

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.957

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ© 2024 г. М. В. Артемьева¹, М. О. Корпусов²^{1,2}Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова²Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москваe-mail: ¹artemeva.mv14@physics.msu.ru, ²korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 21.01.2024 г., после доработки 23.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Рассмотрена теплоэлектрическая (1+1)-мерная модель нагрева полупроводника в электрическом поле. Для соответствующей задачи Коши доказано существование непродолжаемого во времени классического решения, получена глобальная во времени априорная оценка, обосновано отсутствие даже локального во времени классического решения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение соболевского типа, задача Коши в полосе, локальная разрешимость, классическое решение

DOI: 10.31857/S0374064124100014, EDN: JUDMOQ

ВВЕДЕНИЕ

Современные радиоинформационные системы (РИС), решающие задачи мониторинга космического пространства, характеризуются большим числом плотно расположенной радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), непрерывно функционируют в течение длительного времени и имеют высокие требования к надёжности. При работе структурно-сложной РИС в теплонапряжённых режимах резко возрастает тепловыделение в РЭА за счёт высокой токовой нагрузки. Повышение тепловыделения влечёт за собой перегрев аппаратуры, что, как следствие, увеличивает вероятность её отказов и снижает надёжность изделия [1]. Данные обстоятельства обуславливают необходимость исследования нелинейных тепловых процессов в полупроводнике, а также построения и изучения теплоэлектрической модели полупроводника.

В настоящей работе, продолжающей исследования [2–6], рассматривается следующая задача Коши для модельного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(v_x + \frac{\gamma}{2} v^2 \right) + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} v_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (1)$$

причём функция $v = \phi_x$, где ϕ — потенциал электрического поля. Уравнение (1) возникло в [6] при рассмотрении одной теплоэлектрической модели, потенциал электрического поля ϕ в которой был связан с температурой ψ соотношением

$$-\psi_{xx} = \gamma_0 |\phi_x|^2.$$

Начальную функцию $v_0(x)$ выбираем такой, что при $x \rightarrow -\infty$ она убывает как $(1-x)^{-\alpha}$ при $\alpha > 1$ и существует такое число $b > 0$, что при $x \geq b$ имеем $v_0(x) \geq a > 0$.

В статье доказано существование классического непродолжаемого во времени решения задачи в весовых пространствах и получен результат об отсутствии даже локального во времени классического решения.

1. ЗАДАЧА КОШИ

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_x + v^2) + v_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T], \quad (2)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (3)$$

Пусть $x^- := \min\{x, 0\}$, $\tau(x) := 1 - x^-$. Через $C_b^{(k)}(\mathbb{R}^1)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ будем обозначать линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций до порядка k включительно, причём все частные производные до порядка k являются ограниченными. Это линейное пространство является банаховым относительно стандартной нормы.

Определение 1. Функция $w \in C_b(\tau^\mu; \mathbb{R}^1)$ при $\mu > 0$, если $w \in C_b(\mathbb{R}^1)$ и конечна норма:

$$\|w\|_\mu := \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \tau^\mu(x) |w(x)| < +\infty. \quad (4)$$

Определение 2. Функция $w \in C_b^{(1)}(\tau^\mu, \tau^\nu; \mathbb{R}^1)$ при $\mu > 0$ и $\nu > 0$, если $w \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ и конечна норма:

$$\|w\|_{\mu, \nu} := \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \tau^\mu(x) |w(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \tau^\nu(x) \left| \frac{dw(x)}{dx} \right| < +\infty. \quad (5)$$

Определение 3. Классическим решением задачи Коши (2), (3) называется функция класса $v \in C^{(1)}([0, T]; C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1))$ при $\alpha > 1$, удовлетворяющая равенствам (2) и (3) поточечно.

Справедлива следующая

Лемма 1. Линейные пространства $C_b(\tau^\mu; \mathbb{R}^1)$ и $C_b^{(1)}(\tau^\mu, \tau^\nu; \mathbb{R}^1)$ являются банаховыми относительно норм (4) и (5).

Пусть функция $v \in C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1)$ при $\alpha > 1$ удовлетворяет следующему условию: найдутся такие числа $a > 0$ и $b > 0$, что

$$v(x) \geq a > 0 \quad \text{при} \quad x \geq b > 0. \quad (6)$$

Рассмотрим оператор

$$Q_2(v)h(x) := \frac{dh(x)}{dx} + 2v(x)h(x). \quad (7)$$

Пусть

$$h \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1), \quad f \in C_b((1 - x^-)^{2\alpha}; \mathbb{R}^1), \quad \alpha > 1. \quad (8)$$

Запишем уравнение

$$\frac{dh(x)}{dx} + 2v(x)h(x) = f(x). \quad (9)$$

Очевидно, что $Q_2(v): C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1) \rightarrow C_b(\tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$.

