

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕЖАНДРА,
СОДЕРЖАЩЕГО ДВА ПАРАМЕТРА

© 2024 г. А. В. Глушак

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет**e-mail: aleglu@mail.ru**Поступила в редакцию 23.06.2024 г., после доработки 23.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.*

С помощью понятия дробного интеграла от функции по другой функции построены операторы преобразования, позволяющие доказать разрешимость начальных задач для абстрактного сингулярного уравнения Лежандра, содержащего два параметра. Приведены примеры.

Ключевые слова: начальная задача, сингулярное дифференциальное уравнение Лежандра, дробный интеграл от функции по другой функции, оператор движения по параметру, оператор преобразования, разрешимость

DOI: 10.31857/S0374064124100028, EDN: JTZRKD

ВВЕДЕНИЕ

Исследование ряда физических процессов опирается на решение уравнений, содержащих оператор Лапласа, которые путём разделения переменных в системах криволинейных координат приводят к дифференциальным уравнениям с сингулярностью. При наличии определённой симметрии эти уравнения превращаются в уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) или Лежандра.

Начальные задачи для классического уравнения ЭПД были исследованы во многих работах (см. введения в монографиях [1, 2]). В статьях [3, 4] автора получены результаты для абстрактных уравнений.

В настоящей работе в банаховом пространстве E при $t > 0$ рассматривается уравнение Лежандра

$$u''(t) + \frac{(\operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^q(2t))'}{\operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^q(2t)} u'(t) + \left(\frac{k}{2} + q\right)^2 u(t) = Au(t), \quad (1)$$

содержащее два действительных параметра $k, q \in \mathbb{R}$ и линейный замкнутый оператор A .

Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая этому уравнению на множестве $(0, \infty)$.

Дифференциальный оператор в левой части уравнения (1) представляет собой радиальную часть оператора Лапласа–Бельтрами в двухточечно-однородном пространстве и в симметрическом пространстве ранга, равного единице (см. [2, с. 111]). При $q = 0$ уравнение (1) является уравнением Лежандра, содержащим один параметр k . Обзор публикаций и исследования ряда однозначно разрешимых задач для абстрактного уравнения Лежандра с одним параметром можно найти в работах [5–8] автора. Так называемая неполная задача Коши для такого уравнения, когда разыскивается решение, стремящееся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а второе начальное условие при $t = 0$ не задаётся, была рассмотрена в статье [8]. Ранее

неполная задача Коши для абстрактного волнового уравнения изучалась в работах [9, 10], а для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу — в [11].

Уравнение (1) не входит в рассмотренное в [7] семейство сингулярных дифференциальных уравнений и поэтому требует отдельного изучения.

Одним из методов исследования дифференциальных уравнений является метод операторов преобразования. Напомним, что ненулевой оператор T называется *оператором преобразования*, сплетающим операторы L и M , если выполнено соотношение $TL = MT$. Подробный обзор теории операторов преобразования см. в [2, гл. 2; 12]. В настоящей работе применён метод операторов преобразования для установления разрешимости начальных задач для уравнения (1) и получены явные формулы их решений.

1. ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ПЕРВОМУ ИНДЕКСУ k ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ И ОПЕРАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЕЖАНДРА

В дальнейшем нам понадобятся понятия левостороннего дробного интеграла от функции $u(t)$ по выбираемой специальным образом функции $g(t)$:

$$I_{0+,g}^{\alpha} u(t) \equiv \left(\frac{d}{dg(t)} \right)_{+}^{-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (g(t) - g(s))^{\alpha-1} g'(s) u(s) ds, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

и левосторонней дробной производной $(d/dg(t))_{+}^{\alpha} u(t)$ по функции $g(t)$ (см. [13, с. 248]).

Оператор в левой части уравнения (1) обозначим через

$$L_{k,q} u(t) := u''(t) + \frac{(\operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^q 2t)'}{\operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^q(2t)} u'(t) + \left(\frac{k}{2} + q \right)^2 u(t). \quad (3)$$

Будем также использовать представления

$$\begin{aligned} L_{k,q} u(t) &= u''(t) + \frac{(\operatorname{sh}^{k+q} t \operatorname{ch}^q t)'}{\operatorname{sh}^{k+q} t \operatorname{ch}^q t} u'(t) + \left(\frac{k}{2} + q \right)^2 u(t) = \\ &= u''(t) + ((k+q) \operatorname{cth} t + q \operatorname{th} t) u'(t) + \left(\frac{k}{2} + q \right)^2 u(t), \end{aligned} \quad (4)$$

которые получаются из (3) после элементарных преобразований.

Введём в рассмотрение оператор

$$\Phi_k u(t) = \operatorname{sh}^{k-1} t u(t). \quad (5)$$

В статье [7] при $t > 0$ для достаточно гладких функций $u(t)$ установлены равенства

$$L_{2-k,0} \Phi_k u(t) = \Phi_k L_{k,0} u(t), \quad (6)$$

$$L_{k+2\alpha,0} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} \frac{d}{dt} \right)_{+}^{\alpha} u(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} \frac{d}{dt} \right)_{+}^{\alpha} L_{k,0} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Отметим, что в (7) используется формула (2) при $g(t) = \operatorname{ch} t$.

