива оценка [5]

$$
|u|_{2+\alpha,D_T} \leqslant C(|f|_{\alpha,D_T} + |\psi|_{2+\alpha,\mathbb{R}^n}) \leqslant C(|f|_{1,D_T} + |\psi|_{3,\mathbb{R}^n}).
$$

Рассмотрим оператор $L_0 = (L_{01}, \ldots, L_{0m})^T$, где

$$
L_{0i}u = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \sum_{r,s=1}^m a_{ijrs}(x,t)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_r \partial x_s}.
$$

Тогда

$$L_0 u = f_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{m} b_{ijr}(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x_r} + c_i(x,t)u_i = F \in H_1(\bar{D}_T)$$

и справедливо неравенство $|F|_{1,D_T} \leqslant C(|f|_{1,D_T} + |\psi|_{3,\mathbb{R}^n})$. По предыдущему $u \in H_3(\bar{D}_T)$ и $|u|_{3,D_T} \leqslant C(|f|_{1,D_T} + |\psi|_{3,\mathbb{R}^n})$. Таким образом, утверждение теоремы установлено для $l=1$.

Для $l \geqslant 2$ доказательство проведём по индукции. Достаточно доказать оценки для производных решения по x. Пусть теорема справедлива для некоторого $l \geqslant 1$ и $f \in H_{l+1}(\bar{D}_T)$, $\psi \in H_{l+3}(\mathbb{R}^n)$. Тогда производные $\partial u/\partial x_j$, $j=\overline{1,n}$, являются в слое D_T решениями задач Коши

$$Lw_j = F_j, \quad w_j|_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j},$$

где правые части системы

$$F_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} + L\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial (Lu)}{\partial x_j}$$

содержат пространственные производные u порядка не выше второго. По предположению индукции

$$F_j \in H_l(\bar{D}_T), \quad |F_j|_{l,D_T} \leqslant C\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{l,D_T} + |f|_{l,D_T} + \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right|_{l+2,\mathbb{R}^n}\right).$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in H_{l+2}(\bar{D}_T), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{l+2,D_T} \leqslant C(|f|_{l+1,D_T} + |\psi|_{l+3,\mathbb{R}^n}).$$

Теорема доказана.

3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим равномерно эллиптический по Петровскому оператор $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m)^T$, действующий на вектор-функции $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_m(x))^T$, где

$$\mathcal{L}_i v = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r,s=1}^{n} a_{ijrs}(x)\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} b_{ijr}(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_r} + \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x)v_j, \quad i=\overline{1,m}.$$

Теорема 2. *Пусть $l \in \mathbb{N}$, коэффициенты равномерно эллиптического по Петровскому оператора $\mathcal{L}$ и вектор-функция f принадлежат пространству Зигмунда $H_l(\mathbb{R}^n)$. Если вектор-функция $v \in H_{l+2}(\mathbb{R}^n)$ является в $\mathbb{R}^n$ решением системы $\mathcal{L}v = f$, то справедлива оценка*

$$|v|_{l+2,\mathbb{R}^n} \leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n} + |f|_{l,\mathbb{R}^n}).$$

Доказательство. Установим утверждение теоремы для $l=1$. Рассмотрим равномерно-параболический по Петровскому оператор $L = \partial_t - \mathcal{L}$. Функция $u(x,t) = tv(x)$ является в слое D_1 решением задачи Коши

$$Lu = v(x) - tf(x) = g(x,t), \quad u|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

По теореме 1

$$|v|_{3,\mathbb{R}^n} = |u(\cdot,1)|_{3,\mathbb{R}^n} \leqslant |u|_{3,D_1} \leqslant C|g|_{1,D_1} \leqslant C(|v|_{1,D_1} + |tf|_{1,D_1}) \leqslant C(|v|_{1,\mathbb{R}^n} + |f|_{1,\mathbb{R}^n}).$$

Чтобы избавиться от нормы $|v|_{1,\mathbb{R}^n}$ в правой части последнего неравенства, воспользуемся представлением решения в виде объёмного потенциала: в силу единственности [12, гл. 3,

§ 2] решения задачи Коши (6) в анизотропном пространстве Гёльдера $C^{2,\alpha}(\bar{D}_1)$, $0<\alpha<1$, оно может быть записано в виде

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,t,y,\tau)g(y,\tau)\,dy\,d\tau,$$

где $\Gamma(x,t,y,\tau)$ — фундаментальная матрица решений оператора L. Используя для неё оценки [12, гл. 1], имеем

$$|\partial_x^k u(x,t)|\leqslant|g|_{0,D_1}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_x^k\Gamma(x,t,y,\tau)|\,dy\,d\tau\leqslant C|g|_{0,D_1}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-(n+|k|)/2}\exp\left\{-c\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right\}dy\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant Ct^{1-|k|/2}|g|_{0,D_1}\leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+|f|_{0,\mathbb{R}^n}),\quad |k|\leqslant1,\ (x,t)\in\bar{D}_1,$$

откуда вытекает оценка

$$|v|_{1,\mathbb{R}^n}\leqslant C\left(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+\sum_{i=1}^n|\partial_i v|_{0,\mathbb{R}^n}\right)=C\left(|u(\cdot,1)|_{0,\mathbb{R}^n}+\sum_{i=1}^n|\partial_i u(\cdot,1)|_{0,\mathbb{R}^n}\right)\leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+|f|_{0,\mathbb{R}^n}).$$