Введём функцию $q(x) := \int_0^x v(z) dz$. Заметим, что $q \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ и $q'(x) = v(x)$, а также справедливы равенства

$$\exp\{-2q(x)\} \frac{d}{dx} (\exp\{2q(x)\} h(x)) = f(x), \quad \frac{d}{dx} (\exp\{2q(x)\} h(x)) = \exp\{2q(x)\} f(x). \quad (10)$$

Проинтегрировав второе равенство в (10) по x в пределах от $-\infty$ до x , с учётом (8) получим

$$h(x) = \int_{-\infty}^x \exp\{-2I(x, y)\} f(y) dy, \quad I(x, y) := q(x) - q(y). \quad (11)$$

Справедливо равенство

$$I(x, y) = \int_y^x v(z) dz. \quad (12)$$

Таким образом, из (11) и (12) имеем

$$h(x) = \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -2 \int_y^x v(z) dz \right\} f(y) dy.$$

Получим оценку для функции $h(x)$, рассмотрев следующие случаи.

1. Пусть $x \leq 0$, тогда

$$|h(x)| \leq \|f\|_{2\alpha} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ 2\|v\|_{\alpha} \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{(1-z^-)^{\alpha}} \right\} \frac{1}{(1-y^-)^{2\alpha}} dy = \|f\|_{2\alpha} \exp \{ 2(\alpha-1)^{-1} \|v\|_{\alpha} \} \frac{1}{(1-x)^{2\alpha-1}}, \quad (13)$$

откуда получаем при $\alpha > 1$ оценку

$$\sup_{-\infty < x \leq 0} |h(x)|(1-x^-)^{\alpha} \leq \|f\|_{2\alpha} \exp \{ a_1(b, \alpha) \|v\|_{\alpha} \}. \quad (14)$$

2. Если $0 < x \leq b$, то справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq x \leq b} |h(x)| \leq \|f\|_{2\alpha} \exp \left\{ 2\|v\|_{\alpha} \int_{-\infty}^b \frac{dz}{(1-z^-)^{\alpha}} \right\} \int_{-\infty}^b \frac{dy}{(1-y^-)^{2\alpha}} = A_1(b, \alpha) \|f\|_{2\alpha} \exp \{ a_1(b, \alpha) \|v\|_{\alpha} \}. \quad (15)$$

3. При $x > b$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \|f\|_{2\alpha} \int_{-\infty}^b \exp \left\{ 2 \int_{-\infty}^b |v(z)| dz \right\} \exp \left\{ -2 \int_b^x v(z) dz \right\} \frac{1}{(1-y^-)^{2\alpha}} dy + \\ &\quad + \|f\|_{2\alpha} \int_b^x \exp \left\{ -2 \int_y^x v(z) dz \right\} dy \leq \\ &\leq \|f\|_{2\alpha} \left[A_1(b, \alpha) \exp \{ a_1(b, \alpha) \|v\|_{\alpha} \} + \int_b^x \exp \{ -2a(x-y) \} dy \right] \leq \\ &\leq \|f\|_{2\alpha} \left[A_1(b, \alpha) \exp \{ a_1(b, \alpha) \|v\|_{\alpha} \} + \frac{1}{2a} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, из (13)–(16) получаем оценку

$$\|h\|_{\alpha} \leq A(b, \alpha) \left[\exp \{ a_1(b, \alpha) \|v\|_{\alpha} \} + \frac{1}{a} \right] \|f\|_{2\alpha}. \quad (17)$$

Заметим, что функция $h(x)$ удовлетворяет равенству (9), из которого находим

$$\frac{dh(x)}{dx} = -2v(x)h(x) + f(x). \quad (18)$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{dh(x)}{dx} \right\|_{2\alpha} \leq \|f\|_{2\alpha} + 2\|v\|_{\alpha} \|h\|_{\alpha} \leq [1 + 2\|v\|_{\alpha} A(b, \alpha, \|v\|_{\alpha})] \|f\|_{2\alpha}. \quad (19)$$

Из (17)–(19) заключаем, что при $\alpha > 1$

$$Q_2^{-1}(v)f = \int_{-\infty}^x \exp\left\{-2 \int_y^x v(z) dz\right\} f(y) dy, \quad Q_2^{-1}(v): C_b(\tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1) \rightarrow C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1).$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. Оператор $Q_2(v)$, определённый равенством (7), действует на любую функцию $v \in C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1)$, удовлетворяющую условию (6), при $\alpha > 1$ следующим образом:

$$Q_2(v): C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1) \rightarrow C_b(\tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1),$$

при этом существует обратный оператор

$$Q_2^{-1}(v): C_b(\tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1) \rightarrow C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$$