Равенство (7) справедливо для функций, удовлетворяющих условию $u(0) = 0$, которое может быть снято при $\alpha \in \mathbb{N}$. Таким образом, операторы Φ_k и $(\operatorname{sh}^{-1} t d/dt)_{+}^{\alpha}$ осуществляют движение оператора $L_{k,0}$ по первому индексу. Пусть

$$\mathbb{T}_{k,0} u(t) = \frac{2^{k/2} \Gamma(k/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \Phi_{2-k} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} \frac{d}{dt} \right)_{+}^{-k/2} \frac{u(t)}{\operatorname{sh} t}, \quad (8)$$

тогда, как установлено в [8], при $k > 0$ для функций, удовлетворяющих условию $u'(0) = 0$, из соотношений (6), (7) вытекает равенство

$$L_{k,0} \mathbb{T}_{k,0} u(t) = \mathbb{T}_{k,0} u''(t), \quad (9)$$

при этом определяемый равенством (8) оператор преобразования $\mathbb{T}_{k,0}$ сохраняет начальные условия, т.е.

$$\mathbb{T}_{k,0} u(t)|_{t=0} = u(0), \quad (\mathbb{T}_{k,0} u(t))'|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

Равенство (9) означает, что построен оператор преобразования $\mathbb{T}_{k,0}$, сплетающий операторы $L_{k,0}$ и d^2/dt^2 .

При $k > 0$, $q = 0$ рассмотрим уравнение (1), где оператор A является генератором косинус-оператор-функции (КОФ) $C(t; A)$. Терминологию и примеры генераторов КОФ можно найти в [14, гл. 2.8; 15].

Равенства (9) и (10) фактически означают, что функция $u_{k,0}(t) = \mathbb{T}_{k,0} C(t; A)u_0$ удовлетворяет уравнению (1) при $q = 0$ и начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \quad (11)$$

Теорема 1 [7]. Пусть $k > 0$, $q = 0$, $u_0 \in D(A)$ и оператор A является генератором КОФ $C(t; A)$. Тогда функция

$$u_{k,0}(t) = \mathbb{T}_{k,0} C(t; A)u_0 = \frac{2^{k/2} \Gamma(k/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k/2)} \operatorname{sh}^{1-k} t \int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} s)^{k/2-1} C(s; A)u_0 ds \quad (12)$$

удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (11).

Операторная функция $P_k(t; A) = \mathbb{T}_{k,0} C(t; A)$ названа в [5, 7] операторной функцией Лежандра (ОФЛ). В частном случае, когда оператор $A = (a + 1/2)^2$, $a \in \mathbb{R}$, является оператором умножения на число, ОФЛ $P_k(t; A)$ выражается через присоединённую функцию Лежандра первого рода $P_a^\beta(\cdot)$ (см. [16, с. 661]):

$$P_k(t; A) = \frac{\Gamma(1-\beta) \operatorname{sh}^\beta t}{2^\beta} P_a^\beta(\operatorname{ch} t), \quad \beta = \frac{1-k}{2}.$$

2. ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ИНДЕКСАМ k , q ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Построим далее оператор преобразования, с помощью которого по известному решению $u_{k,0}(t) = \mathbb{T}_{k,0} C(t; A)u_0$ при $q = 0$ определим решение $u_{k,q}(t)$ уравнения (1) при $q > 0$.

Пусть

$$\Psi_{k,q} u(t) = \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t) u(t). \quad (13)$$

В этом случае для определения оператора преобразования в равенстве (2) для левостороннего дробного интеграла от функции $u(t)$ следует выбрать функцию $g(t) = \operatorname{ch}(2t)/2$, а вместо равенств (6), (7) следует, соответственно, использовать соотношения

$$L_{-k,2-q} \Psi_{k,q} u(t) = \Psi_{k,q} L_{k,q} u(t), \quad (14)$$

$$L_{k,q+2\alpha} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)} \frac{d}{dt} \right)_+^\alpha u(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)} \frac{d}{dt} \right)_+^\alpha L_{k,q} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Равенство (15) справедливо для функций, удовлетворяющих условию $u(0) = 0$, которое может быть снято при $\alpha \in \mathbb{N}$. Таким образом, операторы $\Psi_{k,q}$ и $(\operatorname{sh}^{-1}(2t) d/dt)_+^\alpha$ осуществляют движение оператора $L_{k,q}$ по второму индексу. Пусть

$$\mathbb{T}_{0,q} u(t) = \frac{2^q \Gamma(q/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \Psi_{0,2-q} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)} \frac{d}{dt} \right)_+^{-q/2} \frac{u(t)}{\operatorname{sh}(2t)}, \quad (16)$$

тогда при $k > 0$, $q > 0$ на функциях, удовлетворяющих условию $u'(0) = 0$, из соотношений (14), (15) для определяемого равенством (16) оператора $\mathbb{T}_{0,q}$ вытекает равенство

$$L_{k,q} \operatorname{sh}^{-k} t \mathbb{T}_{0,q} \operatorname{sh}^k t u(t) = \operatorname{sh}^{-k} t \mathbb{T}_{0,q} \operatorname{sh}^k t L_{k,0} u(t). \quad (17)$$

Введём в рассмотрение оператор

$$\mathbb{T}_{k,q} = \mu_{k,q} \operatorname{sh}^{-k} t \mathbb{T}_{0,q} \operatorname{sh}^k t \mathbb{T}_{k,0}, \quad \mu_{k,q} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(k/2 + q/2 + 1/2)}{\Gamma(k/2 + 1/2) \Gamma(q/2 + 1/2)}, \quad (18)$$

