ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 8, с. 1076–1085

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

© А. А. Замышляева[1], Е. В. Бычков[2]

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск

e-mail: [1]zamyshliaevaaa@susu.ru, [2]bychkovev@susu.ru

Поступила в редакцию 15.04.2024 г., после доработки 15.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

В пространствах Соболева исследована задача для модифицированного уравнения Буссинеска с однородным краевым условием Неймана и с классическими начальными условиями. На основе метода компактности показано, что приближённое аналитическое решение, построенное в виде суммы Галёркина по системе собственных функций однородной задачи Неймана, $*$-слабо сходится к точному решению.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Буссинеска, краевое условие Неймана, задача Коши, задача Шоуолтера–Сидорова, метод компактности, уравнение соболевского типа.

DOI: 10.31857/S0374064124080067, EDN: KCSFTM

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — область с границей $\partial\Omega$ из класса C^∞, $Q=\Omega\times(0,T)=\{(x,t)\colon x\in\Omega,\ t\in(0,T),\ T>0\}$. Рассмотрим задачу для модифицированного уравнения Буссинеска

$$(\lambda-\Delta)u_{tt}-\alpha^2\Delta u+u^3=0,\quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

с однородным краевым условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

где $\lambda,\alpha\in\mathbb{R}$, $\partial u/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Omega$.

Уравнением (1) описывается, например, процесс колебаний поверхности на "мелкой воде" [1], тогда функция $u=u(x,t)$ определяет высоту волны, а параметр λ характеризует капиллярные эффекты. В работе [2] доказывается существование единственного глобального решения задачи Коши для обобщённого модифицированного уравнения Буссинеска в невырожденном случае (с параметрами $\lambda=1$, $\alpha=1$). В статье [3] на основе другой модификации уравнения Буссинеска описывается распространение уединённых продольных волн деформации в тонком упругом стержне. Уравнение (1) находит применение и в релятивистской квантовой механике — в [4] оно рассматривается как полевое уравнение нелинейной классической мезонной теории. Уравнение (1) относится к классу нелинейных уравнений соболевского типа [5] или, в другой терминологии, к уравнениям, неразрешённым относительно старшей производной по времени [6].

В данной работе используется метод, хорошо зарекомендовавший себя при исследовании нелинейных уравнений соболевского типа первого порядка [7].

1. МЕТОД ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

На основе теории относительно спектрально ограниченных операторов, разработанной Г.А. Свиридюком и его учениками [8, 9], в работе [10] показано, что, задав операторы $L=\lambda-\Delta$, $M=\alpha^2\Delta$, $N(u)=u^3$ в специально подобранных банаховых пространствах, можно представить задачу (1)–(3) как задачу Коши с условиями

$$u(0)=u_0, \quad \dot{u}(0)=u_1 \tag{4}$$

для операторно-дифференциального уравнения [11] вида

$$L\ddot{u}+Mu+N(u)=0, \tag{5}$$

где $\dot{u}$, $\ddot{u}$ — первая и вторая производные по переменной t.

Затем, используя метод фазового пространства [12], доказана теорема о существовании единственного локального решения этой задачи [11]. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейный и непрерывный), а оператор $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линейный, замкнутый и плотно определённый). Множество

$$\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}\colon (\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора M относительно оператора L (или *L-резольвентным множеством* оператора M). Множество $\mathbb{C}\setminus\rho^L(M)=\sigma^L(M)$ называется *спектром* оператора M относительно оператора L (или *L-спектром* оператора M).

Оператор-функции $(\mu L-M)^{-1}$, $R^L_\mu=(\mu L-M)^{-1}L$, $L^L_\mu=L(\mu L-M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются, соответственно, *резольвентой*, *правой резольвентой*, *левой резольвентой* оператора M относительно оператора L (или *L-резольвентой*, *правой L-резольвентой*, *левой L-резольвентой* оператора M).

Оператор M называется *(L,σ)-ограниченным*, если существует такое $a>0$ для любого $\mu\in\mathbb{C}$, что при $|\mu|>a$ выполняется $\mu\in\rho^L(M)$.

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\lambda(M)\,d\lambda \quad \text{и} \quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\lambda(M)\,d\lambda$$

являются проекторами, соответственно, в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ [12]. Здесь $\Gamma=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon |\lambda|=$ $=r>a\}$.