Для $l\geqslant2$ доказательство по индукции. Пусть утверждение теоремы справедливо для некоторого $l\geqslant1$, коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ и вектор-функция f принадлежат пространству $H_{l+1}(\mathbb{R}^n)$, а функция $v\in H_{l+3}(\mathbb{R}^n)$ — решение системы $\mathcal{L}v=f$. Снова используя теорему 1, получаем

$$|v|_{l+3,\mathbb{R}^n}=|u(\cdot,1)|_{l+3,\mathbb{R}^n}\leqslant|u|_{l+3,D_1}\leqslant C|g|_{l+1,D_1}\leqslant C(|v|_{l+1,D_1}+|tf|_{l+1,D_1})\leqslant$$
$$\leqslant C(|v|_{l+1,\mathbb{R}^n}+|f|_{l+1,\mathbb{R}^n})\leqslant C(|v|_{l+2,\mathbb{R}^n}+|f|_{l+1,\mathbb{R}^n})\leqslant$$
$$\leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+|f|_{l,\mathbb{R}^n}+|f|_{l+1,\mathbb{R}^n})\leqslant C(|v|_{0,\mathbb{R}^n}+|f|_{l+1,\mathbb{R}^n}).$$

Теорема доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.
2. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер ; пер. с англ. Л.П. Купцова ; под ред. А.К. Гущина. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 464 с.
3. Коненков, А.Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 6. — С. 820–831.
4. Коненков, А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 6. — С. 867–873.
5. Солонников, В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. — 1965. — Т. 83. — С. 3–163.
6. Черепова, М.Ф. О гладкости решения задачи Коши для параболической системы / М.Ф. Черепова // Вестн. МЭИ. — 2009. — № 6. — С. 38–44.

7. Baderko, E.A. Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // Appl. Anal. — 2016. — V. 95, № 7. — P. 1570–1580.
8. Бадерко, Е.А. О единственности решения задачи Коши для параболических систем / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 6. — С. 822–830.
9. Бадерко, Е.А. О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости / Е.А. Бадерко, К.Д. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1606–1618.
10. Егорова, А.Ю. Задача Коши для системы параболических уравнений в анизотропных пространствах Зигмунда / А.Ю. Егорова // Вестн. БГУ. Математика, информатика. — 2023. — № 3. — С. 14–22.
11. Егорова, А.Ю. Задача Коши для неоднородных параболических систем в анизотропных пространствах Зигмунда / А.Ю. Егорова // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. — 2024. — Т. 16, № 1. — С. 5–12.
12. Эйдельман, С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 446 с.
13. Коненков, А.Н. О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 2. — С. 247–256.
14. Трибель, Х. Теория функциональных пространств / Х. Трибель ; пер. с англ. П.И. Лизоркина. — М. : Мир, 1986. — 448 с.
15. Бесов, О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. — М. : Наука, 1996. — 475 с.

THE CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEM WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN ANISOTROPIC ZYGMUND SPACES

A. Yu. Egorova[1], **A. N. Konenkov**[2]

Ryazan State University named after S.A. Esenin, Russia
e-mail: [1]*an_batseva@mail.ru,* [2]*a.konenkov@365.rsu.edu.ru*

The Cauchy problem for a second-order parabolic system with coefficients and the right hand side which belong to the Zygmund anisotropic space is considered. A smoothness scale of the Cauchy problem solutions in anisotropic Zygmund spaces is obtained. A priori estimates of solutions for uniformly elliptic systems in isotropic Zygmund spaces are derived.

Keywords: Cauchy problem, parabolic system, elliptic system, Zygmund space, a priori estimates

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., and Ural'tseva, N.N., *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Providence: AMS, 1968.
2. Gilbarg, D. and Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977.
3. Konenkov, A.N., The Cauchy problem for the heat equation in Zygmund spaces, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 860–872.
4. Konenkov, A.N., The Cauchy problem for parabolic equations in Zygmund spaces, *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 6, pp. 867–873.
5. Solonnikov, V.A., On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1965, vol. 83, pp. 3–163.
6. Cherepova, M.F., On the smoothness of the solution of Cauchy's problem for the parabolic system, *Bulletin MPEI*, 2009, no. 6, pp. 38–44.
7. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem, *Appl. Anal.*, 2016, vol. 95, no. 7, pp. 1570–1580.
8. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness of the solution of a the Cauchy problem for parabolic systems, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55. no. 6, pp. 806–814.

9. Baderko, E.A. and Fedorov, K.D., On the smoothness of the Poisson potential for second-order parabolic systems on the plane, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1613–1626.
10. Egorova, A.Yu., The Cauchy problem for parabolic system of equations in anisotropic Zydmund spaces, *Bulletin of BSU. Mathematics, computer science*, 2023, no. 3, pp. 14–22.
11. Egorova, A.Yu., The Cauchy problem for inhomogeneous parabolic systems in anisotropic Zydmund spaces, *Bulletin of the South Ural State Univ. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 5–12.
12. Eidel'man, S.D., *Parabolic Systems*, Elsevier, 1969.
13. Konenkov, A.N., On the relationship between fundamental solutions of elliptic and parabolic equations, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 2, pp. 263–273.
14. Triebel, H., *Theory of Function Spaces*. Basel: Birkhäuser, 1983.
15. Besov, O.V., Ilyin, V.P., and Nikol'sky, S.M. *Integral Representation of Functions and Embedding Theorems*, Washington DC: V.H. Wilson and Sons, 1978.