который является оператором преобразования, сплетающим операторы $L_{k,q}$ и d^2/dt^2 , т.е. на функциях, удовлетворяющих условию $u'(0) = 0$, справедливо равенство

$$L_{k,q} \mathbb{T}_{k,q} u(t) = \mathbb{T}_{k,q} u''(t). \quad (19)$$

Действительно, в силу равенств (9) и (16)–(18) имеем

$$\begin{aligned} L_{k,q} \mathbb{T}_{k,q} u(t) &= \mu_{k,q} L_{k,q} \operatorname{sh}^{-k} t \mathbb{T}_{0,q} \operatorname{sh}^k t \mathbb{T}_{k,0} u(t) = \mu_{k,q} \operatorname{sh}^{-k} t \mathbb{T}_{0,q} \operatorname{sh}^k t L_{k,0} \mathbb{T}_{k,0} u(t) = \\ &= \mu_{k,q} \operatorname{sh}^{-k} t \mathbb{T}_{0,q} \operatorname{sh}^k t \mathbb{T}_{k,0} u''(t) = \mathbb{T}_{k,q} u''(t). \end{aligned}$$

Как и равенства (6), (7), (9) с помощью представления (4) для оператора $L_{k,q}$, соотношения (14), (15), (17) устанавливаются непосредственной проверкой, которая в некоторых случаях может быть и громоздкой. В п. 3 покажем, что (как и операторы $\mathbb{T}_{k,0}$, $\mathbb{T}_{0,q}$) определяемый равенством (18) оператор преобразования $\mathbb{T}_{k,q}$ будет сохранять начальные условия, т.е.

$$\mathbb{T}_{k,q} u(t)|_{t=0} = u(0), \quad (\mathbb{T}_{k,q} u(t))'|_{t=0} = 0.$$

3. ЗАДАЧА КОШИ

С учётом установленного равенства (19) построим решение задачи Коши (1), (11). При $u_0 \in D(A)$ введём в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} u_{k,q}(t) &= \mathbb{T}_{k,q} C(t; A) u_0 = \mu_{k,q} \operatorname{sh}^{-k} t \mathbb{T}_{0,q} \operatorname{sh}^k t \mathbb{T}_{k,0} C(t; A) u_0 = \\ &= \frac{4\Gamma(q/2 + 1/2)\mu_{k,q}}{\sqrt{\pi} \Gamma(q/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \int_0^t (\operatorname{ch}(2t) - \operatorname{ch}(2s))^{q/2-1} \operatorname{sh}^k s \mathbb{T}_{k,0} C(s; A) u_0 ds = \\ &= \frac{2^{k/2+2} \Gamma(k/2 + q/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(q/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \int_0^t (\operatorname{ch}(2t) - \operatorname{ch}(2s))^{q/2-1} \operatorname{sh} s \int_0^s (\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \tau)^{k/2-1} C(\tau; A) u_0 d\tau ds = \\ &= \frac{2^{k/2+2} \Gamma(k/2 + q/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k/2) \Gamma(q/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \times \\ &\times \int_0^t C(\tau; A) u_0 \int_\tau^t \operatorname{sh} s (\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \tau)^{k/2-1} (\operatorname{ch}(2t) - \operatorname{ch}(2s))^{q/2-1} d\tau ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Равенство (19) означает, что функция (20) удовлетворяет уравнению (1). Действительно,

$$L_{k,q}u_{k,q}(t) = L_{k,q} \mathbb{T}_{k,q} C(t; A)u_0 = \mathbb{T}_{k,q} C''(t)u_0 = A \mathbb{T}_{k,q} C(t; A)u_0 = Au_{k,q}(t).$$

Внутренний интеграл в представлении (20) можно вычислить (см. формулу (3.20) в [17]), тогда

$$u_{k,q}(t) = \frac{2^{2-k/2}\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2+q/2)\operatorname{ch}^{k/2}t\operatorname{sh}^q t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \times \\ \times \int_0^t (\operatorname{ch}(2t) - \operatorname{ch}(2\tau))^{k/2+q/2-1} {}_2F_1\left(\frac{k}{2}+q-1, \frac{k}{2}; \frac{k+q}{2}; \frac{\operatorname{ch}t - \operatorname{ch}\tau}{2\operatorname{ch}t}\right) C(\tau; A)u_0 d\tau,$$

где ${}_2F_1(\cdot)$ — гипергеометрическая функция.

Покажем далее, что функция (20) удовлетворяет начальным условиям (11). Отметим, что при $t \rightarrow 0$ оператор $\mathbb{T}_{k,q}$ действует на функции как оператор преобразования типа Пуассона (см. [2, пп. 2.1.2, 2.1.3])

$$\mathbb{P}_{k,q}C(t; A)u_0 = \frac{2\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(q/2)t^{k+q-1}} \int_0^t s^k(t^2-s^2)^{q/2-1} C(s; A)u_0 ds,$$

который и обладает нужными нам свойствами:

$$\mathbb{P}_{k,q}u(t)|_{t=0} = u(0), \quad (\mathbb{P}_{k,q}u(t))'|_{t=0} = 0.$$

Разлагая в соответствующие ряды подынтегральные функции в представлении (20) и используя интегралы 2.2.3.1, 2.2.4.8 из [18], будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_{k,q}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^{q+1}\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^k t\operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \int_0^t s(t^2-s^2)^{q/2-1} \int_0^s (s^2-\tau^2)^{k/2-1} u_0 d\tau ds = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\Gamma(k/2+q/2+1/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(q/2)t^{k+q-1}} \int_0^t s^k(t^2-s^2)^{q/2-1} u_0 ds = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}_{k,q}C(t; A)u_0 = u_0.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $k > 0$, $q > 0$, $u_0 \in D(A)$ и оператор A является генератором КОФ $C(t; A)$. Тогда функция (20) является единственным решением задачи (1), (11).