Определение. Множество $\mathfrak{P}$ называется *фазовым пространством* уравнения (5), если:

1) для любых $(u_0,u_1)\in T\mathfrak{P}$ (касательного расслоения $\mathfrak{P}$) существует единственное решение задачи (4), (5);

2) любое решение $u=u(t)$ уравнения (5) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория.

Запись $(u_0,u_1)\in T\mathfrak{P}$ следует понимать как $u_0\in\mathfrak{P}$ и $(u_0,u_1)\in T_{u_0}\mathfrak{P}$.

Пусть $\ker L\neq\{0\}$ и оператор M $(L,0)$-ограничен, тогда в силу теоремы о расщеплении [12] уравнение (5) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} 0=(\mathbb{I}-Q)(M+N)(u), \\ \ddot{u}^1=L_1^{-1}Q(M+N)(u), \end{cases}$$

где $u^1=Pu$. Тогда фазовым пространством $\mathfrak{P}$ уравнения (5) является множество

$$\mathfrak{P}=\{u\in\mathfrak{U}\colon (\mathbb{I}-Q)(M+N)(u)=0\}.$$

Таким образом, в работе [10] было доказано существование единственного локального решения (4), (5).

Лемма [13, § 1.2]. *Если $f \in L^p(0,T;X)$ и $\dot f \in L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, X — банахово пространство, то f (после, быть может, изменения на множестве меры нуль из интервала $(0,T)$) будет непрерывным отображением $[0,T] \to X$.*

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В работе [14] подробно изучен случай с условиями Дирихле. Для начала рассмотрим абстрактную задачу (4), (5). Для решения нам понадобятся несколько функциональных пространств. Пусть $H = (H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Зададим дуальные пары рефлексивных банаховых пространств $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ и (L^p, L^q) относительно двойственности $\langle \cdot,\cdot \rangle$ такие, что имеет место цепочка плотных и непрерывных вложений

$$\mathfrak{U} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow H \hookrightarrow L^q \hookrightarrow \mathfrak{U}^*. \tag{6}$$

Зададим пространства распределений $L^\infty(0,T;\mathfrak{U})$ и $L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$. Сопряжённые им пространства строятся по теореме Данфорда–Петтиса

$$(L^\infty(0,T;\mathfrak{U}))^* \simeq L^1(0,T;\mathfrak{U}^*) \quad \text{и} \quad (L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^* \simeq L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

В заданных пространствах определим операторы L, M, N, удовлетворяющие условиям:
(C1) $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ — самосопряжённый, неотрицательно определённый, фредгольмов;
(C2) $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ — самосопряжённый, неотрицательно определённый;
(C3) $N \in C^r(L^p, L^q)$, $r \geqslant 1$, — s-монотонный, p-коэрцитивный, однородный порядка $p-1$ с симметричной производной Фреше.

В силу условия (C3) оператор N удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}\langle N(x), x\rangle = p\langle N(x), \dot x\rangle.$$

Пусть λ_k — собственные значения задачи с условием (2) для оператора $-\Delta$, занумерованные по невозрастанию с учётом кратности, а φ_k — соответствующие им собственные функции. Кроме того, линейная оболочка $\operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ при $m \to \infty$ плотна в $\mathfrak{U}$ и ортонормирована (в смысле скалярного произведения в H).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (C1)–(C3), $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$, $u_0 \in \mathfrak{U} \cap L^p$, $u_1 \in \mathfrak{U} \cap \cap \operatorname{coim} L$. Тогда существует решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) такое, что $u \in L^\infty(0,T;\mathfrak{U} \cap L^p(\Omega))$ и $\dot u \in L^\infty(0,T;\mathfrak{U} \cap \operatorname{coim} L)$.*

Доказательство. Символом C будем обозначать, вообще говоря, разные константы. Решение задачи (4), (5) будем искать в виде приближения Галёркина [13, § 1.4]

$$u^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k^m(t)\varphi_k. \tag{7}$$

Коэффициенты $a_k^m(t)$ найдём из системы алгебро-дифференциальных уравнений

$$\langle L\ddot u^m, \varphi_k\rangle + \langle Mu^m, \varphi_k\rangle + \langle N(u^m), \varphi_k\rangle = 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{8}$$

$$\langle u^m(0), \varphi_k\rangle = \langle u_0, \varphi_k\rangle = \beta_k^m, \quad \langle \dot u^m(0), \varphi_k\rangle = \langle u_1, \varphi_k\rangle = \gamma_k^m, \quad k = \overline{1,m}, \tag{9}$$

причём $u_0^m = \sum_{k=1}^m \beta_k^m \varphi_k \to u_0$ в $\mathfrak{U}$ при $m \to \infty$ и $u_1^m = \sum_{k=1}^m \gamma_k^m \varphi_k \to u_1$ в $\mathfrak{U}$ при $m \to \infty$.