и справедливо равенство

$$Q_2^{-1}(v)f := \int_{-\infty}^x \exp\left\{-2 \int_y^x v(z) dz\right\} f(y) dy.$$

Распространим результат леммы 2 на случай функций, зависящих от переменной $t \in [0, T]$ как от параметра. Для этого предположим, что функция $v \in C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1))$ удовлетворяет условию

$$v(x, t) \geq ae^{-T} > 0 \quad \text{для всех} \quad x \geq b > 0, \quad t \in [0, T]. \quad (20)$$

Справедлива следующая

Лемма 3. Оператор $Q_2(v)$, определённый равенством

$$Q_2(v)h(x, t) := \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + v(x, t)h(x, t)$$

для любой функции $v \in C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1))$, удовлетворяющей условию (20), действует при $\alpha > 1$ следующим образом:

$$Q_2(v): C([0, T]; C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)) \rightarrow C([0, T]; C_b(\tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)),$$

при этом существует обратный оператор

$$Q_2^{-1}(v): C([0, T]; C_b(\tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)) \rightarrow C([0, T]; C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1))$$

и справедливо равенство

$$Q_2^{-1}(v)f := \int_{-\infty}^x \exp\left\{-2 \int_y^x v(z, t) dz\right\} f(y, t) dy.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x, t) := \int_{-\infty}^x \exp\left\{-2 \int_y^x v(z, t) dz\right\} f(y, t) dy.$$

Прежде всего точно так же, как и при доказательстве результата (17) (см. (13)–(16)), можно показать, что для любого $t \in [0, T]$ функция $h \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$.

Для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} h(x, t_1) - h(x, t_2) &= \int_{-\infty}^x \left[\exp \left\{ -2 \int_y^x v(z, t_1) dz \right\} - \exp \left\{ -2 \int_y^x v(z, t_2) dz \right\} \right] f(y, t_1) dy + \\ &+ \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -2 \int_y^x v(z, t_2) dz \right\} [f(y, t_1) - f(y, t_2)] dy =: h_1(x) + h_2(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -2 \int_y^x v(z, t_1) dz \right\} - \exp \left\{ -2 \int_y^x v(z, t_2) dz \right\} &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z) dz \right\} ds = \\ &= -2 \int_0^1 \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z) dz \right\} ds \int_y^x [v(z, t_1) - v(z, t_2)] dz, \end{aligned}$$

где $v_s(z) := sv(z, t_1) + (1-s)v(z, t_2)$. Тогда для $h_1(x)$ и $h_2(x)$ получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= -2 \int_{-\infty}^x \left(\int_0^1 \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z) dz \right\} ds \right) \left(\int_y^x [v(z, t_1) - v(z, t_2)] dz \right) f(y, t_1) dy, \\ h_2(x) &= \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -2 \int_y^x v(z, t_2) dz \right\} [f(y, t_1) - f(y, t_2)] dy. \end{aligned}$$

В силу того, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет условию (20), имеем

$$v_s(x) = sv(x, t_1) + (1-s)v(x, t_2) \geq (sa + (1-s)a)e^{-T} = ae^{-T} > 0$$

для всех $x \geq b > 0$ и $t \in [0, T]$. Для функции $h_2(x)$ получаем сразу же оценку

$$|h_2(x)| \leq \|f(t_1) - f(t_2)\|_{2\alpha} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -2 \int_y^x v(z, t_2) dz \right\} \frac{1}{(1-y)^{2\alpha}} dy,$$

причём для дальнейших оценок в точности повторяются рассуждения, приведённые при выводе (17), и в результате можем записать

$$\|h_2\|_{\alpha} \leq A(ae^{-T}, b, \alpha, \|v(t_2)\|_{\alpha}) \|f(t_1) - f(t_2)\|_{2\alpha}, \quad (22)$$

где функция $A = A(ae^{-T}, b, \alpha, \|v(t_2)\|_{\alpha})$ ограничена на любом компакте по $\|v(t_2)\|_{\alpha}$ и монотонно не убывает по этой же переменной.

Оценим теперь функцию $h_1(x)$, рассмотрев три случая.