Доказательство. Для доказательства теоремы, учитывая изложенное выше в п. 3, осталось установить единственность решения задачи (1), (11). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t, s) = f(C(s; A)(u_1(t) - u_2(t))),$$

где $f \in E^*$ (E^* — сопряжённое пространство), $t, s \geq 0$, удовлетворяющую, очевидно, уравнению

$$\frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial t^2} + \frac{(\operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^q(2t))'}{\operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^q(2t)} \frac{\partial w(t, s)}{\partial t} + \left(\frac{k}{2} + q\right)^2 w(t, s) = \frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial s^2}, \quad t, s > 0, \quad (21)$$

и условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t, s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial w(t, s)}{\partial t} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial w(t, s)}{\partial s} = 0. \quad (22)$$

Применив по переменной s преобразование Лапласа, из (21), (22) для образа $\hat{w}(t, \lambda)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}(t, \lambda)}{\partial t^2} + \frac{(\operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^q(2t))'}{\operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^q(2t)} \frac{\partial \hat{w}(t, \lambda)}{\partial t} + \left(\frac{k}{2} + q\right)^2 \hat{w}(t, \lambda) = \lambda^2 \hat{w}(t, \lambda), \quad t > 0, \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{w}(t, \lambda) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{w}(t, \lambda)}{\partial t} = 0. \quad (24)$$

В [19] установлено, что скалярная задача (23), (24) имеет только нулевое решение. Следовательно, $\hat{w}(t, \lambda) = w(t, s) = 0$ для любого $s \geq 0$. В силу произвольности функционала $f \in E^*$ при $s = 0$ получим равенство $u_1(t) \equiv u_2(t)$, тем самым единственность решения рассматриваемой задачи установлена. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $k > 0$, $q = 2$ и оператор A является генератором КОФ $C(t; A)$. Тогда после вычисления внутреннего интеграла в формуле (20) решение задачи (1), (11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_{k,2}(t) &= \frac{2^{k/2+2} \Gamma(k/2 + 3/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}(2t)} \int_0^t C(\tau; A) u_0 \int_{\tau}^t \operatorname{sh} s (\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \tau)^{k/2-1} ds d\tau = \\ &= \frac{2^{k/2+3} \Gamma(k/2 + 3/2)}{k \sqrt{\pi} \Gamma(k/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}(2t)} \int_0^t (\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \tau)^{k/2} C(\tau; A) u_0 d\tau = \frac{1}{\operatorname{ch} t} P_{k+2}(t; A) u_0, \end{aligned}$$

где $P_{k+2}(t; A) = \mathbb{T}_{k+2,0} C(t; A)$ — ОФЛ (см. (12)).

В частном случае если в уравнении (1) $k = q = 2$, $A \in \mathbb{R}$, $C(t; A) = \operatorname{ch}(t\sqrt{A})$, то интеграл может быть вычислен:

$$\begin{aligned} u_{2,2}(t) &= \frac{6}{\operatorname{sh}^2 t \operatorname{sh}(2t)} \int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \tau) \operatorname{ch}(\tau\sqrt{A}) u_0 d\tau = \\ &= \frac{6\sqrt{A} \operatorname{sh} t \operatorname{ch}(t\sqrt{A}) u_0 - 6 \operatorname{ch} t \operatorname{sh}(t\sqrt{A}) u_0}{(A-1)\sqrt{A} \operatorname{sh}^2 t \operatorname{sh}(2t)} \quad \text{если } A \neq 0, A \neq 1. \end{aligned} \quad (25)$$

При $A = 0$ или $A = 1$ в правой части (25) следует вычислить соответствующие пределы, в результате получим

$$u_{2,2}(t) = \begin{cases} \frac{6(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) u_0}{\operatorname{sh}^2 t \operatorname{sh}(2t)}, & A = 0, \\ \frac{3(\operatorname{sh} 2t - 2t) u_0}{2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{sh}(2t)}, & A = 1. \end{cases}$$

4. ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ПЕРВОМУ ИНДЕКСУ k ДЛЯ НЕПОЛНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ И ПРИСОЕДИНЁННАЯ ОПЕРАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЕЖАНДРА

В дальнейшем нас будет интересовать решение уравнения (1), которое при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, поэтому в этом пункте вместо левостороннего дробного интеграла от функции $u(t)$ по выбираемой специальным образом функции $g(t)$ будем использовать понятия правостороннего дробного интеграла

$$I_{\infty-,g}^{\alpha} u(t) = \left(\frac{d}{dg(t)} \right)^{-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} (g(s) - g(t))^{\alpha-1} g'(s) u(s) ds, \quad \alpha > 0, \quad (26)$$

и правосторонней дробной производной $(d/dg(t))_{+}^{\alpha} u(t)$.

В [8] при $t > 0$ для достаточно гладких и экспоненциально убывающих функций $u(t)$ установлено равенство

$$L_{k+2\alpha,0} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} \frac{d}{dt} \right)_-^\alpha u(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} \frac{d}{dt} \right)_-^\alpha L_{k,0} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Таким образом, определяемый равенством (5) оператор Φ_k и оператор $(\operatorname{sh}^{-1} t d/dt)_-^\alpha$ осуществляют движение оператора $L_{k,0}$ по первому индексу.

Пусть

$$\hat{\mathbb{T}}_{k,0} u(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \Phi_{2-k} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} \frac{d}{dt} \right)_-^{-k/2} \frac{u(t)}{\operatorname{sh} t}, \quad (28)$$

тогда [8] при $k > 0$ для экспоненциально убывающих функций из соотношений (6), (27) вытекает равенство

$$L_{k,0} \hat{\mathbb{T}}_{k,0} u(t) = \hat{\mathbb{T}}_{k,0} u''(t), \quad (29)$$

которое означает, что формулой (28) определён оператор преобразования $\hat{\mathbb{T}}_{k,0}$, сплетающий операторы $L_{k,0}$ и d^2/dt^2 .