В силу классических результатов существует единственное локальное решение $u^m = = u^m(s,t)$, $t \in [0, t^m]$.

Получим априорные оценки. Умножение уравнения (8) на $\dot{a}_k^m(t)$ $(k=\overline{1,m})$ и суммирование по k от 1 до m даёт

$$\langle L\ddot{u}^m, \dot{u}^m\rangle + \langle Mu^m, \dot{u}^m\rangle + \langle N(u^m), \dot{u}^m\rangle = 0. \tag{10}$$

Введём в пространстве $\operatorname{coim} L\cap\mathfrak{U}$ норму $|\dot{u}|^2=\langle L\dot{u},\dot{u}\rangle$; в силу принципа Куранта она эквивалента норме в пространстве $\mathfrak{U}$.

Используя самосопряжённость операторов L, M, получаем

$$2\langle L\ddot{u}^m, \dot{u}^m\rangle = \frac{d}{dt}\langle L\dot{u}^m, \dot{u}^m\rangle, \quad 2\langle Mu^m, \dot{u}^m\rangle = \frac{d}{dt}\langle Mu^m, u^m\rangle.$$

В силу условия (C3)

$$p\langle N(u^m), \dot{u}^m\rangle = \frac{d}{dt}\langle N(u^m), u^m\rangle.$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left[|\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m\rangle + \frac{2}{p}\langle N(u^m), u^m\rangle\right] = 0.$$

Проинтегрируем его левую часть на отрезке $[0,t]$, $t\leqslant t_m$:

$$|\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m\rangle + \frac{2}{p}\langle N(u^m), u^m\rangle = |u_1^m|^2 + \langle Mu_0^m, u_0^m\rangle + \frac{2}{p}\langle N(u_0^m), u_0^m\rangle, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}|\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m\rangle + C_N\frac{2}{p}\|u^m\|_{L^p}^p \leqslant |u_1^m|^2 + \langle Mu_0^m, u_0^m\rangle + C^N\frac{2}{p}\|N(u_0^m)\|_{L^q}^{p-1} \leqslant \\ \leqslant |u_1^m|^2 + \langle Mu_0^m, u_0^m\rangle + C^N\frac{2}{p}\|N(u_0^m)\|_{L^q}^{p-1}.\end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда, в частности, следует

$$|\dot{u}^m|^2\leqslant C.$$

Так как правая часть неравенства (12) ограничена, то имеет место неравенство

$$|\dot{u}^m|^2 + \langle Mu^m, u^m\rangle + C_N\frac{2}{p}\|u^m\|_{L^p}^p \leqslant C.$$

Константа C не зависит от t_m и, следовательно, $t_m=T$.

Замечание. Последовательности u^m и $\dot{u}^m$ ограничены, соответственно, в пространствах $L^\infty(0,T;\mathfrak{U}\cap L^p)$ и $L^\infty(0,T;\operatorname{coim} L)$, являющихся сопряжёнными пространствами для сепарабельных банаховых пространств $L^1(0,T;\mathfrak{U}^*\cup L^q)$ и $L^1(0,T;\mathfrak{U}^*)$. Поэтому из них можно выбрать $*$-слабо сходящиеся подпоследовательности u^{m_l} и $\dot{u}^{m_l}$ такие, что

$$u^{m_l}\to u \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0,T;\mathfrak{U}\cap L^p), \quad \dot{u}^{m_l}\to\dot{u} \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0,T;\operatorname{coim} L).$$

При этом $\dot{u}^{m_l}$ понимается как обобщённая производная в пространстве распределений.