1. При $x \leq 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |h_1(x)| &\leq \\ &\leq 2\|f(t_1)\|_{2\alpha} \int_{-\infty}^x \frac{dy}{(1-y)^{2\alpha}} \int_{-\infty}^x \frac{du}{(1-u)^{\alpha}} \int_0^1 \exp \left\{ 2\|v_s\|_{\alpha} \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{(1-z)^{\alpha}} \right\} ds \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha}, \end{aligned} \quad (23)$$

из которой, в частности, при $\alpha > 1$ получаем

$$\begin{aligned} \sup_{-\infty < x \leq 0} (1-x)^{\alpha} |h_1(x)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{(2\alpha-1)(\alpha-1)} \exp \{ a_1(\alpha) \max \{ \|v(t_1)\|_{\alpha}, \|v(t_2)\|_{\alpha} \} \} \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha}. \end{aligned} \quad (24)$$

2. Пусть $0 < x \leq b$, тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, b]} |h_1(x)| &\leq 2 \int_{-\infty}^b \frac{dy}{(1-y^-)^{2\alpha}} \exp \left\{ 2 \int_{-\infty}^b \frac{1}{(1-z^-)^{\alpha}} \max\{\|v(t_1)\|_{\alpha}, \|v(t_2)\|_{\alpha}\} \right\} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^b \frac{dz}{(1-z^-)^{\alpha}} \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha} \leq \\ &\leq A(\alpha, b) \exp\{a_1(\alpha) \max\{\|v(t_1)\|_{\alpha}, \|v(t_2)\|_{\alpha}\}\} \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha}. \end{aligned} \quad (25)$$

3. При $x > b$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |h_1(x)| &\leq 2 \|f(t_1)\|_{2\alpha} \int_{-\infty}^b \frac{dy}{(1-y^-)^{2\alpha}} \left(\int_0^1 \exp \left\{ 2 \int_{-\infty}^b \frac{dz}{(1-z^-)^{\alpha}} \|v_s\|_{\alpha} \right\} \exp \left\{ -2 \int_b^x v_s(z) dz \right\} \right) ds \times \\ &\quad \times \left[\int_{-\infty}^b \frac{du}{(1-u^-)^{\alpha}} + x - b \right] \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha} + \\ &\quad + 2 \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha} \int_b^x (x-y) \left(\int_0^1 \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z) dz \right\} ds \right) dy =: h_{11} + h_{12}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для h_{11} справедлива оценка

$$\begin{aligned} h_{11} &\leq A(b, \alpha) \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha} \times \\ &\quad \times \exp\{a_1(\alpha) \max\{\|v(t_1)\|_{\alpha}, \|v(t_2)\|_{\alpha}\}\} (b_1 + x - b) \exp\{-2ae^{-T}(x-b)\} \leq \\ &\leq A_1(ae^{-T}, b, \alpha) \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha} \exp\{a_1(\alpha) \max\{\|v(t_1)\|_{\alpha}, \|v(t_2)\|_{\alpha}\}\}, \end{aligned} \quad (27)$$

для h_{12} — оценка

$$\begin{aligned} h_{12} &\leq 2 \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha} \int_b^x (x-y) \exp\{-2ae^{-T}(x-y)\} dy \leq \\ &\leq 2A_2(ae^{-T}, b) \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (23)–(28) вытекает, что

$$\|h_1\|_{\alpha} \leq A(ae^{-T}, b, \alpha) \exp\{a_1(\alpha) \max\{\|v(t_1)\|_{\alpha}, \|v(t_2)\|_{\alpha}\}\} \times \|f(t_1)\|_{2\alpha} \|v(t_1) - v(t_2)\|_{\alpha}. \quad (29)$$

Ввиду оценок (22) и (29) из (21) получаем предельное свойство

$$\|h(x, t_1) - h(x, t_2)\|_{\alpha} \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| \rightarrow +0. \quad (30)$$

Для производных функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} &= 4 \int_{-\infty}^x \left(\int_0^1 \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z) dz \right\} v_s(x) ds \right) \left(\int_y^x [v(z, t_1) - v(z, t_2)] dz \right) f(y, t_1) dy - \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^x \left(\int_0^1 \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z) dz \right\} ds \right) [v(x, t_1) - v(x, t_2)] f(y, t_1) dy, \\ \frac{\partial h_2(x)}{\partial x} &= f(x, t_1) - f(x, t_2) - 2v(x, t_2)h_2(x). \end{aligned}$$

Повторяя те же рассуждения, что и при получении неравенств (22) и (29), будем иметь оценки, из которых следует

$$\left\| \frac{\partial h_k(x, t_1)}{\partial x} - \frac{\partial h_k(x, t_2)}{\partial x} \right\|_{2\alpha} \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| \rightarrow +0, \quad k = 1, 2. \quad (31)$$

Из (30) и (31) заключаем

$$\|h(x, t_1) - h(x, t_2)\|_{\alpha, 2\alpha} \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| \rightarrow +0,$$

что завершает доказательство леммы.