Поскольку нас интересует решение уравнения (1), которое при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, то требуемое условие будет обеспечено видом оператора A . Будем предполагать, что оператор $A = B^2$, где B — генератор экспоненциально убывающей C_0 -полугруппы $T(t; B)$, допускающей оценку

$$\|T(t; B)\| \leq \Upsilon e^{-\omega t}, \quad \Upsilon \geq 1, \quad \omega > 0. \quad (30)$$

При $k > 0$, $\omega > |k/2 - 1|$, $v_0 \in E$, следуя [8], введём в рассмотрение операторную функцию

$$\begin{aligned} Q_k(t; B)v_0 &= \hat{\mathbb{T}}_{k,0} T(t; B)v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \Phi_{2-k} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} \frac{d}{dt} \right)_-^{-k/2} \frac{T(t; B)v_0}{\operatorname{sh} t} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \operatorname{sh}^{1-k} t \int_t^\infty (\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} t)^{k/2-1} T(s; B)v_0 ds. \end{aligned} \quad (31)$$

Сходимость интеграла в (31) при $\omega > |k/2 - 1|$ обеспечена условием $k > 0$ и неравенством (30). Действительно, учитывая интеграл 2.4.14.1 из [18], получаем оценку

$$\|Q_k(t; B)\| \leq \frac{\Upsilon \sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \operatorname{sh}^{1-k} t \int_t^\infty (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} s)^{k/2-1} e^{-\omega t} ds \leq \Upsilon \sqrt{2} \operatorname{sh}^{1/2-k/2} t Q_{\omega-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch} t), \quad (32)$$

где $Q_{\omega-1/2}^{k/2-1/2}(\cdot)$ — присоединённая функция Лежандра второго рода, которая при $t \rightarrow +\infty$ стремится к нулю, поскольку при $t \rightarrow \infty$ главный член асимптотики функции $Q_{\omega-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch} t)$ имеет вид $c_0 \operatorname{ch}^{-\omega-1/2} t$ с некоторой постоянной c_0 (см., например, [20, § 7]).

В частности, если $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$, то $T(t; B) = e^{Bt}$ и (см. интеграл 2.4.14.1 из [18])

$$Q_k(t; B) = -i\sqrt{2} \exp \left\{ \frac{k\pi}{2} i \right\} \operatorname{sh}^{1/2-k/2} t Q_{-B-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch} t). \quad (33)$$

Операторная функция $Q_k(t; B)$ представляет собой результат применения оператора преобразования $\hat{\mathbb{T}}_{k,0}$ к убывающей полугруппе $T(t; B)$ и называется присоединённой операторной функцией Лежандра (ПОФЛ), а равенство (29) означает, что при $q = 0$ функция $u(t) = Q_k(t; B)v_0$ удовлетворяет уравнению (1). Таким образом, справедлива

Теорема 3 [8]. Пусть $k > 0$, $q = 0$, $v_0 \in D(A)$ и оператор A представим в виде $A = B^2$, где B — генератор C_0 -полугруппы $T(t; B)$, допускающей оценку (30) при $\omega > |k/2 - 1|$. Тогда определяемая равенством (31) функция $u_{k,0}(t) = Q_k(t; B)v_0$ удовлетворяет уравнению (1).

5. ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ИНДЕКСАМ k, q ДЛЯ НЕПОЛНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Построим далее оператор преобразования, с помощью которого по известному решению $u_{k,0}(t) = Q_k(t; B)v_0$ определим решение $u_{k,q}(t)$ уравнения (1) при $q > 0$. Пусть

$$\Psi_{k,q}u(t) = \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)u(t). \quad (34)$$

В этом случае для определения оператора преобразования вместо равенств (6), (7) следует соответственно использовать соотношения

$$L_{-k,2-q}\Psi_{k,q}u(t) = \Psi_{k,q}L_{k,q}u(t), \quad (35)$$

$$L_{k,q+2\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}_{-}u(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha}_{-}L_{k,q}u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

Равенство (36) справедливо для экспоненциально убывающих функций $u(t)$. Таким образом, определяемый формулой (34) оператор $\Psi_{k,q}$ и определяемый равенством (26) при $g(t) = \operatorname{ch}(2t)/2$ оператор $(\operatorname{sh}^{-1}(2t) d/dt)^{\alpha}_{-}$ осуществляют движение оператора $L_{k,q}$ по второму индексу. Пусть

$$\hat{\mathbb{T}}_{0,q}u(t) = \Psi_{0,2-q}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(2t)}\frac{d}{dt}\right)^{-q/2}_{-}\frac{u(t)}{\operatorname{sh}(2t)}, \quad (37)$$

тогда при $k > 0, q > 0$ для экспоненциально убывающих функций $u(t)$ из соотношений (35), (36) вытекает равенство

$$L_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^ktu(t) = \operatorname{sh}^{-k}t\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^ktL_{k,0}u(t), \quad (38)$$

которое означает, что построен оператор преобразования

$$\hat{\mathbb{T}}_{k,q} = \operatorname{sh}^{-k}t\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^kt\hat{\mathbb{T}}_{k,0}, \quad (39)$$

сплетающий операторы $L_{k,q}$ и d^2/dt^2 , т.е. для экспоненциально убывающих функций $u(t)$ справедливо равенство

$$L_{k,q}\hat{\mathbb{T}}_{k,q}u(t) = \hat{\mathbb{T}}_{k,q}u''(t). \quad (40)$$

Действительно, в силу равенств (29), (37)–(40) имеем

$$\begin{aligned} L_{k,q}\hat{\mathbb{T}}_{k,q}u(t) &= L_{k,q}\operatorname{sh}^{-k}t\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^kt\hat{\mathbb{T}}_{k,0}u(t) = \operatorname{sh}^{-k}t\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^ktL_{k,0}\hat{\mathbb{T}}_{k,0}u(t) = \\ &= \operatorname{sh}^{-k}t\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^kt\hat{\mathbb{T}}_{k,0}u''(t) = \hat{\mathbb{T}}_{k,q}u''(t). \end{aligned}$$

Как и в случае равенств (6), (7), (9), используя для оператора $L_{k,q}$ представление (4), соотношения (35), (36), (38) устанавливаются непосредственной проверкой.