Поскольку оператор N p-коэрцитивен, т.е.

$$\langle N(u^m), u^m\rangle \leqslant \|N(u^m)\|_{L^q}\|u^m\|_{L^p} \leqslant C^N\|u^m\|_{L^p}^{p-1}\|u^m\|_{L^p} = C^N\|u^m\|_{L^p}^p,$$

и, следовательно, $N(u^m)$ ограничены в пространстве $L^q(0,T;\mathfrak{U}^*\cup L^q)$, то $N(u^{m_l})\to g$ слабо в $L^q(0,T;\mathfrak{U}^*\cup L^q)$.

Покажем, что $N(u)=g$. Из монотонности оператора N следует, что

$$U^{m_l} = \langle N(u^{m_l}) - N(z), u^{m_l} - z\rangle \geqslant 0, \quad z\in L^p(0,T;\mathfrak{U}\cap L^p).$$

Из формулы (11) имеем

$$U^{m_l}=|u_1^{m_l}|^2-|\dot{u}^{m_l}|^2+\langle Mu_0^{m_l},u_0^{m_l}\rangle-\langle Mu^{m_l},u^{m_l}\rangle+\frac{2}{p}\langle N(u_0^{m_l}),u_0^{m_l}\rangle-\frac{2}{p}\langle N(u^{m_l}),z\rangle-\langle N(z),u^{m_l}-z\rangle.$$

В силу свойств слабо сходящихся последовательностей $\liminf|u^{m_l}(t)|^2\geqslant|u(t)|^2$, поэтому

$$\limsup U^{m_l}\leqslant\langle g,u\rangle-\langle g,z\rangle-\langle N(z),u-z\rangle,$$

откуда

$$\langle g,u\rangle-\langle g,z\rangle-\langle N(z),u-z\rangle\geqslant 0.$$

Положим $z=u-hw$, $h>0$, $w\in L^p(0,T;B)$, тогда

$$\langle g-N(u-hw),hw\rangle\geqslant 0,\quad \langle g-N(u-hw),w\rangle\geqslant 0.$$

Устремив $h\to 0$, в силу непрерывности N и теоремы Лебега о мажорирующей последовательности, получим

$$\langle g-N(u),w\rangle\geqslant 0.$$

В силу произвольности выбора w заключаем, что $g=N(u)$.

Теперь можно перейти почленно к пределу в равенстве (8), устремляя m_l к бесконечности. Для фиксированного k и $m_l>k$ получим

$$\langle L\ddot{u}^{m_l},\varphi_k\rangle+\langle Mu^{m_l},\varphi_k\rangle+\langle N(u^{m_l}),\varphi_k\rangle=0,$$

отсюда выводим

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle Lu,\varphi_k\rangle+\langle Mu,\varphi_k\rangle+\langle N(u),\varphi_k\rangle=0.$$

Ввиду плотности системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в пространстве $\mathfrak{U}$ при $m\to\infty$ и произвольности выбора φ_k для произвольного $v\in\mathfrak{U}$ имеет место равенство

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle Lu,v\rangle+\langle Mu,v\rangle+\langle N(u),v\rangle=0.$$

В силу разложения начальных функций в ряд заключаем, что $u^{m_l}(0)=u_l^0\to u_0$ слабо в $\mathfrak{U}$, в силу сформулированного замечания — $u^{m_l}(0)\to u(0)$ в $\mathfrak{U}$, следовательно, $u(0)=u_0$. В силу замечания также имеем

$$\langle\ddot{u}^{m_l},\varphi_k\rangle\to\langle\ddot{u},\varphi_k\rangle \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0,T)$$

и, следовательно, с учётом леммы получим

$$\langle\dot{u}^{m_l}(0),\varphi_k\rangle\to\langle\dot{u}(t),\varphi_k\rangle|_{t=0}=\langle\dot{u}(0),\varphi_k\rangle.$$

С другой стороны, в силу разложения начальных функций в ряд имеет место сходимость

$$\langle\dot{u}^{m_l}(0),\varphi_k\rangle\to\langle u_1,\varphi_k\rangle,$$

откуда для любого k

$$\langle\dot{u}(0),\varphi_k\rangle=\langle u_1,\varphi_k\rangle.$$

Таким образом, функция $u=u(s,t)$ удовлетворяет уравнению (5) и начальным условиям (4). Теорема доказана.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Приведём задачу (1)–(3) к задаче (4), (5), выбрав в качестве гильбертова пространства

$$H_0(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega)\colon \frac{\partial u}{\partial n}(x)\bigg|_{\partial\Omega}=0\right\}$$

со скалярным произведением в $L^2(\Omega)$. Положим $\mathfrak{U}=H^1(\Omega)$, $\mathfrak{U}^*=H^{-1}(\Omega)$. Тогда цепочка плотных и непрерывных вложений (6) из п. 2 имеет место.