Пусть v — классическое решение задачи Коши (2), (3), тогда её можно переписать в абстрактной форме:

$$Q_2(v) \frac{dv}{dt} + Q_2(v)v = 2v^2, \quad v(0) = v_0. \quad (32)$$

В классе $v \in C^{(1)}([0, T]; C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1))$ при $\alpha > 1$ абстрактная задача Коши (32) эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{dv}{dt} + v = 2Q_2^{-1}(v)v^2, \quad v(0) = v_0,$$

из которой, в свою очередь, получаем интегральное уравнение

$$v(t) = v_0 e^{-t} + 2 \int_0^t e^{-(t-\tau)} Q_2^{-1}(v(\tau)) v^2(\tau) d\tau. \quad (33)$$

Введём оператор

$$Q(v)(t) := v_0 e^{-t} + 2 \int_0^t e^{-(t-\tau)} Q_2^{-1}(v(\tau)) v^2(\tau) d\tau. \quad (34)$$

Справедлива следующая

Лемма 4. Оператор (34) действует на любую функцию $v_0 \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$ при $\alpha > 1$ следующим образом:

$$Q: C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1)) \rightarrow C^{(1)}([0, T]; C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)). \quad (35)$$

Кроме того, справедливо неравенство $Q(v)(t) \geq v_0 e^{-t}$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T]$.

Доказательство. Заметим, что оператор

$$S\phi := 2 \int_0^t e^{-(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau$$

действует следующим образом:

$$S: C([0, T]; C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)) \rightarrow C^{(1)}([0, T]; C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)). \quad (36)$$

Оператор (34) можно представить в виде

$$Q(\phi) = v_0 e^{-t} + SQ_2^{-1}(\phi)\phi^2,$$

откуда с учётом (36) и леммы 3 получаем (35). Лемма доказана.

Замечание. Из (35) получаем, что $Q: C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1)) \rightarrow C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1))$. Кроме того, если $v_0 \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$ и выполнено неравенство $v_0 \geq a > 0$ для всех $x \geq b > 0$, то для решений $v(t)$ интегрального уравнения (33) справедлива оценка $v(t) \geq v_0 e^{-t} \geq a e^{-T} > 0$ для всех $x \geq b > 0$, $t \in [0, T]$.

В связи с этим замечанием рассмотрим полное метрическое пространство

$$B[0, T] := \{v(t) \in C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1)) : v(t) \geq v_0 e^{-t}\}, \quad v_0(x) \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1), \quad \alpha > 1,$$

относительно метрики, порождённой в $C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1))$ нормой $\|v\|_B := \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_\alpha$.

Из леммы 4 и замечания вытекает

Лемма 5. Оператор (34) действует следующим образом: $Q: B[0, T] \rightarrow B[0, T]$.

Теперь рассмотрим полное метрическое пространство

$$B_R := \{v(t) \in B[0, T] : \|v\|_B \leq R, \quad R > 0\}.$$

Справедлива следующая

Лемма 6. Если $v_0 \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$ при $\alpha > 1$ и найдутся такие числа $a > 0$ и $b > 0$, что $v_0(x) \geq a$ для всех $x \geq b$, то при достаточно большом $R = R(v_0) > 0$ и достаточно малом $T > 0$ оператор (34) действует следующим образом: $Q: B_R \rightarrow B_R$.

Доказательство. Пусть $v_0(x) \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$ — фиксированная функция. Выберем число $R > 0$ настолько большим, чтобы

$$\|v_0\|_B \leq R/2, \tag{37}$$

и зафиксируем его. Согласно условию леммы для любой функции $v(t) \in B_R \subset B[0, T]$ выполнено неравенство

$$v(t) \geq a e^{-t} \quad \text{для всех } t \in [0, T], \quad x \geq b > 0.$$

Точно так же, как и при выводе (17), получаем соотношение

$$0 \leq (Q_2^{-1}(v)v^2)(x, t) \leq A(b, \alpha) \left[\exp\{a_1(b, \alpha)\|v(t)\|_\alpha\} + \frac{e^t}{a} \right] \|v(t)\|_\alpha^2,$$

из которого имеем искомую оценку

$$\|Q(v)\|_B \leq T A(b, \alpha) \left[\exp\{a_1(b, \alpha)\|v\|_B\} + \frac{e^T}{a} \right] \|v\|_B^2 \leq T A(b, \alpha) \left[\exp\{a_1(b, \alpha)R\} + \frac{e^T}{a} \right] R^2 \leq \frac{R}{2} \tag{38}$$

при достаточно малом $T > 0$ таком, что

$$T A(b, \alpha) \left[\exp\{a_1(b, \alpha)R\} + \frac{e^T}{a} \right] R \leq \frac{1}{2}.$$

Из (37) и (38) приходим к утверждению леммы.

Докажем теперь сжимаемость оператора Q на множестве B_R .

Лемма 7. Если $v_0 \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$ и найдутся такие числа $a > 0$ и $b > 0$, что $v_0(x) \geq a > 0$ для всех $x \geq b > 0$, то при достаточно малом $T > 0$ оператор (34) сжимающий на B_R :

$$\|Q(v_1)(x, t) - Q(v_2)(x, t)\|_B \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_B \tag{39}$$

для всех $v_1, v_2 \in B_R$.