6. НЕПОЛНАЯ ЗАДАЧА КОШИ

Равенство (40) означает, что при $v_0 \in D(B^2)$ функция

$$\begin{aligned} u_{k,q}(t) &= \hat{\mathbb{T}}_{k,q}T(t; B)v_0 = \operatorname{sh}^{-k}t\hat{\mathbb{T}}_{0,q}\operatorname{sh}^kt\hat{\mathbb{T}}_{k,0}T(t; B)v_0 = \\ &= \frac{2^{1-q/2}}{\Gamma(q/2)\operatorname{sh}^kt\operatorname{sh}^{q-1}(2t)}\int_t^{\infty}(\operatorname{ch}(2s) - \operatorname{ch}(2t))^{q/2-1}\operatorname{sh}^ksQ_k(s; B)v_0 ds, \end{aligned} \quad (41)$$

которую с учётом (31) можно также представить в виде

$$\begin{aligned}
 u_{k,q}(t) &= \frac{2^{1-q/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2) \Gamma(q/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \times \\
 &\times \int_t^\infty (\operatorname{ch}(2s) - \operatorname{ch}(2t))^{q/2-1} \operatorname{sh} s \int_s^\infty (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{ch} s)^{k/2-1} T(\tau; B) v_0 d\tau ds = \\
 &= \frac{2^{1-q/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2) \Gamma(q/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \int_t^\infty T(\tau; B) v_0 \int_t^\tau \operatorname{sh} s (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{ch} s)^{k/2-1} (\operatorname{ch}(2s) - \operatorname{ch}(2t))^{q/2-1} ds d\tau, \quad (42)
 \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению (1), поскольку в силу (40)

$$L_{k,q} u_{k,q}(t) = L_{k,q} \hat{\mathbb{T}}_{k,q} T(t; B) v_0 = \hat{\mathbb{T}}_{k,q} T''(t) v_0 = B^2 \hat{\mathbb{T}}_{k,q} T(t; B) v_0 = A u_{k,q}(t).$$

Так же как и в (20), внутренний интеграл в представлении (42) можно вычислить, и тогда решение уравнения (1) запишется как

$$\begin{aligned}
 u_{k,q}(t) &= \frac{2^{1-k/2-q/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2+q/2) \operatorname{ch}^{k/2} t \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \times \\
 &\times \int_t^\infty (\operatorname{ch}(2\tau) - \operatorname{ch}(2t))^{k/2+q/2-1} {}_2F_1\left(\frac{k}{2}+q-1, \frac{k}{2}; \frac{k+q}{2}; \frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \tau}{2 \operatorname{ch} t}\right) T(\tau; B) v_0 d\tau. \quad (43)
 \end{aligned}$$

Как уже было отмечено, главный член асимптотики функции $Q_{\omega-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch} t)$ имеет вид $c_0 \operatorname{ch}^{-\omega-1/2} t$ с некоторой постоянной c_0 , поэтому при $\omega > \max\{k/2+q-2, |1-k/2|\}$, как следует из представления (20) и соотношений (12), (13), функция $u_{k,q}(t)$ удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u'(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u''(t)\| = 0.$$

Выясним теперь, какому начальному условию при $t=0$ удовлетворяет функция (43). Если $0 < k+q < 1$, $v_0 \in E$, то в силу оценки (32) и теоремы Лебега после очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} u_{k,q}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^{1-k/2-q/2} \sqrt{\pi} t}{\Gamma(k/2+q/2) \operatorname{ch}^{k/2} t \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \int_1^\infty (\operatorname{ch}(2t\xi) - \operatorname{ch}(2t))^{k/2+q/2-1} \times \\
 &\times {}_2F_1\left(\frac{k}{2}+q-1, \frac{k}{2}; \frac{k+q}{2}; \frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}(t\xi)}{2 \operatorname{ch} t}\right) T(t\xi; B) v_0 d\xi = \\
 &= \frac{2^{1-q} \sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2+q/2)} \int_1^\infty (\xi^2 - 1)^{k/2+q/2-1} v_0 d\xi = \frac{\Gamma(1/2-k/2-q/2)}{2^q} v_0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $k > 0$, $q > 0$, $k+q < 1$ и оператор A представим в виде $A = B^2$, где B — генератор C_0 -полугруппы $T(t; B)$, допускающей оценку (30) при $\omega > 1 - k/2$. Тогда при любом выборе $u_0 \in D(A)$ функция

$$u_{k,q}(t) = \frac{2^{q/2+1}}{\Gamma(q/2) \Gamma(1-k/2-q/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \int_t^\infty (\operatorname{ch}(2s) - \operatorname{ch}(2t))^{q/2-1} \operatorname{sh}^k s Q_k(s; B) u_0 ds$$

является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u'(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u''(t)\| = 0.$$