Определим оператор $L\colon \mathfrak{U}\to\mathfrak{U}^*$ формулой

$$\langle Lu,v\rangle=\int\limits_\Omega (uv+\nabla u\nabla v)\,dx.$$

Условие (C1) будет выполняться при $\lambda\geqslant\lambda_1$.

Условие (C2) будет выполняться, если оператор $M\colon\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}^*$ определить как

$$\langle Mu,v\rangle=\alpha^2\int\limits_\Omega \nabla u\nabla v\,dx.$$

Определим оператор $N(u)\colon L^4\to L^{4/3}$ следующим образом:

$$\langle N(u),v\rangle=\int\limits_\Omega u^3v\,dx.$$

Его производная Фреше

$$|\langle N_u'v,w\rangle|=3\left|\int\limits_\Omega u^2vw\,dx\right|\geqslant C\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^4}\|w\|_{L^4}$$

симметрична, однородна (порядка 3) и ограничена в силу неравенства Гёльдера.

Оператор N s-монотонен:

$$\langle N_u'(v),v\rangle=3\int\limits_\Omega u^2v^2\,dx\geqslant 0$$

и 4-коэрцитивен:

$$\langle N(u),u\rangle=\int\limits_\Omega u^3u\,dx=\|u\|^4_{L^4},\quad \langle N(u),v\rangle=\int\limits_\Omega u^3v\,dx=\|u\|^3_{L^4}\|v\|_{L^4}.$$

Таким образом, условие (C3) выполняется. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $\lambda\in[\lambda_1,+\infty)$, $(u_0,u_1)\in T\mathfrak{P}$, $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)\cap\operatorname{coim}L$. Тогда существует решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) такое, что*

$$u\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega))\quad\text{и}\quad \dot u\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\cap\operatorname{coim}L). \tag{13}$$

Кроме того, имеет место

Теорема 3. *Пусть $\lambda\in[\lambda_1,+\infty)$, $(u_0,u_1)\in T\mathfrak{P}$, $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)\cap\operatorname{coim}L$. Тогда решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3), удовлетворяющее условиям (13), единственно.*

Доказательство. Пусть u и v — два различных решения задачи (1)–(3), обозначим $w=u-v$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$Lw_{tt}+Mw=v^3-u^3,$$

а начальные условия станут однородными:

$$w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=0,\quad w\in\Omega. \tag{14}$$

Вместо стандартных норм пространств $L^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ будем применять им эквивалентные, определённые по формулам

$$|\dot w|^2_{L^2(\Omega)}=\langle L\dot w,\dot w\rangle,\quad |w|^2_{H_0^1}=\langle\alpha^{-2}\nabla w,\nabla w\rangle,\quad \frac{d}{dt}\Big[|\dot w|^2_{L^2}+|w|^2_{H_0^1}\Big]=2\langle(v)^3-(u)^3,\dot w^m\rangle. \tag{15}$$

Очевидно, что

$$2\langle v^3-u^3,\dot w^m\rangle\leqslant 6\int\limits_\Omega \sup(|u|^2,|v|^2)|w|\,|\dot w|\,dx.$$

Оценим правую часть этого неравенства, используя неравенство Гёльдера:

$$\int\limits_\Omega \sup(|u|^2,|v|^2)|w|\,|\dot w|\,dx\leqslant C(\||u|^2\|_{L^4}+\||v|^2\|_{L^4})\|w\|_{L^4}\|\dot w\|_{L^2},$$

и далее используя теоремы вложения и свойства нормы:

$$C(\||u|^2\|_{L^4}+\||v|^2\|_{L^4})\|w\|_{L^4}|\dot w|_{L^2}\leqslant C(|u|^2_{L^4}+|v|^2_{L^4})|w|_{H_0^1}|\dot w|_{L^2}\leqslant C|w|_{H^1}|\dot w|_{L^2}\leqslant 2C(|w|^2_{H_0^1}+|\dot w|^2_{L^2}).$$

С учётом (15) получим

$$\Big[|\dot w|^2_{L^2}+|w|^2_{H_0^1}\Big]\leqslant 2C\int\limits_0^t\Big(|w|^2_{H_0^1}+|\dot w|^2_{L^2}\Big)\,ds,$$

откуда в силу неравенства Беллмана–Гронуолла имеем равенство $|\dot w|^2_{L^2}+|w|^2_{H_0^1}=0$. Принимая во внимание нулевые начальные условия (14), заключаем, что $w(s,t)=0$, т.е. $u\equiv v$. Теорема доказана.