Доказательство. Пусть $v_k(t) \in B_R$ при $k = 1, 2$. Введём функции

$$g_k(x, t) := (Q_2^{-1}(v_k)v_k^2)(x, t), \quad k = 1, 2,$$

и рассмотрим

$$\begin{aligned} g_1(x, t) - g_2(x, t) = & \int_{-\infty}^x \left[\exp \left\{ -2 \int_y^x v_1(z, t) dz \right\} - \exp \left\{ -2 \int_y^x v_2(z, t) dz \right\} \right] v_1^2(y, t) dy + \\ & + \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -2 \int_y^x v_2(z, t) dz \right\} [v_1^2(y, t) - v_2^2(y, t)] dy. \end{aligned} \quad (40)$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -2 \int_y^x v_1(z, t) dz \right\} - \exp \left\{ -2 \int_y^x v_2(z, t) dz \right\} &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z, t) dz \right\} ds = \\ &= -2 \int_0^1 \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z, t) dz \right\} ds \int_y^x [v_1(z, t) - v_2(z, t)] dz, \end{aligned} \quad (41)$$

где $v_s(z, t) = sv_1(z, t) + (1-s)v_2(z, t)$, при этом

$$v_s(x, t) = sv_1(x, t) + (1-s)v_2(x, t) \geq sv_0(x)e^{-t} + (1-s)v_0(x)e^{-t} = v_0(x)e^{-t} \geq ae^{-t}.$$

С учётом (40) и (41) имеем

$$\begin{aligned} g_1(x, t) - g_2(x, t) &= h_1(x, t) + h_2(x, t), \\ h_1(x, t) &:= -2 \int_{-\infty}^x \int_0^1 \exp \left\{ -2 \int_y^x v_s(z, t) dz \right\} ds \left(\int_y^x [v_1(z, t) - v_2(z, t)] dz \right) v_1^2(y, t) dy, \\ h_2(x, t) &:= \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -2 \int_y^x v_2(z, t) dz \right\} [v_1^2(y, t) - v_2^2(y, t)] dy. \end{aligned} \quad (42)$$

В точности повторяя рассуждения из доказательства леммы 3, приходим к следующим аналогичным (22) и (29) оценкам:

$$\|h_2\|_\alpha \leq A(ae^{-T}, b, \alpha, \|v_2\|_\alpha) \|v_1^2(t) - v_2^2(t)\|_{2\alpha},$$

где функция $A = A(ae^{-T}, b, \alpha, \|v_2\|_\alpha) > 0$ ограничена на любом компакте и монотонно не убывает по переменной $\|v_2\|_\alpha$;

$$\|h_1\|_\alpha \leq A(ae^{-T}, b, \alpha) \exp \{a_1(\alpha) \max\{\|v_1(t)\|_\alpha, \|v_2(t)\|_\alpha\}\} \|v^2(t_1)\|_{2\alpha} \|v_1(t) - v_2(t)\|_\alpha.$$

После очевидных преобразований будем иметь

$$\|h_2\|_B \leq 2RA(ae^{-T}, b, \alpha, R) \|v_1 - v_2\|_B, \quad (43)$$

$$\|h_1\|_B \leq R^2 A(ae^{-T}, b, \alpha) \exp(a_1(\alpha)R) \|v_1 - v_2\|_B. \quad (44)$$

Из (40) и (42) с учётом оценок (43) и (44) приходим к соотношению

$$\|g_1(x, t) - g_2(x, t)\|_B \leq \mu(R, T) \|v_1 - v_2\|_B, \quad (45)$$

где функция $\mu = \mu(R, T) > 0$ является ограниченной на всяком компакте и неубывающей по каждой переменной в отдельности. Осталось заметить, что в силу (45) справедлива оценка

$$\|Q(v_1) - Q(v_2)\|_B \leq T\mu(R, T) \|v_1 - v_2\|_B,$$

из которой при достаточно малом $T > 0$ и получаем (39). Лемма доказана.

С учётом лемм 6, 7 и принципа сжимающих отображений заключаем, что при достаточно малом $T > 0$ существует единственное решение $v \in C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1))$ при $\alpha > 1$ интегрального уравнения (34). Используя стандартный алгоритм продолжения решения (34) во времени (см. [7]), обосновано следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой функции $v_0 \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$ при $\alpha > 1$ такой, что

$$v_0(x) \geq a > 0 \quad \text{для всех } x \geq b > 0$$

при некоторых a и b , найдётся такое максимальное $T_0 = T_0(v_0) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение $v \in C([0, T]; C_b(\tau^\alpha; \mathbb{R}^1))$ интегрального уравнения (34), причём либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае справедливо предельное свойство

$$\lim_{T \uparrow T_0} \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_\alpha = +\infty.$$

Из теоремы 1, леммы 4 и равенства (33) вытекает основной результат работы.