Далее при $k > 0$, $q > 0$, $k + q \geq 1$ для $v_0 \in D(A)$ аналогично найдём предел при $t \rightarrow 0$ производной функции $u_{k,q}(t)$ с весом t^{k+q} . Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t^{k+q} u'_{k,q}(t) &= \frac{2^{1-q} \sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2 + q/2)} \lim_{t \rightarrow 0} t^{k+q} \frac{d}{dt} \int_1^\infty (\xi^2 - 1)^{k/2 + q/2 - 1} T(t\xi; B) v_0 d\xi = \\ &= \frac{2^{1-q} \sqrt{\pi}}{(k+q)\Gamma(k/2 + q/2)} \lim_{t \rightarrow 0} t^{k+q+1} \int_1^\infty (\xi^2 - 1)^{k/2 + q/2} T(t\xi; B) B^2 v_0 d\xi. \end{aligned}$$

Предел последнего интеграла, с учётом существования дробной степени у оператора $-B$ (см., например, [14, с. 96]), был найден в [8], в результате получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{k+q} u'_{k,q}(t) = -2^{k/2} \Gamma(k/2 + q/2 + 1/2) (-B)^{1-k-q} v_0.$$

На основании предыдущих рассуждений справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $k > 0$, $q > 0$, $k + q \geq 1$, оператор A представим в виде $A = B^2$, где B — генератор C_0 -полугруппы $T(t; B)$, допускающей оценку (30) при $\omega > \max\{k/2 + q - 2, |1 - k/2|\}$, u , кроме того, $u_1 \in D((-B)^{k+q+1})$. Тогда функция

$$\begin{aligned} u_{k,q}(t) &= \frac{2^{1-q/2-k}}{\Gamma(q/2)\Gamma(k/2 + q/2 + 1/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \times \\ &\times \int_t^\infty (\operatorname{ch}(2s) - \operatorname{ch}(2t))^{q/2-1} \operatorname{sh}^k s Q_k(s; B) (-B)^{k+q-1} u_1 ds \end{aligned} \quad (44)$$

является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^k u'(t) = u_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u'(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u''(t)\| = 0. \quad (45)$$

Пример 2. Пусть $k > 0$, $q = 2$ и оператор A представим в виде $A = B^2$, где B — генератор C_0 -полугруппы $T(t; B)$, допускающей оценку (30) при $\omega > \max\{k/2, |1 - k/2|\}$. Тогда по формуле (44) после вычисления внутреннего интеграла будем иметь

$$\begin{aligned} u_{k,2}(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}(2t)} \int_t^\infty T(\tau; B) v_0 \int_t^\tau \operatorname{sh} s (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{ch} s)^{k/2-1} ds d\tau = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2 + 1) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}(2t)} \int_t^\infty (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{ch} t)^{k/2} T(\tau; B) v_0 d\tau = \frac{1}{2 \operatorname{ch} t} Q_{k+2}(t; B) v_0, \end{aligned} \quad (46)$$

где $Q_{k+2}(t; B)$ — ПОФЛ (см. (11)),

$$v_0 = -\frac{(-B)^{k+1} u_1}{2^{k/2+1} \Gamma(k/2 + 3/2)}. \quad (47)$$

Функция (46) является решением задачи (1), (45).

Пример 3. Пусть $k > 0$, $q > 0$, $k + q \geq 1$, $B \in \mathbb{R}$, $B < -\max\{k/2 + q - 2, |1 - k/2|\}$, $T(t; B) = e^{Bt}$, тогда ПОФЛ имеет вид (см. (33))

$$Q_k(t; B) = \mu_k \operatorname{sh}^{1/2-k/2} t Q_{-B-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch} t), \quad \mu_k = -i\sqrt{2} \exp\left\{\frac{k\pi}{2}i\right\}.$$

Учитывая интеграл 2.18.4.3 из [16], после очевидных преобразований из равенств (41), (47) получаем

$$\begin{aligned} u_{k,q}(t) &= \frac{2^{1-q/2} \mu_k}{\Gamma(q/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \int_t^\infty (\operatorname{ch}(2s) - \operatorname{ch}(2t))^{q/2-1} \operatorname{sh}^{k/2+1/2} s Q_{-B-1/2}^{k/2-1/2}(\operatorname{ch} s) v_0 ds = \\ &= \frac{\mu_k}{\Gamma(q/2) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1}(2t)} \int_t^\infty (\xi^2 - \operatorname{ch}^2 t)^{q/2-1} (\xi^2 - 1)^{k/4-1/4} Q_{-B-1/2}^{k/2-1/2}(\xi) v_0 d\xi = \\ &= -\frac{\Gamma(-B/2 - k/4 + 1/2) \Gamma(-B/2 - k/4 - q/2 + 1)}{2^{3k/2+q} \Gamma(k/2 + q/2 + 1/2) \Gamma(1-B) \operatorname{sh}^k t \operatorname{sh}^{q-1} 2t \operatorname{ch}^{k/2-q-B+1} t} \times \\ &\times {}_2F_1(-B/2 - k/4 + 1/2, -B/2 - k/4 - q/2 + 1; 1-B; \operatorname{ch}^{-2} t) (-B)^{k+q-1} u_1. \end{aligned} \quad (48)$$

Функция (48) является решением задачи (1), (45).