Вместо условий (3) в задаче (1)–(3) можно рассмотреть условия Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(x,0)-u_0(x))=0,\quad P(u_t(x,0)-u_1(x))=0, \tag{16}$$

которые являются их естественным обобщением для уравнений соболевского типа [15] и не требуют проверки принадлежности начальных функций касательному расслоению фазового пространства уравнения.

Повторяя рассуждения изложенного выше доказательства, нетрудно доказать теорему о существовании единственного решения задачи Шоуолтера–Сидорова.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda\in[\lambda_1,+\infty)$. *Тогда для любых* $u_0\in\mathfrak{U}\cap L^p$, $u_1\in\operatorname{coim}L$ *существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи (1), (2), (16) такое, что*

$$u\in L^\infty(0,T;\mathfrak{U}\cap L^p)\quad \text{и}\quad \dot u\in L^\infty(0,T;\mathfrak{U}).$$

4. СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

В рамках описанной теории можно рассмотреть и неоднородное модифицированное уравнение Буссинеска

$$(\lambda-\Delta)u_{tt}-\alpha^2\Delta u+u^3=y(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{17}$$

с условием Неймана (2) и начальными условиями (3).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (C1)–(C3) и $y\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (2), (3), (17), удовлетворяющее условиям (13).*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1, однако вместо неравенства (12) получится

$$|\dot u^m|^2+\langle Mu^m,u^m\rangle+C_N\frac{2}{p}\|u^m\|^p_{L^p}\leqslant 2\int\limits_0^t\|y\|_{L^2}\|\dot u^m\|_{L^2}\,ds+|u_1^m|^2+\langle Mu_0^m,u_0^m\rangle+C^N\frac{2}{p}\|N(u_0^m)\|^{p-1}_{L^q}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^t\|y\|^2_{L^2}\,ds+\int\limits_0^t\|\dot u^m\|^2_{L^2}\,ds+|u_1^m|^2+\langle Mu_0^m,u_0^m\rangle+C^N\frac{2}{p}\|N(u_0^m)\|^{p-1}_{L^q},$$

откуда, в частности, следует

$$|\dot u^m|^2\leqslant C+\int\limits_0^t\|\dot u^m\|^2_{L^2}\,ds\leqslant C+\int\limits_0^t|\dot u^m|\,ds,$$

а в силу неравенства Беллмана–Гронуолла выполняется

$$|\dot u^m|^2\leqslant Ce^t\leqslant C, \quad t\in[0,T].$$

Отметим, что количество базисных функций для приближения Галёркина следует выбирать так, чтобы их линейная оболочка покрывала ядро оператора L (для учёта эффекта вырожденности уравнения).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-11-20037).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов, Д.Г. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах / Д.Г. Архипов, Г.А. Хабахпашев // Письма в ЖЭТФ. — 2011. — Т. 93, № 8. — С. 469–472.
2. Wang, S. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation / S. Wang, G. Chen // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — V. 274. — P. 846–866.
3. Clarkson, P.A. Solitary wave interactions in elastic rods / P.A. Clarkson, R.J. LeVeque, R. Saxton // Stud. Appl. Math. — 1986. — V. 75, № 1. — P. 95–122.
4. Jorgens, K. Das anfangswertproblem in grossen fur eine klasse nichtlinearer wellengleichungen / K. Jorgens // Math. Zeitschr. — 1961. — Bd. 77. — S. 295–308.
5. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, неразрешённые относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. — Новосибирск : Научная книга, 1998. — 436 с.
6. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.