Теорема 2. Для любой функции $v_0 \in C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1)$ при $\alpha > 1$ такой, что

$$v_0(x) \geq a > 0 \quad \text{для всех } x \geq b > 0$$

при некоторых a и b , найдётся такое максимальное $T_0 = T_0(v_0) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение $v \in C^{(1)}([0, T]; C_b^{(1)}(\tau^\alpha, \tau^{2\alpha}; \mathbb{R}^1))$ задачи Коши (2), (3), причём либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае справедливо предельное свойство

$$\lim_{T \uparrow T_0} \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_\alpha = +\infty.$$

2. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

В этом пункте будем использовать обозначение $f'(x, t)$ для производной по переменной t . Пусть функция $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t) \geq 0$, причём

$$\phi_1(x) := \phi_0\left(\frac{x^2}{R^2}\right), \quad \phi_2(t) := \left(1 - \frac{t}{T}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad R > 0, \quad \phi_0(s) := \begin{cases} 1, & s \in [0, 1]; \\ 0, & s \geq 2. \end{cases}$$

Справедливы следующие формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{L_1}^{L_2} \int_0^T \phi(x, t) \frac{\partial}{\partial t} (v_x(x, t) + v^2(x, t)) dt dx = \\ & = - \int_{L_1}^{L_2} \phi_1(x) [v_{0x}(x) + v_0^2(x)] dx - \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} [v_x(x, t) + v^2(x, t)] \phi'(x, t) dx dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{L_1}^{L_2} \phi_1(x)[v_{0x}(x) + v_0^2(x)] dx - \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} v^2(x, t) \phi'(x, t) dx dt - \\
&\quad - \int_0^T v(x, t) \phi'(x, t) \Big|_{x=L_1}^{x=L_2} dt + \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} v(x, t) \phi'_x(x, t) dx dt,
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\int_{L_1}^{L_2} \int_0^T \phi(x, t) v_x(x, t) dx dt = \int_0^T \phi(x, t) v(x, t) \Big|_{x=L_1}^{x=L_2} dt - \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} \phi_x(x, t) v(x, t) dx dt. \tag{47}$$

Умножим обе части уравнения (2) на функцию $\phi(x, t)$ и проинтегрируем по области $(x, t) \in [L_1, L_2] \times [0, T]$. Тогда с учётом начального условия (3) и равенств (46), (47) получим соотношение

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{L_1}^{L_2} v(x, t) [-\phi'_x(x, t) + \phi_x(x, t)] dx dt + \int_0^T v(x, t) [\phi'(x, t) - \phi(x, t)] \Big|_{x=L_1}^{x=L_2} dt + \\
&\quad + \int_{L_1}^{L_2} \phi_1(x)[v_{0x}(x) + v_0^2(x)] dx = - \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} \phi'(x, t) v^2(x, t) dx dt.
\end{aligned} \tag{48}$$

Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} v(x, t) [-\phi'_x(x, t) + \phi_x(x, t)] dx dt \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{4} \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} \frac{|-\phi'_x(x, t) + \phi_x(x, t)|^2}{-\phi'(x, t)} dx dt + \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} (-\phi'(x, t)) v^2(x, t) dx dt.
\end{aligned} \tag{49}$$

Из равенства (48) с учётом (49) имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \int_0^T \int_{L_1}^{L_2} \frac{|-\phi'_x(x, t) + \phi_x(x, t)|^2}{-\phi'(x, t)} dx dt + \int_0^T v(x, t) [\phi'(x, t) - \phi(x, t)] \Big|_{x=L_1}^{x=L_2} dt + \\
&\quad + \int_{L_1}^{L_2} \phi_1(x)[v_{0x}(x) + v_0^2(x)] dx \geq 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Заметим, что

$$\int_0^T \int_{L_1}^{L_2} \frac{|-\phi'_x(x, t) + \phi_x(x, t)|^2}{-\phi'(x, t)} dx dt = \int_{L_1}^{L_2} \frac{|\phi_{1x}(x)|^2}{\phi_1(x)} dx \int_0^T \frac{|-\phi'_2(t) + \phi_2(t)|^2}{-\phi'_2(t)} dt. \tag{51}$$

Положив $L_1 = -\sqrt{2}R$ и $L_2 = \sqrt{2}R$, из (50) ввиду (51) получим неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\phi_{1x}(x)|^2}{\phi_1(x)} dx \int_0^T \frac{|-\phi'_2(t) + \phi_2(t)|^2}{-\phi'_2(t)} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x)[v_{0x}(x) + v_0^2(x)] dx \geq 0, \tag{52}$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\phi_{1x}(x)|^2}{\phi_1(x)} dx = \frac{1}{R} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{|\phi_{0y}(y^2)|^2}{\phi_0(y^2)} dy \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty.$$