В частном случае если в уравнении (1) $k = q = 2$, $B < -1$, то решение задачи (1), (45) имеет вид

$$u_{2,2}(t) = \frac{B^2(B \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t)}{3(B^2 - 1) \operatorname{sh}^2 t \operatorname{sh}(2t)} e^{Bt} u_1.$$

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carroll, R.W. Singular and Degenerate Cauchy Problems / R.W. Carroll, R.E. Showalter. — New York : Academic Press, 1976. — 333 p.
2. Ситник, С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. — М. : Физматлит, 2019. — 224 с.
3. Глушак, А.В. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак, О.А. Покручин // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 41–59.
4. Глушак, А.В. Семейство операторных функций Бесселя / А.В. Глушак // Итоги науки и техники. Сер. Современ. математика и её приложения. Темат. обзоры. — Т. 187. — М. : ВИНТИ РАН, 2020. — С. 36–43.
5. Глушак, А.В. Операторная функция Лежандра / А.В. Глушак // Изв. РАН. Сер. Математическая. — 2001. — Т. 65, № 6. — С. 3–14.
6. Глушак, А.В. Однозначно разрешимые задачи для абстрактного уравнения Лежандра / А.В. Глушак // Изв. вузов. Математика. — 2018. — № 7. — С. 3–15.
7. Glushak, A.V. A family of singular differential equations / A.V. Glushak // Lobachevskii J. Math. — 2020. — V. 41, № 5. — P. 763–771.
8. Глушак, А.В. Присоединённая операторная функция Лежандра и неполная задача Коши / А.В. Глушак // Изв. вузов. Математика. — 2022. — № 9 — С. 3–13.
9. Fattorini, H.O. The undetermined Cauchy problem in Banach spaces / H.O. Fattorini // Math. Ann. — 1973. — V. 200, № 5. — P. 103–112.
10. De Laubenfels, R. Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations / R. De Laubenfels. — Springer-Verlag, 1994. — 244 p.

11. Глушак, А.В. Операторная функция Макдональда и неполная задача Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак // Итоги науки и техн. Сер. Современ. математика и её приложения. Темат. обзоры. — Т. 195. — М. : ВИНТИ РАН, 2021. — С. 35–43.
12. Катрахов, В.В. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // Современ. математика. Фунд. направления. — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 211–426.
13. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.
14. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — Киев : Выща школа, 1989. — 347 с.
15. Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. ВИНТИ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.
16. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Наука, 2003. — 688 с.
17. Carrol, R.W. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / R.W. Carrol. — North Holland, 1982. — 457 p.
18. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Наука, 1981. — 800 с.
19. Trimeche, K. Transformation integrale de Weyl et theoreme de Paley–Wiener associes a un operateur differentiel singulier sur $(0, \infty)$ / K. Trimeche // J. Math. pur et Appl. — 1981. — V. 60. — P. 51–98.
20. Virchenko, N. Generalized Associated Legendre Functions and their Applications / N. Virchenko, I. Fedotova. — Singapore ; New Jersey ; London ; Hong Kong : World Scientific, 2001. — 196 p.

INITIAL PROBLEMS FOR THE ABSTRACT LEGENDRE EQUATION CONTAINING TWO PARAMETERS

© 2024 / A. V. Glushak

Belgorod State National Research University, Russia
e-mail: *aleglu@mail.ru*

Using the concept of a fractional integral of a function over another function, transformation operators are constructed that make it possible to prove the solvability of initial problems for the abstract singular Legendre equation containing two parameters. Examples are given.

Keywords: initial problem, Legendre’s singular differential equation, fractional integral of a function over another function, operator of motion with respect to a parameter, transformation operator, solvability

REFERENCES

1. Carroll, R.W. and Showalter, R.E., *Singular and Degenerate Cauchy Problems*, New York: Academic Press, 1976.
2. Sitnik, S.M. and Shishkina, E.L., *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial’nykh uravnenii s operatorami besselya* (Method of Transformation Operators for Differential Equations with Bessel Operators), Moscow: Fizmatlit, 2019.
3. Glushak, A.V. and Pokruchin, O.A., Criterion for the solvability of the Cauchy problem for an abstract Euler–Poisson–Darboux equation, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 39–57.
4. Glushak, A.V., Family of Bessel operator functions, *Itoги Nauki Tekh. Ser.: Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obzory*, Moscow: VINITI RAN, 2020, vol. 187, pp. 36–43.
5. Glushak, A.V., The Legendre operator function, *Izvestiya: Mathematics*, 2001, vol. 65, no. 6, pp. 1073–1083.
6. Glushak, A.V., Uniquely solvable problems for abstract Legendre equation, *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 7, pp. 1–12.
7. Glushak, A.V., A family of singular differential equations, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 5, pp. 763–771.
8. Glushak, A.V., The associated operator Legendre function and the incomplete Cauchy problem, *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 9, pp. 1–10.

9. Fattorini, H.O., The undetermined Cauchy problem in Banach spaces, *Math. Ann.*, 1973, vol. 200, no. 5, pp. 103–112.
10. De Laubenfels, R. *Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations*, Springer-Verlag, 1994.
11. Glushak, A.V., Macdonald operator function and the incomplete Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation, *Itoji Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obzory*, 2021, vol. 195, pp. 35–43.
12. Katrakhov, V.V. and Sitnik, S.M., The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2018, vol. 64, no. 2, pp. 211–426.
13. Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Boca Raton: CRC Press, 1993.
14. Goldstein, J.A., *Semigroups of Linear Operators and Applications*, New York: Oxford Univ. Press, 1985.
15. Vasil'ev, V.V., Krein, S.G., and Piskarev, S.I., Semigroups of operators, cosine operator functions, and linear differential equations, *J. Sov. Math.*, 1991, vol. 54, no. 4, pp. 1042–1129.
16. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integrals and Series: More Special Functions*, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1990.
17. Carrol, R.W., *Transmutation, Scattering Theory and Special Functions*, North Holland, 1982.
18. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., *Integrals and Series. Elementary Functions*, New York etc.: Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
19. Trimeche, K., Transformation integrale de Weyl et theoreme de Paley–Wiener associes a un operateur differentiel singulier sur $(0, \infty)$, *J. Math. pur et Appl.*, 1981, vol. 60, pp. 51–98.
20. Virchenko, N. and Fedotova, I., *Generalized Associated Legendre Functions and their Applications*, Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 2001.