7. Манакова, Н.А. Полулинейные модели соболевского типа. Неединственность решения задачи Шоуолтера–Сидорова / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова, К.В. Перевозчикова // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2022. — Т. 15, № 1. — С. 84–100.
8. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 2. — С. 250–258.
9. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 2. — С. 252–260.
10. Замышляева, А.А. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2012. — № 18 (277). — С. 13–19.
11. Sidorov, N. Toward General Theory of Differential Operator and Kinetic Models / N. Sidorov, D. Sidorov, A. Sinitsyn. — Singapore : World Scientific, 2020. — 400 p.
12. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4 (298). — С. 47–74.
13. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс ; пер. с фр. Л.Р. Волевича ; под ред. О.А. Олейник. — М. : Мир, 1972. — 588 с.
14. Bychkov, E.V. Analytical study of the mathematical model of wave propagation in shallow water by the Galerkin method / E.V. Bychkov // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2021. — Т. 14, № 1. — С. 26–38.
15. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — P. 104–125.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NONLINEAR MODIFIED BOUSSINESQ EQUATION

A. A. Zamyshlyaeva[1], E. V. Bychkov[2]

South Ural State University (National Research University), Chelaybinsk, Russia
e-mail: [1]zamyshliaevaaa@susu.ru, [2]bychkovev@susu.ru

The problem in Sobolev spaces is investigated for a modified Boussinesq equation with a homogeneous Neumann boundary condition and with classical initial conditions. Based on the compactness method, it is shown that the approximate analytical solution, constructed in the form of Galerkin's sum over the system of eigenfunctions of the Neumann boundary value problem, $*$-weakly converges to the exact solution.

Keywords: modified Boussinesq equation, Neumann boundary condition, Cauchy problem, Showalter-Sidorov problem, compactness method, equation of Sobolev type.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-11-20037).

REFERENCES

1. Arkhipov, D.G. and Khabakhpashev, G.A., New equation for the description of inelastic interaction of on linear localized waves in dispersive media, *J. Exp. and Theor. Phys. Letters*, 2011, vol. 93, no. 8, pp. 423–426.
2. Wang, S. and Chen, G., Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 274, pp. 846–866.

3. Clarkson, P.A., LeVeque, R.J., and Saxton, R., Solitary wave interactions in elastic rods, *Stud. Appl. Math.*, 1986, vol. 75, no. 1. pp. 95–122.
4. Jorgens, K., Das anfangswert problem in grossen fur eine klasse nicht linearer wellengleichungen, *Math. Zeitschr.*, 1961, bd. 77, s. 295–308.
5. Demidenko, G.V. and Uspenskii, S.V., *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest order derivative*, New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, 2003.
6. Sveshnikov, A.G., Al'shin, A.B., Korpusov, M.O., and Pletner, Yu.D., *Lineynyye i nelineynyye uravneniya Sobolevskogo tipa* (Linear and Nonlinear Sobolev Type Equation), Moscow: Fizmatlit, 2007.
7. Manakova, N.A., Gavrilova, O.V., and Perevozchikova, K.V., Semilinear models of Sobolev type. Non-uniqueness of solution to the Showalter–Sidorov problem, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 84–100.
8. Sviridyuk, G.A. and Sukacheva, T.G., Phase spaces of a class of operator equation, *Differ. Equat.*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 250–258.
9. Sviridyuk, G.A. and Zamyshlyaeva, A.A., The phase spaces of a class of linear higher order Sobolev type equations, *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 269–278.
10. Zamyshlyaeva, A.A. and Bychkov, E.V., The phase space of the modified Boussinesq equation, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 18, pp. 13–19.
11. Sidorov, N., Sidorov, D., and Sinitsyn, A., *Toward General Theory of Differential Operator and Kinetic Models*, Singapore: World Scientific, 2020.
12. Sviridyuk, G.A., On the general theory of operator semigroups, *Russ. Math. Surv.*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45–74.
13. Lions, J.L., *Sur quelques methods de resolution des problemes aux limites non linears*, Paris–Dunod: Gauthier Villars, 1969.
14. Bychkov, E.V., Analytical study of the mathematical model of wave propagation in shallow water by the Galerkin method, *Bull. of the South Ural State Univ. Series: Math. Modelling, Programming and Computer Software*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 26–38.
15. Sviridyuk, G.A. and Zagrebina, S.A., The Showalter–Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev type equations, *The Bull. of Irkutsk State Univ. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125.