Предположим, что $v_{0x}(x) + v_0^2(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда в пределе при $R \rightarrow +\infty$ из неравенства (52) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [v_{0x}(x) + v_0^2(x)] dx \geq 0.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. Если функция $v_0(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ такова, что $v_{0x}(x) + v_0^2(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [v_{0x}(x) + v_0^2(x)] dx < 0,$$

то классического решения задачи Коши (2), (3) не существует ни для какого $T > 0$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00056).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сравнительный анализ аналитических и эмпирических методик оценки текущих параметров надёжности радиолокационных комплексов мониторинга / А.В. Тимошенко, Д.В. Калеев, А.Ю. Перлов [и др.] // Изв. вузов. Электроника. — 2020. — Т. 25, № 3. — С. 244–254.
2. Корпусов, М.О. О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Гамильтона–Якоби / М.О. Корпусов // Мат. заметки. — 2013. — Т. 93, № 1. — С. 81–95.
3. Корпусов, М.О. О разрушении решения нелокального уравнения с градиентной нелинейностью / М.О. Корпусов // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2012. — Т. 11. — С. 45–53.
4. Корпусов, М.О. О критическом показателе “мгновенное разрушение” versus “локальная разрешимость” в задаче Коши для модельного уравнения соболевского типа / М.О. Корпусов, А.А. Панин, А.Е. Шишков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2021. — Т. 85, № 1. — С. 118–153.
5. О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений теплоэлектрической модели / М.О. Корпусов, А.Ю. Перлов, А.В. Тимошенко, Р.С. Шафир // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 5. — С. 759–772.
6. О глобальной во времени разрешимости одной нелинейной системы уравнений теплоэлектрической модели с квадратичной нелинейностью / М.О. Корпусов, А.Ю. Перлов, А.В. Тимошенко, Р.С. Шафир // Теор. мат. физика. — 2023. — Т. 217, № 2. — С. 378–390.
7. Панин, А.А. О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра / А.А. Панин // Мат. заметки. — 2015. — Т. 97, № 6. — С. 884–903.

THE CAUCHY PROBLEM FOR AN NONLINEAR WAVE EQUATION

© 2024 / M. V. Artemeva¹, M. O. Korpusov²^{1,2}*Lomonosov Moscow State University, Russia*²*People Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Russia**e-mail: ¹artemeva.mv14@physics.msu.ru, ²korpusov@gmail.com*

A heat-electric $(1+1)$ -dimensional model of semiconductor heating in an electric field is considered. For the corresponding Cauchy problem, the existence of a classical solution that is short-lived in time is proved, a global a priori estimate is obtained in time, and a result is obtained about the absence of even a classical solution local in time.

Keywords: nonlinear Sobolev type equation, Cauchy problem in stripe, local solvability, classical solution

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-11-00056).

REFERENCES

1. Tymoshenko, A.V., Kalyaev, D.V., Perlov, A.Yu. [et al.], Comparative analysis of analytical and empirical methods of assessment of radar monitoring systems current reliability parameters, *Proc. of univ. Electronics*, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 244–254.
2. Korpusov, M.O., On the blow-up of the solution of an equation related to the Hamilton–Jacobi equation, *Math. Notes*, 2013, vol. 93, pp. 90–101.
3. Korpusov, M.O., The destruction of the solution of the nonlocal equation with gradient nonlinearity, *Bull. South Ural State Univ. Ser. Math. Modelling, Programming & Comp. Software*, 2012, vol. 11, pp. 45–53.
4. Korpusov, M.O., Panin, A.A., and Shishkov, A.E., On the critical exponent “instantaneous blow-up” versus “local solubility” in the Cauchy problem for a model equation of Sobolev type, *Izvestiya: Mathematics*, 2021, vol. 85, no. 1, pp. 111–144.
5. Korpusov, M.O., Perlov, A.Yu., Tymoshenko, A.V., and Shafir, R.S., On the blow-up of the solution of a nonlinear system of equations of a thermal-electrical model, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 5, pp. 850–861.
6. Korpusov, M.O., Perlov, A.Yu., Tymoshenko, A.V., and Shafir, R.S., Global-in-time solvability of a nonlinear system of equations of a thermal–electrical model with quadratic nonlinearity, *Theor. Math. Phys.*, 2023, vol. 217, no. 2, pp. 1743–1754.
7. Panin, A.A., On local solvability and blow-up of solutions of an abstract nonlinear Volterra integral equation, *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 892–908.